2.º BACHILLERATO

Vectores en el espacio

Matemáticas Aplicadas
a las Ciencias Sociales II

Practica, razona y comprueba tus respuestas.

1 Geometría y operaciones con vectores
2 Combinaciones lineales y bases
3 Producto escalar, ángulos y proyecciones
4 Producto vectorial y áreas
5 Producto mixto y volúmenes
6 Razonamiento y demostraciones
7 Autoevaluación

81 actividades · 7 bloques

TU RUTA DE TRABAJO

Índice

Ejercicios organizados por contenidos, con espacio para trabajar y soluciones al final.

1 Geometría y operaciones con vectores 3

2 Combinaciones lineales y bases 6

3 Producto escalar, ángulos y proyecciones 11

4 Producto vectorial y áreas 16

5 Producto mixto y volúmenes 20

6 Razonamiento y demostraciones 23

7 Autoevaluación 26

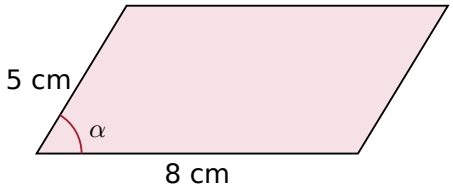
Solucionario 28

Cómo usar el dosier
El código 2.03 identifica la tercera actividad del bloque 2. Busca ese mismo código en el solucionario. Justifica los procedimientos y comprueba los resultados en los enunciados.

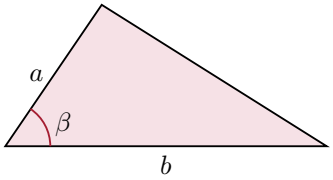
BLOQUE 1

Geometría y operaciones con vectores

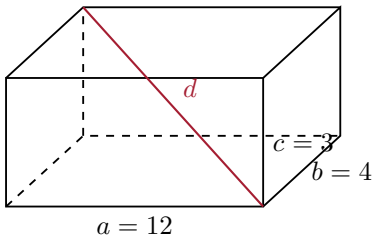
1.01 Halla el área del paralelogramo en función de α.



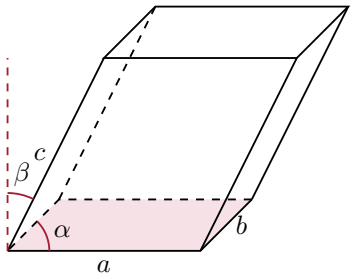
1.02 Halla el área del triángulo en función de β.



1.03 Halla la diagonal del ortoedro de aristas 12, 4 y 3 cm. Generaliza para aristas a, b, c.



1.04 La base del paralelepípedo tiene lados $a = 8$ cm y $b = 5$ cm, con ángulo α. La arista lateral mide $c = 10$ cm y forma ángulo β con la perpendicular a la base. Calcula el volumen y generaliza para a, b, c.



1.05 En $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$, distingue los productos entre números y los productos de número por vector. Interpreta para $a = 3, b = -2$.

1.06 En $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$, distingue las dos sumas. Interpreta para $a = 3, b = 5$.

1.07 Calcula $2\vec{u}$, $0\vec{v}$, $-\vec{u}$, $2\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ y $5\vec{u} - 3\vec{v}$.

$$\vec{u} = (-3,\ 5,\ 1)\,, \qquad \vec{v} = (7,\ 4,\ -2)\,.$$

1.08 Calcula $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$ y $-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w}$.

$$\vec{u} = (3,\ 3,\ 2)\,, \qquad \vec{v} = (5,\ -2,\ 1)\,, \qquad \vec{w} = (1,\ -1,\ 0)\,.$$

BLOQUE 2

Combinaciones lineales y bases

2.01 Halla a, b, c tales que $a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = \vec{w}$.

$$\vec{x} = (1,\ -5,\ 2)\,, \qquad \vec{y} = (3,\ 4,\ -1)\,, \qquad \vec{z} = (6,\ 3,\ -5)\,, \qquad \vec{w} = (24,\ -26,\ -6)\,.$$

2.02 Encuentra a, b tales que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

$$\vec{u} = (3,\ 3,\ 2)\,, \qquad \vec{v} = (5,\ -2,\ 1)\,, \qquad \vec{w} = (1,\ -1,\ 0)\,.$$

2.03 Comprueba que $\vec{x}$ no es combinación lineal de $\vec{u}, \vec{v}$. ¿Son independientes los tres?

$$\vec{x} = (3,\ -1,\ 0)\,, \qquad \vec{u} = (1,\ 2,\ -1)\,, \qquad \vec{v} = (2,\ -3,\ 5)\,.$$

2.04 Comprueba que cada vector es combinación lineal de los otros dos.

$$\vec{a} = (1,\ 2,\ 3)\,, \qquad \vec{b} = (2,\ 1,\ 3)\,, \qquad \vec{c} = (1,\ 0,\ 1)\,.$$

2.05 Determina cuándo los vectores son linealmente dependientes.

$$\vec{u}_1 = (m,\ -3,\ 2)\,, \qquad \vec{u}_2 = (2,\ 3,\ m)\,, \qquad \vec{u}_3 = (4,\ 6,\ -4)\,.$$

2.06 Determina cuándo los vectores son linealmente dependientes.

$$\vec{u}_1 = (3,\ 2,\ 5)\,, \qquad \vec{u}_2 = (2,\ 4,\ 7)\,, \qquad \vec{u}_3 = (1,\ -1,\ n)\,.$$

2.07 Decide si el conjunto es una base de $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{u}_1 = (1,\ 2,\ 1)\,, \qquad \vec{u}_2 = (1,\ 0,\ 1)\,, \qquad \vec{u}_3 = (2,\ 2,\ 2)\,.$$

2.08 Decide si el conjunto es una base de $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{u}_1 = (1,\ 1,\ 1)\,, \qquad \vec{u}_2 = (1,\ 0,\ 1)\,, \qquad \vec{u}_3 = (1,\ 1,\ 0)\,, \qquad \vec{u}_4 = (0,\ 0,\ 1)\,.$$

2.09 Decide si el conjunto es una base de $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{u}_1 = (-3,\ 2,\ 1)\,, \qquad \vec{u}_2 = (1,\ 2,\ -1)\,, \qquad \vec{u}_3 = (1,\ 0,\ 1)\,.$$

2.10 Determina cuándo los vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{u}_1 = (1,\ 1,\ 1)\,, \qquad \vec{u}_2 = (a,\ 1,\ 1)\,, \qquad \vec{u}_3 = (1,\ a,\ 0)\,.$$

2.11 Prueba que $(1, a, b)$, $(0, 1, c)$ y $(0, 0, 1)$ son independientes para todos los valores de a, b, c.

2.12 Determina cuándo los vectores son linealmente dependientes.

$$\vec{u}_1 = (3,\ 2,\ 5)\,, \qquad \vec{u}_2 = (2,\ 4,\ 7)\,, \qquad \vec{u}_3 = (1,\ -3,\ a)\,.$$

2.13 Expresa el vector $\vec{v}$ como combinación lineal de los otros tres.

$$\vec{u}_1 = (3,\ 2,\ 5)\,, \qquad \vec{u}_2 = (2,\ 4,\ 7)\,, \qquad \vec{u}_3 = (1,\ -3,\ 3)\,, \qquad \vec{v} = (7,\ 11,\ 14)\,.$$

2.14 Determina cuándo los vectores son linealmente dependientes.

$$\vec{u}_1 = (-2,\ a,\ a)\,, \qquad \vec{u}_2 = (a,\ -2,\ a)\,, \qquad \vec{u}_3 = (a,\ a,\ -2)\,.$$

En esos casos, da una relación de dependencia.

2.15 Determina cuándo los vectores son linealmente dependientes.

$$\vec{u}_1 = (a,\ a+1,\ 2a)\,, \qquad \vec{u}_2 = (a,\ 1,\ a)\,, \qquad \vec{u}_3 = (1,\ a,\ 1)\,.$$

2.16 Decide si $\vec{c}$ es combinación lineal de los otros vectores y, en caso afirmativo, exprésala.

$$\vec{u} = (2,\ 3,\ 4)\,, \qquad \vec{v} = (2,\ 1,\ 2)\,, \qquad \vec{w} = (1,\ 2,\ 1)\,, \qquad \vec{c} = (3,\ 3,\ 0)\,.$$

2.17 Para $S = \{(1,1,1),(0,2,1),(2,0,-3),(-1,1,2)\}$: a) halla el máximo número de vectores independientes; b) decide si un vector no nulo con las tres componentes iguales es combinación de los dos primeros; c) encuentra uno con las dos primeras componentes 1 que sea combinación del segundo y el tercero.

BLOQUE 3

Producto escalar, ángulos y proyecciones

3.01 Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y el valor de k para que $\vec{v} \perp \vec{w}$.

$$\vec{u} = (3,\ -1,\ 5)\,, \qquad \vec{v} = (4,\ 7,\ 11)\,, \qquad \vec{w} = (-2,\ k,\ 3)\,.$$

3.02 Calcula el producto escalar, los módulos y el ángulo de estos vectores.

$$\vec{u} = (5,\ -1,\ 2)\,, \qquad \vec{v} = (-1,\ 2,\ -2)\,.$$

Halla también las proyecciones vectoriales de cada vector sobre el otro. Indica las proyecciones escalares orientadas y las longitudes de los segmentos proyectados.

3.03 ¿Cuánto debe valer x para que $(7, 2, x)$ sea perpendicular a $(5, -1, 2)$?

3.04 Obtén tres vectores perpendiculares a $(3, 2, 7)$ que no sean paralelos entre sí.

3.05 Calcula el producto escalar, los módulos y el ángulo de estos vectores.

$$\vec{u} = (1,\ 2,\ 2)\,, \qquad \vec{v} = (-4,\ 5,\ -3)\,.$$

Halla el vector proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

3.06 Halla m para que los vectores sean: a) paralelos; b) ortogonales.

$$\vec{u} = (1,\ m,\ 1)\,, \qquad \vec{v} = (-2,\ 4,\ m)\,.$$

3.07 Halla la proyección vectorial de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

$$\vec{u} = (3,\ 1,\ 2)\,, \qquad \vec{v} = (1,\ -1,\ 2)\,.$$

3.08 Calcula el producto escalar, los módulos y el ángulo de estos vectores.

$$\vec{u} = (1,\ 2,\ 3)\,, \qquad \vec{v} = (2,\ -2,\ 1)\,.$$

3.09 Halla m para que $(1, 3, m)$ sea perpendicular a $(1, -2, 3)$.

3.10 Comprueba que $(1/2, 1/2, 0)$ no es unitario y da un vector unitario de su misma dirección.

3.11 Para $\vec{v} = (-2, 2, -4)$, halla: a) un vector unitario perpendicular; b) todos los vectores paralelos de módulo 6.

3.12 Sean $\vec{u}_1 = (2, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, -3)$ y $\vec{u}_3 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$. ¿Qué deben cumplir a, b para que $\vec{u}_3 \perp (1, 1, 1)$?

3.13 Halla todos los vectores perpendiculares a $\vec{u}$ y coplanarios con $\vec{u}, \vec{v}$.

$$\vec{u} = (1,\ -1,\ 2)\,, \qquad \vec{v} = (3,\ 1,\ -1)\,.$$

3.14 Halla un vector coplanario con $\vec{a} = (2, -1, 1)$ y $\vec{b} = (1, 0, 3)$ y ortogonal a $\vec{c} = (2, 3, 0)$.

3.15 Si $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ y el ángulo es $60°$, calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.

3.16 Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, $|\vec{u}| = 6$ y $|\vec{v}| = 10$, halla $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$.

3.17 Halla el ángulo si $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ y $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$.

3.18 Si $\vec{u}+\vec{v}=\vec{a}$ y $2\vec{u}-3\vec{v}=\vec{b}$, halla el ángulo entre $\vec{u},\vec{v}$.

$$\vec{a}=(2,\ -1,\ 0)\,,\qquad \vec{b}=(1,\ 3,\ -1)\,.$$

3.19 Si $|\vec{u}|=5$, $|\vec{v}|=4$, $|\vec{w}|=7$ y $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=0$, calcula $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$.

BLOQUE 4

Producto vectorial y áreas

4.01 Halla un vector perpendicular a ambos vectores.

$$\vec{u} = (5,\ -1,\ 2)\,, \qquad \vec{v} = (-1,\ 2,\ -2)\,.$$

4.02 Calcula el producto vectorial.

$$\vec{u} = (3,\ 7,\ -6)\,, \qquad \vec{v} = (4,\ 1,\ -2)\,.$$

4.03 Halla un vector perpendicular a ambos vectores.

$$\vec{u} = (3,\ 7,\ -6)\,, \qquad \vec{v} = (4,\ 1,\ -2)\,.$$

4.04 Halla el área del triángulo determinado por los vectores.

$$\vec{u} = (3,\ 7,\ -6)\,, \qquad \vec{v} = (4,\ 1,\ -2)\,.$$

4.05 Calcula $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{v} \times \vec{u}$ y sus módulos. Comprueba que son opuestos.

$$\vec{u} = (2,\ -1,\ 1)\,, \qquad \vec{v} = (-1,\ 3,\ 2)\,.$$

4.06 Halla el área del paralelogramo determinado por los vectores.

$$\vec{u} = (7,\ -1,\ 2)\,, \qquad \vec{v} = (1,\ 4,\ -2)\,.$$

4.07 Halla un vector perpendicular a ambos y de módulo 1.

$$\vec{u} = (2,\ 3,\ 1)\,, \qquad \vec{v} = (-1,\ 3,\ 0)\,.$$

4.08 Halla un vector perpendicular a ambos y de módulo $2\sqrt{6}$.

$$\vec{u} = (1,\ -1,\ 0)\,, \qquad \vec{v} = (2,\ 0,\ 1)\,.$$

4.09 Comprueba que $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u} + \vec{v}$ y a $\vec{u} - \vec{v}$.

$$\vec{u} = (1,\ 2,\ -1)\,, \qquad \vec{v} = (1,\ 3,\ 0)\,.$$

4.10 Comprueba que el paralelogramo determinado por los vectores es un rectángulo y calcula el área de dos formas.

$$\vec{u} = (3,\ -2,\ 1)\,, \qquad \vec{v} = (4,\ 3,\ -6)\,.$$

4.11 Halla un vector perpendicular a ambos cuya tercera componente sea 1.

$$\vec{u} = (2,\ 3,\ -1)\,, \qquad \vec{v} = (1,\ 4,\ 2)\,.$$

4.12 Halla un vector paralelo a $\vec{v}$ que determine con $\vec{w}$ un paralelogramo de área 25.

$$\vec{v} = (1,\ -2,\ 3)\,, \qquad \vec{w} = (-2,\ 4,\ -1)\,.$$

BLOQUE 5

Producto mixto y volúmenes

5.01 Calcula el producto mixto y el volumen del paralelepípedo determinado por estos vectores.

$$\vec{u} = (3,\ -5,\ 1)\,, \qquad \vec{v} = (7,\ 4,\ 2)\,, \qquad \vec{w} = (0,\ 6,\ 1)\,.$$

5.02 Determina cuándo los vectores son linealmente dependientes.

$$\vec{u}_1 = (3,\ -5,\ 1)\,, \qquad \vec{u}_2 = (7,\ 4,\ 2)\,, \qquad \vec{u}_3 = (1,\ 14,\ x)\,.$$

5.03 Calcula el producto mixto y el volumen del paralelepípedo determinado por estos vectores.

$$\vec{u} = (1,\ -3,\ 2)\,, \qquad \vec{v} = (1,\ 0,\ -1)\,, \qquad \vec{w} = (2,\ 3,\ 0)\,.$$

5.04 Calcula el producto mixto y el volumen del paralelepípedo determinado por estos vectores.

$$\vec{u} = (3,\ 2,\ 1)\,, \qquad \vec{v} = (1,\ -2,\ 0)\,, \qquad \vec{w} = (-4,\ 1,\ 1)\,.$$

5.05 Calcula el producto mixto y el volumen del paralelepípedo determinado por estos vectores.

$$\vec{u} = (1,\ 2,\ -1)\,, \qquad \vec{v} = (3,\ 0,\ 2)\,, \qquad \vec{w} = (-1,\ 4,\ -4)\,.$$

5.06 Calcula el volumen del paralelepípedo definido por $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ y justifica que es $|\vec{u} \times \vec{v}|^2$.

$$\vec{u} = (1,\ 2,\ 3)\,, \qquad \vec{v} = (-2,\ 1,\ 0)\,.$$

5.07 Calcula el volumen del tetraedro determinado por estos vectores.

$$\vec{u} = (3,\ -1,\ 1)\,, \qquad \vec{v} = (1,\ 7,\ 2)\,, \qquad \vec{w} = (2,\ 1,\ -4)\,.$$

5.08 Determina cuándo los vectores son linealmente dependientes.

$$\vec{u}_1 = (2,\ -3,\ 1)\,, \qquad \vec{u}_2 = (1,\ m,\ 3)\,, \qquad \vec{u}_3 = (-4,\ 5,\ -1)\,.$$

5.09 Halla $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v}, \vec{w}$ y tal que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 19$.

$$\vec{v} = (1,\ 2,\ 3)\,, \qquad \vec{w} = (1,\ -1,\ 1)\,.$$

5.10 Para $a = 0$, ¿se cumple $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ si $\vec{u} = (a, 1+a, 2a)$, $\vec{v} = (a, 1, a)$ y $\vec{w} = (1, a, 1)$?

BLOQUE 6

Razonamiento y demostraciones

6.01 Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, ¿se puede asegurar que $\vec{v} = \vec{w}$?

6.02 Prueba con el producto escalar que, si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp \vec{c}$, entonces $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.

6.03 Prueba que, si dos vectores no nulos tienen el mismo módulo, sus vectores suma y diferencia son ortogonales.

6.04 a) ¿Pueden existir vectores con $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $|\vec{u}| = 1$ y $|\vec{v}| = 2$? b) Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|$, ¿qué se deduce del ángulo?

6.05 Justifica que $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}] = 0$ para cualesquiera $\vec{a}, \vec{b}$.

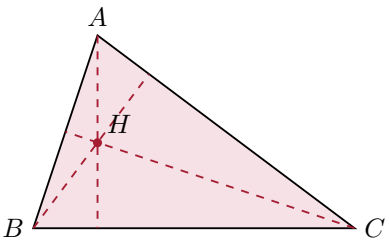
6.06 Comprueba: a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$; b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

$$\vec{a} = (1,\ -2,\ 3)\,, \qquad \vec{b} = (3,\ 1,\ 1)\,, \qquad \vec{c} = (-2,\ 0,\ 1)\,.$$

6.07 Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, ¿necesariamente $\vec{b} = \vec{c}$? Pon un ejemplo.

6.08 Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ independientes. Decide cuáles valen cero: $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}]$, $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}]$, $[\vec{a} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a}]$.

6.09 Para demostrar que las tres alturas de un triángulo concurren, llama H a la intersección de las alturas desde A y B. Justifica: a) $\overrightarrow{HA} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}) = 0$ y $\overrightarrow{HB} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}) = 0$; b) deduce $\overrightarrow{HC} \cdot (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}) = 0$ y la concurrencia.



BLOQUE 7

Autoevaluación

7.01 Determina cuándo los vectores son linealmente dependientes.

$$\vec{u}_1 = (1,\ 2,\ -1)\,, \qquad \vec{u}_2 = (0,\ 1,\ 2)\,, \qquad \vec{u}_3 = (-1,\ m,\ 3)\,.$$

En esos casos, da una relación de dependencia.

7.02 Calcula el producto escalar, los módulos y el ángulo de estos vectores.

$$\vec{u} = \left(3,\ -2,\ \sqrt{3}\right), \qquad \vec{v} = (4,\ -2,\ -4)\,.$$

Halla también la proyección vectorial de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

7.03 Dados $\vec{u} = (3, -4, 0)$ y $\vec{v} = (m, 0, 7)$: a) halla m para que sean perpendiculares; b) para ese valor, calcula $\vec{w}$ perpendicular a ambos; c) normaliza los tres vectores; d) decide si forman una base ortonormal.

7.04 Halla el área del triángulo determinado por los vectores.

$$\vec{u} = (5,\ -1,\ 3)\,, \qquad \vec{v} = (4,\ 0,\ 7)\,.$$

7.05 Calcula el volumen del tetraedro determinado por estos vectores.

$$\vec{u} = (5,\ -1,\ 3)\,, \qquad \vec{v} = (4,\ 0,\ 7)\,, \qquad \vec{w} = (-2,\ 6,\ 3)\,.$$

7.06 Halla un vector de módulo 10 perpendicular a $(3, -1, 0)$ y que forme un ángulo de $60°$ con $(0, 0, 1)$.

Solucionario

Los códigos corresponden a las actividades del dosier.

1 · Geometría y operaciones con vectores

1.01 La altura es $5\sin\alpha$. Por tanto, $A = 8\cdot 5\sin\alpha = 40\sin\alpha$ cm^2.

1.02 La altura respecto al lado b es $a\sin\beta$. Por tanto, $A = \frac{1}{2}ab\sin\beta$.

1.03 Aplicando Pitágoras dos veces: $d = \sqrt{12^2+4^2+3^2} = 13$ cm. En general, $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

1.04 El área de la base es $ab\sin\alpha$ y la altura es $c\cos\beta$. Así, $V = abc\sin\alpha\cos\beta$. Para las medidas dadas, $V = 400\sin\alpha\cos\beta$ cm^3.

1.05 ab es producto de números; $b\vec{v}$, $a(b\vec{v})$ y $(ab)\vec{v}$ son productos de número por vector. Con los valores dados, $3(-2\vec{v}) = -6\vec{v}$: el módulo es seis veces el inicial y el sentido es el opuesto.

1.06 $a+b$ suma números y $a\vec{v}+b\vec{v}$ suma vectores. Para $a=3, b=5$, ambos miembros son $8\vec{v}$: un vector con la misma dirección y sentido, y ocho veces el módulo de $\vec{v}$.

1.07

$2\vec{u} = (-6,\ 10,\ 2)$.
$0\vec{v} = (0,\ 0,\ 0)$.
$-\vec{u} = (3,\ -5,\ -1)$.
$2\vec{u}+\vec{v} = (1,\ 14,\ 0)$.
$\vec{u}-\vec{v} = (-10,\ 1,\ 3)$.
$5\vec{u}-3\vec{v} = (-36,\ 13,\ 11)$.

1.08

$\vec{u}-2\vec{v}+3\vec{w} = (-4,\ 4,\ 0)$.
$-2\vec{u}+\vec{v}-4\vec{w} = (-5,\ -4,\ -3)$.

2 · Combinaciones lineales y bases

2.01
$(a, b, c) = (6,\ -2,\ 4)$.

2.02 La tercera componente obliga a $a = 2$. La primera da $3 = 10 + b$, luego $b = -7$. Se comprueba la segunda: $3 = -4 + 7$. Así, $\vec{u} = 2\vec{v} - 7\vec{w}$.

2.03 El determinante de las tres columnas es $28 \neq 0$. Por tanto, son independientes y $\vec{x}$ no puede escribirse como combinación de los otros dos.

2.04 $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$; $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{c}$; $\vec{c} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$. Sustituyendo las coordenadas se verifican las tres igualdades.

2.05 El determinante de sus coordenadas es $-6\,(m+2)^2$. Son dependientes exactamente si $m \in \{-2\}$.

2.06 El determinante de sus coordenadas es $8n + 5$. Son dependientes exactamente si $n \in \{-\frac{5}{8}\}$.

2.07 No: el rango es 2 y los vectores son dependientes.

2.08 No: contiene cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$, de modo que es dependiente.

2.09 Sí: hay tres vectores y el determinante es -12.

2.10 El determinante de sus coordenadas es $a\,(a-1)$. Forman una base exactamente si $a \notin \{0, 1\}$.

2.11 La matriz con esos vectores como filas es triangular con diagonal $(1, 1, 1)$. Su determinante vale 1, luego siempre son linealmente independientes.

2.12 El determinante de sus coordenadas es $8a + 27$. Son dependientes exactamente si $a \in \{-\frac{27}{8}\}$.

2.13
$(c_1, c_2, c_3) = (2,\ 1,\ -1)$.Esto significa $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3$.

2.14 El determinante de sus coordenadas es $2\,(a-1)\,(a+2)^2$. Son dependientes exactamente si $a \in \{-2, 1\}$.
Si $a = -2$: $(-1)\vec{u}_1 + (1)\vec{u}_2 + (0)\vec{u}_3 = \vec{0}$.
Si $a = 1$: $(1)\vec{u}_1 + (1)\vec{u}_2 + (1)\vec{u}_3 = \vec{0}$.

2.15 El determinante de sus coordenadas es $a\,(a-1)\,(a+1)$. Son dependientes exactamente si $a \in \{-1, 0, 1\}$.

2.16
$(a, b, c) = (-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ 3)$.Los coeficientes corresponden a $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, respectivamente.

2.17 a) El determinante de los tres primeros es $-8 \neq 0$, así que hay tres independientes. b) Sí: $(t, t, t) = t(1, 1, 1) + 0(0, 2, 1)$, con $t \neq 0$. c) $\frac{1}{2}(0, 2, 1) + \frac{1}{2}(2, 0, -3) = (1, 1, -1)$.

3 · Producto escalar, ángulos y proyecciones

3.01
$\vec{u}\cdot\vec{v}=60$.
$k=-\frac{25}{7}$.La perpendicularidad exige $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$.

3.02 $\vec{u}\cdot\vec{v}=-11$, $|\vec{u}|=\sqrt{30}$, $|\vec{v}|=3$. $\cos\theta=-\frac{11\sqrt{30}}{90}$, de donde $\theta\approx 132,02^\circ$.

$$\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}=\left(\frac{11}{9},\ -\frac{22}{9},\ \frac{22}{9}\right).$$

$$\text{proy}_{\vec{u}}\,\vec{v}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u}=\left(-\frac{11}{6},\ \frac{11}{30},\ -\frac{11}{15}\right).$$

Las proyecciones escalares orientadas son $\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}=-\frac{11}{3}$ y $\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|}=-\frac{11\sqrt{30}}{30}$. Las longitudes de los segmentos son sus valores absolutos.

3.03 $35-2+2x=0$, por lo que $x=-33/2$.

3.04 Por ejemplo, $(2,-3,0)$, $(7,0,-3)$ y $(0,7,-2)$. Sus productos escalares con $(3,2,7)$ son cero y ningún par es proporcional.

3.05 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=5\sqrt{2}$. $\cos\theta=0$, de donde $\theta\approx 90,00^\circ$.Como $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, la proyección es el vector nulo.

3.06 a) La proporcionalidad exige $\vec{v}=-2\vec{u}$; se obtiene $m=-2$ y se cumplen todas las componentes. b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2+5m=0$, luego $m=2/5$.

3.07
$\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}=(1,\ -1,\ 2)$.Se utiliza $(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{v}/|\vec{v}|^2$.

3.08 $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$, $|\vec{u}|=\sqrt{14}$, $|\vec{v}|=3$. $\cos\theta=\frac{\sqrt{14}}{42}$, de donde $\theta\approx 84,89^\circ$.

3.09 $1-6+3m=0$, por tanto $m=5/3$.

3.10 Su módulo es $\sqrt{1/4+1/4}=1/\sqrt{2}\neq 1$. Al dividir por el módulo se obtiene $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$; su opuesto también tiene la misma dirección.

3.11
$\vec{w}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$.
$\vec{p}_1=(-\sqrt{6},\ \sqrt{6},\ -2\sqrt{6})$.
$\vec{p}_2=(\sqrt{6},\ -\sqrt{6},\ 2\sqrt{6})$.

3.12 $\vec{u}_3=(2a,b,-3b)$. Su producto escalar con $(1,1,1)$ es $2a-2b$. Por tanto, se exige $a=b$.

3.13 Se escriben como $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Aquí $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, de modo que la condición $\vec{w} \cdot \vec{u} = 6a = 0$ exige $a = 0$. El conjunto es $\{t(3, 1, -1) : t \in \mathbb{R}\}$.

3.14 Si $\vec{v} = p\vec{a} + q\vec{b}$, la ortogonalidad exige $p + 2q = 0$. Tomando $p = 2, q = -1$, resulta $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} = (3, -2, -1)$. Todo múltiplo de este vector también cumple las condiciones.

3.15 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 2 \cos 60^\circ = 4$. Entonces $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 16 + 4 + 8 = 28$ y $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 16 + 4 - 8 = 12$. Los módulos son $2\sqrt{7}$ y $2\sqrt{3}$.

3.16 El producto escalar es cero. Ambos módulos al cuadrado valen $6^2 + 10^2 = 136$, por lo que los dos son $2\sqrt{34}$.

3.17 $49 = 9 + 25 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos\theta$, de donde $\cos\theta = 1/2$ y $\theta = 60^\circ$.

3.18
$\vec{u} = \left(\frac{7}{5},\ 0,\ -\frac{1}{5}\right)$.
$\vec{v} = \left(\frac{3}{5},\ -1,\ \frac{1}{5}\right)$.$\cos\theta = \frac{2\sqrt{70}}{35}$, de donde $\theta \approx 61,44^\circ$.

3.19 Al elevar al cuadrado la suma: $0 = 25 + 16 + 49 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w})$. La suma pedida vale -45.

4 · Producto vectorial y áreas

4.01

$\vec{u} \times \vec{v} = (-2,\ 8,\ 9)$.El producto vectorial es perpendicular a los dos vectores iniciales.

4.02

$\vec{u} \times \vec{v} = (-8,\ -18,\ -25)$.El producto vectorial es perpendicular a los dos vectores iniciales.

4.03

$\vec{u} \times \vec{v} = (-8,\ -18,\ -25)$.El producto vectorial es perpendicular a los dos vectores iniciales.

4.04

$\vec{u} \times \vec{v} = (-8,\ -18,\ -25)$.
$A = \frac{\sqrt{1013}}{2}$. Se utiliza $A = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$.

4.05

$\vec{u} \times \vec{v} = (-5,\ -5,\ 5)$.
$\vec{v} \times \vec{u} = (5,\ 5,\ -5)$.
$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{v} \times \vec{u}| = 5\sqrt{3}$.

4.06

$\vec{u} \times \vec{v} = (-6,\ 16,\ 29)$.
$A = \sqrt{1133}$. Se utiliza $A = |\vec{u} \times \vec{v}|$.

4.07

$\vec{w} = \left(-\frac{3\sqrt{91}}{91},\ -\frac{\sqrt{91}}{91},\ \frac{9\sqrt{91}}{91}\right)$.También sirve el vector opuesto. Se normaliza el producto vectorial y se multiplica por el módulo pedido.

4.08

$\vec{w} = (-2,\ -2,\ 4)$.También sirve el vector opuesto. Se normaliza el producto vectorial y se multiplica por el módulo pedido.

4.09

$\vec{u} \times \vec{v} = (3,\ -1,\ 1)$.
$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 0$.
$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$.

4.10

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
$|\vec{u}||\vec{v}| = \sqrt{854}$.
$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{854}$.El producto escalar nulo prueba que los lados son perpendiculares. Coinciden base por altura y módulo del producto vectorial.

4.11

$\vec{w} = (2,\ -1,\ 1)$.Se divide el producto vectorial por su tercera componente.

4.12

$\vec{u}_1 = (\sqrt{5},\ -2\sqrt{5},\ 3\sqrt{5})$.
$\vec{u}_2 = (-\sqrt{5},\ 2\sqrt{5},\ -3\sqrt{5})$.Si $\vec{u} = t\vec{v}$, el área es $|t|\,|\vec{v} \times \vec{w}|$.

5 · Producto mixto y volúmenes

5.01
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 53$.
$V = 53$.El volumen es el valor absoluto del producto mixto.

5.02 El determinante de sus coordenadas es $47x$. Son dependientes exactamente si $x \in \{0\}$.

5.03
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 15$.
$V = 15$.El volumen es el valor absoluto del producto mixto.

5.04
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -15$.
$V = 15$.El volumen es el valor absoluto del producto mixto.

5.05
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.
$V = 0$.El volumen es el valor absoluto del producto mixto.

5.06
$\vec{w} = (-3,\ -6,\ 5)$.
$V = 70$.El producto mixto cíclico es $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{w} = |\vec{w}|^2$.

5.07
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -111$.
$V = \frac{37}{2}$.El volumen es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto.

5.08 El determinante de sus coordenadas es $2\,(m + 4)$. Son dependientes exactamente si $m \in \{-4\}$.

5.09
$\vec{u} = (\frac{5}{2},\ 1,\ -\frac{3}{2})$.Se escribe $\vec{u} = t(\vec{v} \times \vec{w})$ y se impone $t|\vec{v} \times \vec{w}|^2 = 19$.

5.10 Sí: para $a = 0$, $\vec{u} = \vec{v} = (0, 1, 0)$. El producto mixto tiene dos vectores iguales, por lo que vale cero.

6 · Razonamiento y demostraciones

6.01 No. Por ejemplo, $\vec{u} = (1,0,0)$, $\vec{v} = (0,1,0)$ y $\vec{w} = (0,0,1)$ dan ambos productos escalares cero, aunque $\vec{v} \neq \vec{w}$. Solo se deduce que $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$.

6.02 Por linealidad, $\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b}) + n(\vec{a} \cdot \vec{c}) = m \cdot 0 + n \cdot 0 = 0$.

6.03 $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$, pues los términos cruzados se cancelan. Si la suma o la diferencia es nula, el producto escalar sigue siendo cero, aunque el vector nulo no determina una dirección.

6.04 a) No: $\cos\theta = 3/2$ sería imposible; equivalentemente, $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}| = 2$. b) Si ambos son no nulos, $\cos\theta = 1$ y el ángulo es $0°$: tienen la misma dirección y sentido. Si alguno es nulo, la igualdad también se cumple pero no hay un ángulo definido.

6.05 Por linealidad, $[\vec{a},\vec{b},\vec{a}+\vec{b}] = [\vec{a},\vec{b},\vec{a}] + [\vec{a},\vec{b},\vec{b}] = 0 + 0$: cada producto mixto tiene dos vectores iguales.

6.06
$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (-7,\ 1,\ 3)$.
$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = (-7,\ 1,\ 3)$.
$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (8,\ -9,\ 16)$.
$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (11,\ 1,\ -3)$.El producto vectorial es distributivo, pero no asociativo.

6.07 No. Con $\vec{a} = (1,0,0)$, $\vec{b} = (0,1,0)$ y $\vec{c} = (1,1,0)$, ambos productos son $(0,0,1)$, pero $\vec{b} \neq \vec{c}$. Se deduce $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = 0$; para $\vec{a} \neq 0$, la diferencia es paralela a $\vec{a}$.

6.08 Llamando $D = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] \neq 0$, los productos son $2D$, $-D$ y 0, respectivamente. Los factores se obtienen de los determinantes de los coeficientes en la base $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$. Solo el tercero es cero; sus tres vectores suman el vector nulo.

6.09 a) $\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AC}$. Las dos igualdades expresan que $AH \perp BC$ y $BH \perp AC$. b) Al restar las igualdades y usar la conmutatividad del producto escalar, queda $\overrightarrow{HC} \cdot (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}) = 0$. Como la diferencia es $\overrightarrow{AB}$, $CH \perp AB$: la tercera altura también pasa por H.

7 · Autoevaluación

7.01 El determinante de sus coordenadas es $-2\,(m+1)$. Son dependientes exactamente si $m \in \{-1\}$.
Si $m=-1$: $(1)\vec{u}_1+(-1)\vec{u}_2+(1)\vec{u}_3=\vec{0}$.

7.02 $\vec{u}\cdot\vec{v}=16-4\sqrt{3}$, $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=6$. $\cos\theta=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}$, de donde $\theta\approx 67,79^\circ$.

$$\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}=\left(\frac{16}{9}-\frac{4\sqrt{3}}{9},\ -\frac{8}{9}+\frac{2\sqrt{3}}{9},\ -\frac{16}{9}+\frac{4\sqrt{3}}{9}\right).$$

7.03
$m=0$.
$\vec{w}=(-28,\ -21,\ 0)$.
$\vec{u}'=\left(\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5},\ 0\right)$.
$\vec{v}'=(0,\ 0,\ 1)$.
$\vec{w}'=\left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5},\ 0\right)$.Sí: los tres vectores normalizados tienen módulo 1 y sus productos escalares dos a dos son cero.

7.04
$\vec{u}\times\vec{v}=(-7,\ -23,\ 4)$.
$A=\frac{3\sqrt{66}}{2}$. Se utiliza $A=\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$.

7.05
$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=-112$.
$V=\frac{56}{3}$.El volumen es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto.

7.06 Si $\vec{u}=(x,y,z)$, la perpendicularidad da $y=3x$. Del ángulo, $z/10=\cos 60^\circ=1/2$, luego $z=5$. El módulo exige $x^2+9x^2+25=100$, por lo que $x=\pm\sqrt{30}/2$. Las dos soluciones son $(\sqrt{30}/2, 3\sqrt{30}/2, 5)$ y $(-\sqrt{30}/2, -3\sqrt{30}/2, 5)$.