2.º BACHILLERATO

Sistemas de ecuaciones y método de Gauss

Matemáticas Aplicadas
a las Ciencias Sociales II

Practica, razona y comprueba tus respuestas.

1 Equivalencia e interpretación geométrica
2 Sistemas escalonados
3 Eliminación y método de Gauss
4 Discusión con parámetros
5 Problemas de aplicación
6 Razonamiento y profundización
7 Autoevaluación

122 actividades · 7 bloques

TU RUTA DE TRABAJO

Índice

Ejercicios organizados por contenidos, con espacio para trabajar y soluciones al final.

1 Equivalencia e interpretación geométrica 3

2 Sistemas escalonados 11

3 Eliminación y método de Gauss 17

4 Discusión con parámetros 29

5 Problemas de aplicación 36

6 Razonamiento y profundización 39

7 Autoevaluación 43

Solucionario 45

Cómo usar el dosier
El código 2.03 identifica la tercera actividad del bloque 2. Busca ese mismo código en el solucionario. Justifica los procedimientos y comprueba los resultados en los enunciados.

BLOQUE 1

Equivalencia e interpretación geométrica

1.01 ¿Las ecuaciones $2x + y = 5$ y $4x + 2y = 10$ aportan datos independientes? Represéntalas y explica cuántas soluciones tiene el sistema.

1.02 Escribe un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en el que la segunda ecuación exprese lo mismo que la primera. Interprétalo gráficamente.

1.03 Resuelve e interpreta gráficamente el sistema. Obtén además otra ecuación como combinación de dos de las anteriores.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

1.04 Representa las rectas y explica por qué el sistema no tiene solución.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

1.05 Modifica el término independiente de una ecuación del sistema $x + y = 1$, $3x + 3y = 3$ para obtener dos rectas paralelas distintas. Represéntalas.

1.06 Sin resolverlos, explica por qué estos dos sistemas son equivalentes:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x = 12 \end{cases}$$

1.07 Sin resolverlos, explica por qué estos dos sistemas son equivalentes:

$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

1.08 Sin resolverlos, explica por qué estos dos sistemas son equivalentes:

$$\begin{cases} x+y-z=5 \\ x+y=7 \\ 2x+2y-z=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=2 \\ x+y=7 \end{cases}$$

1.09 Sin resolverlos, explica por qué estos dos sistemas son equivalentes:

$$\begin{cases} x+y-z=11 \\ x+2y-z=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-z=11 \\ y=-4 \end{cases}$$

1.10 Resuelve e interpreta geométricamente el sistema.

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x+2y=4 \\ x+y=3 \end{cases}$$

1.11 Resuelve e interpreta geométricamente el sistema.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ y-z=1 \\ x+2y=7 \end{cases}$$

1.12 Resuelve e interpreta geométricamente el sistema.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

1.13 Resuelve e interpreta geométricamente el sistema.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ y-z=1 \\ z=1 \end{cases}$$

1.14 Resuelve $x + 2y = 3$, $x - y = 4$. Añade una ecuación que mantenga la compatibilidad y otra que haga incompatible el sistema. Interpreta ambos casos.

1.15 Resuelve, si es posible, e interpreta geométricamente el sistema.

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + y = -5 \\ \dfrac{3x}{2} - 3y = 0 \end{cases}$$

1.16 Resuelve, si es posible, e interpreta geométricamente el sistema.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

1.17 Resuelve, si es posible, e interpreta geométricamente el sistema.

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = 1 \\ 5x - y = 4 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

1.18 Resuelve, si es posible, e interpreta geométricamente el sistema.

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - y = 3 \\ 5x + y = 8 \end{cases}$$

1.19 Resuelve, si es posible, e interpreta geométricamente el sistema.

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

1.20 Resuelve, si es posible, e interpreta geométricamente el sistema.

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + z = 4 \end{cases}$$

1.21 Resuelve, si es posible, e interpreta geométricamente el sistema.

$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x - y + z = 3 \\ 2x = 0 \end{cases}$$

1.22 Resuelve, si es posible, e interpreta geométricamente el sistema.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

1.23 Resuelve, si es posible, e interpreta geométricamente el sistema.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$$

1.24 Resuelve, si es posible, e interpreta geométricamente el sistema.

$$\begin{cases} -x + 3y + 6z = 3 \\ \dfrac{2x}{3} - 2y - 4z = 2 \end{cases}$$

BLOQUE 2

Sistemas escalonados

2.01 Ordena las ecuaciones para reconocer la estructura escalonada y resuelve por sustitución.

$$\begin{cases} 3x = 7 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

2.02 Ordena las ecuaciones para reconocer la estructura escalonada y resuelve por sustitución.

$$\begin{cases} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z = 4 \end{cases}$$

2.03 Ordena las ecuaciones para reconocer la estructura escalonada y resuelve por sustitución.

$$\begin{cases} -2t + 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ t + 5x - z = 4 \end{cases}$$

2.04 Ordena las ecuaciones para reconocer la estructura escalonada y resuelve por sustitución.

$$\begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{cases}$$

2.05 Ordena las ecuaciones para reconocer la estructura escalonada y resuelve por sustitución.

$$\begin{cases} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

2.06 Ordena las ecuaciones para reconocer la estructura escalonada y resuelve por sustitución.

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{cases}$$

2.07 Ordena las ecuaciones para reconocer la estructura escalonada y resuelve por sustitución.

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y=2 \end{cases}$$

2.08 Ordena las ecuaciones para reconocer la estructura escalonada y resuelve por sustitución.

$$\begin{cases} t+z=3 \\ -2t+y+3z=4 \\ 2z=2 \\ 2t+x-z=5 \end{cases}$$

2.09 Resuelve el sistema escalonado; expresa las soluciones con parámetros cuando sea necesario.

$$\begin{cases} 2x-y=7 \\ 23y=-69 \end{cases}$$

2.10 Resuelve el sistema escalonado; expresa las soluciones con parámetros cuando sea necesario.

$$\begin{cases} -y+z=1 \\ 9z=2 \\ 3x-y+z=3 \end{cases}$$

2.11 Resuelve el sistema escalonado; expresa las soluciones con parámetros cuando sea necesario.

$$\begin{cases} -2x=0 \\ x+y-z=9 \\ x-z=2 \end{cases}$$

2.12 Resuelve el sistema escalonado; expresa las soluciones con parámetros cuando sea necesario.

$$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 3x-y=0 \\ 2y=1 \end{cases}$$

2.13 Resuelve el sistema escalonado; expresa las soluciones con parámetros cuando sea necesario.

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

2.14 Resuelve el sistema escalonado; expresa las soluciones con parámetros cuando sea necesario.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

2.15 Resuelve el sistema escalonado; expresa las soluciones con parámetros cuando sea necesario.

$$\begin{cases} t + x + y - z = 4 \\ -t + y + z = 3 \\ 2t + z = 1 \end{cases}$$

2.16 Resuelve el sistema escalonado; expresa las soluciones con parámetros cuando sea necesario.

$$\begin{cases} -t+x+y=2 \\ \quad y+z=4 \\ t+y-z=1 \end{cases}$$

BLOQUE 3

Eliminación y método de Gauss

3.01 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 21 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

3.02 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases}$$

3.03 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

3.04 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 7w + 3x - 2y - 5z = -32 \\ 3w + x + 2y - z = 18 \\ 2w + x - 3y + z = -26 \end{cases}$$

3.05 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

3.06 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases}$$

3.07 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{cases}$$

3.08 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -x + 3y + z = 3 \\ x + y + 5z = 7 \end{cases}$$

3.09 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} w + 2x - y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ w + 5x - y + z = 0 \\ 2w + 5x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

3.10 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} w+2x-y=9 \\ x-2y+z=11 \\ w+5x-y+z=24 \\ 2w+5x-2y-z=0 \end{cases}$$

3.11 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} 3x-2y=5 \\ x+y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$$

3.12 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+y=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$$

3.13 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 5x + 3y = -10 \end{cases}$$

3.14 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} -y + z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$$

3.15 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

3.16 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+3y+2z=0 \\ 2x+4y+3z=0 \end{cases}$$

3.17 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+3z=1 \end{cases}$$

3.18 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} 3x+4y-z=3 \\ 6x-6y+2z=-16 \\ x-y+2z=-6 \end{cases}$$

3.19 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

3.20 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

3.21 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$

3.22 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$$

3.23 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

3.24 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$

3.25 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} -x+y+3z=-2 \\ 4x+2y-z=5 \\ 2x+4y-7z=1 \end{cases}$$

3.26 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} y+z=-1 \\ x-y=1 \\ x+2y+3z=-2 \end{cases}$$

3.27 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} 5x+2y+3z=4 \\ 2x+2y+z=3 \\ x-2y+2z=-3 \end{cases}$$

3.28 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} -14t + x - y + 3z = 0 \\ t + 2x - 2y + 3z = 0 \\ 6t + 3x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

3.29 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

3.30 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

3.31 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{cases}$$

3.32 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+2y-z=0 \\ 4x+y-z=0 \end{cases}$$

3.33 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x+2z=11 \\ x+y=3 \\ y+z=13 \\ x+y+z=10 \end{cases}$$

3.34 Resuelve el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} t+x+y+z=1 \\ -t+x-y+z=0 \\ -t+x+y-z=-1 \\ -t+x+y+z=2 \end{cases}$$

BLOQUE 4

Discusión con parámetros

4.01 Discute el sistema según los valores de k y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

4.02 Discute el sistema según los valores de k y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{cases}$$

4.03 Discute el sistema según los valores de k y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{cases}$$

4.04 Discute el sistema según los valores de k y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ kz + y = 1 \\ x + 2y = k \end{cases}$$

4.05 Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 1 \\ 2y = m - 2 \end{cases}$$

4.06 Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ y + 2z = 0 \\ 3y + 7z = m \end{cases}$$

4.07 Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2y + 8z = 3 \\ mz = 1 \end{cases}$$

4.08 Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + z = 0 \\ z\,(m - 5) = 0 \end{cases}$$

4.09 Discute el sistema según los valores de k y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + \dfrac{y}{2} = -2 \\ ky + x = 2 \end{cases}$$

4.10 Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases}$$

4.11 Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{cases}$$

4.12 Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x-y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ 3x+z=3 \\ x+2y+5z=m \end{cases}$$

4.13 Discute el sistema según los valores de k y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x-y-z=k \\ x-y+2z=1 \\ kz+2x+y=0 \end{cases}$$

4.14 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+3y+z=0 \\ ay+3x+4z=0 \end{cases}$$

4.15 Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ mx+y-z=1 \\ 3x+4y-2z=-3 \end{cases}$$

4.16 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} az+3x+2y=1 \\ 5x+3y+3z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

4.17 Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} my-x+z=2 \\ 2x-y+2z=0 \\ -x-3z=-2 \end{cases}$$

4.18 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ az+3x+2y=5 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$$

4.19 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} ax-y=1 \\ -ay+x=2a-1 \end{cases}$$

4.20 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+3y-5z=-16 \\ ay+x-z=0 \end{cases}$$

BLOQUE 5

Problemas de aplicación

5.01 A, B y C tienen entre los tres 60 €. A le dice a B: «Si te doy la tercera parte de mi dinero, los tres tendremos la misma cantidad». ¿Cuánto tiene cada uno?

5.02 Un almacenista mezcla cafés A, B y C, de 9,80 €/kg, 8,75 €/kg y 9,50 €/kg, respectivamente. Quiere obtener 10,5 kg a 9,40 €/kg. La cantidad de C debe ser el doble de la suma de las cantidades de A y B. ¿Cuántos kilogramos de cada tipo necesita?

5.03 Halla un número de tres cifras que suman 9. Al restarle el número obtenido al invertir sus cifras se obtiene 198. La cifra de las decenas es la media aritmética de las otras dos.

5.04 Dos amigos invierten 20.000 € cada uno, repartidos en las mismas cantidades A, B y C. El primero coloca A al 4%, B al 5% y C al 6%; el segundo coloca A al 5%, B al 6% y C al 4%. Sus intereses son, respectivamente, 1.050 € y 950 €. Calcula A, B y C.

5.05 Una tienda vende 600 copias de un videojuego y recauda 6.384 €. El precio original es 12 €, pero las copias defectuosas tienen descuentos del 30% o del 40%. El número total de copias defectuosas es la mitad del de copias en buen estado. ¿Cuántas se vendieron con un 30% de descuento?

5.06 Tres cajas A, B y C contienen en total 36 monedas de un euro. A tiene dos monedas más que B y C juntas. Si se pasa una moneda de B a A, A tendrá el doble de monedas que B. ¿Cuántas había inicialmente en cada caja?

5.07 Un automóvil circula a 54 km/h en las subidas, a 90 km/h en las bajadas y a 80 km/h en llano. Recorre los 192 km de A a B en 2 h 30 min; a la vuelta tarda 2 h 45 min. ¿Qué longitud tiene el tramo llano?

5.08 Tres amigos juegan tres partidas de dados. En cada partida, quien pierde entrega a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que ese jugador tiene en ese momento. Cada amigo pierde una partida y los tres terminan con 24 €. ¿Cuánto tenía cada uno al empezar?

5.09 Una persona invierte 60.000 € entre las empresas A, B y C y obtiene un beneficio total de 6.000 €. La suma invertida en A y B es m veces la invertida en C. Los beneficios respectivos son del 5%, 10% y 20%. Plantea el sistema, demuestra que tiene solución única para $m > 0$ y resuélvelo para $m = 5$.

5.10 Las edades de un hijo, su padre y su abuelo cumplen: hijo + padre + doble del abuelo = 182; doble del hijo + abuelo = 100; padre = a veces hijo. a) Calcula las edades si $a = 2$. b) ¿Es posible si $a = 3$? c) ¿Qué sucede si $a = 3$ y la primera suma es 200 en lugar de 182?

BLOQUE 6

Razonamiento y profundización

6.01 ¿Puede convertirse en compatible indeterminado cambiando un solo signo el siguiente sistema? Justifica tu respuesta.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

6.02 Define cuándo dos sistemas lineales son equivalentes. Decide si lo son estos dos:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y-z=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

6.03 Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es compatible indeterminado. ¿Puede hacerse incompatible añadiendo una tercera ecuación?

6.04 ¿Puede un sistema incompatible de dos ecuaciones con dos incógnitas convertirse en compatible, determinado o indeterminado, añadiendo otra ecuación? Justifica la respuesta.

6.05 Dos sistemas equivalentes con solución única tienen los mismos términos independientes. ¿Deben tener también los mismos coeficientes?

6.06 Encuentra un valor de a que haga incompatible el sistema. ¿Puede ser compatible indeterminado para $a = 2$?

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x\,(a-1) = 1 \\ x + 3z = 2 \\ z\,(a-2) = 0 \end{cases}$$

6.07 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ az + 2x + y = a \\ ay + x + z = 1 \end{cases}$$

6.08 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ ay + 2x = 2 \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

6.09 Encuentra razonadamente dos valores de a para los que este sistema sea incompatible:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x + 3z = 2 \\ az + 2x = 3 \end{cases}$$

6.10 Resuelve el sistema. Pista: suma las cinco igualdades.

$$\begin{cases} t + x + y + z = 17 \\ w + x + y + z = 16 \\ t + w + x + y = 15 \\ t + w + x + z = 14 \\ t + w + y + z = 14 \end{cases}$$

6.11 Cinco jardineros trabajan de lunes a viernes. Cada día cuatro podan y el quinto ayuda. Cada jardinero poda siempre la misma cantidad diaria y ninguno poda los cinco días. Los totales son: lunes 35, martes 36, miércoles 38, jueves 39 y viernes 36 o 38 árboles. Halla cuántos árboles diarios poda cada uno, sabiendo que son cantidades enteras.

BLOQUE 7

Autoevaluación

7.01 Resuelve e interpreta geométricamente el sistema.

$$\begin{cases} 2x+6y=0 \\ 3x-2y=11 \\ -x+3y=0 \end{cases}$$

7.02 Resuelve e interpreta geométricamente el sistema.

$$\begin{cases} 2x-y=5 \\ y-z=3 \end{cases}$$

7.03 Resuelve por Gauss e interpreta geométricamente el sistema.

$$\begin{cases} x-3y-z=-1 \\ x+5y+3z=3 \\ x+y+z=1 \\ 3x+7y+5z=5 \end{cases}$$

7.04 Una compañía utiliza camiones P, Q y R. En un viaje completo, P transporta 5 contenedores A, 3 B y 4 C; Q transporta 2 A, 5 B y 5 C; R transporta 4 A, 3 B y 6 C. Deben trasladarse 45 A, 44 B y 58 C. ¿Cuántos viajes completos debe hacer cada camión?

7.05 Considera $3x - 2y + z = 5$ y $2x - 3y + z = -4$. Añade una ecuación para obtener un sistema incompatible y otra para obtener uno compatible determinado. Justifica ambos casos.

7.06 Considera el sistema siguiente. a) Encuentra un valor de a para el que sea incompatible. b) ¿Hay algún valor para el que sea compatible determinado? c) Resuélvelo para $a = 0$.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ ay + x + 3z = 2 \\ 2x + y\,(a + 2) + 6z = 3 \end{cases}$$

7.07 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

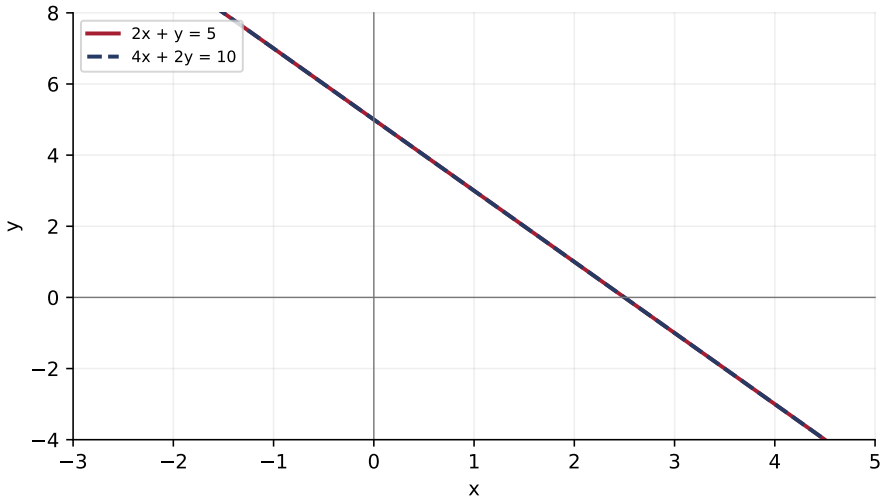
$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + y + z = -1 \\ -ay + x + z = 1 \end{cases}$$

Solucionario

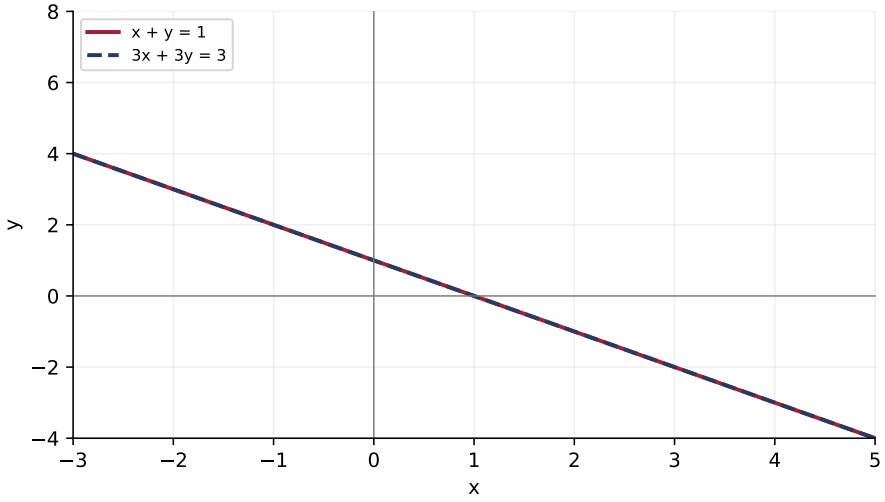
Los códigos corresponden a las actividades del dosier.

1 · Equivalencia e interpretación geométrica

1.01 La segunda ecuación es el doble de la primera. Ambas representan $y = 5 - 2x$. Hay infinitas soluciones: $(x, y) = (t, 5 - 2t)$, con $t \in \mathbb{R}$.



1.02 Por ejemplo, $x + y = 1$ y $3x + 3y = 3$. Las rectas coinciden: $y = 1 - x$.



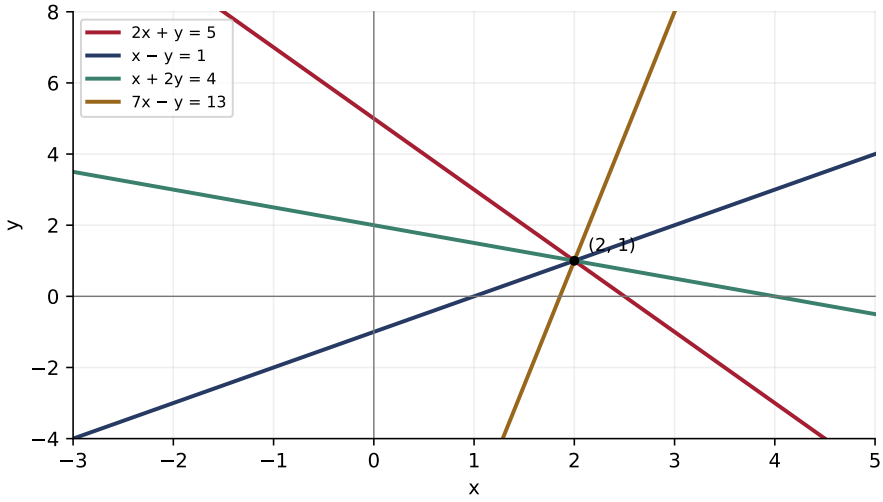
1.03 Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = (2,\ 1)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

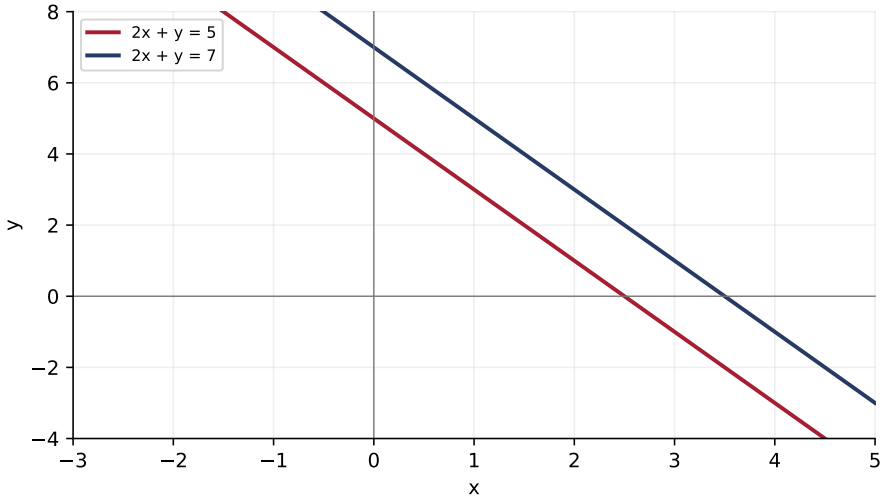
Las tres rectas pasan por $(2, 1)$. Al sumar dos veces la primera ecuación y tres veces la segunda se obtiene $7x - y = 13$, que también pasa por ese punto.



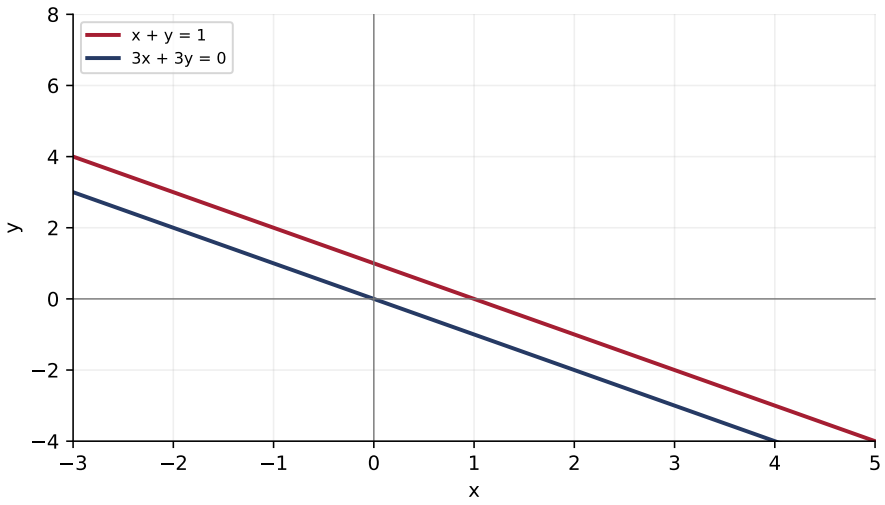
1.04 Sistema incompatible: no tiene solución. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Son las rectas paralelas $y = 5 - 2x$ e $y = 7 - 2x$.



1.05 Por ejemplo, sustituye la segunda por $3x + 3y = 0$. Se obtienen $y = 1 - x$ e $y = -x$; no tienen puntos comunes.



1.06 La segunda ecuación se sustituye por la suma de ambas. Las operaciones son reversibles y conservan las soluciones.

1.07 Se resta la primera ecuación de la segunda para obtener $z = 2$. Las operaciones son reversibles y conservan las soluciones.

1.08 La tercera ecuación es la suma de las dos primeras; es redundante. Después se resta la primera de la segunda. Las operaciones son reversibles y conservan las soluciones.

1.09 Se sustituye la segunda ecuación por la diferencia entre la segunda y la primera. Las operaciones son reversibles y conservan las soluciones.

1.10 Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = (-2,\ 5)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las tres rectas se cortan en $(-2, 5)$.

1.11 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (5 - 2\lambda,\ \lambda + 1,\ \lambda)\,.$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los tres planos tienen una recta común.

1.12 Sistema incompatible: no tiene solución. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Los dos primeros planos son paralelos y distintos; el tercero los corta.

1.13 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (3,\ 2,\ 1)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Los tres planos tienen un único punto común.

1.14 La solución es $(x, y) = (11/3, -1/3)$. La ecuación $2x + y = 7$ pasa por el punto común y mantiene la compatibilidad. La ecuación $2x + y = 9$ no pasa por él y produce un sistema incompatible.

1.15 Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = (-2,\ -1)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dos rectas coinciden y la tercera las corta en $(-2, -1)$.

1.16 Sistema incompatible: no tiene solución. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La primera y la tercera rectas son paralelas y distintas.

1.17 Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = \left(\frac{3}{4},\ -\frac{1}{4}\right).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las cuatro rectas comparten el punto $(3/4, -1/4)$.

1.18 Sistema incompatible: no tiene solución. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Las tres rectas no tienen un punto común.

1.19 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (1,\ 1,\ 0).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los tres planos se cortan en un único punto.

1.20 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{\lambda - 4}{3},\ \frac{2\lambda + 1}{3},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los tres planos se cortan en una recta.

1.21 Sistema incompatible: no tiene solución. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Los planos se cortan dos a dos, pero no tienen un punto común a los tres.

1.22 Sistema incompatible: no tiene solución. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Los dos primeros planos son paralelos y distintos.

1.23 Sistema incompatible: no tiene solución. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Son dos planos paralelos distintos.

1.24 Sistema incompatible: no tiene solución. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Son dos planos paralelos distintos.

2 · Sistemas escalonados

2.01 Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = \left(\frac{7}{3},\ -\frac{4}{3}\right).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

2.02 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (3,\ -29,\ 11).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -29 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix}.$$

2.03 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z, t) = (\lambda + 3,\ -19\lambda - 29,\ 6\lambda + 11,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 19 & -29 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 11 \end{bmatrix}.$$

2.04 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(1,\ \frac{16}{9},\ -\frac{2}{3}\right).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{16}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

2.05 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(0,\ \frac{1}{2},\ 0\right).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.06 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{\lambda + 4}{2},\ -\frac{3\lambda - 10}{2},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 5 \end{bmatrix}.$$

2.07 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{\lambda - 5}{2},\ -\frac{\lambda - 1}{2},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

2.08 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z, t) = (2,\ 5,\ 1,\ 2).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2.09 Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = (2,\ -3).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

2.10 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{3},\ -\frac{7}{9},\ \frac{2}{9}\right).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} \end{bmatrix}.$$

2.11 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (0,\ 7,\ -2).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

2.12 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{7}{6}\right).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{6} \end{bmatrix}.$$

2.13 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (7 - \lambda,\ 5,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

2.14 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (1,\ 2 - \lambda,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2.15 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z, t) = (-3\,(2\lambda - 1),\ 3\lambda + 2,\ 1 - 2\lambda,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.16 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z, t) = \left(\frac{3\lambda - 1}{2},\ -\frac{\lambda - 5}{2},\ \frac{\lambda + 3}{2},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

3 · Eliminación y método de Gauss

3.01 Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = (3,\ -5)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

3.02 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (1,\ 2,\ -1)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.03 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (1,\ 5-\lambda,\ \lambda)\,.$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.04 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z, w) = (1,\ 10,\ 3,\ 0)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.05 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (1,\ -2,\ 3)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.06 Sistema incompatible: no tiene solución. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{17} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.07 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (2\lambda + 1,\ \lambda + 2,\ \lambda)\,.$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.08 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{7\lambda - 9}{2},\ -\frac{3\lambda - 5}{2},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.09 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z, w) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.10 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z, w) = \left(-\frac{3}{4},\ \frac{11}{4},\ \frac{69}{4},\ \frac{53}{4}\right).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{69}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{53}{4} \end{bmatrix}.$$

3.11 Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = (1,\ -1)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.12 Sistema incompatible: no tiene solución. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.13 Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = (1,\ -5)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

3.14 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{3},\ -\frac{7}{9},\ \frac{2}{9}\right).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} \end{bmatrix}.$$

3.15 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (3,\ -2,\ 0)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.16 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{\lambda}{2},\ -\frac{\lambda}{2},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.17 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (-3\lambda - 1,\ 2\,(2\lambda + 1)\,,\ \lambda)\,.$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.18 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (-1,\ 1,\ -2)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

3.19 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (-2,\ 4,\ 6)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

3.20 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{2},\ -2,\ \frac{1}{2}\right).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

3.21 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (-1,\ 1,\ 8)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

3.22 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{3\lambda - 1}{5},\ -\frac{\lambda - 7}{5},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix}.$$

3.23 Sistema incompatible: no tiene solución. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.24 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{\lambda}{7},\ \frac{3\lambda}{7},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.25 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.26 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (-\lambda,\ -\lambda - 1,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.27 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (1,\ 1,\ -1).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.28 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z, t) = (\lambda,\ \lambda,\ 0,\ 0).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.29 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (3 - \lambda,\ \lambda,\ 0)\,.$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.30 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (1,\ 1,\ 1)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.31 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (1,\ -2,\ 3)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.32 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{\lambda}{7},\ \frac{3\lambda}{7},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.33 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (-3,\ 6,\ 7)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.34 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z, t) = \left(-1,\ 1,\ \frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

4 · Discusión con parámetros

4.01 **Si** $k \notin \{3\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(-1,\ \frac{k+4}{2},\ \frac{k-2}{2}\right).$$

Si $k = 3$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{2\lambda+1}{2},\ \frac{4\lambda+5}{2},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales.

4.02 **Si** $k \notin \{3\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{k-2}{k-3},\ \frac{k^2+k-8}{2\,(k-3)},\ \frac{k^2-5k+8}{2\,(k-3)}\right).$$

Si $k = 3$: Sistema incompatible: no tiene solución.

4.03 **Si** $k \notin \{-3\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{2\,(k+4)}{k+3},\ -\frac{k^2+k-8}{k+3},\ \frac{k^2-k-16}{k+3}\right).$$

Si $k = -3$: Sistema incompatible: no tiene solución.

4.04 **Si** $k \notin \{-1\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{(k-2)\,(k-1)}{k+1},\ \frac{k^2-k+1}{k+1},\ -\frac{k-2}{k+1}\right).$$

Si $k = -1$: Sistema incompatible: no tiene solución.

4.05 **Si** $m \notin \{4\}$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $m = 4$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = (1,\ 1).$$

4.06 Para cualquier valor real de m: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (3 - 5m,\ -2m,\ m).$$

4.07 **Si** $m \notin \{0\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{5m-6}{2m},\ -\frac{3m-8}{2m},\ \frac{1}{m}\right).$$

Si $m = 0$: Sistema incompatible: no tiene solución.

4.08 **Si** $m \notin \{5\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (0,\ 0,\ 0)\,.$$

Si $m = 5$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{\lambda}{3},\ -\frac{\lambda}{3},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales.

4.09 **Si** $k \notin \{-\frac{1}{2}\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = (2,\ 0)\,.$$

Si $k = -\frac{1}{2}$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y) = \left(\frac{\lambda + 4}{2},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales.

4.10 **Si** $m \notin \{10\}$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $m = 10$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{\lambda + 5}{5},\ \frac{3\lambda - 5}{5},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales.

4.11 **Si** $m \notin \{7\}$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $m = 7$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = (1,\ 1)\,.$$

4.12 **Si** $m \notin \{-1\}$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $m = -1$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{\lambda - 3}{3},\ -\frac{7\lambda + 3}{3},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales.

4.13 Para cualquier valor real de k: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{k^2 + k + 1}{9},\ \frac{k^2 - 5k - 2}{9},\ -\frac{k - 1}{3}\right).$$

4.14 **Si** $a \notin \{10\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (0,\ 0,\ 0)\,.$$

Si $a = 10$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (2\lambda,\ -\lambda,\ \lambda)\,.$$

Los parámetros son números reales.

4.15 Para cualquier valor real de m: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{5},\ -\frac{m+11}{5},\ -\frac{2\,(m+8)}{5}\right).$$

4.16 **Si** $a \notin \{1\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{a-4}{2\,(a-1)},\ \frac{3a-7}{2\,(a-1)},\ -\frac{1}{2\,(a-1)}\right).$$

Si $a = 1$: Sistema incompatible: no tiene solución.

4.17 **Si** $m \notin \{1\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (-1,\ 0,\ 1)\,.$$

Si $m = 1$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (2 - 3\lambda,\ -4\,(\lambda - 1)\,,\ \lambda)\,.$$

Los parámetros son números reales.

4.18 **Si** $a \notin \{2\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(3,\ -\frac{3a-4}{a-2},\ \frac{2}{a-2}\right).$$

Si $a = 2$: Sistema incompatible: no tiene solución.

4.19 **Si** $a \notin \{-1, 1\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{a+1},\ -\frac{2a+1}{a+1}\right).$$

Si $a = -1$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $a = 1$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y) = (\lambda + 1,\ \lambda)\,.$$

Los parámetros son números reales.

4.20 **Si** $a \notin \{0\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{5a+13}{5a},\ \frac{13}{5a},\ \frac{18a+13}{5a}\right).$$

Si $a = 0$: Sistema incompatible: no tiene solución.

5 · Problemas de aplicación

5.01 Si x, y, z son sus cantidades, $x+y+z=60$, $2x/3 = y + x/3$ y $2x/3 = z$. Por tanto, A tiene **30 €**, B tiene **10 €** y C tiene **20 €**.

5.02 Con x, y, z en kilogramos: $x+y+z=10{,}5$, $z=2(x+y)$ y $9{,}8x+8{,}75y+9{,}5z=98{,}7$. Solución: **1,5 kg de A, 2 kg de B y 7 kg de C**.

5.03 Sean c, d, u las cifras de centenas, decenas y unidades. Entonces $c+d+u=9$, $99(c-u)=198$ y $2d=c+u$. Se obtiene $(c,d,u)=(4,3,2)$. El número es **432**.

5.04 El sistema es $A+B+C=20.000$, $0{,}04A+0{,}05B+0{,}06C=1.050$ y $0{,}05A+0{,}06B+0{,}04C=950$. Solución: **A = 5.000 €, B = 5.000 € y C = 10.000 €**.

5.05 Sean x las copias sin defecto, y las rebajadas al 30% y z las rebajadas al 40%. Se cumple $x+y+z=600$, $y+z=x/2$ y $12x+8{,}4y+7{,}2z=6.384$. Resulta $(x,y,z)=(400,120,80)$. Se aplicó el 30% a **120 copias**.

5.06 $A+B+C=36$, $A=B+C+2$ y $A+1=2(B-1)$. Solución: **19 en A, 11 en B y 6 en C**.

5.07 Sean x, y, z los kilómetros de subida, bajada y llano en la ida. Entonces $x+y+z=192$, $x/54+y/90+z/80=5/2$ y $x/90+y/54+z/80=11/4$. Se obtiene $x=31{,}725$, $y=65{,}475$ y $z=94{,}8$. Hay **94,8 km de llano**.

5.08 Identificamos a los jugadores por el orden en que pierden. Retrocediendo desde $(24,24,24)$ se obtiene $(12,12,48)$, después $(6,42,24)$ y finalmente $(39,21,12)$. Tenían **39 €, 21 € y 12 €**, respectivamente.

5.09 El sistema es $A+B+C=60.000$, $A+B=mC$ y $0{,}05A+0{,}10B+0{,}20C=6.000$. Su solución es $A=120.000/(m+1)$, $B=60.000(m-2)/(m+1)$ y $C=60.000/(m+1)$: es única si $m\neq -1$, en particular para $m>0$. Para que todas las inversiones sean no negativas se necesita además $m\geq 2$. Si $m=5$: **A = 20.000 €, B = 30.000 € y C = 10.000 €**.

5.10 a) Con h, p, g para las edades: $h+p+2g=182$, $2h+g=100$, $p=2h$. Resulta **hijo: 18 años; padre: 36; abuelo: 64**. b) Si $p=3h$, las dos primeras condiciones exigirían simultáneamente $4h+2g=182$ y $4h+2g=200$: es imposible. c) Con suma 200, las condiciones son dependientes y hay infinitas soluciones algebraicas: $(h,p,g)=(t,3t,100-2t)$. Para que sean edades positivas ordenadas como hijo, padre y abuelo, $0<t<20$.

6 · Razonamiento y profundización

6.01 Sí. Cambia $-y$ por $+y$ en la segunda ecuación. Las dos primeras quedan iguales y, al restar la tercera, se obtiene $z = 0$. Las soluciones son $(x, y, z) = (t, 1 - t, 0)$.

6.02 Son equivalentes cuando tienen exactamente el mismo conjunto de soluciones. El primero admite $(x, y, z) = (3 - t, t, -1)$, con $t \in \mathbb{R}$; el segundo solo admite $(2, 1, -1)$. Por tanto, no son equivalentes.

6.03 Sí. Por ejemplo, $x + y = 1$ y $2x + 2y = 2$ representan la misma recta. Al añadir $x + y = 2$ ya no hay ninguna solución común.

6.04 No. Una solución del sistema ampliado tendría que satisfacer también las dos ecuaciones iniciales, que ya eran incompatibles. Añadir restricciones no crea soluciones.

6.05 No. Los sistemas $x + y = 1$, $x - y = 1$ y $x + 2y = 1$, $x - 2y = 1$ tienen los mismos términos independientes y la misma solución única $(1, 0)$, pero distintos coeficientes.

6.06 Para $a = 1$, la segunda ecuación exige $0 = 1$: es incompatible. Para $a = 2$, se obtiene $x = 1$, $z = 1/3$ e $y = -5/3$. Es compatible determinado, no indeterminado.

6.07 **Si** $a \notin \{1, 2\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(a + 1,\ -\frac{a-2}{a-1},\ -\frac{a}{a-1}\right).$$

Si $a = 1$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $a = 2$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (1 - \lambda,\ 0,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales.

6.08 **Si** $a \notin \{-1, 2\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{a+1},\ \frac{2}{a+1},\ \frac{a+2}{a+1}\right).$$

Si $a = -1$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $a = 2$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (\lambda - 1,\ 2 - \lambda,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales.

6.09 Para $a = 1$, las dos primeras ecuaciones tienen el mismo primer miembro y distintos términos independientes. Para $a = 6$, la última exige $2x + 6z = 3$, mientras que el doble de la tercera exige $2x + 6z = 4$. Ambos valores producen incompatibilidad.

6.10 Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z, t, w) = (5,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Al sumar, cuatro veces la suma de las cinco incógnitas es 76; por tanto, dicha suma es 19.

6.11 Cada jardinero ayuda exactamente un día. Si S es la suma de sus cinco rendimientos diarios, el total semanal es $4S$. Con 38 el viernes se obtendría $S = 186/4 = 46{,}5$, imposible. Por tanto, el viernes se podan 36 árboles y $S = 184/4 = 46$. Quienes ayudan de lunes a viernes podan, respectivamente, **11, 10, 8, 7 y 10 árboles al día**.

7 · Autoevaluación

7.01 Sistema incompatible: no tiene solución. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Las tres rectas no tienen un punto común; se cortan dos a dos.

7.02 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{\lambda + 8}{2},\ \lambda + 3,\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Los dos planos se cortan en una recta.

7.03 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{\lambda - 1}{2},\ -\frac{\lambda - 1}{2},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los cuatro planos contienen una misma recta.

7.04 Con p, q, r para los viajes, $5p + 2q + 4r = 45$, $3p + 5q + 3r = 44$ y $4p + 5q + 6r = 58$. La solución es **P: 3 viajes; Q: 4; R: 5**.

7.05 Una opción incompatible es $3x - 2y + z = 6$, pues contradice la primera. Una opción compatible determinada es $x = 0$: resulta la solución única $(0, 9, 23)$.

7.06 a) Para $a = 2$, las dos primeras ecuaciones son contradictorias. b) No: la tercera siempre es la suma de las otras dos, por lo que el rango no puede ser 3. c) Para $a = 0$, $y = -1/2$ y $x + 3z = 2$: $(x, y, z) = (2 - 3t, -1/2, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

7.07 **Si** $a \notin \{-1, 1\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{5}{a - 1},\ -\frac{2}{a + 1},\ -\frac{a^2 + 3a + 6}{(a - 1)(a + 1)}\right).$$

Si $a = -1$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $a = 1$: Sistema incompatible: no tiene solución. Para $a = 1$, los dos primeros planos son paralelos distintos. Para $a = -1$, el segundo y el tercero son paralelos distintos. En los demás casos, los tres planos se cortan en un único punto.
