2.º BACHILLERATO

Resolución de sistemas mediante determinantes

Matemáticas Aplicadas
a las Ciencias Sociales II

Practica, razona y comprueba tus respuestas.

1 Compatibilidad y teorema de Rouché
2 Regla de Cramer
3 Sistemas homogéneos
4 Discusión con un parámetro
5 Matriz inversa y ecuaciones matriciales
6 Forma matricial de los sistemas
7 Razonamiento y varios parámetros
8 Autoevaluación

140 actividades · 8 bloques

TU RUTA DE TRABAJO

Índice

Ejercicios organizados por contenidos, con espacio para trabajar y soluciones al final.

1 Compatibilidad y teorema de Rouché 3

2 Regla de Cramer 10

3 Sistemas homogéneos 14

4 Discusión con un parámetro 19

5 Matriz inversa y ecuaciones matriciales 29

6 Forma matricial de los sistemas 39

7 Razonamiento y varios parámetros 44

8 Autoevaluación 50

Solucionario 53

Cómo usar el dosier
El código 2.03 identifica la tercera actividad del bloque 2. Busca ese mismo código en el solucionario. Justifica los procedimientos y comprueba los resultados en los enunciados.

BLOQUE 1

Compatibilidad y teorema de Rouché

1.01 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

1.02 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{cases}$$

1.03 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ 4t + 3x - y = 1 \\ 4t + x - 3y - 4z = 6 \end{cases}$$

1.04 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} x+3y-z=1 \\ 2x+z=2 \\ 2y-z=0 \end{cases}$$

1.05 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} x+3y-z=1 \\ 2x+z=2 \\ 2y-z=5 \end{cases}$$

1.06 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} x+y+2z=7 \\ 4t+3x-y=1 \\ 4t+x-3y-4z=-13 \end{cases}$$

1.07 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} x-y+3z=1 \\ 3x-y+2z=3 \\ -2y+7z=0 \end{cases}$$

1.08 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} x-y+3z=1 \\ 3x-y+2z=3 \\ -2y+7z=10 \end{cases}$$

1.09 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} x+y=3 \\ y+z=5 \\ x+z=4 \\ 5x-y+z=6 \end{cases}$$

1.10 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} 3x+4y=4 \\ 2x+6y=23 \\ -2x+3y=1 \end{cases}$$

1.11 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} x-y=6 \\ 4x+y=-1 \\ 5x+2y=-5 \end{cases}$$

1.12 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} x+y-z=-2 \\ 2x-y-3z=-3 \\ x-2y-2z=0 \end{cases}$$

1.13 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ -x-5y+z=0 \\ 3x+y-z=6 \end{cases}$$

1.14 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} x-y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ 3x+z=5 \end{cases}$$

1.15 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-2y-7z=0 \\ y+z=-1 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$$

1.16 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} x+3y+z=-1 \\ x-y-z=-1 \\ 2x+y+3z=5 \end{cases}$$

1.17 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ y-z=1 \end{cases}$$

1.18 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} x-2y+z=-2 \\ -2x+y+z=-2 \\ x+y-2z=-2 \end{cases}$$

1.19 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -x-y=1 \\ -y-z=-1 \end{cases}$$

1.20 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x+z=6 \\ y+z=7 \\ 2x+y+z=11 \end{cases}$$

BLOQUE 2

Regla de Cramer

2.01 Resuelve aplicando la regla de Cramer; si el sistema no es cuadrado, reduce primero a un subsistema con las variables libres como parámetros.

$$\begin{cases} 3x - 5y = 73 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$$

2.02 Resuelve aplicando la regla de Cramer; si el sistema no es cuadrado, reduce primero a un subsistema con las variables libres como parámetros.

$$\begin{cases} 5x + 4y = 33 \\ 7x - 11y = 13 \end{cases}$$

2.03 Resuelve aplicando la regla de Cramer; si el sistema no es cuadrado, reduce primero a un subsistema con las variables libres como parámetros.

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 20 \\ x + 3z = 14 \\ y - z = -4 \end{cases}$$

2.04 Resuelve aplicando la regla de Cramer; si el sistema no es cuadrado, reduce primero a un subsistema con las variables libres como parámetros.

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ x-2y=2 \end{cases}$$

2.05 Enuncia la regla de Cramer para tres ecuaciones con tres incógnitas.

2.06 Resuelve aplicando la regla de Cramer; si el sistema no es cuadrado, reduce primero a un subsistema con las variables libres como parámetros.

$$\begin{cases} x-3y+5z=-24 \\ 2x-y+4z=-8 \\ x+y=9 \end{cases}$$

2.07 Demuestra la regla de Cramer para tres ecuaciones con tres incógnitas.

2.08 Resuelve aplicando la regla de Cramer; si el sistema no es cuadrado, reduce primero a un subsistema con las variables libres como parámetros.

$$\begin{cases} 8x + 14y = 2 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$$

2.09 Resuelve aplicando la regla de Cramer; si el sistema no es cuadrado, reduce primero a un subsistema con las variables libres como parámetros.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

2.10 Resuelve aplicando la regla de Cramer; si el sistema no es cuadrado, reduce primero a un subsistema con las variables libres como parámetros.

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

2.11 Resuelve aplicando la regla de Cramer; si el sistema no es cuadrado, reduce primero a un subsistema con las variables libres como parámetros.

$$\begin{cases} 2x+y+z=-2 \\ x-2y-3z=1 \\ -x-y+z=-3 \end{cases}$$

2.12 Resuelve aplicando la regla de Cramer; si el sistema no es cuadrado, reduce primero a un subsistema con las variables libres como parámetros.

$$\begin{cases} t+x+y-z=1 \\ -t+x-y=2 \\ -t+z=0 \end{cases}$$

2.13 Resuelve aplicando la regla de Cramer; si el sistema no es cuadrado, reduce primero a un subsistema con las variables libres como parámetros.

$$\begin{cases} t+x-y-z=4 \\ -t+x+y+z=2 \end{cases}$$

BLOQUE 3

Sistemas homogéneos

3.01 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

3.02 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{cases}$$

3.03 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{cases}$$

3.04 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} x+y+5z=0 \\ -2t+3x-y=0 \\ -t+x-y+z=0 \end{cases}$$

3.05 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ y+z=0 \\ x-3y+2z=0 \\ -x+5y=0 \end{cases}$$

3.06 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} x+3z=0 \\ -t+y=0 \\ 2t+x+y=0 \\ t+2x+2y+3z=0 \end{cases}$$

3.07 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x\,(a-1)+y=0 \\ x\,(a-1)+y\,(a+1)=0 \end{cases}$$

3.08 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 12x-3y-2z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

3.09 Estudia la compatibilidad mediante el teorema de Rouché y resuelve cuando sea posible.

$$\begin{cases} 9x+3y+2z=0 \\ 3x-y+z=0 \\ 8x+y+4z=0 \\ x+2y-2z=0 \end{cases}$$

3.10 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ -az + 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

3.11 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ az + 2x - y = 0 \end{cases}$$

3.12 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases}$$

3.13 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} 3x+3y-z=0 \\ -az+4x+2y=0 \\ 3x+4y+6z=0 \end{cases}$$

3.14 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} ax+y=0 \\ 2az-y=0 \\ ay-x=0 \end{cases}$$

BLOQUE 4

Discusión con un parámetro

4.01 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} az + x + y = 0 \\ ax - y = -1 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

4.02 Discute el sistema según los valores de k y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x + y = k \\ kx - y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{cases}$$

4.03 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+2y=1 \\ ax+y=3 \end{cases}$$

4.04 Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} mx+y+z=4 \\ x+y+z=m \\ mz+x-y=2 \end{cases}$$

4.05 Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x+y+z=m-1 \\ mz+2x+y=m \\ my+x+z=1 \end{cases}$$

4.06 Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ my+x+z=0 \\ 2x+3y+4z=2 \end{cases}$$

4.07 Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} my+x+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ mx+y+z=4 \end{cases}$$

4.08 Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x+2z=3 \\ 3x+y+z=-1 \\ 2y-z=-2 \\ mz+x-y=-5 \end{cases}$$

4.09 Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = m \\ x + y - 2z = 0 \\ x - y - z = m \end{cases}$$

4.10 ¿Para qué valores de a tiene infinitas soluciones? Discute y resuelve el sistema.

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 2 \\ ay + 2x - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

4.11 ¿Para qué valores de a tiene infinitas soluciones? Discute y resuelve el sistema.

$$\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ az + 2x + y = a \\ ay + x + z = 1 \end{cases}$$

4.12 Determina los valores de m para los que el sistema es incompatible y resuelve en los demás casos.

$$\begin{cases} mx - y - z = m \\ mz + x - y = m \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

4.13 Determina los valores de m para los que el sistema es incompatible y resuelve en los demás casos.

$$\begin{cases} x(m+1) + y + z = 3 \\ mz + x + 2y = 4 \\ my + x + 2z = 2 \end{cases}$$

4.14 Determina los valores de m para los que el sistema es incompatible y resuelve en los demás casos.

$$\begin{cases} 2x + y - z = m - 4 \\ y(m-6) + 3z = 0 \\ x(m+1) + 2y = 3 \end{cases}$$

4.15 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} ax + y = 2 - 2a \\ ay + x = a - 1 \end{cases}$$

4.16 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x\,(a+1) + 2y + z = a + 3 \\ ax + y = a \\ ax + 3y + z = a + 2 \end{cases}$$

4.17 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} ax + 7y + 20z = 1 \\ ax + 8y + 23z = 1 \\ -az + x = 1 \end{cases}$$

4.18 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax=2 \\ ay+2z=0 \end{cases}$$

4.19 Discute el sistema según los valores de k y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} kx+2z=0 \\ ky-z=k \\ x+3y+z=5 \end{cases}$$

4.20 Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x\,(m+2)+y\,(m-1)-z=3 \\ mx-y+z=2 \\ my+x-z=1 \end{cases}$$

4.21 Discute el sistema según los valores de k y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} kx + 3y + z = k \\ ky + kz + x = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

4.22 Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} mx + y + z = 2 \\ m^2z + my + 2x = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

4.23 Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ -my + x - z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

4.24 Discute el sistema según los valores de k y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} kx + ky - z = 2 \\ -ky + 3x = 0 \\ ky + 5x = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

4.25 Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ mx + 2z = 0 \\ my - z = m \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

4.26 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} -az + x = -1 \\ x + y\,(a+3) + z\,(4-a) = 0 \\ x + y\,(a+3) + z\,(a^2+2) = a+2 \end{cases}$$

4.27 Determina cuándo hay infinitas soluciones, resuelve e interpreta geométricamente.

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ az+x+2y=5 \\ 2x+y-3z=4 \end{cases}$$

4.28 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} ax-y=1 \\ -ay+x=2a-1 \end{cases}$$

BLOQUE 5

Matriz inversa y ecuaciones matriciales

5.01 Deduce la fórmula de la inversa de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a partir de $AA^{-1} = I$. Explica por qué se necesita $\det A \neq 0$.

5.02 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

5.03 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

5.04 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

5.05 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.06 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.07 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

5.08 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

5.09 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

5.10 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.11 Resuelve la ecuación $AX = B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.12 Resuelve la ecuación $XB = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.13 Determina para qué valores del parámetro la matriz tiene inversa.

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcula también la inversa para $x = 2$, si existe.

5.14 Resuelve la ecuación $AXA = B$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

5.15 Resuelve la ecuación $AXB = C$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.16 Resuelve $(AB^T + C)X = D$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -8 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

5.17 Resuelve la ecuación $3AX = B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.18 Determina para qué valores del parámetro la matriz tiene inversa.

$$A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}.$$

Calcula la inversa cuando exista.

5.19 Determina para qué valores del parámetro la matriz tiene inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & a \\ 1 & a \end{bmatrix}.$$

Calcula la inversa cuando exista.

5.20 Determina para qué valores del parámetro la matriz tiene inversa.

$$A = \begin{bmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

Calcula la inversa cuando exista.

5.21 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

Discute según a.

5.22 Determina para qué valores del parámetro la matriz tiene inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

Calcula también la inversa para $a = 1$, si existe. Calcula también la inversa para $a = -1$, si existe.

5.23 Determina para qué valores del parámetro la matriz tiene inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{bmatrix}.$$

Calcula también la inversa para $t = 1$, si existe.

5.24 Determina para qué valores del parámetro la matriz tiene inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcula también la inversa para $t = 2$, si existe.

5.25 Resuelve la ecuación $AX = B$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

5.26 Calcula, si existe, una matriz X tal que $AX = B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

5.27 Determina para qué valores del parámetro la matriz tiene inversa.

$$A = \begin{bmatrix} a & a^2 - 2 \\ 1 & a \end{bmatrix}.$$

Calcula la inversa cuando exista.

BLOQUE 6

Forma matricial de los sistemas

6.01 Expresa en forma matricial y resuelve mediante la matriz inversa.

$$\begin{cases} x - y - z = 6 \\ -x + 3z = 2 \\ -2x + 5y - 3z = 0 \end{cases}$$

6.02 Expresa en forma matricial y resuelve mediante la matriz inversa.

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$$

6.03 Expresa en forma matricial y resuelve mediante la matriz inversa.

$$\begin{cases} -t+x-2y-3z=0 \\ y+2z=4 \\ t+2y+3z=1 \\ t+3x-2y=-2 \end{cases}$$

6.04 Expresa en forma matricial y resuelve mediante la matriz inversa.

$$\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=-1 \\ t+z=4 \\ t=2 \end{cases}$$

6.05 Expresa en forma matricial y resuelve mediante la matriz inversa.

$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ y+3z=0 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$$

6.06 Expresa en forma matricial y resuelve mediante la matriz inversa.

$$\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+y+z=-2 \\ x-2y-3z=1 \end{cases}$$

6.07 Expresa en forma matricial y resuelve mediante la matriz inversa.

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ y+z=-2 \\ x+z=3 \end{cases}$$

6.08 Expresa en forma matricial y resuelve mediante la matriz inversa.

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 3y+z=4 \\ x+2y+2z=4 \end{cases}$$

6.09 Escribe el sistema en su forma habitual y resuélvelo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6.10 Escribe el sistema en su forma habitual y resuélvelo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6.11 Escribe el sistema en su forma habitual y resuélvelo.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

6.12 Resuelve $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

BLOQUE 7

Razonamiento y varios parámetros

7.01 Para las matrices siguientes: a) determina cuándo AB es invertible; b) cuándo lo es BA; c) decide si $A(x,y,z)^T = (a,b)^T$ puede ser compatible determinado.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ k & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

7.02 Demuestra que el sistema siempre tiene solución única y resuélvelo para $a = b = 1$.

$$\begin{cases} x - y + z\,(a+b) = a \\ x + z = b \\ x - z = a - 3b \end{cases}$$

7.03 En un sistema cuadrado con determinante de coeficientes nulo: a) ¿puede ser compatible? b) ¿puede tener solución única? c) ¿se puede aplicar directamente Cramer?

7.04 Un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones y tres incógnitas tiene rango de coeficientes 3. ¿Cuál es su solución?

7.05 Un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas tiene rango de coeficientes 1. ¿Cuál es el máximo rango de la ampliada?

7.06 Añade una ecuación para obtener: a) un sistema incompatible; b) un sistema compatible determinado.

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$$

7.07 Representa matricialmente y resuelve $S:\ 3x+y=1,\ 11x+4y=0$ y $S':\ 3x+y=0,\ 11x+4y=1$. Relaciona las soluciones con la inversa de $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$.

7.08 Un sistema de tres planos tiene rango de coeficientes 2 y rango ampliado 3. Describe sus posibles posiciones y da un ejemplo.

7.09 Dos sistemas de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas tienen la misma matriz A: $AX = B$ y $AX = B'$. ¿Puede uno ser incompatible y el otro compatible determinado?

7.10 Determina A para que $A(x, y, z)^T = 0$ sea equivalente a $(x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (0\ 0)$.

7.11 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} 2t + x + y = 3 \\ -t + 3x - y + z = 1 \\ -4t + 5x - 3y + 2z = a \\ t + 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

7.12 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} ax+t+z=1 \\ ay-t+z=1 \\ ay-2t+z=2 \\ az-t=0 \end{cases}$$

7.13 Discute el sistema según a, b y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+3y-2z=-8 \\ az+4x+y=b \end{cases}$$

7.14 Discute el sistema según a, b y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ az+2x+y=a \\ ay+x+z=b \end{cases}$$

7.15 Discute y resuelve según a, b, c.

$$\begin{cases} x-3y+z=a \\ x-z=b \\ x+z=c \end{cases}$$

7.16 Discute el sistema según a, b y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} ax+y-z=b-1 \\ ay+2x=b+1 \\ -x+z=b \end{cases}$$

7.17 Discute el sistema según a, b y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ ay + x + z = b \\ az + x + y = 1 \end{cases}$$

7.18 Discute el sistema según a, b y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + y + z = -b \\ -ay + x + z = b \end{cases}$$

BLOQUE 8

Autoevaluación

8.01 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} ay + x + z = a + 2 \\ az + x + y = -2a - 2 \\ ax + y + z = a \end{cases}$$

Resuelve también para $a = -1$.

8.02 Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ my + x + 3z = 7 \end{cases}$$

8.03 Determina para qué valores del parámetro la matriz tiene inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcula también la inversa para $a = 2$, si existe.

8.04 Resuelve la ecuación $A^{-1}XA = B$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.05 Resuelve la ecuación $(A + X)B = I$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.06 Un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas tiene rango de coeficientes 3. ¿Qué rango puede tener la ampliada y cuántas soluciones habrá?

8.07 Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ y+z=a \\ x-3z=-1 \\ y-z=2 \end{cases}$$

8.08 Un sistema homogéneo de tres ecuaciones y dos incógnitas tiene rango de coeficientes 2. ¿Cuántas soluciones tiene?

Solucionario

Los códigos corresponden a las actividades del dosier.

1 · Compatibilidad y teorema de Rouché

1.01 $\operatorname{rg} A = 2, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 2$. Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = (1,\ -1)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.02 $\operatorname{rg} A = 2, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Sistema incompatible: no tiene solución. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.03 $\operatorname{rg} A = 2, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Sistema incompatible: no tiene solución. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.04 $\operatorname{rg} A = 2, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 2$. Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{\lambda - 2}{2},\ \frac{\lambda}{2},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.05 $\operatorname{rg} A = 2, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Sistema incompatible: no tiene solución. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.06 $\operatorname{rg} A = 2, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 2$. Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z, t) = \left(-\frac{2\lambda + \mu - 4}{2},\ \frac{2\lambda - 3\mu + 10}{2},\ \mu,\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.07 $\operatorname{rg} A = 2, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 2$. Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{\lambda + 2}{2},\ \frac{7\lambda}{2},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.08 $\operatorname{rg} A = 2, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Sistema incompatible: no tiene solución. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.09 $\operatorname{rg} A = 3, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (1,\ 2,\ 3).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.10 $\operatorname{rg} A = 2, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Sistema incompatible: no tiene solución. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.11 $\operatorname{rg} A = 2, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 2$. Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = (1,\ -5).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.12 $\operatorname{rg} A = 2, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Sistema incompatible: no tiene solución. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.13 $\operatorname{rg} A = 2, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 2$. Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{2\lambda + 15}{7},\ \frac{\lambda - 3}{7},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{15}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.14 $\operatorname{rg} A = 2, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Sistema incompatible: no tiene solución. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.15 $\operatorname{rg} A = 3, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (3,\ -2,\ 1).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.16 $\operatorname{rg} A = 3, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (0,\ -1,\ 2).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.17 $\operatorname{rg} A = 3, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

1.18 $\operatorname{rg} A = 2, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Sistema incompatible: no tiene solución. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.19 $\operatorname{rg} A = 2, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 2$. Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (\lambda - 2,\ 1 - \lambda,\ \lambda)\,.$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.20 $\operatorname{rg} A = 3, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (2,\ 3,\ 4)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2 · Regla de Cramer

2.01 $\det A = 26$.

$$\det A_x = 156, \qquad \det A_y = -286.$$

Dividiendo cada determinante por $\det A$:

$$x = 6, \qquad y = -11.$$

Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = (6,\ -11)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -11 \end{bmatrix}.$$

2.02 $\det A = -83$.

$$\det A_x = -415, \qquad \det A_y = -166.$$

Dividiendo cada determinante por $\det A$:

$$x = 5, \qquad y = 2.$$

Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = (5,\ 2)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2.03 $\det A = -10$.

$$\det A_x = -50, \qquad \det A_y = 10, \qquad \det A_z = -30.$$

Dividiendo cada determinante por $\det A$:

$$x = 5, \qquad y = -1, \qquad z = 3.$$

Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (5,\ -1,\ 3)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2.04 $\det A = 2$.

$$\det A_x = 8, \qquad \det A_y = 2, \qquad \det A_z = -4.$$

Dividiendo cada determinante por $\det A$:

$$x = 4, \qquad y = 1, \qquad z = -2.$$

Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (4,\ 1,\ -2)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

2.05 Para $AX = b$, con A cuadrada de orden 3 y $\det A \neq 0$, existe una única solución: $x = \det A_x / \det A$, $y = \det A_y / \det A$, $z = \det A_z / \det A$. La matriz A_j se obtiene sustituyendo la columna de la incógnita j por el vector b.

2.06 $\det A = -1$.

$$\det A_x = -7, \qquad \det A_y = -2, \qquad \det A_z = 5.$$

Dividiendo cada determinante por $\det A$:

$$x = 7, \qquad y = 2, \qquad z = -5.$$

Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (7,\ 2,\ -5)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

2.07 Si c_1, c_2, c_3 son las columnas de A, entonces $b = xc_1 + yc_2 + zc_3$. Por linealidad, $\det(b, c_2, c_3) = x \det(c_1, c_2, c_3)$, ya que los otros dos términos tienen columnas repetidas. Así, $\det A_x = x \det A$ y $x = \det A_x / \det A$. El mismo argumento con la segunda y la tercera columna da las fórmulas de y, z.

2.08 $\det A = -82$.

$$\det A_x = -164, \qquad \det A_y = 82.$$

Dividiendo cada determinante por $\det A$:

$$x = 2, \qquad y = -1.$$

Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = (2,\ -1)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2.09 $\det A = -4$.

$$\det A_x = -4, \qquad \det A_y = -4, \qquad \det A_z = -4.$$

Dividiendo cada determinante por $\det A$:

$$x = 1, \qquad y = 1, \qquad z = 1.$$

Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (1,\ 1,\ 1)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.10 $\det A = 1$.

$$\det A_x = -1, \qquad \det A_y = -5, \qquad \det A_z = 7.$$

Dividiendo cada determinante por $\det A$:

$$x = -1, \qquad y = -5, \qquad z = 7.$$

Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (-1,\ -5,\ 7)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

2.11 $\det A = -11$.

$$\det A_x = 11, \qquad \det A_y = -22, \qquad \det A_z = 22.$$

Dividiendo cada determinante por $\det A$:

$$x = -1, \qquad y = 2, \qquad z = -2.$$

Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (-1,\ 2,\ -2)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

2.12 Se toman como libres las variables que no corresponden a columnas pivote. El subsistema independiente tiene matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y determinante -2. A él puede aplicarse Cramer. Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z, t) = \left(\frac{\lambda+3}{2},\ -\frac{\lambda+1}{2},\ \lambda,\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.13 Se toman como libres las variables que no corresponden a columnas pivote. El subsistema independiente tiene matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y determinante 2. A él puede aplicarse Cramer. Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z, t) = (3,\ \lambda - \mu - 1,\ \mu,\ \lambda)\,.$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

---

3 · Sistemas homogéneos

3.01 $\operatorname{rg} A = 3, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (0,\ 0,\ 0)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.02 $\operatorname{rg} A = 2, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 2$. Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (-\lambda,\ -2\lambda,\ \lambda)\,.$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.03 $\operatorname{rg} A = 3, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (0,\ 0,\ 0)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.04 $\operatorname{rg} A = 3, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z, t) = \left(\frac{\lambda}{2},\ -\frac{\lambda}{2},\ 0,\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.05 $\operatorname{rg} A = 2, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 2$. Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (-5\lambda,\ -\lambda,\ \lambda)\,.$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.06 $\operatorname{rg} A = 3, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z, t) = (-3\lambda,\ \lambda,\ \lambda,\ \lambda)\,.$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.07 $\det A = a\,(a-1)$. **Si** $a \notin \{0, 1\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = (0,\ 0)\,.$$

Si $a = 0$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y) = (\lambda,\ \lambda)\,.$$

Los parámetros son números reales.
Si $a = 1$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y) = (\lambda,\ 0)\,.$$

Los parámetros son números reales.

3.08 $\operatorname{rg} A = 2, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 2$. Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{\lambda}{3},\ \frac{2\lambda}{3},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.09 $\operatorname{rg} A = 3, \quad \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (0,\ 0,\ 0)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.10 $\det A = -5\,(a+5)$. **Si** $a \notin \{-5\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (0,\ 0,\ 0)\,.$$

Si $a = -5$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{\lambda}{5},\ \frac{7\lambda}{5},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales.

3.11 $\det A = -(a-2)(a+3)$. **Si** $a \notin \{-3, 2\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (0,\ 0,\ 0)\,.$$

Si $a = -3$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{2\lambda}{3},\ -\frac{5\lambda}{3},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales.
Si $a = 2$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (-\lambda,\ 0,\ \lambda)\,.$$

Los parámetros son números reales.

3.12 $\det A = -2a - 5$. **Si** $a \notin \{-\frac{5}{2}\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (0,\ 0,\ 0)\,.$$

Si $a = -\frac{5}{2}$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{\lambda}{2},\ -\frac{\lambda}{4},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales.

3.13 $\det A = 3a - 46$. **Si** $a \notin \{\frac{46}{3}\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (0,\ 0,\ 0)\,.$$

Si $a = \frac{46}{3}$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{22\lambda}{3},\ -7\lambda,\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales.

3.14 $\det A = -2a(a^2+1)$. **Si** $a \notin \{0\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (0,\ 0,\ 0)\,.$$

Si $a = 0$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (0,\ 0,\ \lambda)\,.$$

Los parámetros son números reales.

---

4 · Discusión con un parámetro

4.01 $\det A = (a-2)(4a+3)$. **Si** $a \notin \{-\frac{3}{4}, 2\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{2(2a-3)}{(a-2)(4a+3)},\ \frac{a-6}{(a-2)(4a+3)},\ \frac{3}{(a-2)(4a+3)}\right).$$

Si $a = -\frac{3}{4}$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $a = 2$: Sistema incompatible: no tiene solución.

4.02 **Si** $k \notin \{\frac{5}{3}, 2\}$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $k = \frac{5}{3}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = \left(\frac{11}{2},\ -\frac{23}{6}\right).$$

Si $k = 2$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = (5,\ -3).$$

4.03 **Si** $a \notin \{\frac{6}{7}\}$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $a = \frac{6}{7}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = (7,\ -3).$$

4.04 $\det A = (m-1)(m+1)$. **Si** $m \notin \{-1, 1\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{m-4}{m-1},\ \frac{(m-2)(m+3)}{m+1},\ \frac{(m-2)(m+5)}{(m-1)(m+1)}\right).$$

Si $m = -1$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $m = 1$: Sistema incompatible: no tiene solución.

4.05 $\det A = -(m-2)(m-1)$. **Si** $m \notin \{1, 2\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(m+1,\ -\frac{m-2}{m-1},\ -\frac{m}{m-1}\right).$$

Si $m = 1$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $m = 2$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (1-\lambda,\ 0,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales.

4.06 $\det A = -2(m-1)$. **Si** $m \notin \{1\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{3m-2}{m-1},\ -\frac{2}{m-1},\ -\frac{m-2}{m-1}\right).$$

Si $m = 1$: Sistema incompatible: no tiene solución.

4.07 $\det A = (m-3)(m-1)$. **Si** $m \notin \{1,3\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x,y,z) = \left(-\frac{1}{m-3},\ -\frac{1}{m-3},\ \frac{5m-11}{m-3}\right).$$

Si $m = 1$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x,y,z) = \left(-\frac{2\lambda-7}{2},\ \frac{1}{2},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales.
Si $m = 3$: Sistema incompatible: no tiene solución.

4.08 **Si** $m \notin \{-2\}$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $m = -2$: Sistema compatible determinado.

$$(x,y,z) = (-1,\ 0,\ 2).$$

4.09 **Si** $m \notin \{-1\}$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $m = -1$: Sistema compatible determinado.

$$(x,y,z) = \left(0,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right).$$

4.10 $\det A = 9(a+3)$. **Si** $a \notin \{-3\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x,y,z) = \left(\frac{2(5a+13)}{9(a+3)},\ -\frac{4}{a+3},\ \frac{4(a+8)}{9(a+3)}\right).$$

Si $a = -3$: Sistema incompatible: no tiene solución.

4.11 $\det A = -(a-2)(a-1)$. **Si** $a \notin \{1,2\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x,y,z) = \left(a+1,\ -\frac{a-2}{a-1},\ -\frac{a}{a-1}\right).$$

Si $a = 1$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $a = 2$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x,y,z) = (1-\lambda,\ 0,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales.

4.12 $\det A = -(m+1)^2$. **Si** $m \notin \{-1\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x,y,z) = \left(\frac{m-1}{m+1},\ -\frac{3m^2+1}{(m+1)^2},\ \frac{(m-1)^2}{(m+1)^2}\right).$$

Si $m = -1$: Sistema incompatible: no tiene solución.

4.13 $\det A = -m\,(m-2)\,(m+3)$. **Si** $m \notin \{-3, 0, 2\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{m+3},\ \frac{2m-9}{(m-2)\,(m+3)},\ \frac{4m-3}{(m-2)\,(m+3)}\right).$$

Si $m = -3$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $m = 0$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (-2\,(\lambda - 1)\,,\ \lambda + 1,\ \lambda)\,.$$

Los parámetros son números reales.
Si $m = 2$: Sistema incompatible: no tiene solución.

4.14 $\det A = (m-5)\,(m+3)$. **Si** $m \notin \{-3, 5\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{3}{m+3},\ \frac{3\,(m+2)}{m+3},\ -\frac{(m-6)\,(m+2)}{m+3}\right).$$

Si $m = -3$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $m = 5$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{2\lambda - 1}{2},\ 3\lambda,\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales.

4.15 $\det A = (a-1)\,(a+1)$. **Si** $a \notin \{-1, 1\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = \left(-\frac{2a+1}{a+1},\ \frac{a+2}{a+1}\right).$$

Si $a = -1$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $a = 1$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y) = (-\lambda,\ \lambda)\,.$$

Los parámetros son números reales.

4.16 $\det A = a + 1$. **Si** $a \notin \{-1\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (1,\ 0,\ 2)\,.$$

Si $a = -1$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{\lambda - 4}{2},\ -\frac{\lambda - 2}{2},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales.

4.17 $\det A = -\,(a-1)\,(a+1)$. **Si** $a \notin \{-1, 1\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{a+1},\ \frac{3}{a+1},\ -\frac{1}{a+1}\right).$$

Si $a = -1$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $a = 1$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (\lambda + 1,\ -3\lambda,\ \lambda)\,.$$

Los parámetros son números reales.

4.18 $\det A = a\,(a-2)$. **Si** $a \notin \{0, 2\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{a},\ -\frac{2}{a},\ 1\right).$$

Si $a = 0$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $a = 2$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (1,\ -\lambda,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales.

4.19 $\det A = k\,(k+1)$. **Si** $k \notin \{-1, 0\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{4}{k+1},\ \frac{k+3}{k+1},\ \frac{2k}{k+1}\right).$$

Si $k = -1$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $k = 0$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (5-3\lambda,\ \lambda,\ 0).$$

Los parámetros son números reales.

4.20 $\det A = -m\,(m+1)$. **Si** $m \notin \{-1, 0\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{2m+1}{m\,(m+1)},\ \frac{1}{m},\ \frac{2m+1}{m\,(m+1)}\right).$$

Si $m = -1$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $m = 0$: Sistema incompatible: no tiene solución.

4.21 $\det A = -2\,(k-2)\,(k+1)$. **Si** $k \notin \{-1, 2\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (1,\ 0,\ 0).$$

Si $k = -1$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (\lambda+1,\ 0,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales.
Si $k = 2$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (4\lambda+1,\ -3\lambda,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales.

4.22 $\det A = -m\,(m-2)\,(m-1)$. **Si** $m \notin \{0, 1, 2\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(0,\ \frac{2m^2-1}{m\,(m-1)},\ -\frac{2m-1}{m\,(m-1)}\right).$$

Si $m = 0$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $m = 1$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $m = 2$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{2\lambda+3}{2},\ -3\lambda-1,\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales.

4.23 $\det A = -(m-2)(m-1)$. **Si** $m \notin \{1,2\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x,y,z) = \left(0,\ -\frac{1}{m-1},\ \frac{1}{m-1}\right).$$

Si $m = 1$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $m = 2$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x,y,z) = \left(-\frac{\lambda-1}{5},\ -\frac{3\lambda+2}{5},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales.

4.24 **Si** $k \notin \{0\}$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $k = 0$: Sistema incompatible: no tiene solución.

4.25 **Si** $m \notin \{0,7\}$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $m = 0$: Sistema compatible determinado.

$$(x,y,z) = \left(\frac{5}{4},\ \frac{5}{4},\ 0\right).$$

Si $m = 7$: Sistema compatible determinado.

$$(x,y,z) = \left(-\frac{1}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{4}\right).$$

4.26 $\det A = (a-1)(a+2)(a+3)$. **Si** $a \notin \{-3,-2,1\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x,y,z) = \left(\frac{1}{a-1},\ \frac{a-5}{(a-1)(a+3)},\ \frac{1}{a-1}\right).$$

Si $a = -3$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $a = -2$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x,y,z) = (-2\lambda-1,\ 1-4\lambda,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales.
Si $a = 1$: Sistema incompatible: no tiene solución.

4.27 $\det A = a-9$. **Si** $a \notin \{9\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x,y,z) = (1,\ 2,\ 0).$$

Si $a = 9$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x,y,z) = (5\lambda+1,\ 2-7\lambda,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales. Si $a = 9$, los tres planos se cortan en la recta $(x,y,z) = (1+5\lambda, 2-7\lambda, \lambda)$. En otro caso, se cortan en el punto $(1,2,0)$.

4.28 $\det A = -(a-1)(a+1)$. **Si** $a \notin \{-1, 1\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{a+1},\ -\frac{2a+1}{a+1}\right).$$

Si $a = -1$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $a = 1$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y) = (\lambda + 1,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales. Si $a = 1$, las rectas coinciden en $x - y = 1$. Si $a = -1$, son paralelas distintas. En los demás casos se cortan en un punto.

5 · Matriz inversa y ecuaciones matriciales

5.01 Las columnas de la inversa resuelven $Au=(1,0)^T$ y $Av=(0,1)^T$. Cramer da $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$. El producto en ambos órdenes es I. Si existiese inversa con determinante cero, $1=\det I=\det A\det A^{-1}=0$, contradicción.

5.02

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{7}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}.$$

Se verifica $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

5.03

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix}.$$

Se verifica $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

5.04

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}.$$

Se verifica $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

5.05

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}.$$

Se verifica $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

5.06

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Se verifica $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

5.07

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 1\end{bmatrix}.$$

Se verifica $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

5.08

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Se verifica $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

5.09

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se verifica $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

5.10

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se verifica $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

5.11

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -19 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo esta matriz en la ecuación se obtiene la igualdad pedida.

5.12

$$X = AB^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 3 & 1 & -3 \\ -5 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo esta matriz en la ecuación se obtiene la igualdad pedida.

5.13 $\det A = x$. No es invertible exactamente para $x \in \{0\}$; en los demás casos sí lo es.

Si $x = 2$: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5.14

$$X = A^{-1}BA^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo esta matriz en la ecuación se obtiene la igualdad pedida.

5.15

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo esta matriz en la ecuación se obtiene la igualdad pedida.

5.16

$$G = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

La matriz $G = AB^T + C$ es invertible. Así, $X = G^{-1}D = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}$.

5.17

$$X = \frac{1}{3}A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo esta matriz en la ecuación se obtiene la igualdad pedida.

5.18 $\det A = a^2 + 1 \neq 0$ para todo valor real del parámetro: siempre es invertible.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+1} & \frac{1}{a^2+1} \\ -\frac{1}{a^2+1} & \frac{a}{a^2+1} \end{bmatrix}.$$

5.19 $\det A = 2a$. No es invertible exactamente para $a \in \{0\}$; en los demás casos sí lo es.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2a} & \frac{3}{2a} \end{bmatrix}.$$

5.20 $\det A = a\,(a-2)$. No es invertible exactamente para $a \in \{0, 2\}$; en los demás casos sí lo es.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}.$$

5.21 Si $a \notin \{-3, -1\}$: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.
Si $a = -3$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.
Si $a = -1$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.

5.22 $\det A = (a+1)\,(a+3)$. No es invertible exactamente para $a \in \{-3, -1\}$; en los demás casos sí lo es.
Si $a = 1$: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$.
Si $a = -1$: no tiene inversa.

5.23 $\det A = (t-2)\,(t+6)$. No es invertible exactamente para $t \in \{-6, 2\}$; en los demás casos sí lo es.
Si $t = 1$: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{7} & -\frac{12}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$.

5.24 $\det A = -(t-1)\,(t+1)$. No es invertible exactamente para $t \in \{-1, 1\}$; en los demás casos sí lo es.
Si $t = 2$: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

5.25

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{11}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo esta matriz en la ecuación se obtiene la igualdad pedida.

5.26 No existe. Ya la primera columna exigiría $u+v=2$, $2u+v=1$ y $3v=5$. Las dos primeras dan $u=-1, v=3$, que contradicen la tercera.

5.27 $\det A = 2 \neq 0$ para todo valor real del parámetro: siempre es invertible.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} \end{bmatrix}.$$

6 · Forma matricial de los sistemas

6.01 La forma matricial es $AX = b$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad X = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 106 \\ 64 \\ 36 \end{bmatrix}.$$

Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (106,\ 64,\ 36)\,.$$

6.02 La forma matricial es $AX = b$, con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \qquad X = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = (1,\ -5)\,.$$

6.03 La forma matricial es $AX = b$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \qquad X = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z, t) = (1,\ 0,\ 2,\ -5)\,.$$

6.04 La forma matricial es $AX = b$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad X = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z, t) = (8,\ -3,\ 2,\ 2)\,.$$

6.05 La forma matricial es $AX = b$, con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad X = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (1,\ 0,\ 0)\,.$$

6.06 La forma matricial es $AX = b$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & \frac{5}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{7}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{5}{11} & \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}, \qquad X = A^{-1}b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (-1,\ 2,\ -2)\,.$$

6.07 La forma matricial es $AX = b$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad X = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (2,\ -3,\ 1)\,.$$

6.08 La forma matricial es $AX = b$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad X = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (0,\ 1,\ 1)\,.$$

6.09 Las ecuaciones son

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

La forma matricial es $AX = b$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{\lambda + 4}{4},\ -\frac{3\lambda - 4}{4},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales.

6.10 Las ecuaciones son

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 3x-y=0 \\ 2x-y=1 \end{cases}$$

La forma matricial es $AX=b$, con

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Sistema incompatible: no tiene solución.

6.11 Las ecuaciones son

$$\begin{cases} x-y+4z=11 \\ 3x+y=5 \\ -x+z=2 \end{cases}$$

La forma matricial es $AX=b$, con

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b=\begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Sistema compatible determinado.

$$(x,y,z)=(1,\ 2,\ 3)\,.$$

6.12 Tras pasar el vector constante al segundo miembro, $AX=\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Multiplicando por la inversa, $X=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

7 · Razonamiento y varios parámetros

7.01

$$AB = \begin{bmatrix} 2k+1 & 2k+3 \\ 1-k & 1 \end{bmatrix}.$$

$\det(AB) = (2k-1)(k+2)$, de modo que es invertible si $k \neq 1/2, -2$. El producto BA es de orden 3 y tiene rango a lo sumo 2: nunca es invertible. El sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas nunca tiene solución única, porque el rango no puede alcanzar 3.

7.02 $\det A = -2 \neq 0$ para todos los valores reales de a, b: siempre es compatible determinado. Para $a = b = 1$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

7.03 a) Sí: por ejemplo, $x+y = 1$, $2x+2y = 2$ tiene infinitas soluciones. b) No: el rango es menor que el número de incógnitas. c) No se aplica directamente al sistema completo, porque Cramer requiere determinante no nulo; si es compatible, puede aplicarse a un subsistema independiente después de elegir variables libres.

7.04 La ampliada tiene también rango 3 porque la columna independiente es nula. El rango coincide con las tres incógnitas: la única solución es $(0, 0, 0)$.

7.05 El máximo es 2: añadir una sola columna puede aumentar el rango a lo sumo en una unidad. El rango ampliado puede ser 1 o 2.

7.06 a) Añade $3x - 2y + z = 6$: contradice la primera ecuación. b) Añade $z = 0$: el determinante de los coeficientes es $-5 \neq 0$; las tres ecuaciones tienen la solución única $(23/5, 22/5, 0)$.

7.07 S es $AX = (1, 0)^T$ y S' es $AX = (0, 1)^T$. Como $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{bmatrix}$, sus soluciones son $(4, -11)$ y $(-1, 3)$, respectivamente: son las columnas de la inversa.

7.08 Los planos no tienen ningún punto común. Pueden ser dos planos paralelos distintos y un tercero secante a ambos, o tres planos secantes dos a dos cuyas rectas de intersección son paralelas. Ejemplo del primer caso: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$. Del segundo: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$. En ambos casos los rangos son 2 y 3.

7.09 No. Si uno tiene solución única, A tiene rango 4 y es invertible. Entonces para cualquier segundo miembro hay una única solución, $X = A^{-1}B$ o $X = A^{-1}B'$.

7.10 Al multiplicar, las ecuaciones son $x + 2y + z = 0$ y $-2x + y + 2z = 0$. Por tanto, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7.11 $\det A = 0$. **Si** $a \notin \{-1\}$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $a = -1$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z, t) = \left(-\frac{2\lambda - 5}{3},\ -\frac{4\,(\lambda - 1)}{3},\ \frac{5\lambda - 8}{3},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales.

7.12 $\det A = a^3$. **Si** $a \notin \{0\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z, t) = \left(\frac{2a + 1}{a^2},\ \frac{1}{a^2},\ -\frac{1}{a},\ -1\right).$$

Si $a = 0$: Sistema incompatible: no tiene solución.

7.13 $\det A = 5a$. Si $a \notin \{0\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{2a + b + 4}{5a},\ -\frac{4\,(3a - b - 4)}{5a},\ \frac{b + 4}{a}\right).$$

Si $a = 0$ y $b = -4$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{\lambda + 2}{5},\ \frac{4\,(\lambda - 3)}{5},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales. Para $a = 0$ y $b \neq -4$, el sistema es incompatible.

7.14 $\det A = -\,(a - 2)\,(a - 1)$. Si $a \notin \{1, 2\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{a^2 - a - b - 1}{a - 2},\ -\frac{a - b - 1}{a - 1},\ -\frac{a^2 - 2a - b + 1}{(a - 2)\,(a - 1)}\right).$$

Si $a = 1$ y $b = 0$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (1,\ -\lambda - 1,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales. Para $a = 1$ y $b \neq 0$, el sistema es incompatible.
Si $a = 2$ y $b = 1$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (1 - \lambda,\ 0,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales. Para $a = 2$ y $b \neq 1$, el sistema es incompatible.

7.15 $\det A = 6 \neq 0$, por lo que siempre hay solución única. Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{b + c}{2},\ -\frac{a - c}{3},\ -\frac{b - c}{2}\right).$$

7.16 $\det A = (a-2)(a+1)$. Si $a \notin \{-1, 2\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{2ab - a - b - 1}{(a-2)(a+1)},\ \frac{ab + a - 5b + 1}{(a-2)(a+1)},\ \frac{a^2b + ab - a - 3b - 1}{(a-2)(a+1)} \right).$$

Si $a = -1$ y $b = 0$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (\lambda,\ 2\lambda - 1,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales. Para $a = -1$ y $b \neq 0$, el sistema es incompatible.
Si $a = 2$ y $b = 1$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (\lambda - 1,\ 2 - \lambda,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales. Para $a = 2$ y $b \neq 1$, el sistema es incompatible.

7.17 $\det A = (a-1)^2(a+2)$. Si $a \notin \{-2, 1\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{a - b}{(a-1)(a+2)},\ \frac{ab + b - 2}{(a-1)(a+2)},\ \frac{a - b}{(a-1)(a+2)} \right).$$

Si $a = 1$ y $b = 1$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (-\lambda - \mu + 1,\ \lambda,\ \mu).$$

Los parámetros son números reales. Para $a = 1$ y $b \neq 1$, el sistema es incompatible.
Si $a = -2$ y $b = -2$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (\lambda,\ \lambda + 1,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales. Para $a = -2$ y $b \neq -2$, el sistema es incompatible.

7.18 $\det A = (a-1)(a+1)$. Si $a \notin \{-1, 1\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{b + 4}{a - 1},\ -\frac{2b}{a + 1},\ -\frac{a^2b - ab + 4a + 2b + 4}{(a-1)(a+1)} \right).$$

Si $a = -1$ y $b = 0$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (-2,\ 2 - \lambda,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales. Para $a = -1$ y $b \neq 0$, el sistema es incompatible.
Si $a = 1$ y $b = -4$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (-\lambda,\ 4,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales. Para $a = 1$ y $b \neq -4$, el sistema es incompatible.

---

8 · Autoevaluación

8.01 $\det A = (a-1)^2(a+2)$. **Si** $a \notin \{-2, 1\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{a}{a-1},\ \frac{a+2}{a-1},\ -\frac{2(a+1)}{a-1}\right).$$

Si $a = -2$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{3\lambda+4}{3},\ \frac{3\lambda+2}{3},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales.
Si $a = 1$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Para $a = -1$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right).$$

8.02 $\det A = 4 - m$. **Si** $m \notin \{4\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (1,\ 0,\ 2).$$

Si $m = 4$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (\lambda - 1,\ 2 - \lambda,\ \lambda).$$

Los parámetros son números reales. En todos los casos es compatible: nunca queda una contradicción.

8.03 $\det A = -2a(a-1)(a+1)$. No es invertible exactamente para $a \in \{-1, 0, 1\}$; en los demás casos sí lo es.
Si $a = 2$: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

8.04

$$X = ABA^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo esta matriz en la ecuación se obtiene la igualdad pedida.

8.05

$$X = B^{-1} - A = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo esta matriz en la ecuación se obtiene la igualdad pedida.

8.06 El rango ampliado puede ser 3 o 4. Si es 3, el sistema tiene una única solución porque el rango coincide con las tres incógnitas. Si es 4, es incompatible y no tiene solución.

8.07 **Si** $a \notin \{14\}$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $a = 14$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = (17,\ 8,\ 6).$$

8.08 La ampliada también tiene rango 2. Como hay dos incógnitas, la solución es única: $(x, y) = (0, 0)$.
