2.º BACHILLERATO

Puntos, rectas y planos en el espacio

Matemáticas Aplicadas
a las Ciencias Sociales II

Practica, razona y comprueba tus respuestas.

1 Puntos y segmentos
2 Ecuaciones de rectas
3 Ecuaciones de planos
4 Posiciones relativas de rectas
5 Intersecciones de rectas y planos
6 Interpretación y representación de figuras
7 Razonamiento y demostraciones
8 Autoevaluación

137 actividades · 8 bloques

TU RUTA DE TRABAJO

Índice

Ejercicios organizados por contenidos, con espacio para trabajar y soluciones al final.

1 Puntos y segmentos 3

2 Ecuaciones de rectas 8

3 Ecuaciones de planos 14

4 Posiciones relativas de rectas 20

5 Intersecciones de rectas y planos 26

6 Interpretación y representación de figuras 33

7 Razonamiento y demostraciones 40

8 Autoevaluación 44

Solucionario 48

Cómo usar el dosier
El código 2.03 identifica la tercera actividad del bloque 2. Busca ese mismo código en el solucionario. Justifica los procedimientos y comprueba los resultados en los enunciados.

BLOQUE 1

Puntos y segmentos

1.01 Comprueba que $A(5, 2)$, $B(8, 3)$ y $C(13, 5)$ no están alineados.

1.02 Halla n para que $D(9, n)$ esté alineado con $A(5, 2)$ y $B(8, 3)$.

1.03 Representa en unos ejes los puntos $P\,(5,\ 2,\ 3)$, $Q\,(3,\ -2,\ 5)$, $R\,(1,\ 4,\ 0)$, $S\,(0,\ 0,\ 4)$, $T\,(0,\ 6,\ 3)$.

1.04 Sitúa un punto P en unos ejes tridimensionales. Proyéctalo sobre el plano XY y explica cómo se determinan sus coordenadas.

1.05 Calcula m, n para que $P(7, -1, m)$, $Q(8, 6, 3)$ y $R(10, n, 9)$ estén alineados.

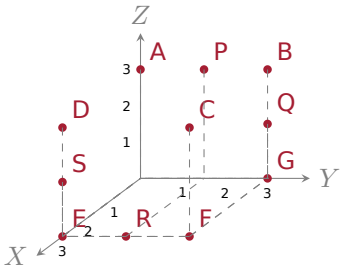
1.06 Halla los puntos medios de los lados del triángulo.

$$A\,(1,\ -3,\ 5)\,, \qquad B\,(0,\ 7,\ 2)\,, \qquad C\,(-1,\ 5,\ 6)\,.$$

1.07 Calcula: a) el punto medio de AB; b) el simétrico de B respecto de A; c) $M \in AB$ con $AM = 2MB$; d) $N \in AB$ con $NB = 3AN$.

$$A\,(-3,\ 5,\ 11)\,, \qquad B\,(3,\ 5,\ -1)\,.$$

1.08 Asocia a cada punto sus coordenadas: $(0,0,3)$, $(0,3,3)$, $(3,3,3)$, $(3,0,3)$, $(3,0,0)$, $(3,3,0)$, $(0,3,0)$, $(0,3/2,3)$, $(0,3,3/2)$, $(3,3/2,0)$ y $(3,0,3/2)$.



1.09 Comprueba si los puntos están alineados.

$$A\,(1,\ -2,\ 1)\,, \qquad B\,(2,\ 3,\ 0)\,, \qquad C\,(-1,\ 0,\ -4)\,.$$

1.10 Halla a, b para que $A(1,2,-1)$, $B(3,0,-2)$ y $C(4,a,b)$ estén alineados.

1.11 Con $A(2,0,1)$ y $B(7,5,-4)$, halla P, Q tales que $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}$.

1.12 Halla el simétrico de $A(-2,3,0)$ respecto de $M(1,-1,2)$.

1.13 Los puntos son vértices consecutivos de un paralelogramo. Halla el cuarto vértice D y el centro.

$$A\,(1,\ 3,\ -1)\,, \qquad B\,(2,\ 0,\ 2)\,, \qquad C\,(4,\ -1,\ -3)\,.$$

1.14 Comprueba si los puntos están alineados.

$$A\,(3,\ 1,\ 0)\,, \qquad B\,(0,\ -5,\ 1)\,, \qquad C\,(6,\ -5,\ 1)\,.$$

1.15 Divide el segmento de $P(4,-1,8)$ a $Q(-1,9,8)$ en cinco partes iguales. Halla el punto V situado a dos partes de P.

1.16 Divide el segmento de $P(2,11,-15)$ a $Q(9,-3,6)$ en siete partes iguales. Halla el punto W situado a dos partes de P.

BLOQUE 2

Ecuaciones de rectas

2.01 Halla las ecuaciones paramétricas e implícita de la recta del plano que pasa por $(1, 4)$ y tiene dirección $(5, 2)$.

2.02 Halla las ecuaciones paramétricas e implícita de la recta del plano que pasa por $(-1, 0)$ y tiene dirección $(1, -1)$.

2.03 Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por estos puntos.

$$A\,(2,\ 0,\ 5)\,, \qquad B\,(-1,\ 4,\ 6)\,.$$

2.04 Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por estos puntos.

$$A\,(5,\ 1,\ 7)\,, \qquad B\,(9,\ -3,\ -1)\,.$$

2.05 Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por estos puntos.

$$A\,(1,\ 0,\ -3)\,, \qquad B\,(1,\ 4,\ -3)\,.$$

2.06 Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por estos puntos.

$$A\,(0,\ 2,\ 3)\,, \qquad B\,(0,\ 2,\ 1)\,.$$

2.07 Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por estos puntos.

$$A\,(-5,\ 3,\ 7)\,, \qquad B\,(2,\ -3,\ 3)\,.$$

2.08 Da seis puntos distintos de $A(-5,3,7)$ y $B(2,-3,3)$ pertenecientes a la recta AB.

2.09 Comprueba cuáles de los puntos $A(5,0,0)$, $B(3,3,4)$, $C(15,-15,4)$ y $D(1,6,0)$ pertenecen a la recta.

$$r: \quad (x,y,z) = (5,\ 0,\ 4) + \lambda\,(-2,\ 3,\ 0)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2.10 Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por estos puntos.

$$A\,(-3,\ 2,\ 1)\,, \qquad B\left(-\frac{5}{2},\ \frac{3}{2},\ 0\right).$$

2.11 Escribe las ecuaciones paramétricas e implícitas del eje X.

2.12 Escribe las ecuaciones paramétricas e implícitas del eje Y.

2.13 Escribe las ecuaciones paramétricas e implícitas del eje Z.

2.14 Halla las ecuaciones de la recta que pasa por $(-4, 2, 5)$ y es paralela al eje Z.

2.15 Halla la recta que pasa por $(1, -3, 0)$ y es paralela a $\vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{u} = (1,\ -1,\ 2)\,, \qquad \vec{v} = (2,\ 0,\ 0)\,.$$

2.16 Halla un vector director y las ecuaciones paramétricas de la intersección de los planos.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

2.17 Expresa como intersección de dos planos la recta $x/2 = (y+1)/(-1) = z$.

2.18 Halla una recta paralela a r que pase por el corte de s con π.

$$\begin{cases} x+2z=5 \\ y+3z=5 \end{cases}$$

$$s: \quad (x,y,z)=(1,\ -3,\ -2)+\lambda\,(4,\ 2,\ 3)\,, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

$\pi: x-y+z=7$.

2.19 Halla la recta por $P(1,2,3)$ perpendicular al plano por $O(0,0,0)$, $B(1,1,1)$ y $C(1,2,1)$.

BLOQUE 3

Ecuaciones de planos

3.01 Halla las ecuaciones paramétricas e implícita del plano que pasa por estos puntos.

$$A\,(1,\ 7,\ -2)\,, \qquad B\,(4,\ 5,\ 0)\,, \qquad C\,(6,\ 3,\ 8)\,.$$

Da otros tres puntos del plano y halla n para que $(1, n, 5)$ pertenezca a él.

3.02 Halla el plano determinado por $A(1, -3, 2)$ y los vectores $(2, 1, 0)$ y $(-1, 0, 3)$.

3.03 Halla el plano que pasa por $(2, -3, 1)$ y tiene normal $(5, -3, -4)$.

3.04 Halla el plano por $(1, 0, 1)$ perpendicular a la recta $x/2 = (y + 1)/(-1) = z/3$.

3.05 Escribe las ecuaciones del plano XY.

3.06 Escribe las ecuaciones del plano YZ.

3.07 Escribe las ecuaciones del plano XZ.

3.08 Escribe ecuaciones paramétricas de $z = 3$.

3.09 Escribe ecuaciones paramétricas de $x = -1$.

3.10 Escribe ecuaciones paramétricas de $y = 2$.

3.11 Halla las ecuaciones paramétricas e implícita del plano que pasa por estos puntos.

$$A\,(0,\ 0,\ 0)\,, \qquad B\,(2,\ 2,\ 0)\,, \qquad C\,(1,\ 1,\ 2)\,.$$

3.12 Halla el plano que contiene el punto y la recta.

$$P\,(2,\ 1,\ 2)\,.$$

$$r: \quad (x, y, z) = (2,\ 3,\ 4) + \lambda\,(1,\ -1,\ -3)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

3.13 ¿Son coplanarios los puntos siguientes? Si lo son, halla su plano.

$$A\,(1,\ 0,\ 0)\,, \qquad B\,(0,\ 1,\ 0)\,, \qquad C\,(2,\ 1,\ 0)\,, \qquad D\,(-1,\ 2,\ 1)\,.$$

3.14 Halla el plano que contiene el punto y la recta.

$$P\,(1,\ 0,\ 1)\,.$$

$$r: \quad (x,y,z) = \left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ 0\right) + \lambda\,(1,\ -4,\ -3)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

3.15 Halla las ecuaciones paramétricas e implícita del plano que pasa por estos puntos.

$$A\,(2,\ 2,\ 1)\,, \qquad B\,(6,\ 1,\ -1)\,, \qquad C\,(0,\ -2,\ -1)\,.$$

Resuélvelo mediante vectores y planteando una ecuación general.

3.16 Halla el plano por $A(1,3,2)$ y $B(-2,5,0)$ paralelo a esta recta.

$$r: \quad (x,y,z) = (3,\ 2,\ -2) + \lambda\,(-1,\ 1,\ -3)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

3.17 Halla el plano que contiene r y es paralelo a s.

$$r: \quad (x,y,z) = (2,\ -1,\ 0) + \lambda\,(3,\ -1,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x,y,z) = (3,\ -1,\ 0) + \lambda\,(5,\ 2,\ -3)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

3.18 Halla m para que $A(m,0,1)$, $B(0,1,2)$, $C(1,2,3)$ y $D(7,2,1)$ sean coplanarios. Escribe el plano.

3.19 Halla el plano que contiene la recta siguiente y es perpendicular a $2x - 3y + z = 0$.

$$r: \quad (x,y,z) = (1,\ 2,\ -1) + \lambda\,(1,\ -1,\ 2)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

3.20 Halla el plano por $A(1,-3,2)$ y $B(0,1,1)$ paralelo a la recta.

$$\begin{cases} 3x-2y=-1 \\ 2y+3z=3 \end{cases}$$

3.21 Halla el plano que contiene r y es paralelo a $s:(1-x)/(-2)=y/3=(z+2)/(-4)$.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$$

3.22 Halla el plano por $(-1,-1,1)$ con normal $(1,-2,-1)$ y las ecuaciones de su intersección con $z-1=0$.

BLOQUE 4

Posiciones relativas de rectas

4.01 Estudia la posición relativa de las rectas y calcula el punto de corte, si existe.

$$r: \quad (x, y, z) = (1,\ 2,\ -5) + \lambda\,(-5,\ 3,\ 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x, y, z) = (1,\ 1,\ 0) + \mu\,(0,\ 0,\ 1), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

4.02 Estudia la posición relativa de las rectas y calcula el punto de corte, si existe.

$$r: \quad (x, y, z) = (3,\ 1,\ 5) + \lambda\,(2,\ -1,\ 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x, y, z) = (-1,\ 3,\ 5) + \mu\,(-6,\ 3,\ 0), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

4.03 Estudia la posición relativa de las rectas y calcula el punto de corte, si existe.

$$r: \quad (x,y,z) = (0,\ 0,\ 0) + \lambda\,(1,\ 1,\ 0)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x,y,z) = (3,\ 3,\ 0) + \mu\,(0,\ 0,\ 1)\,, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

4.04 Estudia la posición relativa de las rectas y calcula el punto de corte, si existe.

$$r: \quad (x,y,z) = (3,\ -2,\ 1) + \lambda\,(1,\ -1,\ 0)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x,y,z) = (0,\ 3,\ -1) + \mu\,(-2,\ 2,\ 0)\,, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

4.05 Estudia la posición relativa de las rectas y calcula el punto de corte, si existe.

$$r: \quad (x,y,z) = (1,\ -2,\ 1) + \lambda\,(3,\ 2,\ 4)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x,y,z) = (-2,\ 3,\ 2) + \mu\,(-1,\ 2,\ 3)\,, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

4.06 Estudia la posición relativa de las rectas y calcula el punto de corte, si existe.

$$r: \quad (x, y, z) = (1,\ 1,\ 2) + \lambda\,(-1,\ 2,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x, y, z) = (4,\ 4,\ 5) + \mu\,(4,\ 1,\ 2)\,, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

4.07 Estudia la posición relativa de las rectas y calcula el punto de corte, si existe.

$$r: \quad (x, y, z) = (0,\ 1,\ -1) + \lambda\,(2,\ 1,\ 3)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x, y, z) = (1,\ 0,\ 1) + \mu\,(2,\ 1,\ 3)\,, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

4.08 Estudia la posición relativa de las rectas y calcula el punto de corte, si existe.

$$r: \quad (x, y, z) = (1,\ 0,\ 0) + \lambda\,(2,\ 3,\ 4)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x, y, z) = (3,\ 3,\ 4) + \mu\,(4,\ 6,\ 8)\,, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

4.09 Halla a para que $r: x = y = z - a$ y $s: \frac{2x-1}{3} = \frac{y+3}{-2}$, $z = 2$, se corten. Calcula el punto común.

4.10 Halla m, n para que las rectas sean paralelas.

$$r: \quad (x, y, z) = (5,\ 3,\ 0) + \lambda\,(4,\ 1,\ -1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x, y, z) = (0,\ 1,\ -3) + \lambda\,(m,\ 3,\ n)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.11 ¿Se puede construir un triángulo con dos lados sobre estas rectas?

$$r: \quad (x, y, z) = (1,\ 0,\ -1) + \lambda\,(2,\ 1,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x, y, z) = (2,\ -1,\ 0) + \lambda\,(0,\ 1,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.12 Halla b para que las rectas se corten y calcula el punto común.

$$r: \quad (x, y, z) = (1,\ -5,\ -1) + \lambda\,(2,\ -3,\ 2)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x, y, z) = (0,\ b,\ 1) + \lambda\,(4,\ -1,\ 2)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.13 Determina k para que las rectas sean coplanarias y halla el plano que las contiene.

$$r: \quad (x, y, z) = (0,\ k,\ 0) + \lambda\,(1,\ 1,\ 0)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x, y, z) = (1,\ 1,\ -1) + \lambda\,(1,\ -1,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.14 Determina k para que las rectas sean coplanarias y halla el plano que las contiene.

$$r: \quad (x, y, z) = (6,\ 3,\ 3) + \lambda\,(3,\ 2,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x, y, z) = (6,\ 4,\ 3) + \lambda\,(6,\ k,\ 2)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.15 Estudia la posición relativa y, si existe, halla el plano que contiene ambas rectas.

$$r: \quad (x,y,z) = (1,\ 1,\ 1) + \lambda\,(2,\ 0,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} x - 2z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

4.16 Determina cuándo las rectas son coplanarias y calcula el plano en ese caso. Estudia también cuándo son paralelas o se cruzan.

$$r: \begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ ax - 3z + 3 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - 2ay + 4a - 1 = 0 \\ 2y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

BLOQUE 5

Intersecciones de rectas y planos

5.01 Estudia la posición relativa y calcula la intersección, si existe.

$$r: \quad (x,y,z) = (2,\ -1,\ 0) + \lambda\,(3,\ 3,\ -1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\pi: \ 2x - y + 3z - 8 = 0.$$

5.02 Estudia la posición relativa de estos tres planos.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 8 \\ x + 3y - z = 5 \\ 2x + 6y - 2z = 5 \end{cases}$$

Estudia también cada par.

5.03 Da un vector normal al plano $x = -1$ y escribe una recta perpendicular que pase por $(2, 3, 0)$.

5.04 Halla m, n para que los planos $mx + y - 3z - 1 = 0$ y $2x + ny - z - 3 = 0$ sean paralelos. ¿Pueden coincidir?

5.05 Estudia la posición relativa y calcula la intersección, si existe.

$$r: \quad (x, y, z) = (3,\ -1,\ 0) + \lambda\,(2,\ 1,\ -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\pi: \ x - y + z - 3 = 0.$$

5.06 Comprueba que las rectas son paralelas y halla el plano que las contiene.

$$r: \quad (x, y, z) = (1,\ 0,\ 2) + \lambda\,(2,\ 1,\ 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} x - 2z = 5 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$$

5.07 Estudia la posición relativa de estos tres planos.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 3y + 2z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

5.08 Estudia la posición relativa de estos tres planos.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$$

5.09 Estudia la posición relativa de estos tres planos.

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = -4 \end{cases}$$

5.10 Halla la intersección de $\pi_1 : (x, y, z) = (2, 0, 3) + \lambda(0, 3, -3) + \mu(-1, 1, 0)$ y $\pi_2 : x + y - z = 3$.

5.11 Estudia la posición relativa y calcula la intersección, si existe.

$$r: \quad (x, y, z) = (3,\ 2,\ 0) + \lambda\,(0,\ 0,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\pi: \ z - 1 = 0.$$

5.12 Para la recta siguiente y el plano $ax - y + 4z - 2 = 0$: a) halla a para que sean paralelos; b) ¿pueden ser perpendiculares?

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ 2x - z = -3 \end{cases}$$

5.13 Halla una recta contenida en $x + 2y + 3z - 1 = 0$, por $P(2, 1, -1)$ y perpendicular a esta recta.

$$\begin{cases} x - 2z = -3 \\ y - z = 4 \end{cases}$$

5.14 Halla m para que los planos $mx + 2y - 3z - 1 = 0$ y $2x - 4y + 6z + 5 = 0$ sean: a) paralelos; b) perpendiculares.

5.15 Estudia según a la posición relativa de los planos $\pi : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ y $\pi' : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda\vec{w} + \mu\vec{p}$.

$$\vec{u} = (2,\ 3,\ 5)\,, \qquad \vec{v} = (6,\ -3,\ 2)\,, \qquad \vec{w} = (4,\ -6,\ 3)\,, \qquad \vec{p} = (8,\ 0,\ a)\,.$$

5.16 Estudia la posición relativa según m.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ mz + x + y\,(m+1) = m + 1 \end{cases}$$

5.17 Halla una recta que pase por P y corte a r_1 y r_2.

$$P\,(2,\ 0,\ -1)\,.$$

$$r_1:\quad (x,y,z)=(2,\ 2,\ -1)+\lambda\,(2,\ -1,\ 1)\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$
$$r_2:\quad (x,y,z)=(-1,\ -3,\ 0)+\lambda\,(3,\ -3,\ -1)\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

5.18 Estudia la posición relativa según a.

$$\begin{cases} -az+2x+y=2\\ x-y-z=a-1\\ ay+x-z=1\end{cases}$$

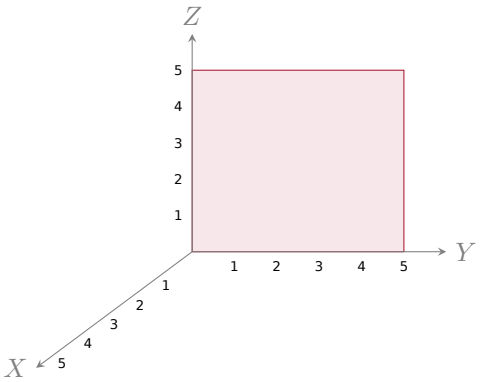
5.19 Prueba que los planos $ax+y+z=a$ y $x-ay+az=-1$ se cortan en una recta para cualquier a. Obtén una dirección.

5.20 Halla la recta por $A(1,1,1)$ paralela al plano $x-y+z-3=0$ que corte a $s: x=1, y=3$.

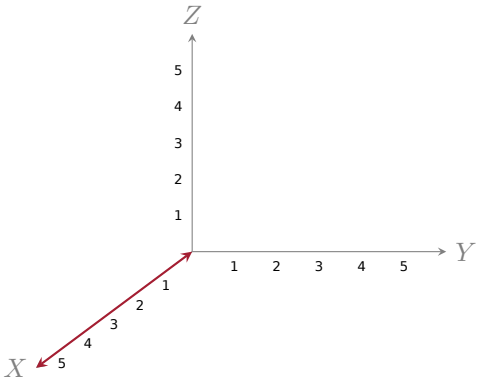
BLOQUE 6

Interpretación y representación de figuras

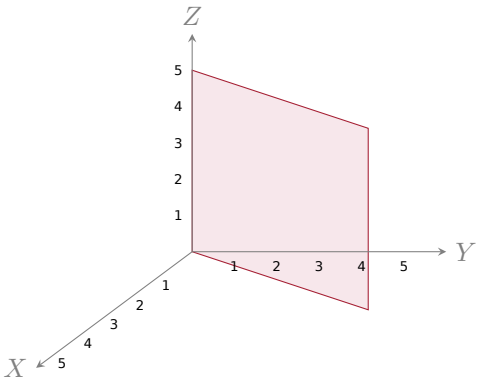
6.01 Escribe las ecuaciones implícitas y paramétricas de la figura. Las marcas de los ejes indican unidades.



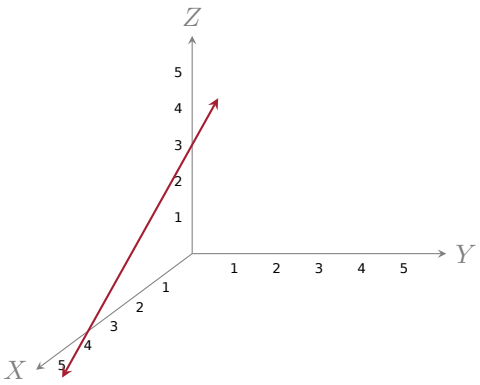
6.02 Escribe las ecuaciones implícitas y paramétricas de la figura. Las marcas de los ejes indican unidades.



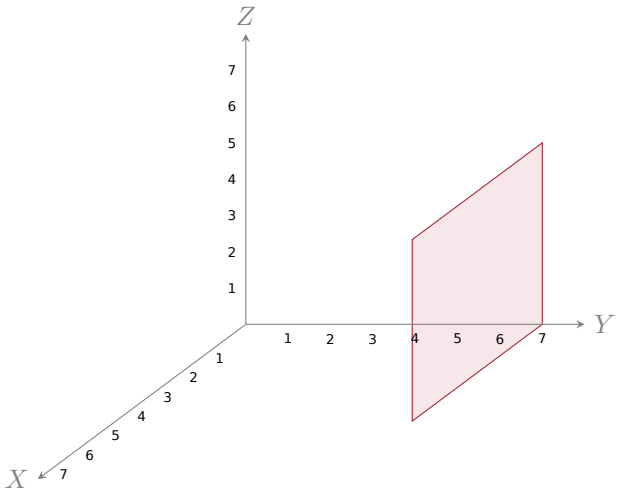
6.03 Escribe las ecuaciones implícitas y paramétricas de la figura. Las marcas de los ejes indican unidades.



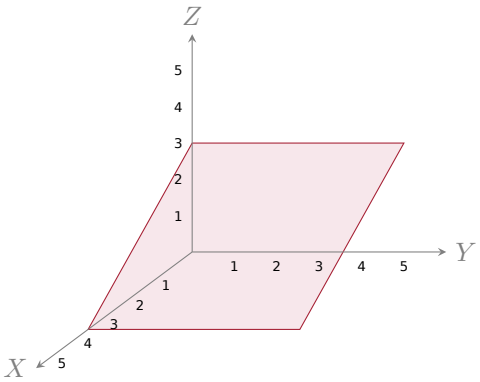
6.04 Escribe las ecuaciones implícitas y paramétricas de la figura. Las marcas de los ejes indican unidades.



6.05 Escribe las ecuaciones implícitas y paramétricas de la figura. Las marcas de los ejes indican unidades.



6.06 Escribe las ecuaciones implícitas y paramétricas de la figura. Las marcas de los ejes indican unidades.



6.07 Describe y representa la figura definida por $z = 4$. Los parámetros son reales e independientes.

6.08 Describe y representa la figura definida por $(x, y, z) = (\lambda, \mu, 4)$. Los parámetros son reales e independientes.

6.09 Describe y representa la figura definida por $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, 4)$. Los parámetros son reales e independientes.

6.10 Describe y representa la figura definida por $(x, y, z) = (\lambda, 0, 4)$. Los parámetros son reales e independientes.

6.11 Describe y representa la figura definida por $y = 0,\ z = 4$. Los parámetros son reales e independientes.

6.12 Describe y representa la figura definida por $x = 0,\ z = 0$. Los parámetros son reales e independientes.

6.13 Describe y representa la figura definida por $y = 0$. Los parámetros son reales e independientes.

6.14 Describe y representa la figura definida por $(x, y, z) = (3, 0, \lambda + \mu)$. Los parámetros son reales e independientes.

6.15 Describe y representa la figura definida por $x = 3,\ y = 4,\ z = 5$. Los parámetros son reales e independientes.

6.16 Describe y representa la figura definida por $(x, y, z) = (\lambda, \mu, \tau)$. Los parámetros son reales e independientes.

6.17 Describe y representa la figura definida por $x + y + z = 1$. Los parámetros son reales e independientes.

6.18 Describe y representa la figura definida por $x + y + z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$. Los parámetros son reales e independientes.

BLOQUE 7

Razonamiento y demostraciones

7.01 Sea S el simétrico de A respecto de B. Expresa $\overrightarrow{OS}$ de dos formas mediante sumas de vectores.

7.02 ¿Qué deben cumplir los dos vectores que, junto con un punto, determinan un plano?

7.03 Explica cómo pasar de la forma implícita a la paramétrica y aplícalo a $x + 2y - z - 1 = 0$ y $2x - z + 8 = 0$.

7.04 Da las ecuaciones implícitas de la recta indicada abreviadamente como $(x-4)/0 = (y+3)/0 = (z-1)/2$.

7.05 ¿Por qué $(x, y, z) = (3, 5, 2+\lambda+\mu)$ no representa un plano aunque tenga dos parámetros? ¿Qué figura es?

7.06 ¿Qué posición deben tener dos rectas para determinar un único plano?

7.07 Si dos rectas están contenidas respectivamente en dos planos paralelos distintos, ¿tienen que ser paralelas?

7.08 Dos rectas se cruzan. Se construye el plano que contiene a cada una y es paralelo a la otra. ¿Cómo son esos dos planos?

7.09 Si $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ pertenecen a $ax + by + cz + d = 0$, demuestra que $\overrightarrow{AB} \perp (a, b, c)$.

7.10 Una recta está dada como intersección de dos planos. Al añadir la ecuación de un tercer plano, ¿qué significa que el sistema sea: a) incompatible; b) compatible indeterminado?

7.11 Indica las condiciones sobre a, b, c, d para que el plano $ax + by + cz + d = 0$ sea: a) paralelo a XY; b) perpendicular a XY; c) paralelo al eje Z; d) perpendicular al eje X; e) no paralelo a ningún eje.

7.12 Demuestra que el plano por $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ y $C(0, 0, c)$, con $abc \neq 0$, tiene ecuación $x/a + y/b + z/c = 1$. Halla los cortes de $x/5 + y/2 + z/7 = 1$ con los ejes.

7.13 El plano $ax+y+z+1=0$ corta las rectas $r_1: x=1, y=z$, $r_2: x=2, y=2z$ y $r_3: x=3, y=3z$. Halla a para que los tres puntos de corte estén alineados.

7.14 Demuestra que el punto situado a m de las $m+n$ partes iguales de un segmento PQ, contadas desde P, es $X=\frac{n}{m+n}P+\frac{m}{m+n}Q$. Justifica que $(1-t)P+tQ$ pertenece al segmento si $0\leq t\leq 1$.

BLOQUE 8

Autoevaluación

8.01 Dados $A(-4,3,3)$ y $B(6,3,-2)$, halla: a) el punto medio; b) el simétrico de B respecto de A; c) el punto Q situado a dos quintos del segmento desde A.

8.02 Dados $A(1,3,-2)$, $B(-5,4,1)$ y $C(7,2,4)$: a) halla la recta AB; b) calcula m,n para que $(3,m,n)$ pertenezca a ella; c) halla el plano ABC; d) calcula k para que $(k,7,-1)$ pertenezca al plano; e) describe la posición relativa de recta y plano.

8.03 Estudia la posición relativa de las rectas y calcula el punto de corte, si existe.

$$r: \quad (x,y,z) = (17,\ 1,\ 8) + \lambda\,(7,\ 0,\ 2)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x,y,z) = (15,\ -2,\ 19) + \mu\,(4,\ -1,\ 2)\,, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

8.04 Estudia la posición relativa de las rectas y calcula el punto de corte, si existe.

$$r: \quad (x,y,z) = (17,\ 1,\ 8) + \lambda\,(7,\ 0,\ 2)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x,y,z) = (15,\ -2,\ 19) + \mu\,(4,\ -1,\ 5)\,, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

8.05 Halla una recta que corte a r, s y sea paralela a t.

$$r: \quad (x,y,z) = (2,\ -3,\ 6) + \lambda\,(1,\ -1,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x,y,z) = (3,\ 0,\ -9) + \lambda\,(0,\ 1,\ -1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$t: \quad (x,y,z) = (8,\ 5,\ -6) + \lambda\,(-1,\ 1,\ 2)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

8.06 Halla una recta que pase por P y corte a r_1 y r_2.

$$P\,(2,\ 0,\ 1)\,.$$

$$r_1:\quad (x,y,z)=(1,\ 5,\ 2)+\lambda\,(0,\ 1,\ 2)\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

$$r_2:\quad (x,y,z)=(7,\ -15,\ 7)+\lambda\,(-1,\ 3,\ 0)\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

8.07 Describe y representa $y=3$.

8.08 Describe y representa $(x,y,z)=(0,3,\lambda)$.

8.09 Describe y representa $x = 0, y = 3, z = 0$.

8.10 Describe y representa $x = 0, z = 0$.

8.11 Describe y representa $(x, y, z) = (\lambda, \mu, 0)$.

8.12 Describe y representa $x = y = z$.

Solucionario

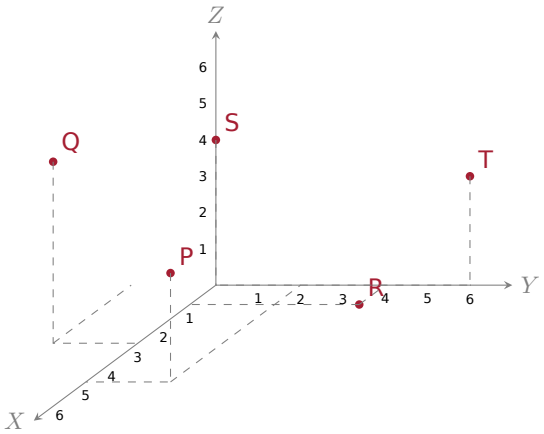
Los códigos corresponden a las actividades del dosier.

1 · Puntos y segmentos

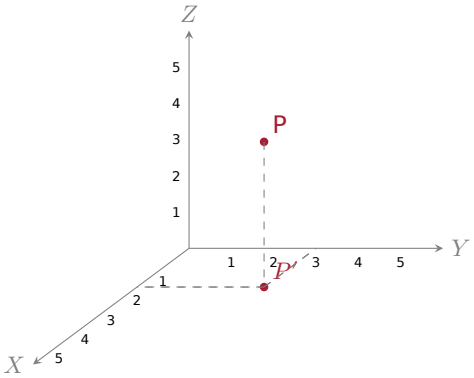
1.01 $\overrightarrow{AB} = (3, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (8, 3)$. Su determinante es $9 - 8 = 1 \neq 0$, luego no son proporcionales.

1.02 $\overrightarrow{AD} = (4, n-2)$ debe ser proporcional a $(3, 1)$. De $3(n-2) - 4 = 0$ se obtiene $n = 10/3$.

1.03 Las líneas auxiliares muestran sus proyecciones sobre los ejes y el plano XY.



1.04 Si $P = (a, b, c)$, su proyección vertical sobre XY es $P' = (a, b, 0)$. Las proyecciones de P' sobre X e Y dan a, b, y la altura orientada de P da c. Por ejemplo, $P = (2, 3, 4)$ se representa así:



1.05 $\overrightarrow{PR} = 3\overrightarrow{PQ}$ por las primeras componentes. Por tanto, $n + 1 = 3 \cdot 7$ y $9 - m = 3(3 - m)$. Se obtiene $n = 20$, $m = 0$.

1.06

$M_{AB} = (\frac{1}{2},\ 2,\ \frac{7}{2})$.
$M_{AC} = (0,\ 1,\ \frac{11}{2})$.
$M_{BC} = (-\frac{1}{2},\ 6,\ 4)$.

1.07
$P_m = (0,\ 5,\ 5)$.
$B' = (-9,\ 5,\ 23)$.
$M = (1,\ 5,\ 3)$.
$N = (-\frac{3}{2},\ 5,\ 8)$.

1.08 $A\,(0,\ 0,\ 3)$; $B\,(0,\ 3,\ 3)$; $C\,(3,\ 3,\ 3)$; $D\,(3,\ 0,\ 3)$; $E\,(3,\ 0,\ 0)$; $F\,(3,\ 3,\ 0)$; $G\,(0,\ 3,\ 0)$; $P\,(0,\ \frac{3}{2},\ 3)$; $Q\,(0,\ 3,\ \frac{3}{2})$; $R\,(3,\ \frac{3}{2},\ 0)$; $S\,(3,\ 0,\ \frac{3}{2})$.

1.09

$$\vec{AB} = (1,\ 5,\ -1)\,, \qquad \vec{AC} = (-2,\ 2,\ -5)\,.$$

El producto vectorial es $(-23,\ 7,\ 12) \neq \vec{0}$: no están alineados.

1.10 La primera coordenada da $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$. Así, $a - 2 = -3$ y $b + 1 = -3/2$. Por tanto, $a = -1$, $b = -5/2$.

1.11
$Q = (5,\ 3,\ -2)$.
$P = (4,\ 2,\ -1)$.

1.12
$A' = (4,\ -5,\ 4)$.M es el punto medio de AA', luego $A' = 2M - A$.

1.13
$D = (3,\ 2,\ -6)$.
$O = (\frac{5}{2},\ 1,\ -2)$.

1.14

$$\vec{AB} = (-3,\ -6,\ 1)\,, \qquad \vec{AC} = (3,\ -6,\ 1)\,.$$

El producto vectorial es $(0,\ 6,\ 36) \neq \vec{0}$: no están alineados.

1.15
$V = (2,\ 3,\ 8)$.$V = \frac{3}{5}P + \frac{2}{5}Q$.

1.16
$W = (4,\ 7,\ -9)$.$W = \frac{5}{7}P + \frac{2}{7}Q$.

2 · Ecuaciones de rectas

2.01 $(x, y) = (1, 4) + t(5, 2)$, es decir, $x = 1 + 5t$, $y = 4 + 2t$. Eliminando t: $2x - 5y + 18 = 0$.

2.02 $(x, y) = (-1, 0) + t(1, -1)$, es decir, $x = -1 + t$, $y = -t$. Su ecuación implícita es $x + y + 1 = 0$.

2.03

$$r: \quad (x, y, z) = (2,\ 0,\ 5) + \lambda\,(3,\ -4,\ -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = 3\lambda + 2 \\ y = -4\lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases}$$

Forma continua: $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z-5}{-1}$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 8 = 0 \\ x + 3z - 17 = 0 \end{cases}$$

2.04

$$r: \quad (x, y, z) = (5,\ 1,\ 7) + \lambda\,(1,\ -1,\ -2), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda + 5 \\ y = 1 - \lambda \\ z = 7 - 2\lambda \end{cases}$$

Forma continua: $\frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-7}{-2}$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ 2x + z - 17 = 0 \end{cases}$$

2.05

$$r: \quad (x, y, z) = (1,\ 0,\ -3) + \lambda\,(0,\ 1,\ 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = -3 \end{cases}$$

Coordenadas fijas: $x = 1,\ z = -3$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ z + 3 = 0 \end{cases}$$

2.06

$$r: \quad (x,y,z) = (0,\ 2,\ 3) + \lambda\,(0,\ 0,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = \lambda + 3 \end{cases}$$

Coordenadas fijas: $x = 0,\ y = 2$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

2.07

$$r: \quad (x,y,z) = (-5,\ 3,\ 7) + \lambda\,(7,\ -6,\ -4)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = 7\lambda - 5 \\ y = 3 - 6\lambda \\ z = 7 - 4\lambda \end{cases}$$

Forma continua: $\frac{x+5}{7} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-7}{-4}$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} 6x + 7y + 9 = 0 \\ 4x + 7z - 29 = 0 \end{cases}$$

2.08 Tomando $t = -3, -2, -1, 2, 3, 4$ en $A + t(B - A)$ se obtienen: $(-26,\ 21,\ 19)$, $(-19,\ 15,\ 15)$, $(-12,\ 9,\ 11)$, $(9,\ -9,\ -1)$, $(16,\ -15,\ -5)$, $(23,\ -21,\ -9)$.

2.09 A y D no pertenecen porque su coordenada z no es 4. B pertenece con $\lambda = 1$ y C con $\lambda = -5$.

2.10

$$r: \quad (x,y,z) = (-3,\ 2,\ 1) + \lambda\,(1,\ -1,\ -2)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda - 3 \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

Forma continua: $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-2}$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x + z + 5 = 0 \end{cases}$$

2.11

$$r: \quad (x,y,z) = (0,\ 0,\ 0) + \lambda\,(1,\ 0,\ 0)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Coordenadas fijas: $y = 0,\ z = 0$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

2.12

$$r: \quad (x,y,z) = (0,\ 0,\ 0) + \lambda\,(0,\ 1,\ 0)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Coordenadas fijas: $x = 0,\ z = 0$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

2.13

$$r: \quad (x,y,z) = (0,\ 0,\ 0) + \lambda\,(0,\ 0,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Coordenadas fijas: $x = 0,\ y = 0$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

2.14

$$r: \quad (x,y,z) = (-4,\ 2,\ 5) + \lambda\,(0,\ 0,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \\ z = \lambda + 5 \end{cases}$$

Coordenadas fijas: $x = -4,\ y = 2$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} x + 4 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

2.15 $\vec{u} \times \vec{v} = (0,\ 4,\ 2)$.

$$r: \quad (x,y,z) = (1,\ -3,\ 0) + \lambda\,(0,\ 2,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2\lambda - 3 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Forma continua: $\frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$. Coordenadas fijas: $x = 1$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

2.16

$$\vec{d} = (1,\ 1,\ -1)\,.$$

$$r: \quad (x, y, z) = (2,\ 2,\ 0) + \lambda\,(1,\ 1,\ -1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = \lambda + 2 \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Forma continua: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

2.17 Igualando con z, quedan $x - 2z = 0$ y $y + z + 1 = 0$.

2.18 La intersección es $(5,\ -1,\ 1)$ y una dirección de r es $(2,\ 3,\ -1)$.

$$r: \quad (x, y, z) = (5,\ -1,\ 1) + \lambda\,(2,\ 3,\ -1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2\lambda + 5 \\ y = 3\lambda - 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Forma continua: $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 17 = 0 \\ x + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

2.19 Una normal del plano es $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} = (-1,\ 0,\ 1)$.

$$r: \quad (x, y, z) = (1,\ 2,\ 3) + \lambda\,(1,\ 0,\ -1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

Forma continua: $\frac{x-1}{1} = \frac{z-3}{-1}$. Coordenadas fijas: $y = 2$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} y - 2 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$$

---

3 · Ecuaciones de planos

3.01 Un vector normal es $\vec{n} = (6,\ 10,\ 1)$.

$$6x + 10y + z - 74 = 0.$$

Una parametrización es

$$(x, y, z) = (1,\ 7,\ -2) + \lambda\,(3,\ -2,\ 2) + \mu\,(5,\ -4,\ 10)\,, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Otros puntos son $(7,\ 3,\ 2)$, $(11,\ -1,\ 18)$, $(9,\ 1,\ 10)$. Sustituyendo $(1, n, 5)$ se obtiene $n = \frac{63}{10}$.

3.02 Un vector normal es $\vec{n} = (3,\ -6,\ 1)$.

$$3x - 6y + z - 23 = 0.$$

Una parametrización es

$$(x, y, z) = (1,\ -3,\ 2) + \lambda\,(2,\ 1,\ 0) + \mu\,(-1,\ 0,\ 3)\,, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3.03 Un vector normal es $(5,\ -3,\ -4)$. El plano es $5x - 3y - 4z - 15 = 0$.

3.04 Un vector normal es $(2,\ -1,\ 3)$. El plano es $2x - y + 3z - 5 = 0$.

3.05 $z = 0$ y $(x, y, z) = (\lambda, \mu, 0)$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3.06 $x = 0$ y $(x, y, z) = (0, \lambda, \mu)$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3.07 $y = 0$ y $(x, y, z) = (\lambda, 0, \mu)$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3.08 $(x, y, z) = (\lambda, \mu, 3)$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3.09 $(x, y, z) = (-1, \lambda, \mu)$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3.10 $(x, y, z) = (\lambda, 2, \mu)$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3.11 Un vector normal es $\vec{n} = (1,\ -1,\ 0)$.

$$x - y = 0.$$

Una parametrización es

$$(x, y, z) = (0,\ 0,\ 0) + \lambda\,(2,\ 2,\ 0) + \mu\,(1,\ 1,\ 2)\,, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3.12 Un vector normal es $\vec{n} = (2,\ -1,\ 1)$.

$$2x - y + z - 5 = 0.$$

Una parametrización es

$$(x, y, z) = (2,\ 3,\ 4) + \lambda\,(1,\ -1,\ -3) + \mu\,(0,\ -2,\ -2)\,, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3.13 El producto mixto $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = -2 \neq 0$. No son coplanarios; no existe un plano que contenga los cuatro.

3.14 Un vector normal es $\vec{n} = (2,\ 5,\ -6)$.

$$2x + 5y - 6z + 4 = 0.$$

Una parametrización es

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ 0\right) + \lambda\,(1,\ -4,\ -3) + \mu\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ 1\right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3.15 Un vector normal es $\vec{n} = (1,\ -2,\ 3)$.

$$x - 2y + 3z - 1 = 0.$$

Una parametrización es

$$(x, y, z) = (2,\ 2,\ 1) + \lambda\,(4,\ -1,\ -2) + \mu\,(-2,\ -4,\ -2), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

También se obtiene imponiendo que $ax+by+cz+d=0$ contenga los tres puntos: $2a+2b+c+d=0$, $6a+b-c+d=0$, $-2b-c+d=0$. Cualquier solución no nula proporcional a los coeficientes del plano anterior da la misma ecuación.

3.16 Un vector normal es $\vec{n} = (4,\ 7,\ 1)$.

$$4x + 7y + z - 27 = 0.$$

Una parametrización es

$$(x, y, z) = (1,\ 3,\ 2) + \lambda\,(-3,\ 2,\ -2) + \mu\,(-1,\ 1,\ -3), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3.17 Un vector normal es $\vec{n} = (1,\ 14,\ 11)$.

$$x + 14y + 11z + 12 = 0.$$

Una parametrización es

$$(x, y, z) = (2,\ -1,\ 0) + \lambda\,(3,\ -1,\ 1) + \mu\,(5,\ 2,\ -3), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3.18 El producto mixto es $2\,(m+1)$. Debe anularse, de donde $m = -1$. Un vector normal es $\vec{n} = (1,\ -4,\ 3)$.

$$x - 4y + 3z - 2 = 0.$$

Una parametrización es

$$(x, y, z) = (0,\ 1,\ 2) + \lambda\,(1,\ 1,\ 1) + \mu\,(7,\ 1,\ -1), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3.19 Un vector normal es $(5,\ 3,\ -1)$. El plano es $5x + 3y - z - 12 = 0$.

3.20 Un vector normal es $\vec{n} = (5,\ 4,\ 11)$.

$$5x + 4y + 11z - 15 = 0.$$

Una parametrización es

$$(x, y, z) = (1,\ -3,\ 2) + \lambda\,(-1,\ 4,\ -1) + \mu\,(2,\ 3,\ -2), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3.21 La dirección de s es $(2, 3, -4)$.Un vector normal es $\vec{n} = (13,\ -2,\ 5)$.

$$13x - 2y + 5z - 3 = 0.$$

Una parametrización es

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 0\right) + \lambda\,(1,\ -1,\ -3) + \mu\,(2,\ 3,\ -4)\,, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3.22 El plano es $x - 2y - z = 0$. Su intersección con $z = 1$ es

$$r: \quad (x, y, z) = (1,\ 0,\ 1) + \lambda\,(2,\ 1,\ 0)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

Forma continua: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1}$. Coordenadas fijas: $z = 1$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

4 · Posiciones relativas de rectas

4.01 Las direcciones no son paralelas y $[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}] = -5 \neq 0$: las rectas se cruzan.

4.02 Las rectas coinciden.

4.03 Las rectas se cortan. Al igualar las coordenadas se obtiene $\lambda = 3,\ \mu = 0$. El punto de corte es $(3,\ 3,\ 0)$.

4.04 Las rectas son paralelas distintas.

4.05 Las direcciones no son paralelas y $[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}] = -51 \neq 0$: las rectas se cruzan.

4.06 Las rectas se cortan. Al igualar las coordenadas se obtiene $\lambda = 1,\ \mu = -1$. El punto de corte es $(0,\ 3,\ 3)$.

4.07 Las rectas son paralelas distintas.

4.08 Las rectas coinciden.

4.09 En s, $(x, y, z) = (1/2, -3, 2) + t(3/2, -2, 0)$. Al imponer $x = y$ se obtiene $t = -1$, luego el punto es $(-1, -1, 2)$. La condición $z - a = x$ da $a = 3$.

4.10 Sus direcciones $(4, 1, -1)$ y $(m, 3, n)$ deben ser proporcionales. La segunda componente fija el factor 3, por lo que $m = 12, n = -3$. Son distintas porque sus puntos no pertenecen a una misma recta.

4.11 Las direcciones no son paralelas y $[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}] = 4 \neq 0$: las rectas se cruzan. No: dos lados de un triángulo deben encontrarse en un vértice.

4.12 El producto mixto de las direcciones y el vector entre puntos es $4b + 44$. Al anularlo se obtiene $b = -11$. Igualando las coordenadas, los parámetros son $\lambda = 5/2$, $\mu = 3/2$ y el punto común es $(6, -25/2, 4)$.

4.13 El producto mixto se anula si $k+2 = 0$, es decir, $k = -2$. Una normal es $(1, -1, -2)$ y el plano es $x-y-2z-2 = 0$.

4.14 Son coplanarias para todo k: todos sus puntos verifican $x - 3z + 3 = 0$, que es el plano buscado. Si $k = 4$, son paralelas distintas. Si $k \neq 4$, sus direcciones no son proporcionales y se cortan.

4.15 Las rectas son paralelas distintas.Un vector normal es $\vec{n} = (1,\ -2,\ -2)$.

$$x - 2y - 2z + 3 = 0.$$

Una parametrización es

$$(x, y, z) = (1,\ 1,\ 1) + \lambda\,(2,\ 0,\ 1) + \mu\,(0,\ 1,\ -1)\,, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

4.16 Las direcciones $(3,1,a)$ y $(2a,1,2)$ no pueden ser proporcionales: exigirían simultáneamente $a=3/2$ y $a=2$. El producto mixto vale $a-1$, así que son coplanarias solo si $a=1$. Las rectas se cortan. Al igualar las coordenadas se obtiene $\lambda=3,\ \mu=3$. El punto de corte es $(3,\ 3,\ 2)$.Un vector normal es $\vec{n}=(1,\ -4,\ 1)$.

$$x-4y+z+7=0.$$

Una parametrización es

$$(x,y,z)=(-6,\ 0,\ -1)+\lambda\,(3,\ 1,\ 1)+\mu\,(2,\ 1,\ 2)\,,\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Para $a\neq 1$, se cruzan. Nunca son paralelas.

5 · Intersecciones de rectas y planos

5.01 La recta es paralela al plano y no tiene puntos comunes.

5.02 $\operatorname{rg} A = 2,\ \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Los tres planos no tienen ningún punto común. Sistema incompatible: no tiene solución. Los planos segundo y tercero son paralelos distintos: sus normales son proporcionales y los términos independientes no guardan la misma proporción. El primero corta a cada uno de ellos.

5.03 Una normal es $(1,0,0)$, que sirve como dirección de la recta.

$$r: \quad (x,y,z) = (2,\ 3,\ 0) + \lambda\,(1,\ 0,\ 0)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

Coordenadas fijas: $y = 3,\ z = 0$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

5.04 Las normales deben cumplir $(m,1,-3) = 3(2,n,-1)$. Por tanto, $m = 6, n = 1/3$. No coinciden: los términos independientes $-1,-3$ no guardan el factor 3 de las normales.

5.05 La recta es paralela al plano y no tiene puntos comunes.

5.06 Las rectas son paralelas distintas.Un vector normal es $\vec{n} = (1,\ 8,\ -10)$.

$$x + 8y - 10z + 19 = 0.$$

Una parametrización es

$$(x,y,z) = (1,\ 0,\ 2) + \lambda\,(2,\ 1,\ 1) + \mu\,(4,\ -3,\ -2)\,, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

5.07 $\operatorname{rg} A = 3,\ \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Los tres planos tienen un único punto común. Sistema compatible determinado.

$$(x,y,z) = \left(\frac{7}{4},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}\right).$$

5.08 $\operatorname{rg} A = 2,\ \operatorname{rg}(A|b) = 2$. Los tres planos tienen una recta común. Sistema compatible indeterminado.

$$(x,y,z) = (1,\ \lambda - 1,\ \lambda)\,.$$

Los parámetros son números reales.

5.09 $\operatorname{rg} A = 2,\ \operatorname{rg}(A|b) = 3$. Los tres planos no tienen ningún punto común. Sistema incompatible: no tiene solución.

5.10 Al sustituir en π_2, $-1 + 6\lambda = 3$, por lo que $\lambda = 2/3$. Así, la recta es $(x,y,z) = (2,2,1) + \mu(-1,1,0)$.

5.11 Al sustituir, queda $\lambda - 1 = 0$, de donde $\lambda = 1$. Se cortan en $(3,\ 2,\ 1)$.

5.12 Una dirección de la recta es $(1, 5, 2)$ y la normal del plano es $(a, -1, 4)$. El producto escalar es $a + 3$: son paralelos para $a = -3$; al sustituir un punto de la recta se comprueba que no está contenida. No pueden ser perpendiculares porque $(1, 5, 2)$ y $(a, -1, 4)$ nunca son proporcionales: las razones de las últimas dos componentes no coinciden.

5.13 Su dirección puede ser el producto vectorial de la dirección de r con la normal del plano: $(1,\ -5,\ 3)$.

$$r: \quad (x, y, z) = (2,\ 1,\ -1) + \lambda\,(1,\ -5,\ 3), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = 3\lambda - 1 \end{cases}$$

Forma continua: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+1}{3}$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} 5x + y - 11 = 0 \\ 3x - z - 7 = 0 \end{cases}$$

5.14 a) $(m, 2, -3) = -\frac{1}{2}(2, -4, 6)$ exige $m = -1$. Los planos son distintos porque los términos independientes no tienen esa proporción. b) El producto escalar de las normales es $2m - 8 - 18 = 2m - 26$; se anula si $m = 13$.

5.15 Ambos pasan por $(1, 2, 3)$. Sus normales son $(21,\ 26,\ -24)$ y $(-6a,\ 24 - 4a,\ 48)$. Nunca son proporcionales: la tercera componente exigiría factor -2, la primera daría $a = 7$, pero la segunda no coincide. Por tanto, se cortan en una recta para todo a. Una dirección de esa recta es $(1824 - 96a,\ 144a - 1008,\ 72a + 504)$.

5.16 **Si** $m \notin \{0, 1\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x, y, z) = \left(\frac{m}{m-1},\ -\frac{1}{m-1},\ \frac{m}{m-1}\right).$$

Si $m = 0$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (1 - \lambda,\ \lambda,\ 0).$$

Los parámetros son números reales.
Si $m = 1$: Sistema incompatible: no tiene solución. Una solución única corresponde a un punto común; una familia con un parámetro, a una recta común; la incompatibilidad significa que no hay puntos comunes.

5.17 Se intersectan los planos determinados por P y cada recta. Una dirección resultante es $(0,\ 1,\ 0)$.

$$r: \quad (x,y,z) = (2,\ 0,\ -1) + \lambda\,(0,\ 1,\ 0)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases}$$

Coordenadas fijas: $x = 2,\ z = -1$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$$

Los puntos de corte con las rectas dadas son $(2,\ 2,\ -1)$ y $(2,\ -6,\ -1)$.

5.18 **Si** $a \notin \{-1, 2\}$: Sistema compatible determinado.

$$(x,y,z) = \left(a,\ -\frac{a-2}{a+1},\ \frac{2a-1}{a+1}\right).$$

Si $a = -1$: Sistema incompatible: no tiene solución.
Si $a = 2$: Sistema compatible indeterminado.

$$(x,y,z) = (\lambda + 1,\ 0,\ \lambda)\,.$$

Los parámetros son números reales. Una solución única corresponde a un punto de corte; una familia con un parámetro significa que la recta está contenida en el plano; la incompatibilidad indica paralelismo sin intersección.

5.19 El producto vectorial de sus normales es $(2a,\ 1-a^2,\ -a^2-1)$. Su tercera componente es $-a^2-1 \neq 0$ para todo a real. Por tanto, las normales nunca son proporcionales y los planos siempre se cortan. Ese producto vectorial es una dirección de la recta.

5.20 Un punto de s es $Q = (1,3,t)$. La dirección $Q - A = (0,2,t-1)$ debe ser perpendicular a $(1,-1,1)$, luego $t - 3 = 0$. Así, $Q = (1,3,3)$ y la recta buscada es

$$r: \quad (x,y,z) = (1,\ 1,\ 1) + \lambda\,(0,\ 1,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda + 1 \\ z = \lambda + 1 \end{cases}$$

Forma continua: $\frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$. Coordenadas fijas: $x = 1$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

---

6 · Interpretación y representación de figuras

6.01 $x = 0$; $(x, y, z) = (0, \lambda, \mu)$.

6.02 $y = z = 0$; $(x, y, z) = (\lambda, 0, 0)$.

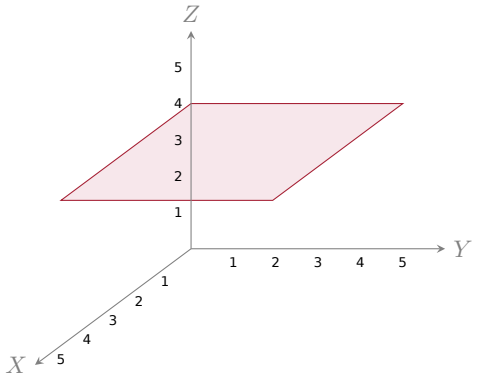
6.03 $2x - y = 0$; $(x, y, z) = (\lambda, 2\lambda, \mu)$.

6.04 $y = 0$, $3x + 4z = 12$; $(x, y, z) = (4 - 4\lambda, 0, 3\lambda)$.

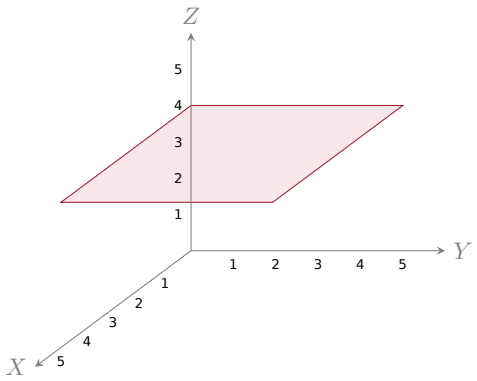
6.05 $y = 7$; $(x, y, z) = (\lambda, 7, \mu)$.

6.06 $3x + 4z = 12$; $(x, y, z) = (4 - 4\lambda, \mu, 3\lambda)$.

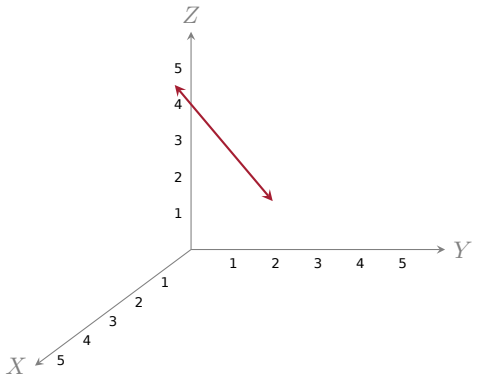
6.07 Plano paralelo al plano XY, a altura 4.



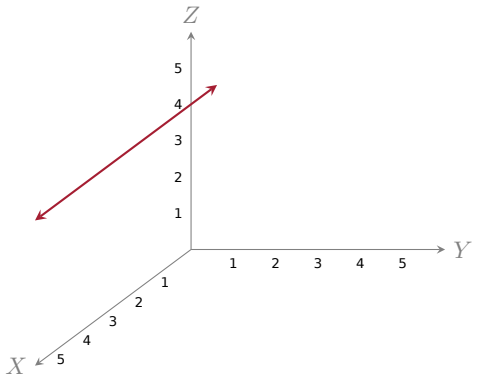
6.08 El mismo plano $z = 4$; los parámetros son independientes.



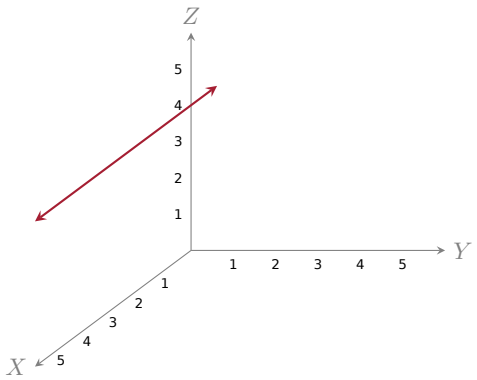
6.09 Recta $x = y$, $z = 4$, de dirección $(1, 1, 0)$.



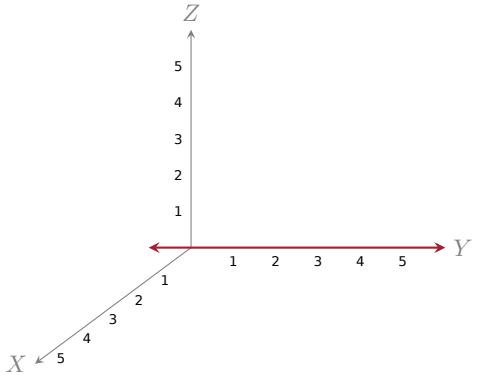
6.10 Recta $y = 0$, $z = 4$, paralela al eje X.



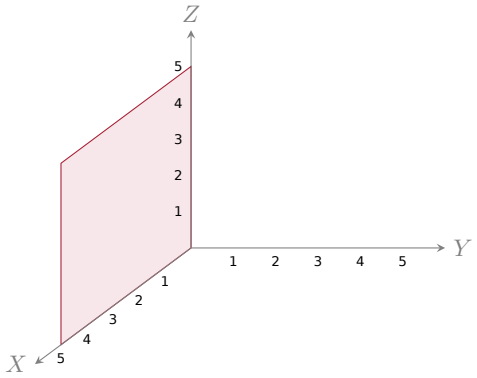
6.11 Recta paralela al eje X que pasa por $(0, 0, 4)$.



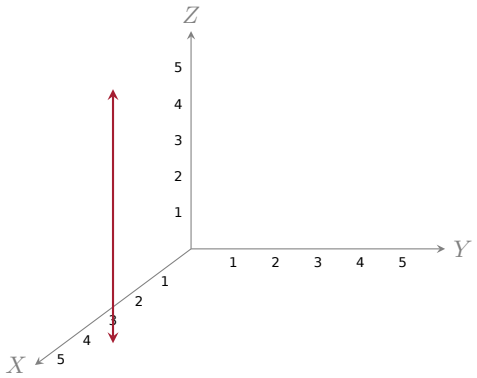
6.12 Eje Y.



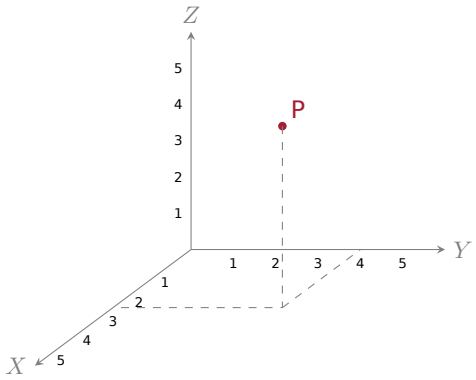
6.13 Plano XZ.



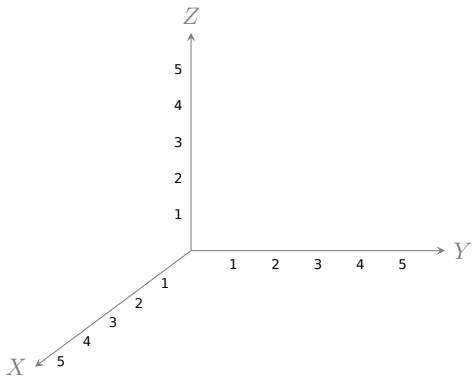
6.14 Recta $x = 3$, $y = 0$, paralela al eje Z. Los dos parámetros solo intervienen mediante su suma.



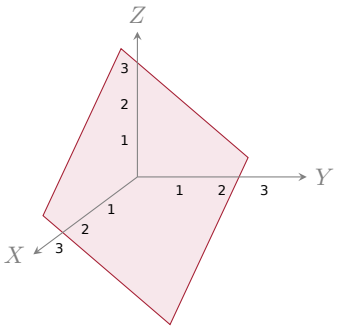
6.15 Un único punto: $(3,4,5)$.



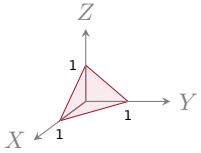
6.16 Todo el espacio $\mathbb{R}^3$: las tres coordenadas varían libremente.



6.17 Plano que corta los ejes en $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.



6.18 Tetraedro cerrado con vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$; incluye el interior y la frontera.



7 · Razonamiento y demostraciones

7.01 $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{OS} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Ambas expresiones son iguales porque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

7.02 Deben ser linealmente independientes: ninguno es múltiplo del otro. Equivalentemente, su producto vectorial debe ser no nulo. Si son dependientes, solo generan una recta o un punto.

7.03 Se eligen dos coordenadas libres y se despeja la tercera, cuyo coeficiente debe ser no nulo. Primer plano: $(x, y, z) = (1 - 2\lambda + \mu, \lambda, \mu)$. Segundo: $(x, y, z) = (\lambda, \mu, 2\lambda + 8)$. La coordenada ausente sigue siendo libre.

7.04 Los ceros significan coordenadas constantes: $x = 4$, $y = -3$; z es libre. No se interpreta como una división aritmética entre cero. Una parametrización es $(x, y, z) = (4, -3, 1) + t(0, 0, 2)$.

7.05 Los dos parámetros solo aparecen en la suma $\lambda + \mu$, que actúa como un único parámetro. Es la recta $x = 3$, $y = 5$, paralela al eje Z. Los dos vectores de la parametrización son iguales a $(0, 0, 1)$.

7.06 Deben ser secantes o paralelas distintas. Si se cruzan, no existe un plano que contenga ambas. Si coinciden, hay infinitos planos que las contienen, por lo que no determinan uno único.

7.07 No. Por ejemplo, $r_1 : (x, y, z) = (t, 0, 0)$ está en $z = 0$ y $r_2 : (x, y, z) = (0, t, 1)$ está en $z = 1$. Las direcciones no son paralelas y las rectas se cruzan.

7.08 Son paralelos distintos. Ambos tienen como direcciones las de las dos rectas y, por tanto, normales paralelas. No pueden coincidir, porque entonces las dos rectas serían coplanarias.

7.09 Al sustituir los puntos y restar las ecuaciones resulta $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0$, que es exactamente $\overrightarrow{AB} \cdot (a, b, c) = 0$.

7.10 a) La recta y el tercer plano no tienen puntos comunes: la recta es paralela al plano. b) La recta está contenida en el tercer plano; todos sus puntos resuelven las tres ecuaciones. Se presupone que las dos primeras ecuaciones definen realmente una recta.

7.11 Siempre se exige $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. a) $a = b = 0, c \neq 0$; si se pide que sea distinto de XY, además $d \neq 0$. b) $c = 0$ y $(a, b) \neq (0, 0)$. c) $c = 0$; si $d = 0$, contiene el eje Z, y si $d \neq 0$, no lo corta. d) $b = c = 0, a \neq 0$. e) $abc \neq 0$: la normal no es perpendicular a ninguna dirección coordenada.

7.12 Los tres puntos satisfacen $x/a + y/b + z/c = 1$ y no están alineados; por tanto, determinan ese plano. También se obtiene imponiendo los tres puntos en una ecuación general. Los cortes pedidos son $(5, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 7)$.

7.13

$$P\left(1,\ -\frac{a}{2}-\frac{1}{2},\ -\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\right), \qquad Q\left(2,\ -\frac{4a}{3}-\frac{2}{3},\ -\frac{2a}{3}-\frac{1}{3}\right), \qquad R\left(3,\ -\frac{9a}{4}-\frac{3}{4},\ -\frac{3a}{4}-\frac{1}{4}\right).$$

Al imponer $(Q-P)\times(R-P)=0$ se obtiene $a=1$. Los puntos son entonces $(1,-1,-1)$, $(2,-2,-1)$ y $(3,-3,-1)$, alineados.

7.14 $X=P+\frac{m}{m+n}(Q-P)=\frac{n}{m+n}P+\frac{m}{m+n}Q$. En general, $P+t(Q-P)$ recorre la recta; si t está entre 0 y 1, recorre exactamente el segmento desde P hasta Q, incluidos sus extremos.

8 · Autoevaluación

8.01

$M = (1,\ 3,\ \frac{1}{2})$.
$S = (-14,\ 3,\ 8)$.
$Q = (0,\ 3,\ 1)$.

8.02

$$r: \quad (x, y, z) = (1,\ 3,\ -2) + \lambda\,(6,\ -1,\ -3)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = 6\lambda + 1 \\ y = 3 - \lambda \\ z = -3\lambda - 2 \end{cases}$$

Forma continua: $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{-3}$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} x + 6y - 19 = 0 \\ x + 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

b) $m = \frac{8}{3}, n = -3$. c) Un vector normal es $\vec{n} = (1,\ 6,\ 0)$.

$$x + 6y - 19 = 0.$$

Una parametrización es

$$(x, y, z) = (1,\ 3,\ -2) + \lambda\,(-6,\ 1,\ 3) + \mu\,(6,\ -1,\ 6)\,, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

d) $k = -23$. e) La recta está contenida en el plano porque pasa por dos de sus puntos, A, B.

8.03 Las direcciones no son paralelas y $[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}] = -63 \neq 0$: las rectas se cruzan.

8.04 Las rectas se cortan. Al igualar las coordenadas se obtiene $\lambda = -2,\ \mu = -3$. El punto de corte es $(3,\ 1,\ 4)$.

8.05 Los puntos de corte pueden elegirse como $R = (-1,\ 0,\ 3)$, $S = (3,\ -4,\ -5)$. La recta buscada es

$$r: \quad (x, y, z) = (-1,\ 0,\ 3) + \lambda\,(1,\ -1,\ -2)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = -\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

Forma continua: $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{-2}$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

8.06 Se intersectan los planos determinados por P y cada recta. Una dirección resultante es $(1,\ -3,\ 3)$.

$$r: \quad (x,y,z) = (2,\ 0,\ 1) + \lambda\,(1,\ -3,\ 3)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

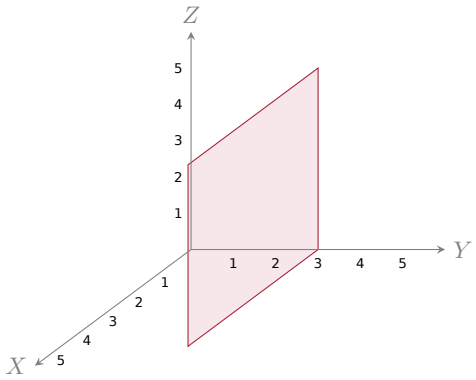
$$\begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = -3\lambda \\ z = 3\lambda + 1 \end{cases}$$

Forma continua: $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{3}$.Como intersección de planos:

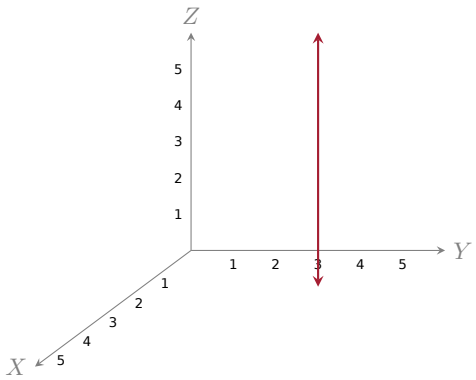
$$\begin{cases} 3x + y - 6 = 0 \\ 3x - z - 5 = 0 \end{cases}$$

Los puntos de corte con las rectas dadas son $(1,\ 3,\ -2)$ y $(4,\ -6,\ 7)$.

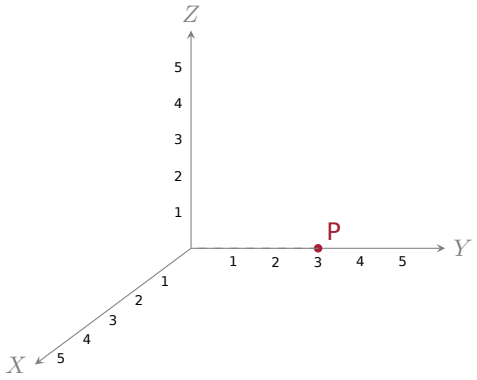
8.07 Plano paralelo a XZ.



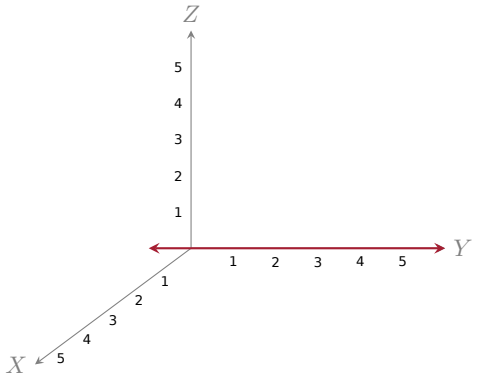
8.08 Recta paralela al eje Z que pasa por $(0,3,0)$.



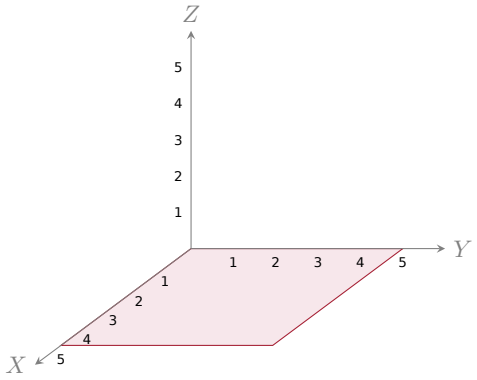
8.09 Punto $(0,3,0)$.



8.10 Eje Y.



8.11 Plano XY.



8.12 Recta por el origen de dirección $(1, 1, 1)$.

