2.º BACHILLERATO

Problemas métricos

Matemáticas Aplicadas
a las Ciencias Sociales II

Practica, razona y comprueba tus respuestas.

1 Perpendicularidad y construcciones
2 Ángulos en el espacio
3 Distancias
4 Áreas y volúmenes
5 Proyecciones y simetrías
6 Esferas y circunferencias
7 Lugares geométricos y cuádricas
8 Razonamiento y demostraciones
9 Autoevaluación

158 actividades · 9 bloques

TU RUTA DE TRABAJO

Índice

Ejercicios organizados por contenidos, con espacio para trabajar y soluciones al final.

1 Perpendicularidad y construcciones 3

2 Ángulos en el espacio 9

3 Distancias 14

4 Áreas y volúmenes 28

5 Proyecciones y simetrías 35

6 Esferas y circunferencias 38

7 Lugares geométricos y cuádricas 44

8 Razonamiento y demostraciones 50

9 Autoevaluación 53

Solucionario 56

Cómo usar el dosier
El código 2.03 identifica la tercera actividad del bloque 2. Busca ese mismo código en el solucionario. Justifica los procedimientos y comprueba los resultados en los enunciados.

BLOQUE 1

Perpendicularidad y construcciones

1.01 Halla la recta que pasa por $P(1,0,7)$ y es perpendicular al plano $5x-3z+4=0$.

1.02 Halla el plano por $P(1,-3,5)$ perpendicular al vector $(5,-6,1)$.

1.03 Halla el plano paralelo a $5x-y+4=0$ que pasa por $(1,0,-3)$.

1.04 Halla el plano por $(5,-7,-2)$ perpendicular a esta recta.

$$r: \quad (x,y,z)=(3,\ -1,\ 4)+\lambda\,(5,\ 2,\ -6)\,, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

1.05 Halla el plano que contiene r y es paralelo a s.

$$r: \quad (x, y, z) = (5,\ -1,\ 8) + \lambda\,(1,\ 0,\ 2)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x, y, z) = (4,\ 3,\ 5) + \lambda\,(3,\ -1,\ 4)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1.06 Halla la recta por $(0, -1, -3)$ paralela a la intersección de estos planos.

$$\begin{cases} 3x - 5y + 7z = 4 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$$

1.07 Halla el plano que contiene la recta dada y es perpendicular a $2x - y + 3z + 1 = 0$. Obtén las ecuaciones paramétricas de la intersección de ambos planos.

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

1.08 Halla una recta contenida en $x+2y+3z-1=0$, que pase por $P(2,1,-1)$ y sea perpendicular a la recta siguiente.

$$\begin{cases} x-2z=-3 \\ y-z=4 \end{cases}$$

1.09 Halla el plano que contiene la recta y es perpendicular al plano dado.

$$r: \quad (x,y,z)=(0,\ 1,\ -1)+\lambda\,(2,\ -1,\ 3)\,, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

$$\sigma:\ x+3y-3z+3=0.$$

1.10 Halla p para que r_1 y r_2 sean perpendiculares. Para ese valor, calcula su intersección y el plano que las contiene.

$$r_1:\ \frac{x}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2}, \qquad r_2:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-p}{p-1}=\frac{z-3}{3}.$$

1.11 Considera los planos $ax + 9y - 3z = 8$ y $x + ay - z = 0$. Halla a para que: a) sean paralelos; b) sean perpendiculares; c) su recta de intersección corte OXY a distancia $\sqrt{2}$ del origen.

1.12 Halla el plano que contiene la recta y es perpendicular al plano dado. Calcula también el ángulo de la recta con el plano dado.

$$r: \quad (x, y, z) = (-1,\ 1,\ 2) + \lambda\,(3,\ 2,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\pi: \ 2x + y - 3z + 4 = 0.$$

1.13 Halla el plano cuyo punto más próximo al origen es $(1, 3, 2)$.

1.14 Determina cuándo se cortan en un punto los planos $ax+z-1=0$, $x+bz+2=0$ y $5x+3y+2z-3=0$. Para $a=2$, $b=1$, halla la intersección de los dos primeros y su ángulo con el tercero.

1.15 Halla un punto $P \in t$ que determine con s un plano que contenga a r.

$$r:\ x=-2,\ y=z; \quad s:\ 2x+z=-2,\ x+y=0; \quad t:\ x=z,\ y+z=-1.$$

1.16 Considera el haz de planos siguiente. a) Halla el plano que pasa por el origen. b) Determina k para que uno sea perpendicular a $t:(x,y,z)=(0,2,0)+u(3,5,k)$ y halla ese plano. c) Da dos puntos comunes a todos los planos.

$$a(2x+3y-z-4)+b(x-2y+z+1)=0, \quad (a,b)\neq(0,0).$$

1.17 Escribe el haz de planos que contiene la recta dada. ¿Cuál de ellos está más lejos del origen?

$$r: \quad (x,y,z) = (5,\ -1,\ 3) + \lambda\,(3,\ -2,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

BLOQUE 2

Ángulos en el espacio

2.01 Calcula el ángulo menor entre las rectas y comprueba si se cortan.

$$r: \quad (x,y,z) = (3,\ 2,\ -1) + \lambda\,(-5,\ 3,\ 0)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x,y,z) = \left(-\frac{8}{3},\ -\frac{4}{3},\ 0\right) + \mu\,(1,\ 2,\ 1)\,, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

2.02 Calcula el ángulo entre la recta y el plano.

$$r: \quad (x,y,z) = (3,\ 0,\ 2) + \lambda\,(7,\ -1,\ 3)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\pi: \ x + 3y - z + 1 = 0.$$

2.03 Calcula el ángulo menor entre las rectas y comprueba si se cortan.

$$r: \quad (x,y,z) = (5,\ 4,\ 0) + \lambda\,(-2,\ 3,\ -2)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x,y,z) = (5,\ 4,\ 0) + \mu\,(-1,\ 5,\ 1)\,, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

2.04 Calcula el ángulo menor entre las rectas y comprueba si se cortan.

$$r: \quad (x, y, z) = (18,\ 15,\ 0) + \lambda\,(1,\ 1,\ -1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x, y, z) = (3,\ 0,\ 15) + \mu\,(3,\ 2,\ 5)\,, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

2.05 Halla m para que las rectas formen un ángulo de $90°$.

$$r: \quad (x, y, z) = (2,\ 0,\ -2) + \lambda\,(-5,\ 1,\ -1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x, y, z) = (2,\ 0,\ 0) + \lambda\,(1,\ 2,\ m)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2.06 Calcula el ángulo entre la recta y el plano.

$$r: \quad (x, y, z) = (-1,\ -3,\ 0) + \lambda\,(-2,\ 4,\ 2)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\pi: \ x - 2y - z + 1 = 0.$$

2.07 Calcula el ángulo entre la recta y el plano.

$$r: \quad (x, y, z) = (0,\ 1,\ -2) + \lambda\,(1,\ 2,\ 0)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\pi: \ 2x - y + z = 0.$$

2.08 Calcula el ángulo entre la recta y el plano.

$$r: \quad (x, y, z) = (1,\ 3,\ 0) + \lambda\,(2,\ 1,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\pi: \ x + z - 17 = 0.$$

2.09 Calcula el ángulo menor entre los planos $z = 3$ y $x - y + 2z + 4 = 0$.

2.10 Calcula los tres ángulos del triángulo.

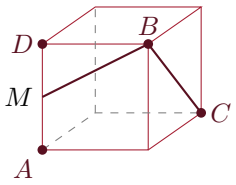
$$A\,(0,\ 0,\ 0)\,, \qquad B\,(1,\ 2,\ 1)\,, \qquad C\,(3,\ 1,\ 1)\,.$$

2.11 Calcula los tres ángulos del triángulo.

$$A\,(2,\ 7,\ 3)\,, \qquad B\,(1,\ 2,\ 5)\,, \qquad C\,(-1,\ -2,\ 5)\,.$$

2.12 Calcula el ángulo que forma $x - 2y + z = 0$ con cada eje coordenado.

2.13 En el cubo, M es el punto medio de AD. Calcula el ángulo entre BC y BM.



BLOQUE 3

Distancias

3.01 Halla la diagonal de un ortoedro de dimensiones $(2,\ 1,\ 2)$.

3.02 Halla la diagonal de un ortoedro de dimensiones $(4,\ 12,\ 3)$.

3.03 Halla la diagonal de un ortoedro de dimensiones $(7,\ 4,\ 5)$.

3.04 Calcula la distancia entre estos puntos.

$$A\,(1,\ 3,\ 6)\,, \qquad B\,(5,\ 5,\ 7)\,.$$

3.05 Calcula la distancia del punto a la recta mediante proyección ortogonal y mediante el producto vectorial.

$$P\,(8,\ 6,\ 12)\,.$$

$$r:\quad (x,y,z)=(2,\ 1,\ 7)+\lambda\,(0,\ -1,\ 2)\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

3.06 Calcula la distancia del punto al plano.

$$P\,(4,\ 35,\ 70)\,.$$

$$\pi:\ 5y+12z-1=0.$$

3.07 Calcula la distancia del punto a la recta mediante proyección ortogonal y mediante el producto vectorial.

$$P\,(5,\ 6,\ 6)\,.$$

$$r:\quad (x,y,z)=(0,\ 2,\ 0)+\lambda\,(5,\ -1,\ 1)\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

3.08 Calcula la distancia del punto al plano.

$$P\,(8,\ 5,\ -6)\,.$$

$$\pi:\ x+2y-2z+3=0.$$

3.09 Calcula la distancia del punto al plano.

$$P\,(3,\ 0,\ 3)\,.$$

$$\pi:\ x+2y-2z+3=0.$$

3.10 Calcula la distancia del punto al plano.

$$P\,(0,\ 0,\ 0)\,.$$

$$\pi:\ x+2y-2z+3=0.$$

3.11 Calcula la distancia entre la recta y el plano.

$$r: \quad (x,y,z) = (1,\ 2,\ 1) + \lambda\,(-3,\ 1,\ -1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\pi: \ x + 3y = 0.$$

3.12 Calcula la distancia entre los planos.

$$\pi: \ y - 5z + 4 = 0.$$

$$\sigma: \ 2y - 10z = 0.$$

3.13 Calcula la distancia entre las rectas. Compruébala mediante el producto mixto y mediante los puntos más próximos.

$$r: \quad (x,y,z) = (13,\ 2,\ 8) + \lambda\,(12,\ 0,\ 5)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x,y,z) = (6,\ 6,\ -9) + \mu\,(0,\ 1,\ 0)\,, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

3.14 Calcula la distancia entre las rectas. Compruébala mediante el producto mixto y mediante los puntos más próximos.

$$r: \quad (x,y,z) = (0,\ 2,\ 0) + \lambda\,(5,\ -1,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x,y,z) = (5,\ 1,\ 1) + \mu\,(7,\ -5,\ -5)\,, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

3.15 Calcula la distancia entre estos puntos.

$$A\,(2,\ 5,\ -2)\,, \qquad B\,(-1,\ 1,\ -2)\,.$$

3.16 Calcula la distancia entre estos puntos.

$$A\,(-1,\ 7,\ 4)\,, \qquad B\,(-1,\ 2,\ 16)\,.$$

3.17 Halla el punto S de intersección de la recta y el plano. Calcula después su distancia a $P(4,0,1)$.

$$\begin{cases} x-y=-3 \\ x+z=1 \end{cases}$$

$$\pi:\ x+y-2z-1=0.$$

3.18 Halla los puntos P y Q en los que r corta a $x+2y-z=1$ y $x-y+z=3$, respectivamente. Calcula $d(P,Q)$.

$$r:\quad (x,y,z)=(0,\ 2,\ 3)+\lambda\,(8,\ 0,\ -6)\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

3.19 Calcula la distancia del punto al plano.

$$P\,(2,\ -3,\ 1)\,.$$

$$\pi:\ 3x-4z-3=0.$$

3.20 Calcula la distancia del punto al plano.

$$P\,(0,\ 1,\ 3)\,.$$

$$\pi:\ x-y-2z+3=0.$$

3.21 Calcula la distancia del punto al plano.

$$P\,(2,\ 0,\ 1)\,.$$

$$\pi:\ x+y-2z=0.$$

3.22 Calcula la distancia del punto al plano.

$$P\,(3,\ -4,\ 1)\,.$$

$$\pi:\ y-3=0.$$

3.23 Calcula la distancia de $Q(2,-1,0)$ al plano que contiene $P(2,0,4)$ y la recta siguiente.

$$r: \quad (x,y,z) = (3,\ 2,\ 4) + \lambda\,(-2,\ 3,\ 0)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

3.24 Calcula la distancia entre los planos.

$$\pi: \ x - 2y + 3 = 0.$$

$$\sigma: \ 2x - 4y + 1 = 0.$$

3.25 Calcula la distancia entre los planos.

$$\pi: \ 3x - 2y + z - 2 = 0.$$

$$\sigma: \ 2x - y + z + 5 = 0.$$

3.26 Calcula la distancia entre la recta y el plano.

$$r: \quad (x,y,z) = (2,\ 0,\ -1) + \lambda\,(4,\ 3,\ 7)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\pi: \ 3x - 4y - 3 = 0.$$

3.27 Calcula la distancia entre la recta y el plano.

$$r: \quad (x,y,z) = (3,\ 5,\ 4) + \lambda\,(2,\ 0,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\pi: \ 7x - 2y - z + 1 = 0.$$

3.28 Calcula la distancia del punto a la recta. Halla el pie de la perpendicular y justifica el método empleado.

$$P\,(3,\ 1,\ 6)\,.$$

$$r: \quad (x,y,z) = (4,\ 2,\ -1) + \lambda\,(4,\ 1,\ -3)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

3.29 Calcula la distancia del punto a la recta. Halla el pie de la perpendicular y justifica el método empleado.

$$P\,(2,\ 2,\ -11)\,.$$

$$r:\quad (x,y,z)=(9,\ -1,\ 6)+\lambda\,(12,\ -3,\ 5)\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

3.30 Calcula la distancia del punto a la recta. Halla el pie de la perpendicular y justifica el método empleado.

$$P\,(3,\ 1,\ 6)\,.$$

$$r:\quad (x,y,z)=(4,\ 2,\ -1)+\lambda\,(4,\ 1,\ -3)\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

3.31 Calcula la distancia del punto a la recta. Halla el pie de la perpendicular y justifica el método empleado.

$$P\,(2,\ 2,\ -11)\,.$$

$$r:\quad (x,y,z)=(9,\ -1,\ 6)+\lambda\,(12,\ -3,\ 5)\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

3.32 Calcula la distancia entre las rectas. Compruébala mediante el producto mixto y mediante los puntos más próximos.

$$r: \quad (x,y,z) = (0,\ -10,\ 9) + \lambda\,(4,\ -3,\ 5)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x,y,z) = (2,\ 1,\ 4) + \mu\,(-12,\ 9,\ 1)\,, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

3.33 Calcula la distancia entre las rectas. Compruébala mediante el producto mixto y mediante los puntos más próximos.

$$r: \quad (x,y,z) = (-7,\ 4,\ 19) + \lambda\,(5,\ 1,\ 12)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x,y,z) = (10,\ -2,\ 26) + \mu\,(-10,\ 5,\ -24)\,, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

3.34 Calcula la distancia entre las rectas. Compruébala mediante el producto mixto y mediante los puntos más próximos.

$$r: \quad (x,y,z) = (0,\ -10,\ 9) + \lambda\,(4,\ -3,\ 5)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x,y,z) = (2,\ 1,\ 4) + \mu\,(-12,\ 9,\ 1)\,, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

3.35 Calcula la distancia entre las rectas. Compruébala mediante el producto mixto y mediante los puntos más próximos.

$$r: \quad (x,y,z) = (-7,\ 4,\ 19) + \lambda\,(5,\ 1,\ 12)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x,y,z) = (10,\ -2,\ 26) + \mu\,(-10,\ 5,\ -24)\,, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

3.36 Halla los puntos de $r : (x, y, z) = (1, -1, 0) + \lambda(2, 1, 3)$ equidistantes de $\alpha : x + y + z = -3$ y $\beta : (x, y, z) = (-3, 0, -6) + u(1, -1, 0) + v(0, 1, 1)$.

3.37 Un cubo tiene arista 6 cm. Calcula la mínima distancia entre una diagonal del cubo y una diagonal de una cara cuyas rectas se cruzan.

3.38 a) Halla los puntos de $x + y = 0$, $x - z = 0$ situados a distancia $1/3$ del plano $2x - y + 2z + 1 = 0$. b) Halla los puntos del plano que distan $1/3$ de los anteriores.

3.39 Halla los planos paralelos a $x-2y+3z+6=0$ situados a distancia 12 del origen.

3.40 Calcula la distancia entre las rectas. Compruébala mediante el producto mixto y mediante los puntos más próximos.

$$r: \quad (x,y,z)=(2,\ 4,\ 0)+\lambda\,(4,\ -2,\ 0)\,, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x,y,z)=(0,\ 0,\ 7)+\mu\,(3,\ 2,\ -7)\,, \quad \mu\in\mathbb{R}.$$

3.41 Halla el plano de la familia $mx+y+z-(m+1)=0$ situado a distancia 1 del origen.

BLOQUE 4

Áreas y volúmenes

4.01 Calcula el área del triángulo.

$$A\,(1,\ 3,\ 5)\,, \qquad B\,(2,\ 5,\ 8)\,, \qquad C\,(5,\ 1,\ -11)\,.$$

4.02 Calcula el volumen del tetraedro.

$$A\,(2,\ 1,\ 4)\,, \qquad B\,(1,\ 0,\ 2)\,, \qquad C\,(4,\ 3,\ 2)\,, \qquad D\,(1,\ 5,\ 6)\,.$$

4.03 Calcula el área del triángulo.

$$A\,(2,\ 7,\ 3)\,, \qquad B\,(1,\ -5,\ 4)\,, \qquad C\,(7,\ 0,\ 11)\,.$$

4.04 Calcula el área del triángulo.

$$A\,(3,\ -7,\ 4)\,, \qquad B\,(-1,\ 2,\ 5)\,, \qquad C\,(-5,\ 11,\ 6)\,.$$

4.05 Calcula el volumen del tetraedro.

$$A\,(2,\ 1,\ 4)\,, \qquad B\,(1,\ 0,\ 2)\,, \qquad C\,(4,\ 3,\ 2)\,, \qquad D\,(1,\ 5,\ 6)\,.$$

4.06 Calcula el volumen del tetraedro.

$$A\,(4,\ 1,\ 2)\,, \qquad B\,(2,\ 0,\ 1)\,, \qquad C\,(2,\ 3,\ 4)\,, \qquad D\,(6,\ 5,\ 1)\,.$$

4.07 Calcula el área total y el volumen del tetraedro.

$$A\,(2,\ 3,\ 1)\,, \qquad B\,(4,\ 1,\ -2)\,, \qquad C\,(6,\ 3,\ 7)\,, \qquad D\,(-5,\ -4,\ 8)\,.$$

4.08 Calcula el volumen limitado por $6x - 5y + 3z - 30 = 0$ y los planos coordenados. Resuelve por base y altura y mediante el producto mixto.

4.09 Halla el plano por $(-1, 1, 0)$ perpendicular a $\frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{4}$. Calcula el volumen que limita con los planos coordenados.

4.10 Traza por el punto medio de $P(3,1,5)$ y $Q(-1,7,3)$ el plano perpendicular a PQ. Halla su ecuación y el área del triángulo que determina al cortar los tres ejes.

4.11 Prueba que $A(1,5,-2)$, $B(4,0,1)$ y $C(-3,2,0)$ forman un triángulo. Halla la longitud del segmento que une B con su proyección sobre AC.

4.12 Un cuadrado tiene un lado sobre r y otro sobre s. Halla su área. Si un vértice es el origen, ¿cuál puede ser el otro vértice situado sobre r?

$$\begin{cases} 3x+2y+2z=0 \\ x-2y+2z=0 \end{cases}$$

$$s: \quad (x,y,z)=(3,\ 1,\ -5)+\lambda\,(2,\ -1,\ -2), \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

4.13 Halla el plano por $A(1,1,1)$, $B(-2,0,-1)$ y $C(1,-2,0)$. Calcula el volumen del tetraedro limitado por él y los planos coordenados.

4.14 Traza por el punto medio de $P(5,1,3)$ y $Q(3,7,-1)$ el plano perpendicular a PQ. Halla su ecuación y el volumen que limita con los planos coordenados.

4.15 Sean $P(2,1,-1)$, $Q(1,4,1)$ y $R(1,3,1)$. Comprueba que no están alineados y halla el área del triángulo. Añadiendo $V(1,1,-1)$ se obtiene una pirámide: calcula su altura y volumen.

4.16 Un paralelepípedo tiene bases $ABCD$ y $EFGH$, con vértices consecutivos. Se conocen $A(1,0,0)$, $B(2,3,0)$, $C(4,0,5)$ y $E(7,6,3)$. Halla el volumen y los vértices restantes.

4.17 Estudia la posición relativa de las rectas y calcula el área de un cuadrado con dos lados sobre ellas.

$$r: \quad (x,y,z) = (1,\ -1,\ 2) + \lambda\,(1,\ 2,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$$

4.18 Los puntos $P(0,1,0)$ y $Q(-1,1,1)$ son vértices de un triángulo. El tercero, S, está en $x = 4$, $z = 1$. La recta PS es perpendicular a esa recta. Halla S y el área de PQS.

4.19 Un cuadrado de centro $C(1,1,-1)$ tiene un lado sobre esta recta. Halla su plano y la longitud del lado.

$$r: \quad (x,y,z) = (2,\ 1,\ 1) + \lambda\,(1,\ 1,\ 0)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.20 Los vértices opuestos de un cuadrado son $P(1,-1,1)$ y $Q(3,-3,3)$. El plano del cuadrado es perpendicular a $x+y=0$. Halla los vértices restantes y el perímetro.

BLOQUE 5

Proyecciones y simetrías

5.01 Halla los puntos de mínima distancia y las ecuaciones de la perpendicular común.

$$r: \quad (x,y,z) = (1,\ 3,\ 0) + \lambda\,(2,\ -1,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x,y,z) = (2,\ -3,\ 0) + \mu\,(0,\ 0,\ 1)\,, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

5.02 Halla la recta por $(1,2,1)$ que corta perpendicularmente a la recta dada.

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

5.03 El plano $2x+y-3z=6$ corta los ejes en A, B y C, respectivamente. Halla la altura del triángulo que parte de B, situado en OY.

5.04 Halla los simétricos de $P(1,2,3)$ respecto del plano $x-3y-2z+4=0$ y de la recta siguiente.

$$\begin{cases} x-y=-3 \\ 4x-z=0 \end{cases}$$

5.05 Halla el punto de $x-z=3$ más cercano a $P(3,1,4)$ y la distancia entre ambos.

5.06 Halla la proyección ortogonal de la recta sobre el plano.

$$r: \quad (x,y,z)=(1,\ 1,\ 2)+\lambda\,(2,\ 1,\ 2)\,, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

$$\pi: \ x-3y+2z+12=0.$$

5.07 Halla los puntos de mínima distancia y las ecuaciones de la perpendicular común.

$$r: \quad (x,y,z) = (3,\ 0,\ 1) + \lambda\,(2,\ 1,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x,y,z) = (0,\ 0,\ 0) + \mu\,(1,\ -1,\ -1)\,, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

5.08 Para la recta dada: a) halla la perpendicular por $(0,2,2)$ y su pie P; b) halla el plano que contiene ambas rectas y la recta t perpendicular a él por P; c) para $Q \in t$, compara sus distancias a las dos rectas y al plano.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

5.09 Calcula la distancia de $P(1,-1,3)$ a la recta por $Q(1,2,1)$ y $R(1,0,-1)$. Halla todos los puntos S del plano PQR para que los cuatro puntos sean vértices de un paralelogramo, sin fijar el orden.

BLOQUE 6

Esferas y circunferencias

6.01 Halla el centro y el radio de $x^2+y^2+z^2+2x-10y+25=0$.

6.02 La esfera indicada corta al plano en una circunferencia. Halla el centro y el radio de dicha circunferencia.

$$z^2+(x-2)^2+(y+5)^2=169.$$

$$\pi:\ 4x-3z-33=0.$$

6.03 Determina si la ecuación representa una esfera. En caso afirmativo, halla su centro y su radio.

$$:\ x^2-2x+y^2+4y-8=0.$$

6.04 Determina si la ecuación representa una esfera. En caso afirmativo, halla su centro y su radio.

$$: \ 2x^2 + 4x - 2y^2 + 2z^2 - 16 = 0.$$

6.05 Determina si la ecuación representa una esfera. En caso afirmativo, halla su centro y su radio.

$$: \ 2x^2 + 4x + 2y^2 + 2z^2 - 16 = 0.$$

6.06 Determina si la ecuación representa una esfera. En caso afirmativo, halla su centro y su radio.

$$: \ x^2 - 2xz + 3y^2 + z^2 - 4 = 0.$$

6.07 Determina si la ecuación representa una esfera. En caso afirmativo, halla su centro y su radio.

$$: \ 3x^2 + 6x + 3y^2 + 3z^2 - 12z - 3 = 0.$$

6.08 Determina si la ecuación representa una esfera. En caso afirmativo, halla su centro y su radio.

$$: \ 3x^2+6x+3y^2+3z^2-12z-30=0.$$

6.09 Determina si la ecuación representa una esfera. En caso afirmativo, halla su centro y su radio.

$$: \ 2x^2-4x+2y^2+6y+2z^2-\frac{3}{2}=0.$$

6.10 Halla la esfera de centro $(1,0,-5)$ y radio 1.

6.11 Halla la esfera cuyo diámetro tiene extremos $A(3,-4,2)$ y $B(5,2,0)$.

6.12 Halla la esfera de centro $(4, -2, 3)$ tangente a $x - z = 0$.

6.13 Halla la esfera de centro $(3, -1, 2)$ tangente al plano YZ.

6.14 Halla el lugar geométrico de los puntos situados a distancia 7 de $(2, -1, 4)$.

6.15 Halla la esfera que pasa por $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(1, 1, 2)$ y $(2, 1, 1)$.

6.16 Halla el plano tangente a $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4=0$ en $P(1,2,1)$ y el punto diametralmente opuesto a P.

6.17 Halla las esferas tangentes a $x-2z-8=0$ y $2x-z+5=0$ cuyo centro pertenece a $x=-2$, $y=0$.

6.18 La esfera indicada corta al plano en una circunferencia. Halla el centro y el radio de dicha circunferencia.

$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25.$$

$$\pi:\ 2x-2y+z-2=0.$$

6.19 Halla la esfera que pasa por $A(4,1,-3)$ y $B(3,2,1)$ y tiene el centro en la recta dada. Obtén el plano tangente en B.

$$r: \quad (x,y,z) = (8,\ 3,\ -4) + \lambda\,(2,\ 1,\ -1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

BLOQUE 7

Lugares geométricos y cuádricas

7.01 Halla el lugar geométrico de los puntos equidistantes de $A(4,-1,7)$ y $B(-2,5,1)$.

7.02 Halla el lugar geométrico de los puntos equidistantes de $x+y+z-2=0$ y $x-y+z-2=0$.

7.03 Halla el lugar geométrico de los puntos equidistantes de $x-3y+2z-8=0$ y $x-3y+2z=0$.

7.04 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de las distancias a $(0,0,0)$ y $(10,0,0)$ es 68.

7.05 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a $(0,0,5)$ y $(0,0,-5)$ es 26.

7.06 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias, en valor absoluto, a $(5,0,0)$ y $(-5,0,0)$ es 6.

7.07 Halla el lugar geométrico de los puntos equidistantes del plano $x+\frac{1}{4}=0$ y del punto $(\frac{1}{4},0,0)$. ¿A qué se parece la ecuación?

7.08 Halla el lugar geométrico equidistante de $A(1,-1,0)$ y $B(2,3,-4)$. Comprueba su relación con AB y su punto medio.

7.09 Halla los puntos equidistantes de $3x+y-2z+1=0$ y $x-3y+2z-3=0$.

7.10 Halla los puntos del plano $x=y$ situados a distancia 1 del plano $2x-y+2z=2$.

7.11 Halla el lugar equidistante de $3x-4y+5=0$ y $2x-2y+z+9=0$. ¿Qué puntos de OY pertenecen a él?

7.12 Halla el conjunto equidistante de $P(-1,2,5)$ y $Q(-3,4,1)$. ¿A qué distancia está P de ese conjunto?

7.13 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a $A(-2,3,4)$ es el doble de la distancia a $B(3,-1,-2)$.

7.14 Dados $A(4,2,0)$ y $B(2,6,-4)$, halla los puntos P para los que $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$.

7.15 Halla el lugar cuya suma de distancias a $(2,0,0)$ y $(-2,0,0)$ es 6.

7.16 Halla el lugar equidistante de $(0,0,3)$ y del plano $z=-3$.

7.17 Halla el lugar cuya diferencia de distancias, en valor absoluto, a $(0,5,0)$ y $(0,-5,0)$ es 4.

7.18 Halla el lugar cuya suma de distancias a $(2,3,4)$ y $(2,3,-4)$ es 8. ¿Qué figura se obtiene?

7.19 Halla el lugar cuya diferencia de distancias a $(-4,3,1)$ y $(4,3,1)$ es 6.

7.20 Halla el lugar geométrico de los puntos equidistantes del plano $x = y$ y de $(0, -2, 1)$.

7.21 Estudia las intersecciones de $x^2/25 + y^2/16 + z^2/9 = 1$ con los planos coordenados y nombra la superficie.

7.22 Halla el centro y las longitudes de los ejes de $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$.

7.23 Estudia las intersecciones de $x^2/9 + y^2/4 - z^2/16 = 1$ con los planos coordenados. Nombra la superficie.

BLOQUE 8

Razonamiento y demostraciones

8.01 La ecuación $ax + by + cz + d = 0$ representa un plano. Describe qué ocurre si: I) $a = b = 0$; II) $b = c = 0$; III) $a = c = 0$; IV) $d = 0$.

8.02 Define la proyección ortogonal de un punto P sobre un plano π y explica cómo calcularla.

8.03 Por un punto P de una recta r, ¿cuántas rectas perpendiculares a r pueden trazarse en el espacio?

8.04 ¿Qué condiciones debe cumplir (a, b, c) para tener la dirección de una recta contenida en $x - 3y + 2z - 1 = 0$?

8.05 Justifica la fórmula $d(A, r) = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}$, donde $P \in r$ y $\vec{d}$ es un vector director no nulo.

8.06 Sean $r = A + \lambda\vec{u}$ y $s = B + \mu\vec{v}$ dos rectas que se cruzan. Justifica: a) $d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$; b) su perpendicular común es la intersección de $[\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v}] = 0$ y $[\overrightarrow{BX}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}] = 0$.

8.07 Sean $A \in \pi : ax + by + cz + d = 0$ y B tal que $\overrightarrow{AB} \cdot (a, b, c) = 0$. Demuestra que $B \in \pi$.

8.08 Para $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ y $C(0,0,c)$, con $abc \neq 0$, demuestra que la distancia d del origen al plano ABC verifica $1/d^2 = 1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2$.

BLOQUE 9

Autoevaluación

9.01 a) Halla la distancia entre los puntos donde las rectas cortan al plano. b) Calcula el ángulo de las rectas. c) Calcula el ángulo de r_1 con el plano.

$$r_1: \quad (x, y, z) = (11,\ 5,\ 7) + \lambda\,(4,\ 2,\ 3), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$r_2: \quad (x, y, z) = (11,\ 5,\ 7) + \lambda\,(-9,\ -5,\ -7), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\pi: \ 2x - 5y + 3z - 4 = 0.$$

9.02 Calcula las distancias entre π y σ, y entre π y γ:

$$\pi: \ 2x + 5y - 7z + 4 = 0.$$

$$\sigma: \ 5x - y + z - 4 = 0.$$

$$\gamma: \ 2x + 5y - 7z + 49 = 0.$$

9.03 Halla m para que la distancia entre $P(3,-1,11)$ y $Q(7,-1,m)$ sea 5.

9.04 Calcula la distancia de $P(1,-4,3)$ a la recta $\frac{x-2}{5}=\frac{4-2y}{2}=\frac{z+1}{3}$. Presta atención al numerador de la segunda fracción.

9.05 Calcula la distancia entre las rectas. Compruébala mediante el producto mixto y mediante los puntos más próximos.

$$r: \quad (x,y,z)=(3,\ 5,\ 4)+\lambda\,(2,\ -1,\ 1)\,, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x,y,z)=(0,\ 4,\ 0)+\mu\,(3,\ 5,\ -1)\,, \quad \mu\in\mathbb{R}.$$

9.06 Halla los puntos de mínima distancia y las ecuaciones de la perpendicular común.

$$r: \quad (x,y,z) = (-3,\ -2,\ 0) + \lambda\,(1,\ 5,\ 0)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s: \quad (x,y,z) = (3,\ -6,\ 2) + \mu\,(0,\ 4,\ 1)\,, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

9.07 El plano $3x + y + 2z - 6 = 0$ corta los tres ejes. Halla el área del triángulo formado por los cortes y el volumen de la pirámide determinada por ellos y el origen.

9.08 Halla el centro y el radio de $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 20 = 0$. Calcula el radio de la circunferencia que determina $3x - 4z + 5 = 0$ al cortar la esfera.

Solucionario

Los códigos corresponden a las actividades del dosier.

1 · Perpendicularidad y construcciones

1.01 Un vector director es la normal $(5, 0, -3)$.

$$r: \quad (x, y, z) = (1,\ 0,\ 7) + \lambda\,(5,\ 0,\ -3), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = 5\lambda + 1 \\ y = 0 \\ z = 7 - 3\lambda \end{cases}$$

Forma continua: $\frac{x-1}{5} = \frac{z-7}{-3}$. Coordenadas fijas: $y = 0$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 3x + 5z - 38 = 0 \end{cases}$$

1.02

$$\pi:\ 5x - 6y + z - 28 = 0.$$

1.03

$$\pi:\ 5x - y - 5 = 0.$$

1.04

$$\pi:\ 5x + 2y - 6z - 23 = 0.$$

1.05 Un vector normal es $\vec{n} = (2,\ 2,\ -1)$.

$$2x + 2y - z = 0.$$

Una parametrización es

$$(x, y, z) = (5,\ -1,\ 8) + \lambda\,(1,\ 0,\ 2) + \mu\,(3,\ -1,\ 4), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

1.06

$$r: \quad (x, y, z) = (0,\ -1,\ -3) + \lambda\,(9,\ 4,\ -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = 9\lambda \\ y = 4\lambda - 1 \\ z = -\lambda - 3 \end{cases}$$

Forma continua: $\frac{x}{9} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+3}{-1}$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} 4x - 9y - 9 = 0 \\ x + 9z + 27 = 0 \end{cases}$$

1.07

$$\pi:\ 5x+7y-z+3=0.$$

La intersección es

$$r:\quad (x,y,z)=\left(-\frac{10}{19},\ -\frac{1}{19},\ 0\right)+\lambda\,(20,\ -17,\ -19)\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

1.08 Su dirección es perpendicular a $(2,1,1)$ y a $(1,2,3)$.

$$r:\quad (x,y,z)=(2,\ 1,\ -1)+\lambda\,(1,\ -5,\ 3)\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x=\lambda+2\\ y=1-5\lambda\\ z=3\lambda-1\end{cases}$$

Forma continua: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+1}{3}$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} 5x+y-11=0\\ 3x-z-7=0\end{cases}$$

1.09 Su normal es perpendicular a la dirección de la recta y a la normal del plano dado.

$$\pi:\ 6x-9y-7z+2=0.$$

1.10 El producto de direcciones es $12-2p$, luego $p=6$. Las rectas se cortan. Al igualar las coordenadas se obtiene $\lambda=0,\ \mu=-1$. El punto de corte es $(0,\ 1,\ 0)$.

$$\pi:\ 8x+5y-11z-5=0.$$

1.11 a) Las normales son proporcionales solo para $a=3$; los planos son distintos. b) Su producto escalar es $10a+3$, luego $a=-3/10$. c) Para $a\neq\pm3$, el punto de corte es $\left(\frac{8a}{a^2-9},\frac{-8}{a^2-9},0\right)$. Imponiendo $x^2+y^2=2$ resulta $a^4-50a^2+49=0$, luego $a\in\{-7,-1,1,7\}$.

1.12

$$\pi:\ 7x-11y+z+16=0.$$

$\operatorname{sin}\alpha=\frac{5}{14}$, luego $\alpha\approx 20,92^\circ$.

1.13 El vector $(1,3,2)$ es normal al plano, que pasa por ese punto: $x+3y+2z-14=0$.

1.14 El determinante de normales es $3(1-ab)$; hay un único punto común si $ab\neq1$. Para $a=2$, $b=1$, la recta es $(x,y,z)=(3,0,-5)+\lambda(0,1,0)$. $\operatorname{sin}\alpha=\frac{3\sqrt{38}}{38}$, luego $\alpha\approx 29,12^\circ$.

1.15 Las rectas r y s se cortan en $(-2,2,2)$ y determinan $x-y+z+2=0$. Sustituyendo $t=(u,-1-u,u)$ resulta $3u+3=0$. Por tanto, $P=(-1,0,-1)$.

1.16 a) $b = 4a$, luego $6x - 5y + 3z = 0$. b) La normal $(2a + b, 3a - 2b, -a + b)$ ha de ser proporcional a $(3, 5, k)$. Tomando $a = 11$, $b = -1$, se obtiene $(21, 35, -12)$, luego $k = -12/7$ y el plano es $21x + 35y - 12z - 45 = 0$. c) Dos puntos de la arista son

$$P\left(\frac{5}{7},\ \frac{6}{7},\ 0\right), \qquad Q\left(\frac{12}{7},\ -\frac{15}{7},\ -7\right).$$

1.17 Dos planos que definen la recta son $2x+3y-7=0$ y $x-3z+4=0$. El haz es $a(2x+3y-7)+b(x-3z+4)=0$, $(a,b) \neq (0,0)$. La proyección del origen sobre la recta es $H = \left(\frac{5}{7},\ \frac{13}{7},\ \frac{11}{7}\right)$. El plano más alejado tiene normal OH y pasa por H:

$$\pi:\ 5x + 13y + 11z - 45 = 0.$$

Su distancia es $|OH| = \frac{3\sqrt{35}}{7}$. Cualquier plano del haz contiene H, de modo que su distancia al origen no puede superar $|OH|$.

2 · Ángulos en el espacio

2.01 Las direcciones no son paralelas y $[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}] = -\frac{140}{3} \neq 0$: las rectas se cruzan. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{51}}{102}$, luego $\alpha \approx 85,99°$.

2.02 Utiliza $\operatorname{sin}\alpha = |\vec{d}\cdot\vec{n}|/(|\vec{d}||\vec{n}|)$. $\operatorname{sin}\alpha = \frac{\sqrt{649}}{649}$, luego $\alpha \approx 2,25°$.

2.03 Las rectas se cortan. Al igualar las coordenadas se obtiene $\lambda = 0,\ \mu = 0$. El punto de corte es $(5,\ 4,\ 0)$. $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{51}}{51}$, luego $\alpha \approx 45,56°$.

2.04 Las rectas se cortan. Al igualar las coordenadas se obtiene $\lambda = -15,\ \mu = 0$. El punto de corte es $(3,\ 0,\ 15)$. $\cos\alpha = 0$, luego $\alpha \approx 90,00°$.

2.05 $(-5,1,-1)\cdot(1,2,m) = -3-m = 0$, luego $m = -3$.

2.06 Utiliza $\operatorname{sin}\alpha = |\vec{d}\cdot\vec{n}|/(|\vec{d}||\vec{n}|)$. $\operatorname{sin}\alpha = 1$, luego $\alpha \approx 90,00°$.

2.07 Utiliza $\operatorname{sin}\alpha = |\vec{d}\cdot\vec{n}|/(|\vec{d}||\vec{n}|)$. $\operatorname{sin}\alpha = 0$, luego $\alpha \approx 0,00°$.

2.08 Utiliza $\operatorname{sin}\alpha = |\vec{d}\cdot\vec{n}|/(|\vec{d}||\vec{n}|)$. $\operatorname{sin}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, luego $\alpha \approx 60,00°$.

2.09 Las normales son $(0,0,1)$ y $(1,-1,2)$. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, luego $\alpha \approx 35,26°$.

2.10 Ángulo en A: $\cos\theta = \frac{\sqrt{66}}{11}$, de donde $\theta \approx 42,39°$.
Ángulo en B: $\cos\theta = 0$, de donde $\theta \approx 90,00°$.
Ángulo en C: $\cos\theta = \frac{\sqrt{55}}{11}$, de donde $\theta \approx 47,61°$.

2.11 Ángulo en A: $\cos\theta = \frac{26\sqrt{705}}{705}$, de donde $\theta \approx 11,70°$.
Ángulo en B: $\cos\theta = -\frac{11\sqrt{6}}{30}$, de donde $\theta \approx 153,92°$.
Ángulo en C: $\cos\theta = \frac{21\sqrt{470}}{470}$, de donde $\theta \approx 14,38°$.

2.12 Eje X: $\operatorname{sin}\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$, luego $\alpha \approx 24,09°$.
Eje Y: $\operatorname{sin}\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, luego $\alpha \approx 54,74°$.
Eje Z: $\operatorname{sin}\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$, luego $\alpha \approx 24,09°$.

2.13 Toma un cubo unitario: $A = (1,0,0)$, $D = (1,0,1)$, $B = (1,1,1)$, $C = (0,1,0)$ y $M = (1,0,1/2)$. Entonces $\overrightarrow{BC} = (-1,0,-1)$ y $\overrightarrow{BM} = (0,-1,-1/2)$. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, luego $\alpha \approx 71,57°$.

3 · Distancias

3.01
$D = 3$.Por Pitágoras en el espacio, $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

3.02
$D = 13$.Por Pitágoras en el espacio, $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

3.03
$D = 3\sqrt{10}$.Por Pitágoras en el espacio, $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

3.04
$\overrightarrow{AB} = (4,\ 2,\ 1)$.
$d(A, B) = \sqrt{21}$.La distancia es el módulo del vector que une ambos puntos.

3.05 El plano por P perpendicular a r es

$$\pi:\ y - 2z + 18 = 0.$$

Su intersección con r es $H = (2,\ 0,\ 9)$. Por tanto, $d(P, r) = |PH| = 9$.
Por el producto vectorial: $\overrightarrow{QP} \times \vec{d} = (15,\ -12,\ -6)$, y $d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = 9$.

3.06
$d(P, \pi) = 78$.
$H = (4,\ 5,\ -2)$.Se aplica $d = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d_0|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. El punto H es la proyección ortogonal.

3.07 El plano por P perpendicular a r es

$$\pi:\ 5x - y + z - 25 = 0.$$

Su intersección con r es $H = (5,\ 1,\ 1)$. Por tanto, $d(P, r) = |PH| = 5\sqrt{2}$.
Por el producto vectorial: $\overrightarrow{QP} \times \vec{d} = (10,\ 25,\ -25)$, y $d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = 5\sqrt{2}$.

3.08
$d(P, \pi) = 11$.
$H = \left(\frac{13}{3},\ -\frac{7}{3},\ \frac{4}{3}\right)$.Se aplica $d = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d_0|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. El punto H es la proyección ortogonal.

3.09
$d(P, \pi) = 0$.
$H = (3,\ 0,\ 3)$.Se aplica $d = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d_0|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. El punto H es la proyección ortogonal.

3.10
$d(P, \pi) = 1$.
$H = \left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$.Se aplica $d = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d_0|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. El punto H es la proyección ortogonal.

3.11 El producto $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$. La recta es paralela al plano o está contenida en él. La distancia se calcula desde cualquier punto de la recta: $d = \frac{7\sqrt{10}}{10}$.

3.12 Son paralelos o coincidentes. Tomando $P = (0,\ -4,\ 0)$ en el primero, $d(\pi, \sigma) = d(P, \sigma) = \frac{2\sqrt{26}}{13}$.

3.13 Las direcciones no son paralelas y $[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}] = -169 \neq 0$: las rectas se cruzan.
Puntos de mínima distancia: $R = (1,\ 2,\ 3)$ y $S = (6,\ 2,\ -9)$. Se obtienen imponiendo $\overrightarrow{RS} \cdot \vec{d} = \overrightarrow{RS} \cdot \vec{e} = 0$. Por tanto, $d(r, s) = 13$.
También $V = |[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}]| = 169$, $A = |\vec{d} \times \vec{e}| = 13$, y $d = V/A = 13$.El plano que contiene r y es paralelo a s es

$$\pi:\ 5x - 12z + 31 = 0.$$

La distancia de Q a ese plano es la misma.

3.14 Las rectas se cortan. Al igualar las coordenadas se obtiene $\lambda = 1,\ \mu = 0$. El punto de corte es $(5,\ 1,\ 1)$.
Puntos de mínima distancia: $R = (5,\ 1,\ 1)$ y $S = (5,\ 1,\ 1)$. Se obtienen imponiendo $\overrightarrow{RS} \cdot \vec{d} = \overrightarrow{RS} \cdot \vec{e} = 0$. Por tanto, $d(r, s) = 0$.
También $V = |[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}]| = 0$, $A = |\vec{d} \times \vec{e}| = 2\sqrt{362}$, y $d = V/A = 0$.El plano que contiene r y es paralelo a s es

$$\pi:\ 5x + 16y - 9z - 32 = 0.$$

La distancia de Q a ese plano es la misma.

3.15
$\overrightarrow{AB} = (-3,\ -4,\ 0)$.
$d(A, B) = 5$.La distancia es el módulo del vector que une ambos puntos.

3.16
$\overrightarrow{AB} = (0,\ -5,\ 12)$.
$d(A, B) = 13$.La distancia es el módulo del vector que une ambos puntos.

3.17 Resolviendo las tres ecuaciones se obtiene $S = (0, 3, 1)$. Así, $d(P, S) = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$.

3.18 Para el primer plano, $14\lambda + 1 = 1$, luego $P = (0, 2, 3)$. Para el segundo, $2\lambda + 1 = 3$, luego $Q = (8, 2, -3)$. La distancia es $\sqrt{64 + 36} = 10$.

3.19
$d(P, \pi) = \frac{1}{5}$.
$H = (\frac{53}{25},\ -3,\ \frac{21}{25})$.Se aplica $d = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d_0|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. El punto H es la proyección ortogonal.

3.20
$d(P, \pi) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.
$H = (\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{3})$.Se aplica $d = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d_0|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. El punto H es la proyección ortogonal.

3.21
$d(P, \pi) = 0$.
$H = (2,\ 0,\ 1)$.Se aplica $d = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d_0|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. El punto H es la proyección ortogonal.

3.22
$d(P,\pi)=7$.
$H=(3,\ 3,\ 1)$.Se aplica $d=|ax_0+by_0+cz_0+d_0|/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. El punto H es la proyección ortogonal.

3.23 El plano es $z=4$: contiene el punto y la recta, y ambos lo determinan. Por tanto, $d(Q,\pi)=|0-4|=4$.

3.24 Son paralelos o coincidentes. Tomando $P=(-3,\ 0,\ 0)$ en el primero, $d(\pi,\sigma)=d(P,\sigma)=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3.25 Las normales no son proporcionales. Los planos se cortan y la distancia es cero.

3.26 El producto $\vec{d}\cdot\vec{n}=0$. La recta es paralela al plano o está contenida en él. La distancia se calcula desde cualquier punto de la recta: $d=\frac{3}{5}$.

3.27 El producto $\vec{d}\cdot\vec{n}=13$. Se cortan; la distancia es cero.

3.28 El plano por P perpendicular a r es

$$\pi:\ 4x+y-3z+5=0.$$

Su intersección con r es $H=(0,\ 1,\ 2)$. Por tanto, $d(P,r)=|PH|=5$.

3.29 El plano por P perpendicular a r es

$$\pi:\ 12x-3y+5z+37=0.$$

Su intersección con r es $H=(-3,\ 2,\ 1)$. Por tanto, $d(P,r)=|PH|=13$.

3.30 El plano por P perpendicular a r es

$$\pi:\ 4x+y-3z+5=0.$$

Su intersección con r es $H=(0,\ 1,\ 2)$. Por tanto, $d(P,r)=|PH|=5$.
Por el producto vectorial: $\overrightarrow{QP}\times\vec{d}=(-4,\ 25,\ 3)$, y $d(P,r)=\frac{|\overrightarrow{QP}\times\vec{d}|}{|\vec{d}|}=5$.

3.31 El plano por P perpendicular a r es

$$\pi:\ 12x-3y+5z+37=0.$$

Su intersección con r es $H=(-3,\ 2,\ 1)$. Por tanto, $d(P,r)=|PH|=13$.
Por el producto vectorial: $\overrightarrow{QP}\times\vec{d}=(-36,\ -169,\ -15)$, y $d(P,r)=\frac{|\overrightarrow{QP}\times\vec{d}|}{|\vec{d}|}=13$.

3.32 Las direcciones no son paralelas y $[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}] = -800 \neq 0$: las rectas se cruzan.
Puntos de mínima distancia: $R = (-4,\ -7,\ 4)$ y $S = (2,\ 1,\ 4)$. Se obtienen imponiendo $\overrightarrow{RS} \cdot \vec{d} = \overrightarrow{RS} \cdot \vec{e} = 0$. Por tanto, $d(r, s) = 10$.
También $V = |[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}]| = 800$, $A = |\vec{d} \times \vec{e}| = 80$, y $d = V/A = 10$.El plano que contiene r y es paralelo a s es

$$\pi:\ 3x + 4y + 40 = 0.$$

La distancia de Q a ese plano es la misma.

3.33 Las direcciones no son paralelas y $[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}] = -1183 \neq 0$: las rectas se cruzan.
Puntos de mínima distancia: $R = (-12,\ 3,\ 7)$ y $S = (0,\ 3,\ 2)$. Se obtienen imponiendo $\overrightarrow{RS} \cdot \vec{d} = \overrightarrow{RS} \cdot \vec{e} = 0$. Por tanto, $d(r, s) = 13$.
También $V = |[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}]| = 1183$, $A = |\vec{d} \times \vec{e}| = 91$, y $d = V/A = 13$.El plano que contiene r y es paralelo a s es

$$\pi:\ 12x - 5z + 179 = 0.$$

La distancia de Q a ese plano es la misma.

3.34 Las direcciones no son paralelas y $[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}] = -800 \neq 0$: las rectas se cruzan.
Puntos de mínima distancia: $R = (-4,\ -7,\ 4)$ y $S = (2,\ 1,\ 4)$. Se obtienen imponiendo $\overrightarrow{RS} \cdot \vec{d} = \overrightarrow{RS} \cdot \vec{e} = 0$. Por tanto, $d(r, s) = 10$.
También $V = |[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}]| = 800$, $A = |\vec{d} \times \vec{e}| = 80$, y $d = V/A = 10$.El plano que contiene r y es paralelo a s es

$$\pi:\ 3x + 4y + 40 = 0.$$

La distancia de Q a ese plano es la misma.

3.35 Las direcciones no son paralelas y $[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}] = -1183 \neq 0$: las rectas se cruzan.
Puntos de mínima distancia: $R = (-12,\ 3,\ 7)$ y $S = (0,\ 3,\ 2)$. Se obtienen imponiendo $\overrightarrow{RS} \cdot \vec{d} = \overrightarrow{RS} \cdot \vec{e} = 0$. Por tanto, $d(r, s) = 13$.
También $V = |[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}]| = 1183$, $A = |\vec{d} \times \vec{e}| = 91$, y $d = V/A = 13$.El plano que contiene r y es paralelo a s es

$$\pi:\ 12x - 5z + 179 = 0.$$

La distancia de Q a ese plano es la misma.

3.36 β equivale a $x + y - z - 3 = 0$. Ambas normales tienen módulo $\sqrt{3}$. Al sustituir la recta, $|6\lambda + 3| = 3$. Por tanto, $\lambda = 0, -1$ y los puntos son $(1, -1, 0)$ y $(-1, -2, -3)$.

3.37 Podemos tomar la diagonal espacial $r = \lambda(1, 1, 1)$ y la diagonal de cara $s = (6, 0, 0) + \mu(-1, 1, 0)$. Las direcciones no son paralelas y $[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}] = -6 \neq 0$: las rectas se cruzan.
Puntos de mínima distancia: $R = (2,\ 2,\ 2)$ y $S = (3,\ 3,\ 0)$. Se obtienen imponiendo $\overrightarrow{RS} \cdot \vec{d} = \overrightarrow{RS} \cdot \vec{e} = 0$. Por tanto, $d(r, s) = \sqrt{6}$.
También $V = |[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}]| = 6$, $A = |\vec{d} \times \vec{e}| = \sqrt{6}$, y $d = V/A = \sqrt{6}$.El plano que contiene r y es paralelo a s es

$$\pi:\ x + y - 2z = 0.$$

La distancia de Q a ese plano es la misma.La distancia es $\sqrt{6}$ cm.

3.38 La recta es $(t, -t, t)$ y $|5t+1|/3 = 1/3$. Se obtiene

$$P_1\left(-\frac{2}{5},\ \frac{2}{5},\ -\frac{2}{5}\right), \qquad P_2\,(0,\ 0,\ 0)\,.$$

En el plano, los únicos puntos a esa distancia son los pies de las perpendiculares:

$$H_1\left(-\frac{8}{45},\ \frac{13}{45},\ -\frac{8}{45}\right), \qquad H_2\left(-\frac{2}{9},\ \frac{1}{9},\ -\frac{2}{9}\right).$$

3.39 Son de la forma $x - 2y + 3z + c = 0$. Como $|c|/\sqrt{14} = 12$, se obtienen $x - 2y + 3z \pm 12\sqrt{14} = 0$.

3.40 Las direcciones no son paralelas y $[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}] = -42 \neq 0$: las rectas se cruzan.
Puntos de mínima distancia: $R = (\frac{26}{7},\ \frac{22}{7},\ 0)$ y $S = (\frac{45}{14},\ \frac{15}{7},\ -\frac{1}{2})$. Se obtienen imponiendo $\overrightarrow{RS} \cdot \vec{d} = \overrightarrow{RS} \cdot \vec{e} = 0$. Por tanto, $d(r,s) = \frac{\sqrt{6}}{2}$.
También $V = |[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}]| = 42$, $A = |\vec{d} \times \vec{e}| = 14\sqrt{6}$, y $d = V/A = \frac{\sqrt{6}}{2}$.El plano que contiene r y es paralelo a s es

$$\pi:\ x + 2y + z - 10 = 0.$$

La distancia de Q a ese plano es la misma.

3.41 $|m+1|/\sqrt{m^2+2} = 1$ implica $(m+1)^2 = m^2 + 2$, luego $m = 1/2$. El plano es $x + 2y + 2z - 3 = 0$.

4 · Áreas y volúmenes

4.01 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-26,\ 28,\ -10)$. El área es $A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{390}$.

4.02 $V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = 5$. Como comprobación, $A_{ABC} = 3\sqrt{2}$ y $h_D = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, luego $V = A_{ABC}h_D/3$.

4.03 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-89,\ 13,\ 67)$. El área es $A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{12579}}{2}$.

4.04 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0,\ 0,\ 0)$. El área es $A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 0$. Los puntos están alineados; el triángulo es degenerado.

4.05 $V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = 5$. Como comprobación, $A_{ABC} = 3\sqrt{2}$ y $h_D = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, luego $V = A_{ABC}h_D/3$.

4.06 $V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = 5$. Como comprobación, $A_{ABC} = 3\sqrt{2}$ y $h_D = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, luego $V = A_{ABC}h_D/3$.

4.07 $V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{154}{3}$. Como comprobación, $A_{ABC} = 14$ y $h_D = 11$, luego $V = A_{ABC}h_D/3$.
Las áreas de las caras ABC, ABD, ACD, BCD son, respectivamente, $14,\ \frac{7\sqrt{42}}{2},\ 7\sqrt{38},\ \frac{3\sqrt{1610}}{2}$. El área total es $14 + \frac{7\sqrt{42}}{2} + 7\sqrt{38} + \frac{3\sqrt{1610}}{2}$.

4.08
$A = (5,\ 0,\ 0)$.
$B = (0,\ -6,\ 0)$.
$C = (0,\ 0,\ 10)$.
$V = 50$.La base sobre XY tiene área $|5 \cdot (-6)|/2 = 15$ y la altura es 10. Así, $V = 15 \cdot 10/3 = 50$. El producto mixto da $|5(-6)10|/6 = 50$.

4.09

$$\pi:\ 2x + 3y + 4z - 1 = 0.$$

Cortes con los ejes:

$$A\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right), \qquad B\left(0,\ \frac{1}{3},\ 0\right), \qquad C\left(0,\ 0,\ \frac{1}{4}\right).$$

El volumen es $V = |x_A y_B z_C|/6 = \frac{1}{144}$.

4.10

$$\pi:\ 2x - 3y + z + 6 = 0.$$

$$A\,(-3,\ 0,\ 0)\,, \qquad B\,(0,\ 2,\ 0)\,, \qquad C\,(0,\ 0,\ -6)\,.$$

El área es $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{14}$.

4.11
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-1,\ -18,\ -29)$.
$H = \left(-\frac{7}{29},\ \frac{118}{29},\ -\frac{40}{29}\right)$.
$BH = \frac{\sqrt{33814}}{29}$.El producto vectorial no es nulo, por lo que no están alineados.

4.12 Las rectas son paralelas distintas. El lado es su distancia, $l=\sqrt{10}$, y el área es $l^2=10$. Los dos posibles vértices sobre r son $\left(\frac{2\sqrt{10}}{3},\ -\frac{\sqrt{10}}{3},\ -\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)$ y $\left(-\frac{2\sqrt{10}}{3},\ \frac{\sqrt{10}}{3},\ \frac{2\sqrt{10}}{3}\right)$.

4.13

$$\pi:\ 5x+3y-9z+1=0.$$

$$X\left(-\frac{1}{5},\ 0,\ 0\right),\qquad Y\left(0,\ -\frac{1}{3},\ 0\right),\qquad Z\left(0,\ 0,\ \frac{1}{9}\right).$$

El volumen es $|x_X y_Y z_Z|/6=\frac{1}{810}$.

4.14

$$\pi:\ x-3y+2z+6=0.$$

$$A\left(-6,\ 0,\ 0\right),\qquad B\left(0,\ 2,\ 0\right),\qquad C\left(0,\ 0,\ -3\right).$$

$V=|x_A y_B z_C|/6=6$.

4.15
$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=(2,\ 0,\ 1)$.
$A=\frac{\sqrt{5}}{2}$.
$h=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.
$V=\frac{1}{3}$.El producto vectorial no nulo confirma que la base es un triángulo.

4.16
$D=(3,\ -3,\ 5)$.
$F=(8,\ 9,\ 3)$.
$G=(10,\ 6,\ 8)$.
$H=(9,\ 3,\ 8)$.
$V=33$.Se usa $D=A+C-B$ y se traslada la base por $\overrightarrow{AE}$.

4.17 Las rectas son paralelas distintas. El lado del cuadrado mide $\frac{\sqrt{30}}{3}$ y el área es $\frac{10}{3}$.

4.18
$S=(4,\ 1,\ 1)$.
$A=\frac{5}{2}$.La dirección de la recta dada es $(0,1,0)$, por lo que la perpendicularidad exige $y_S=1$.

4.19

$$\pi:\ 2x-2y-z-1=0.$$

La distancia del centro a un lado es la mitad de la longitud del lado. Así, $l=2d(C,r)=3\sqrt{2}$.

4.20 El centro es $M=(2,-2,2)$. La otra diagonal es paralela a $(1,1,0)$, normal al plano dado y perpendicular a PQ. Sus extremos son $R=(2+\sqrt{6}/2,-2+\sqrt{6}/2,2)$ y $S=(2-\sqrt{6}/2,-2-\sqrt{6}/2,2)$. La diagonal mide $2\sqrt{3}$, el lado $\sqrt{6}$ y el perímetro $4\sqrt{6}$.

5 · Proyecciones y simetrías

5.01 Las direcciones no son paralelas y $[\overrightarrow{PQ},\vec{d},\vec{e}]=11\neq 0$: las rectas se cruzan.
Puntos de mínima distancia: $R=\left(\frac{21}{5},\ \frac{7}{5},\ \frac{8}{5}\right)$ y $S=\left(2,\ -3,\ \frac{8}{5}\right)$. Se obtienen imponiendo $\overrightarrow{RS}\cdot\vec{d}=\overrightarrow{RS}\cdot\vec{e}=0$. Por tanto, $d(r,s)=\frac{11\sqrt{5}}{5}$.
También $V=|[\overrightarrow{PQ},\vec{d},\vec{e}]|=11$, $A=|\vec{d}\times\vec{e}|=\sqrt{5}$, y $d=V/A=\frac{11\sqrt{5}}{5}$.El plano que contiene r y es paralelo a s es

$$\pi:\ x+2y-7=0.$$

La distancia de Q a ese plano es la misma. La perpendicular común es

$$r:\quad (x,y,z)=\left(\frac{21}{5},\ \frac{7}{5},\ \frac{8}{5}\right)+\lambda\,(1,\ 2,\ 0)\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x=\lambda+\dfrac{21}{5}\\ y=2\lambda+\dfrac{7}{5}\\ z=\dfrac{8}{5}\end{cases}$$

Forma continua: $\frac{x-\frac{21}{5}}{1}=\frac{y-\frac{7}{5}}{2}$. Coordenadas fijas: $z=\frac{8}{5}$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} 2x-y-7=0\\ z-\dfrac{8}{5}=0\end{cases}$$

5.02 El pie de la perpendicular es $H=(2,\ 1,\ 0)$.

$$r:\quad (x,y,z)=(1,\ 2,\ 1)+\lambda\,(1,\ -1,\ -1)\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x=\lambda+1\\ y=2-\lambda\\ z=1-\lambda\end{cases}$$

Forma continua: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{-1}$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} x+y-3=0\\ x+z-2=0\end{cases}$$

5.03

$$A\,(3,\ 0,\ 0)\,,\qquad B\,(0,\ 6,\ 0)\,,\qquad C\,(0,\ 0,\ -2)\,.$$

El pie sobre AC es $H=\left(\frac{12}{13},\ 0,\ -\frac{18}{13}\right)$. La altura es

$$r:\quad (x,y,z)=(0,\ 6,\ 0)+\lambda\,(2,\ -13,\ -3)\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x=2\lambda\\ y=6-13\lambda\\ z=-3\lambda\end{cases}$$

Forma continua: $\frac{x}{2}=\frac{y-6}{-13}=\frac{z}{-3}$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} 13x+2y-12=0\\ 3x+2z=0\end{cases}$$

5.04
$H_\pi = (\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ 2)$.
$P_\pi = (2,\ -1,\ 1)$.
$H_r = (\frac{2}{3},\ \frac{11}{3},\ \frac{8}{3})$.
$P_r = (\frac{1}{3},\ \frac{16}{3},\ \frac{7}{3})$.En cada caso, H es la proyección ortogonal y el simétrico es $2H - P$.

5.05
$H = (5,\ 1,\ 2)$.
$d = 2\sqrt{2}$.PH es perpendicular al plano.

5.06 Proyectamos dos puntos de la recta sobre el plano. Una parametrización de la proyección es

$$r:\quad (x,y,z) = (0,\ 4,\ 0) + \lambda\,(25,\ 23,\ 22)\,,\quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = 25\lambda \\ y = 23\lambda + 4 \\ z = 22\lambda \end{cases}$$

Forma continua: $\frac{x}{25} = \frac{y-4}{23} = \frac{z}{22}$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} 23x - 25y + 100 = 0 \\ 22x - 25z = 0 \end{cases}$$

5.07 Las direcciones no son paralelas y $[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}] = 3 \neq 0$: las rectas se cruzan.
Puntos de mínima distancia: $R = (\frac{2}{3},\ -\frac{7}{6},\ -\frac{1}{6})$ y $S = (\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3})$. Se obtienen imponiendo $\overrightarrow{RS} \cdot \vec{d} = \overrightarrow{RS} \cdot \vec{e} = 0$.
Por tanto, $d(r,s) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
También $V = |[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}]| = 3$, $A = |\vec{d} \times \vec{e}| = 3\sqrt{2}$, y $d = V/A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.El plano que contiene r y es paralelo a s es

$$\pi:\ y - z + 1 = 0.$$

La distancia de Q a ese plano es la misma. La perpendicular común es

$$r:\quad (x,y,z) = \left(\frac{2}{3},\ -\frac{7}{6},\ -\frac{1}{6}\right) + \lambda\,(0,\ 1,\ -1)\,,\quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \lambda - \dfrac{7}{6} \\ z = -\lambda - \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Forma continua: $\frac{y+\frac{7}{6}}{1} = \frac{z+\frac{1}{6}}{-1}$. Coordenadas fijas: $x = \frac{2}{3}$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} x - \dfrac{2}{3} = 0 \\ y + z + \dfrac{4}{3} = 0 \end{cases}$$

5.08 a) $P = (0,\ 1,\ 1)$ y la perpendicular es

$$s: \quad (x, y, z) = (0,\ 2,\ 2) + \lambda\,(0,\ 1,\ 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) El plano es

$$\pi: \ 2x + y - z = 0.$$

La recta normal es

$$t: \quad (x, y, z) = (0,\ 1,\ 1) + \lambda\,(2,\ 1,\ -1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) Las tres distancias son iguales a $|QP|$, porque QP es perpendicular al plano y a ambas rectas por P.

5.09
$d(P, QR) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.
$S_1 = (1,\ 1,\ 5)$.
$S_2 = (1,\ -3,\ 1)$.
$S_3 = (1,\ 3,\ -3)$.Hay tres opciones, según qué pareja de los puntos dados forme una diagonal.

---

6 · Esferas y circunferencias

6.01 Completando cuadrados: $(x+1)^2+(y-5)^2+z^2=1$. Centro $(-1,5,0)$ y radio 1.

6.02 El centro es la proyección del centro de la esfera sobre el plano: $H=(6,\ -5,\ -3)$. La distancia entre centros es $d=5$, así que $\rho=\sqrt{R^2-d^2}=12$.

6.03 No es esfera: $(x-1)^2+(y+2)^2=13$ es un cilindro circular paralelo al eje Z.

6.04 No es esfera: $(x+1)^2-y^2+z^2=9$ tiene un término cuadrático de signo distinto.

6.05

$$y^2+z^2+(x+1)^2=9.$$

Centro $C=(-1,\ 0,\ 0)$ y radio $R=3$.

6.06 No es esfera: $(x-z)^2+3y^2=4$ contiene un término mixto y no es una suma de tres cuadrados con igual coeficiente.

6.07

$$y^2+(x+1)^2+(z-2)^2=6.$$

Centro $C=(-1,\ 0,\ 2)$ y radio $R=\sqrt{6}$.

6.08

$$y^2+(x+1)^2+(z-2)^2=15.$$

Centro $C=(-1,\ 0,\ 2)$ y radio $R=\sqrt{15}$.

6.09

$$z^2+(x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=4.$$

Centro $C=(1,\ -\frac{3}{2},\ 0)$ y radio $R=2$.

6.10 Centro $C=(1,\ 0,\ -5)$ y radio $R=1$.

$$y^2+(x-1)^2+(z+5)^2=1.$$

6.11 Centro $C=(4,\ -1,\ 1)$ y radio $R=\sqrt{11}$.

$$(x-4)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=11.$$

6.12 Centro $C=(4,\ -2,\ 3)$ y radio $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$(x-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=\frac{1}{2}.$$

6.13 Centro $C = (3,\ -1,\ 2)$ y radio $R = 3$.

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9.$$

6.14 Centro $C = (2,\ -1,\ 4)$ y radio $R = 7$.

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 49.$$

6.15 Al restar las ecuaciones de igual distancia se obtiene $C = (3/2, 3/2, 3/2)$. El radio es $\sqrt{3}/2$.

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

6.16 La esfera tiene centro $C = (1,2,0)$ y radio 1. El radio $CP = (0,0,1)$ es normal al plano tangente, luego este es $z = 1$. El punto opuesto es $2C - P = (1,2,-1)$.

6.17 Si $C = (-2,0,t)$, la igualdad de distancias exige $|-10-2t| = |1-t|$. Se obtiene $t = -11$ o $t = -3$.
Centro $C = (-2,\ 0,\ -11)$, radio $R = \frac{12\sqrt{5}}{5}$.

$$y^2 + (x+2)^2 + (z+11)^2 = \frac{144}{5}.$$

Centro $C = (-2,\ 0,\ -3)$, radio $R = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

$$y^2 + (x+2)^2 + (z+3)^2 = \frac{16}{5}.$$

6.18 El centro es la proyección del centro de la esfera sobre el plano: $H = (1,\ 0,\ 0)$. La distancia entre centros es $d = 3$, así que $\rho = \sqrt{R^2 - d^2} = 4$.

6.19 Imponiendo $|CA|^2 = |CB|^2$ se obtiene $\lambda = -3$, luego $C = (2,\ 0,\ -1)$.

$$y^2 + (x-2)^2 + (z+1)^2 = 9.$$

El plano tangente en B tiene normal $B - C$:

$$\pi:\ x + 2y + 2z - 9 = 0.$$

7 · Lugares geométricos y cuádricas

7.01 Igualando los cuadrados de las distancias y simplificando:

$$: \ -12x + 12y - 12z + 36 = 0.$$

Es el plano mediador de AB.

7.02 Las normales tienen igual módulo. La igualdad $|x+y+z-2| = |x-y+z-2|$ da los planos bisectores $y = 0$ y $x + z - 2 = 0$.

7.03 Es el plano intermedio: $x - 3y + 2z - 4 = 0$. Se obtiene de $|u - 8| = |u|$, con $u = x - 3y + 2z$.

7.04 $x^2 + y^2 + z^2 + (x-10)^2 + y^2 + z^2 = 68$, es decir, $(x-5)^2 + y^2 + z^2 = 9$. Es una esfera de centro $(5, 0, 0)$ y radio 3.

7.05 Es un elipsoide de revolución: $a = 13$, $c = 5$, $b^2 = a^2 - c^2 = 144$. Su ecuación es $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{144} + \frac{z^2}{169} = 1$.

7.06 Es un hiperboloide de dos hojas: $a = 3$, $c = 5$, $b^2 = c^2 - a^2 = 16$. Ecuación: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2+z^2}{16} = 1$.

7.07 Al elevar al cuadrado, $(x - \frac{1}{4})^2 + y^2 + z^2 = (x + \frac{1}{4})^2$. Se obtiene $x = y^2 + z^2$, un paraboloide de revolución. Sus secciones por planos que contienen su eje son parábolas.

7.08 Igualando distancias al cuadrado se obtiene

$$: \ 2x + 8y - 8z - 27 = 0.$$

Es el plano mediador. Su normal es proporcional a $\overrightarrow{AB} = (1, 4, -4)$ y pasa por $M = (3/2, 1, -2)$.

7.09 Las normales tienen módulo $\sqrt{14}$. Igualando las expresiones con ambos signos se obtienen $x+2y-2z+2 = 0$ y $2x - y - 1 = 0$. Son los planos bisectores.

7.10 Al sustituir $y = x$, $|x + 2z - 2|/3 = 1$. El lugar es la unión de dos rectas: $x = y$, $x + 2z = 5$ y $x = y$, $x + 2z = -1$.

7.11 La condición es $3|3x - 4y + 5| = 5|2x - 2y + z + 9|$. Los planos bisectores son $x + 2y + 5z + 30 = 0$ y $19x - 22y + 5z + 60 = 0$. En OY, los puntos son $(0, -15, 0)$ y $(0, 30/11, 0)$.

7.12

$$: \ -4x + 4y - 8z + 4 = 0.$$

Es el plano mediador de PQ. La distancia de P al plano es $|PQ|/2 = \sqrt{6}$.

7.13 La igualdad $PA^2 = 4PB^2$ da

$$: \ -3x^2 + 28x - 3y^2 - 14y - 3z^2 - 24z - 27 = 0.$$

Completando cuadrados se obtiene una esfera de centro $\left(\frac{14}{3},\ -\frac{7}{3},\ -4\right)$ y radio $\frac{2\sqrt{77}}{3}$.

$$\left(x - \frac{14}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{3}\right)^2 + (z+4)^2 = \frac{308}{9}.$$

7.14 La condición $(A-P)\cdot(B-P) = 0$ equivale a la esfera de diámetro AB, centro $(3,4,-2)$ y radio 3.

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = 9.$$

7.15 Elipsoide de revolución: $a = 3$, $c = 2$, $b^2 = 5$. Su ecuación es $x^2/9 + (y^2+z^2)/5 = 1$.

7.16 $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = (z+3)^2$, de donde $x^2 + y^2 = 12z$. Es un paraboloide de revolución.

7.17 Hiperboloide de dos hojas, con $a = 2$, $c = 5$ y $b^2 = 21$: $y^2/4 - (x^2+z^2)/21 = 1$.

7.18 La distancia entre los focos es exactamente 8. Por la desigualdad triangular, la suma solo alcanza ese valor en el segmento que los une. Por tanto, el lugar es $x = 2$, $y = 3$, $-4 \le z \le 4$. Es un segmento, no una superficie elipsoidal no degenerada.

7.19 Al considerar el valor absoluto de la diferencia se obtiene el hiperboloide $\frac{x^2}{9} - \frac{(y-3)^2+(z-1)^2}{7} = 1$. Si se exige la diferencia en el orden escrito, $d(P,(-4,3,1)) - d(P,(4,3,1)) = 6$, se conserva solo la hoja $x \ge 3$.

7.20 La igualdad es $(x-y)^2/2 = x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2$. Equivale a $x^2 + y^2 + 2xy + 2z^2 + 8y - 4z + 10 = 0$. Es un paraboloide de revolución cuyo eje es perpendicular a $x = y$ y pasa por el foco.

7.21 En XY: $x^2/25 + y^2/16 = 1$. En XZ: $x^2/25 + z^2/9 = 1$. En YZ: $y^2/16 + z^2/9 = 1$. Son elipses; la superficie es un elipsoide de semiejes 5, 4 y 3.

7.22 Completando cuadrados: $2(x-2)^2 + 3(y+1)^2 + (z-2)^2 = 18$. Centro $(2,-1,2)$; semiejes $3, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}$ y ejes de longitudes $6, 2\sqrt{6}, 6\sqrt{2}$, respectivamente.

7.23 En XY se obtiene la elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$. En XZ, la hipérbola $x^2/9 - z^2/16 = 1$. En YZ, la hipérbola $y^2/4 - z^2/16 = 1$. La superficie es un hiperboloide de una hoja, con eje Z.

8 · Razonamiento y demostraciones

8.01 Los coeficientes a, b, c no pueden ser todos nulos. I) $z = -d/c$: paralelo a XY o coincidente con él. II) $x = -d/a$: paralelo a YZ o coincidente. III) $y = -d/b$: paralelo a XZ o coincidente. IV) Contiene el origen.

8.02 Es el punto $H \in \pi$ tal que PH es perpendicular al plano; si $P \in \pi$, $H = P$. Para $\pi : \vec{n} \cdot X + d = 0$, se toma la recta $X = P + t\vec{n}$ y se sustituye en el plano: $H = P - \frac{\vec{n} \cdot P + d}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$.

8.03 Infinitas. Son todas las rectas por P contenidas en el plano perpendicular a r por ese punto; sus direcciones son los vectores no nulos ortogonales a la dirección de r.

8.04 Debe ser no nulo y cumplir $a - 3b + 2c = 0$, pues ha de ser ortogonal a la normal $(1, -3, 2)$. Con cualquier punto del plano y esa dirección se obtiene una recta contenida en él.

8.05 El módulo del producto vectorial es el área del paralelogramo de lados $\overrightarrow{PA}$ y $\vec{d}$. Su base mide $|\vec{d}|$ y su altura es $d(A, r)$. Al dividir el área por la base se obtiene la fórmula.

8.06 a) El numerador es el volumen de un paralelepípedo cuya base tiene área $|\vec{u} \times \vec{v}|$ y cuya altura es la distancia entre los planos paralelos que contienen a las rectas. b) Cada ecuación representa el plano generado por una recta y la dirección $\vec{u} \times \vec{v}$. Su intersección tiene esa dirección, corta a ambas rectas y es perpendicular a sus direcciones. Como las rectas se cruzan, la perpendicular común es única.

8.07 La hipótesis da $a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) + c(z_B - z_A) = 0$. Sumando $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$ resulta $ax_B + by_B + cz_B + d = 0$, por lo que B pertenece al plano.

8.08 El plano es $x/a + y/b + z/c = 1$. La fórmula de la distancia da $d = 1/\sqrt{1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2}$. Elevando al cuadrado e invirtiendo resulta la identidad.

9 · Autoevaluación

9.01 a) Los puntos son

$$A\,(3,\ 1,\ 1)\,, \qquad B\,(2,\ 0,\ 0)\,.$$

La distancia es $\sqrt{3}$. b) $\cos\alpha = \frac{67\sqrt{4495}}{4495}$, luego $\alpha \approx 2,09°$.
c) $\sin\alpha = \frac{7\sqrt{1102}}{1102}$, luego $\alpha \approx 12,17°$.

9.02 π y σ se cortan, luego su distancia es 0. π y γ son paralelos, y su distancia es $45/\sqrt{78} = 15\sqrt{78}/26$.

9.03 $16 + (m-11)^2 = 25$, luego $m = 8$ o $m = 14$.

9.04 El plano por P perpendicular a r es

$$\pi:\ 5x - y + 3z - 18 = 0.$$

Su intersección con r es $H = \left(\frac{27}{7},\ \frac{57}{35},\ \frac{4}{35}\right)$. Por tanto, $d(P,r) = |PH| = \frac{\sqrt{59010}}{35}$.
Por el producto vectorial: $\overrightarrow{QP} \times \vec{d} = (-14,\ 23,\ 31)$, y $d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{QP}\times\vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{59010}}{35}$.

9.05 Las direcciones no son paralelas y $[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}] = -45 \neq 0$: las rectas se cruzan.
Puntos de mínima distancia: $R = (0,\ \frac{13}{2},\ \frac{5}{2})$ y $S = \left(\frac{6}{7},\ \frac{38}{7},\ -\frac{2}{7}\right)$. Se obtienen imponiendo $\overrightarrow{RS}\cdot\vec{d} = \overrightarrow{RS}\cdot\vec{e} = 0$. Por tanto, $d(r,s) = \frac{3\sqrt{210}}{14}$.
También $V = |[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}]| = 45$, $A = |\vec{d}\times\vec{e}| = \sqrt{210}$, y $d = V/A = \frac{3\sqrt{210}}{14}$.El plano que contiene r y es paralelo a s es

$$\pi:\ 4x - 5y - 13z + 65 = 0.$$

La distancia de Q a ese plano es la misma.

9.06 Las direcciones no son paralelas y $[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}] = 42 \neq 0$: las rectas se cruzan.
Puntos de mínima distancia: $R = (-2,\ 3,\ 0)$ y $S = (3,\ 2,\ 4)$. Se obtienen imponiendo $\overrightarrow{RS}\cdot\vec{d} = \overrightarrow{RS}\cdot\vec{e} = 0$. Por tanto, $d(r,s) = \sqrt{42}$.
También $V = |[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}, \vec{e}]| = 42$, $A = |\vec{d}\times\vec{e}| = \sqrt{42}$, y $d = V/A = \sqrt{42}$.El plano que contiene r y es paralelo a s es

$$\pi:\ 5x - y + 4z + 13 = 0.$$

La distancia de Q a ese plano es la misma. La perpendicular común es

$$r:\quad (x,y,z) = (-2,\ 3,\ 0) + \lambda\,(5,\ -1,\ 4)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = 5\lambda - 2 \\ y = 3 - \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

Forma continua: $\frac{x+2}{5} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{4}$.Como intersección de planos:

$$\begin{cases} x + 5y - 13 = 0 \\ 4x - 5z + 8 = 0 \end{cases}$$

9.07

$A = (2,\ 0,\ 0)$.
$B = (0,\ 6,\ 0)$.
$C = (0,\ 0,\ 3)$.
$A_{ABC} = 3\sqrt{14}$.
$V = 6$.

9.08

$C = (2,\ 0,\ -1)$.
$R = 5$.
$\rho = 4$.Completando cuadrados, $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 25$. La distancia del centro al plano es 3, por lo que $\rho = \sqrt{25-9} = 4$.