2.º BACHILLERATO

Primitivas e integrales indefinidas

Matemáticas II

Practica, razona y comprueba tus respuestas.

01 Primitivas y propiedades

02 Integrales inmediatas

03 Integración por partes

04 Integrales racionales

05 Cambio de variable

06 Integrales trigonométricas

07 Integrales no elementales

08 Problemas y repaso

119 actividades · 8 bloques

TU RUTA DE TRABAJO

Índice

Actividades organizadas por contenidos y soluciones al final.

1	Primitivas y propiedades	3
2	Integrales inmediatas	6
3	Integración por partes	11
4	Integrales racionales	15
5	Cambio de variable	19
6	Integrales trigonométricas	22
7	Integrales no elementales	25
8	Problemas y repaso	27
Solucionario		42

Cómo usar el dosier

El código 2.03 identifica la tercera actividad del bloque 2. Busca ese mismo código en el solucionario. Justifica los procedimientos y comprueba los resultados.

BLOQUE 1

Primitivas y propiedades

1.01

Utiliza la tabla de derivadas para calcular estas integrales:

a) $\int x^r dx$

b) $\int x^{-1} dx$

c) $\int e^x dx$

d) $\int a^x dx$

e) $\int \cos x dx$

f) $\int \operatorname{sen} x dx$

g) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

h) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$

En a), $r \in \mathbb{R}$ y $r \neq -1$. En d), $a > 0$ y $a \neq 1$.

1.02

Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int (\operatorname{sen} x - e^x + \sqrt{x}) dx$

b) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

c) $\int \sqrt[3]{x^2 \sqrt{x}} dx$

1.03

Calcula, en cada caso, la función $f(x)$ que verifica las condiciones dadas.

a) $f'(x) = \cos x + x\sqrt{x}$ y $f(\pi) = 0$

b) $f'(x) = \frac{3}{1+x^2} - e^x$ y $f(0) = 1$

c) $f'(x) = x - 2\cos x$ y la gráfica de f corta a la bisectriz del II cuadrante en el punto de abscisa $x = \pi$.

1.04

Prueba que $F(x) = \text{sen}^2 x$ y $G(x) = -\frac{\cos 2x}{2}$ son primitivas de $f(x) = \text{sen}(2x)$. ¿En qué constante se diferencian? (Recuerda que $\text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha$).

1.05

Asocia a cada función $f(x)$ una primitiva $F(x)$.

$f(x)$
$6\text{sen}^2(2x+1)\cos(2x+1)$
$\cos(2x+1)$
$6(2x+1)^2\cos(2x+1)^3$
$6\cos(6x+3)$

$F(x)$
$\text{sen}(2x+1)^3$
$\frac{1}{2}\text{sen}(2x+1)$
$\text{sen}[3(2x+1)]$
$\text{sen}^3(2x+1)$

1.06

Comprueba que $F(x) = \text{arcsen}\, x$ y $G(x) = -\text{arccos}\, x$ son ambas primitivas de la misma función. ¿De qué función se trata? ¿En qué constante difieren?

1.07

Una primitiva de cierta función $f(x)$ es $F(x) = x^2 - 3x + 1$. Encuentra otra primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pase por el punto $A(1, 5)$.

1.08

Determina, razonando la respuesta, si las funciones $F(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x}$ y $G(x) = \dfrac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x \operatorname{sen} x}$ son primitivas de una misma función.

1.09

Comprueba que:

a) $\displaystyle\int 6\operatorname{sen}(x+1)\cos(x+1)dx = 3\operatorname{sen}^2(x+1) + C$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}} = 4\sqrt[4]{x} + C$

c) $\displaystyle\int \sqrt{ax+b} = \frac{2(ax+b)\sqrt{ax+b}}{3a} + C$

BLOQUE 2

Integrales inmediatas

2.01

Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{t+1}{\sqrt{3t^2+6t-5}}\,dt$

b) $\int \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}\,dx$

c) $\int (x^3+1)^{12}\cdot 4x^2\,dx$

d) $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln t)}{t}\,dt$

e) $\int \frac{e^{3s}}{1+e^{6s}}\,ds$

f) $\int \frac{8x}{\sqrt{1-9x^4}}dx$

2.02

Halla las primitivas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=2x(\operatorname{sen} x^2)(\cos^4 x^2)$

b) $g(x)=\operatorname{tg}(3x+2)$

2.03

Calcula las derivadas de $f(x)=\operatorname{tg}^2 x$ y $g(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, simplifícalas al máximo y explica qué observas.

2.04

Calcula las siguientes primitivas inmediatas indicando de qué tipo son.

a) $\int \sqrt[5]{x^3}\,dx$

b) $\int \frac{4^x - 3\cdot 2^x}{2^x}\,dx$

c) $\int \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 7}{x^2}\,dx$

d) $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}\,dx$

e) $\int \frac{2\sqrt{1-x^2} - 3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

f) $\int e^{-x}\,dx$

g) $\int \frac{2+t^2}{1+t^2}\,dt$

h) $\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^6}}\,dt$

2.05

Halla una primitiva de $y = \frac{x^2+3}{\sqrt{x}}$.

2.06

Determina $f(x)$ sabiendo que:

$f'''(x) = 24x;\ f(0) = 0;\ f'(0) = 1;\ f''(0) = 2$

2.07

Calcula $\int x \ln(1+x^2)\,dx$.

2.08

Halla la ecuación de una curva $y = f(x)$, sabiendo que pasa por el punto (1, 1) y que la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x es $3x + 1$.

2.09

De una función $y = f(x), x > -1$, se sabe que tiene por derivada $y' = \dfrac{a}{1+x}$ donde a es una constante. Determina la función si, además, se cumple que $f(0) = 1$ y $f(1) = -1$.

2.10

Halla una función $F(x)$ que verifique que $x^5 F'(x) + x^3 + 2x = 3$ para $x \neq 0$.

2.11

De la función $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ se sabe que $f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$ y que $f(2) = 0$.

a) Determina f.

b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0, 1).

2.12

Calcula estas integrales.

a) $\int \frac{\sqrt{5-3\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$

b) $\int \sqrt{x+3}\,dx$

c) $\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx$

d) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$

e) $\int \frac{x+2}{x^2+4x}\,dx$

f) $\int \operatorname{sen} x^6 \cos x\,dx$

2.13

De todas las primitivas de la función $f(x)=2\operatorname{tg} x \sec^2 x$, halla la que pasa por el punto $P\left(\frac{\pi}{4},1\right)$.

2.14

Calcula la primitiva de la función $f(x)=x\sqrt{x^2-1}$ que se anula en el punto de abscisa $x=2$.

2.15

Calcula las integrales:

a) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

b) $\int e^{2x^2-x+3}(1-4x)dx$

2.16

Halla la función $F(x)$ tal que $F(0)=2$, y que sea primitiva de la función $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

2.17

Calcula la integral $\int\left[\sqrt{x^2+20x}+(x^2+20x)\right](x+10)dx$.

BLOQUE 3

Integración por partes

3.01

Obtén las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int (x^2 - 5x + 1)\cos x\,dx$

b) $\int \text{arctg}\,x\,dx$

c) $\int \text{arcsen}\,x\,dx$

d) $\int x\,\text{sen}(2x)\,dx$

e) $\int (x^7 - 3x + 1)\,\text{sen}\,x\,dx$

f) $\int e^{3x}\cos x dx$

3.02

Halla la primitiva de $f(x) = (x+1)^2\,\text{sen}\,x$ que cumpla $F(0) = 1$.

3.03

Determina las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \sqrt{x}\ln x dx$

b) $\int x(\ln x)^2 dx$

c) $\int x^2(\ln x)^2 dx$

d) $\int \sqrt{x}(\ln x)^2 dx$

e) $\int (1-x)e^{-x} dx$

f) $\int x^4 e^{2x} dx$

3.04

Calcula, utilizando la fórmula de la integración por partes, una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=x^2\ln x^2$ que cumpla $F(1)=0$.

f	g'
$\ln x^2$	x^2
$\frac{2}{x}$	$\frac{x^3}{3}$

3.05

Calcula:

a) $\int \ln(x+1)\,dx$

b) $\int x\,\text{arctg}(x+1)dx$

c) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

d) $\int x\ln x\,dx$

e) $\int x(\ln x)^2 dx$

f) $\int \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x dx$

3.06

Determina la integral indefinida $\int x^2\,\text{sen}(2x)\,dx$.

3.07

Calcula con la tabla auxiliar de integrales sucesivas:

a) $\int x^6\cos x dx$

b) $\int x^7 e^{7x} dx$

c) $\int e^{ax}\cos bx\,dx$

d) $\int (x^3+x^2+1)e^x dx$

3.08

Determina las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfacen la condición de que la pendiente de la recta tangente en un punto genérico (x, y) de su gráfica viene dada por la expresión xe^x.

3.09

Sea $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(1-x^2)$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

3.10

Calcula la siguiente integral indefinida $\int e^{ax}(x^2+bx+c)\,dx$ en función de los parámetros a, b y c.

3.11

Hallar la primitiva de $f(x)=x^2\ln x$ cuya gráfica pasa por el punto $A(1, 2)$.

3.12

Utiliza la integración por partes para calcular la función $f(x)$ que cumple $f(0)=1$ y $f'(x)=e^x\cos x$.

BLOQUE 4

Integrales racionales

4.01

Calcula las siguientes integrales indefinidas primitivas previa descomposición en fracciones simples.

a) $\int \frac{dx}{2x+5}$

b) $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx$

c) $\int \frac{dx}{x^2-x}$

d) $\int \frac{dx}{x^2+2x-3}$

e) $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+3)(x+5)}$

f) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$

4.02

Determina las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$

b) $\int \frac{1+8x}{1+x^2}dx$

c) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$

3

d) $\int \frac{dx}{x^3+1}$

e) $\int \frac{x^3}{x^3+x-2}dx$

$1\int \quad 2x+$

f) $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$

4.03

Encuentra dos números reales A y B tales que: $\frac{4x-5}{x^2-1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$ y calcula $\int \frac{4x-5}{x^2-1}dx$.

$\frac{4x-5}{x^2-1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}\Rightarrow A(x-1)+B(x+1)=4x-5$

4.04

Se consideran las funciones reales $f(x)=12x^3-8x^2+9x-5$ y $g(x)=6x^2-7x+2$. Calcula la función $H(x)=\int \frac{f(x)}{g(x)}dx$ que cumple que $H(1)=1$.

4.05

Resuelve las siguientes integrales que dan lugar a funciones tipo arco tangente. Para ello, primero debes transformar las fracciones en otras de la forma: $\frac{a}{1+(ax+b)^2}$, cuya integral es inmediata $\int \frac{a}{1+(ax+b)^2}\,dx = \text{arctg}(ax+b)+C$.

a) $\int \frac{2}{1+x^2}\,dx$

b) $\int \frac{1}{1+2x^2}\,dx$

c) $\int \frac{1}{9+x^2}\,dx$

d) $\int \frac{1}{4+(x-3)^2}\,dx$

e) $\int \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx$

f) $\int \frac{2}{x^2+10x+41}\,dx$

4.06

Calcula $\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx$.

4.07

Halla la integral racional $\int \frac{3x}{x^2+x-2}\,dx$.

4.08

Calcula la integral indefinida $\int \frac{x-1}{x^3+x^2}dx$.

4.09

Determina estas integrales correspondientes a los diferentes casos de funciones racionales.

a) $\int \frac{dx}{2x-7}$

b) $\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$

c) $\int \frac{x}{x^2-4x-5}\,dx$

d) $\int \frac{1}{x^4+3x^2+2}\,dx$

e) $\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

f) $\int \frac{x}{x^2+4x+7}\,dx$

$\left(\sqrt{3}\right)$

g) $\int \frac{dx}{x^4+4}$

h) $\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}\,dx$

BLOQUE 5

Cambio de variable

5.01

Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$ t

b) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$ t

c) $\int \frac{1+e^x}{e^{2x}+1}dx$ t

d) $\int \frac{\operatorname{sen} x-1}{\operatorname{sen} x+1}\cos x\,dx$ t

5.02

Determina las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$ t

b) $\int \sqrt{\frac{x+5}{x}}dx$ $\left(\text{toma } \frac{x+5}{x}\right.$

5.03

Calcula las siguientes primitivas realizando el cambio de variable que se indica.

a) $\int \frac{x}{x^4+1}dx$, x^2

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+4x-2}$, $2x-1$

5.04

Calcula la primitiva $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$.

5.05

Sea la integral $\int e^{2x}\operatorname{sen}(e^x)\,dx$:

a) Resuélvela mediante el cambio $t = e^x$.

b) Calcula la constante de integración para determinar la primitiva que pasa por el origen de coordenadas.

5.06

Calcula las siguientes primitivas.

a) $\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx$ $\sqrt{x}$

b) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$ e^x

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$ x

d) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$ $1+x^3$

e) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\,dx$ 2^x

f) $\int \frac{x\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ t

5.07

Utiliza el cambio de variable $t^2 = 1+x^2$ para calcular la integral indefinida $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

5.08

Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}dx$ t

b) $\int \frac{e^x}{1-e^{-x}}dx$ t

c) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$

5.09

Calcula $\int x\left(\ln(1+x^2)+e^{-x}\right)dx$.

5.10

Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcula $\int e^{x+e^x}dx$.

5.11

Calcula $\int \sec^3 x dx$ (el cambio $\operatorname{sen} x = t$ lleva a una función racional).

5.12

Calcula $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$ (realiza el cambio $\sqrt{x^2-2}-x=t$).

BLOQUE 6

Integrales trigonométricas

6.01

Transforma estas integrales en otras polinómicas o racionales.

a) $\int \text{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$

b) $\int \frac{\text{sen}^4 x}{\cos^3 x} \, dx$

c) $\int \frac{1}{\cos x} \, dx$

6.02

Transforma en polinómicas o racionales estas integrales:

a) $\int \frac{2\text{sen}\, x \cos x}{1+\text{sen}^2 x} \, dx$

b) $\int \text{sen}^4 x \cos^2 x \, dx$

c) $\int \text{tg}^4 x \, dx$

6.03

Dada la función $f(x) = \cos x - \cos^3 x$:

a) Halla su integral indefinida.

b) ¿Cuál es la primitiva de $f(x)$ que pasa por $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$?

6.04

Calcula estas dos integrales.

a) $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$

b) $\int \cos^3 x\, dx$

6.05

Calcula las siguientes integrales.

a) $\int (2\operatorname{sen}^2 x - 3\cos x)\, dx$

b) $\int \cos^5 x \operatorname{sen}^2 x\, dx$

c) $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

d) $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx$

6.06

Halla estas integrales haciendo el cambio $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

Como $\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}dx = dt \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ y $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ y $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$

a) $\int \frac{1}{2+\cos x}\, dx$

b) $\int \frac{1}{2+\operatorname{sen} x}\, dx$

2

6.07

Busca en tu libro de 1.º las fórmulas de las sumas y restas de senos y cosenos y empléalas para calcular estas integrales:

a) $\int \cos(5x-3)\operatorname{sen}(3x-1)\,dx$

b) $\int \cos(2x+6)\cos(4x-2)\,dx$

c) $\int \operatorname{sen}(2x+1)\operatorname{sen}(3x+5)\,dx$

d) $\int \operatorname{sen}(2x+1)\cos(3x+5)\,dx$

BLOQUE 7

Integrales no elementales

7.01

Utiliza las propiedades de las derivadas y prueba el recíproco del teorema de Liouville, es decir: "la derivada de $f(x)e^{g(x)}$ con f y g funciones racionales, es $R(x)e^{g(x)}$ con R función racional".

7.02

Utilizando la no elementalidad de $\int x^{2n}\cdot e^{ax^2}dx$, prueba que no son elementales las primitivas:

a) $\int \sqrt{\ln x}\,dx$ **b)** $\int \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx$ **c)** $\int \frac{e^{ax}}{\sqrt{x}}dx$

Indicación: pon $\ln x = t^2$ en a y b y $x = t^2$ en c.

7.03

Partiendo de que $\int \frac{e^{ax}}{x^n}dx$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ no es elemental, demuestra que las siguientes integrales tampoco lo son.

a) $\int \frac{dx}{\ln x}$ **b)** $\int e^{e^x}dx$ **c)** $\int \ln(\ln x)dx$

7.04

Utilizando la tabla de integración por partes demuestra que $\int \frac{e^x}{x} dx$, no es elemental.

Si tomamos $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g'(x) = e^x$:

f	g'
$\frac{1}{x}$	e^x
$-\frac{1}{x^2}$	e^x
$\frac{2}{x^3}$	e^x
...	...

BLOQUE 8

Problemas y repaso

8.01

Resuelve las siguientes integrales por el método que creas más conveniente.

a) $\int \frac{x^2 + 2\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} + 3}{2x} dx$

b) $\int \text{sen}^5 x \, dx$

c) $\int \sqrt{x}(1 - x^2) dx$

d) $\int \frac{1}{x^2 - x} dx$

e) $\int x^2 \sqrt{1 + x} \, dx$

f) $\int \left(\frac{x - 2\sqrt{x}}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx$

g) $\int \text{tg}(ax) \sec^2(ax) dx$

i) $\int_2^1 \frac{x}{(x-2)(x^2-9)} dx$

j) $\int x \, \text{sen}(2x) \, dx$

8.02

Resuelve estas integrales por el método más adecuado.

a) $\int x^a \ln x\, dx$

b) $\int e^{-x}\cos(5x)\,dx$

$= \dfrac{-e^{-x}\cos(5x)+}{26}$

c) $\int x\sqrt{x-3}\,dx$

d) $\int \dfrac{\ln x}{x^3}dx$

e) $\int \dfrac{4}{x^4-1}dx$

f) $\int x\ln\sqrt{1+x^2}\,dx$

g) $\int x\left(ax^2+b\right)^n dx$

h) $\int \dfrac{\pi}{\cos^2(\pi x-1)}dx$

i) $\int \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

j) $\int \dfrac{\text{sen}x}{1+\text{tg}^2 x}dx$

k) $\int\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 dx$

l) $\int \dfrac{x^2}{x^3+x^2-2x}dx$

m) $\int \dfrac{x-3}{x^2+9}dx$

n) $\int x\sqrt{x^2-9}\,dx$ Haciendo x^2-9

o) $\int (e^{\text{sen}3x})^3\cos(3x)\,dx$

p) $\int \cos\dfrac{x}{2}\cos x\,dx$

Usamos $2\cos\left(a-b\right)\cos\left(a+b\right)=\cos a+\cos b \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{2}x \end{cases}$

q) $\int \dfrac{x-3}{x^3+x^2+x}dx$

r) $\int \dfrac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2}dx$

s) $\int \dfrac{(1+x)^3}{\sqrt{x}}dx$

8.02 · continuación

t) $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx$

u) $\int \frac{5\cdot 2^x+3^x}{3^{x-1}}dx$

v) $\int \frac{2x+5}{x^2+x+1}dx$

w) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

x) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}dx$

y) $\int \frac{x^2}{1-x^6}dx$ Llamando t

z) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{x+1}dx$

8.03

Sea la función definida $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $f(x)=(1-x^2)e^{-x}$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $A(-1, 0)$.

$u=1-x^2$	$v'=e^{-x}$
$-2x$	$-e^{-x}$
-2	e^{-x}
0	$-e^{-x}$

$F(x)=\int (1-x^2)\,e^{-x}dx=-(1-x^2)\,e^{-x}+2x\,e^{-x}+2\,e^{-x}+C=(x+1)^2\,e^{-x}+C$

8.04

A partir de los datos, halla en cada caso la función $f(x)$.

a) $f'(x)=(x-1)^3(x-3), f(0)=1$

b) $f'(x)=(3x-2)^2(x-2), f(2)=0$

8.05

Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$, halla $\int f(x)\,dx$.

8.06

Halla la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{3x+7}{(x^2-3x+2)(x-3)}dx$.

8.07

Calcula las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int \sqrt{1-4x^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \sqrt{6x-x^2-8}\,dx$

c) $\displaystyle\int \sqrt{1-(2x-1)^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int \sqrt{3-x^2+2x}\,dx$

(Pista: $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ se calcula con el cambio $x=\operatorname{sen} t$).

8.08

Escribe como integral de un cociente de polinomios $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}dx$ y resuélvela (haz el cambio $x=\dfrac{1}{\operatorname{sen} t}$).

8.09

a) ¿Cuándo una función $F(x)$ es una primitiva de otra función $f(x)$?

b) Con el cambio de variable $t=\sqrt{x-1}$, halla la primitiva de la función $f(x)=x\sqrt{x-1}$ cuya gráfica pasa por el punto (1, 0).

8.10

Observando que si $F(x)=f(x)g(x)$ entonces $F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$, encuentra $f(x)$ y $g(x)$ en los casos siguientes y decide quién es $F(x)$:

a) $F'(x)=2xe^x+x^2e^x$

b) $F'(x)=2x\cos x-x^2\operatorname{sen}x$

c) $F'(x)=\frac{1}{x}\operatorname{sen}x+\ln x\cos x$

d) $F'(x)=e^x\operatorname{sen}x+e^x\cos x$

e) $F'(x)=e^x\operatorname{sen}x-e^x\cos x=-e^x\cos x+e^x\operatorname{sen}x$

f) $F'(x)=1+\ln x=\frac{1}{x}\cdot x+\ln x\cdot 1$

8.11

Un estudiante no maneja el método de integración por partes y tiene que calcular $\int xe^x dx$. Como le han explicado que todas las primitivas de $f(x)=xe^x$ son de la forma $F(x)=Axe^x+Be^x$ con A y B números reales, se ha basado en ello para resolver el problema. ¿Cómo lo hizo?

8.12

¿Qué curva pasa por (0, 8) y en cada punto (x, y) de su gráfica la pendiente de la tangente es $3x^2y$?

8.13

Justifica que si $\int \frac{1}{x^2+bx+c}dx=\int \frac{1}{(x+p)^2+q^2}dx$, entonces $\int \frac{1}{x^2+bx+c}dx=\frac{1}{q}arctg\left(\frac{x+p}{q}\right)+C$.

8.14

Justifica que $\int \ln^n x dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x dx$ y calcula $\int \ln^3 x dx$.

8.15

Sea f una función derivable. Al calcular $\int f(x)\cos 2x\ dx$ se obtiene:

$$\int f(x)\cos 2x dx = \frac{1}{2}f(x)\operatorname{sen}2x - \int e^{2x}\operatorname{sen}2x dx$$

Si $f(0) = \frac{1}{2}e^2$, calcula $f(x)$.

8.16

Al calcular $\int \frac{1}{1+x^2}dx$, un estudiante observa que $\frac{1}{1+x^2} = \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ y como $-\frac{1}{x^2}$ es la derivada de $\frac{1}{x}$, se dice que $\int \frac{1}{1+x^2}dx = -\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + C$. ¿Pero $\int \frac{1}{1+x^2}dx$ no era $\operatorname{arctg}x + C$? ¿Hay algún error en el razonamiento del estudiante?

8.17

La integral $\int \frac{\operatorname{sen}x + \cos x}{3+\operatorname{sen}2x}dx$ es una integral racional en $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$ por lo que el cambio $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ la resolvería. Pero el cálculo es mucho más cómodo si se busca una función $g(x)$ tal que $g'(x) = \operatorname{sen}x + \cos x$ y se hace $g(x) = t$ y $g'(x)dx = dt$. Hazlo así.

8.18

Halla $\int \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x - 1}}dx$ con un cambio de variable.

8.19

Calcula una primitiva de la función $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ de modo que $F(2)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$.

8.20

Si para calcular $\int f(x)\operatorname{sen} x dx$, donde f es una cierta función derivable, se aplica integración por partes, se obtiene:

$$\int f(x)\operatorname{sen} x dx = -f(x)\cos x + \int 3x^2\cos x dx$$

Sabiendo que $f(1)=2$, encuentra la expresión de f.

8.21

En un examen se ha pedido a los estudiantes que resuelvan la integral $\int 2\operatorname{sen} x\cos x dx$.

I. Gema la resolvió con el cambio de variable $u=\operatorname{sen} x$.

II. Fernando utilizó el cambio de variable $u=\cos x$.

III. Iván lo hizo usando la fórmula $2\operatorname{sen} x\cos x=\operatorname{sen} 2x$.

Aunque los tres alumnos dieron respuestas distintas, sin embargo, el profesor les dijo que los tres la habían hecho bien.

Encuentra las tres respuestas dadas y explica por qué todas eran correctas sin ser iguales.

8.22

Un punto se mueve en línea recta con una velocidad dada por la fórmula $v(t)=12t-5(m/s)$.

Calcula el espacio recorrido, $e(t)$, en cada instante t, sabiendo que $e(0)=10$ m. ¿Cuál es la velocidad media entre $t=0$ s y $t=2$ s? (Recuerda que la velocidad es la derivada del espacio respecto del tiempo).

8.23

Se trasplanta un árbol y se observa que su tasa de crecimiento a los x años es de $1-\frac{1}{(x+1)^2}$ metros por año. Si a los 5 años medía 5 m, ¿cuánto medía al ser trasplantado?

8.24

Calcula $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx$.

a) Por fracciones simples.

b) Mediante el cambio $t = x-1$.

8.25

Encuentra en cada caso la función $y = f(x)$ tal que:

a) $f'(x) = -3xf(x)$ y corta al eje Y en el punto de ordenada 1.

b) $f'(x) = \frac{x}{f(x)+x^2f(x)}$ y $f(0) = -1$.

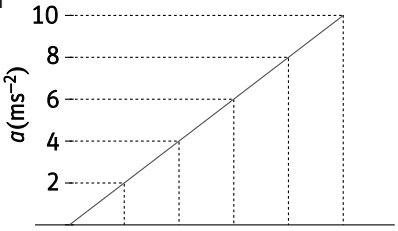
c) Su gráfica pasa por (0, 0) y $f'(x) = x^2f^2(x)+x^2-f^2(x)-1$.

8.26

Halla el polinomio de grado dos $P(x)$ tal que $P(0) = 1$, $P'(0) = 0$ y $\int \frac{P(x)}{x^3(x-1)^2}dx$ sea una función racional.

8.27

La aceleración de un móvil con trayectoria rectilínea viene dada por la gráfica siguiente:



Si se sabe que para $t=0$, su posición era $x(0)=0$ y su velocidad inicial también era $v(0)=0$, determina las ecuaciones que dan la aceleración, la velocidad y la posición de dicho móvil para cualquier instante de tiempo. Recuerda que la aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo.

8.28

Demuestra las siguientes fórmulas de reducción.

a) $\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$ con n par mayor que 2.

b) $\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\,\operatorname{sen}x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$ con n par mayor que 2.

c) $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx$

8.29

Utilizando las fórmulas deducidas en los apartados a) y b) del ejercicio anterior, obtén:

a) $\int \cos^4 x\,dx$

b) $\int \operatorname{sen}^6 x\,dx$

8.30

Obtén $\int e^{-x}x^5\,dx$ de dos formas diferentes:

a) Por partes, utilizando el método de la tabla.

b) Utilizando que $\int e^{-x}x^5\,dx = e^{-x}(a_0 + a_1x + \cdots + a_5x^5) = I(x)$ y obteniendo los coeficientes a_i por derivación.

8.31

Expresa como integrales de cocientes de polinomios las siguientes integrales.

a) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{x+\sqrt[4]{x}}dx$

b) $\int \frac{x+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}}}{x^2-2\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}}dx$

8.32

Demuestra que las siguientes integrales se pueden reducir a integrales de cocientes de polinomios.

a) $\int x^{-2}\sqrt[3]{1-x}dx$

b) $\int \sqrt[4]{x}(1-x)^2dx$

c) $\int x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{5}{3}}dx$

8.33

Sean p y q números racionales. Demuestra que $\int x^p(1-x)^q\,dx$ se puede poner como integral de un cociente de polinomios si se cumple alguna de estas condiciones:

I. p es entero.

II. q es entero.

III. p y q son no enteros pero $p+q$ sí.

8.34

El matemático ruso Tchebycheff (1821–1894) probó que las integrales $\int x^p(1-x)^q\,dx$ solo son elementales en los tres casos citados en el ejercicio anterior. Utiliza este resultado para demostrar estas afirmaciones:

a) $\int \sqrt{1-x^3}dx$ no es elemental.

b) $\int (1-x^n)^{\frac{1}{m}}dx$ con n y m enteros positivos es elemental si y solo si m o $n=1$ o $m=n=2$.

c) $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx$ no es elemental.

d) $\int \operatorname{sen}^p x\cos^q x\,dx$ siendo p y q números racionales, solo es elemental cuando alguno de los dos es un entero impar o cuando $p+q$ es un entero par.

e) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^n}}dx$ con n entero positivo, es elemental solo si $n=1$, 2 o 4. Calcula la integral en los tres casos.

f) $\int \operatorname{sen}^q x\,dx$ con q racional es elemental solo si q es entero.

8.35

Calcular las primitivas de $f(x)=\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}$ podría no ser muy cómodo si lo intentas hacer directamente, pero si racionalizas previamente te resultará muy fácil. Hazlo así.

8.36

Si $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ es la función $f(x)=x(1-\ln x)$, encuentra la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $A(1,\,1)$.

8.37

Determina $f(x)$ sabiendo que $f'(x)=e^{2x}\operatorname{sen} x$ y que $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

8.38

Obtén $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,dx$.

8.39

Calcula $\int (x^2 \ln x - x \ln x^2)\,dx$.

$x^2 \ln x - x \ln x^2 = x^2 \ln x - 2x \ln x = \ln x(x^2 - 2x)$

8.40

Determina la función $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ que verifica que $f(2) = \ln 4$ y cuya derivada sea la función $f'(x) = \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2}$.

8.41

Calcula todas las primitivas de $f(x) = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}$.

8.42

Observa estas dos integrales:

a) $\int \frac{2x}{x^2 - 5}\,dx$

b) $\int \frac{2x}{x^2 + 5}\,dx$

8.43

Calcula $\int x^2 e^{2x} dx$.

8.44

Si $F(x)$ es la primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9-4x^2}}$ que pasa por el origen, entonces:

A. $F(x) = \dfrac{1}{3}\operatorname{arcsen}\dfrac{3x}{2}$

B. $F\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{\pi}{6}$

C. $F(x) = \operatorname{arcsen}\dfrac{2x}{3}$

D. $F(1) = \dfrac{1}{2}\operatorname{arcsen}\dfrac{2}{3}$

8.45

Sea f una función derivable, definida en $[1,+\infty)$ que cumple la condición $f(x)f'(x) = 1$, siendo $f(8) = 4$. Entonces:

A. $(f(x))^2 + f(x) = 2x$

B. $f(2) = 2$

C. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f^2(x)}{x} = 0$

D. $f(x) = \sqrt{x}$

8.46

Sea $f(x)=\dfrac{5(x+1)}{2x^2+x-3}$ e I el intervalo $(1,+\infty)$:

A. Para todo $x\in I$, $f(x)=\dfrac{1}{x+\dfrac{3}{2}}+\dfrac{1}{x-1}$.

B. La función $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln|2x+3|+2\ln|x-1|$ es primitiva de f en I.

C. Existe una primitiva F de f en I tal que $F(2)=5$.

D. Existe una primitiva F de f en I tal que $F(2)=\pi$.

8.47

Sea f la función definida en $\mathbb{R}$ por la fórmula $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ y F la primitiva de f tal que $F(0)=0$:

A. $F(1)=\dfrac{\pi}{4}$.

B. Si $G:\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ con $G(x)=F(\text{tg}x)$, entonces $G(x)G'(x)=x$.

C. Sea $H:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ con $H(x)=F\left(\dfrac{1}{x+1}\right)+F\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$. Entonces $H(0)=\dfrac{\pi}{4}$.

D. Para todo x positivo, $H'(x)=0$.

8.48

Las funciones primitivas de $f(x)=6\,\text{sen}\,x\cos x$ son:

A. $F(x)=3\,\text{sen}^2x+C$

B. $F(x)=3\cos^2x+C$

C. $F(x)=-\dfrac{3}{2}\cos 2x+C$

D. $F(x)=3\cos 2x+C$

8.49

La aceleración de cierta partícula viene dada por la expresión $\frac{dv}{dt} = a + bt + c\cos(2\pi t)$. Se pide la velocidad, v, en $t = 2$ y se dispone de los siguientes datos:

1. $v(0)$
2. $v\left(-\frac{1}{4}\right)$
3. $v\left(-\frac{1}{2}\right)$
4. $v(-1)$

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. Puede eliminarse el dato 4.

$v(t) = at + \frac{1}{2}bt^2 + \frac{c}{2\pi}\text{sen}2\pi t + C \Rightarrow v(0) = C$

Solucionario

Localiza cada respuesta mediante el código de la actividad.

1 · Primitivas y propiedades

1.01

a) $\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C \quad (r \in \mathbb{R}\ ,\ r \neq -1)$

b) $\int x^{-1} dx = \ln|x| + C$

c) $\int e^x dx = e^x + C$

d) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a \in \mathbb{R} > 0\ ,\ a \neq 1)$

e) $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$

f) $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$

g) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + C$

h) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$

1.02

a) $\int (\operatorname{sen} x - e^x + \sqrt{x}) dx = -\cos x - e^x + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = -\cos x - e^x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

b) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{x} + C$

c) $\int \sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}\, dx = \int \sqrt[6]{x^5} dx = \frac{x^{\frac{5}{6}+1}}{\frac{5}{6}+1} + C = \frac{6}{11}\sqrt[6]{x^{11}} + C$

1.03

a) $f'(x)=\cos x+x\sqrt{x}$ y $f(\pi)=0$

$$f(x)=\int(\cos x+x\sqrt{x})dx=\int\left(\cos x+x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\operatorname{sen}x+\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$$

Para calcular C utilizamos, $f(\pi)=0\Rightarrow 0=\operatorname{sen}\pi+\frac{2}{5}\sqrt{\pi^5}+C\Rightarrow C=-\frac{2}{5}\sqrt{\pi^5}$

$$f(x)=\operatorname{sen}x+\frac{2}{5}\sqrt{x^5}-\frac{2}{5}\sqrt{\pi^5}$$

b) $f'(x)=\dfrac{3}{1+x^2}-e^x$ y $f(0)=1$

$$f(x)=3\int\frac{1}{1+x^2}dx-\int e^x dx=3\operatorname{arctg}x-e^x+C$$

Calculamos C, $f(0)=3\operatorname{arctg}0-e^0+C=1\Rightarrow C=2$

$$f(x)=3\operatorname{arctg}x-e^x+2$$

c) $f'(x)=x-2\cos x$ y la gráfica de f corta a la bisectriz del II cuadrante en el punto de abscisa $x=\pi$.

$$f(x)=\int(x-2\cos x)dx=\frac{1}{2}x^2-2\operatorname{sen}x+C$$

Sabemos que $f(\pi)=-\pi\Rightarrow f(\pi)=\frac{1}{2}\pi^2-2\operatorname{sen}\pi+C=-\pi\Rightarrow C=-\frac{1}{2}\pi^2-\pi$.

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}\pi^2-\pi$$

1.04

Bastará comprobar que las derivadas de F y de G coinciden con f.

En efecto, esto es así ya que:

$$F'(x)=2\operatorname{sen}x\cos x=\operatorname{sen}2x\ \text{ y }\ G'(x)=\frac{2\operatorname{sen}2x}{2}=\operatorname{sen}2x$$

Para encontrar la constante que las diferencias restamos ambas expresiones:

$$F(x)-G(x)=\operatorname{sen}^2x+\frac{\cos 2x}{2}=\operatorname{sen}^2x+\frac{\cos^2x-\operatorname{sen}^2x}{2}=\frac{\cos^2x+\operatorname{sen}^2x}{2}=\frac{1}{2}$$

1.05

$f(x)$	$F(x)$
$6\operatorname{sen}^2(2x+1)\cos(2x+1)$	$\operatorname{sen}^3(2x+1)$
$\cos(2x+1)$	$\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x+1)$
$6(2x+1)^2\cos(2x+1)^3$	$\operatorname{sen}(2x+1)^3$
$6\cos(6x+3)$	$\operatorname{sen}[3(2x+1)]$

1.06

$F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $G'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, luego son ambas primitivas de $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Como $F(x)-G(x)$ es constante, para ver en qué se diferencian basta calcular $F(0)-G(0)=\text{arcsen}\,0+\arccos 0=\frac{\pi}{2}$.

1.07

Las primitivas de *f*(*x*) son de la forma $G(x)=x^2-3x+1+C$ Haciendo $x=1$ tenemos:

$5=1-3+1+C\Rightarrow C=6$. La primitiva buscada es $G(x)=x^2-3x+1+6$.

1.08

Derivando ambas funciones obtenemos:

$$F'(x)=\frac{(\cos x-\text{sen}\,x)\text{sen}\,x-(\text{sen}x+\cos x)\cos x}{\text{sen}^2x}=-\frac{\text{sen}^2x+\cos^2 x}{\text{sen}^2x}=-\frac{1}{\text{sen}^2x}$$

$$G'(x)=\frac{-2\text{sen}x\cos x\cdot\cos x\text{sen}x-(1-\text{sen}^2x)(-\text{sen}x\text{sen}x+\cos x\cos x)}{(\cos x\text{sen}x)^2}=\frac{-2\text{sen}^2x\cos^2 x-\cos^2 x(\cos^2 x-\text{sen}^2x)}{\cos^2 x\text{sen}^2x}=$$

$$=\frac{-2\text{sen}^2x-\cos^2 x+\text{sen}^2x}{\text{sen}^2x}=-\frac{1}{\text{sen}^2x}$$

Como sus derivadas son iguales, ambas son primitivas de la misma función. Dicha función es $f(x)=-\frac{1}{\text{sen}^2x}$.

1.09

a) $\int 6\,\text{sen}(x+1)\cos(x+1)dx=3\,\text{sen}^2(x+1)+C$

Comprobamos que, efectivamente, $(3\,\text{sen}^2(x+1)+C)'=6\,\text{sen}(x+1)\cos(x+1)$.

b) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}=4\sqrt[4]{x}+C$

Comprobamos que, efectivamente, $(4\sqrt[4]{x}+C)'=\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

c) $\int\sqrt{ax+b}=\frac{2(ax+b)\sqrt{ax+b}}{3a}+C$

Comprobamos que, efectivamente, $\left(\frac{2(ax+b)\sqrt{ax+b}}{3a}+C\right)'=\left(\frac{2(ax+b)^{3/2}}{3a}+C\right)'=\sqrt{ax+b}$.

2 · Integrales inmediatas

2.01

a) $\int \frac{t+1}{\sqrt{3t^2+6t-5}}\,dt = \int \frac{6t+6}{6\sqrt{3t^2+6t-5}}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{6t+6}{2\sqrt{3t^2+6t-5}}\,dt = \frac{\sqrt{3t^2+6t-5}}{3}+C$

b) $\int \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}\,dx = \int (1+\sqrt{x})\,dx = x+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$

c) $\int (x^3+1)^{12}\cdot 4x^2\,dx = \frac{4}{3}\int (x^3+1)^{12}\cdot 3x^2\,dx = \frac{4}{39}(x^3+1)^{13}+C$

d) $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln t)}{t}\,dt = -\cos(\ln t)+C$

e) $\int \frac{e^{3s}}{1+e^{6s}}\,ds = \frac{1}{3}\int \frac{3e^{3s}}{1+(e^{3s})^2}\,ds = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(e^{3s})+C$

f) $\int \frac{8x}{\sqrt{1-9x^4}}dx = \int \frac{8x}{\sqrt{1-(3x^2)^2}}dx = \frac{8}{6}\int \frac{6x}{\sqrt{1-(3x^2)^2}}dx = \frac{4}{3}\operatorname{arcsen}(3x^2)+C$

2.02

a) $\int 2x(\operatorname{sen} x^2)(\cos^4 x^2)dx = -\frac{1}{5}\int 2x(-\operatorname{sen} x^2)(5\cos^4 x^2)dx = -\frac{1}{5}\cos^5 x^2+C$

b) $\int \operatorname{tg}(3x+2)\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3\operatorname{sen}(3x+2)}{\cos(3x+2)}\,dx = -\frac{1}{3}\ln\left|\cos(3x+2)\right|+C$

2.03

$f'(x) = 2\operatorname{tg} x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$ y $g'(x) = \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$

Sus derivadas son iguales, luego son dos primitivas de $h(x) = \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$. Como $f(x) = g(x)+C$, mirando su valor en $x = 0$ tenemos que $0 = f(0) = g(0)+C = 1+C$.

2.04

a) $\int \sqrt[5]{x^3}\,dx$ Tipo: $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \Rightarrow \int \sqrt[5]{x^3}\,dx = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + C$

b) $\int \frac{4^x - 3\cdot 2^x}{2^x}dx$ Tipo: $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \Rightarrow \int \frac{4^x - 3\cdot 2^x}{2^x}dx = \int 2^x dx - 3\int dx = \frac{2^x}{\ln 2} - 3x + C$

c) $\int \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 7}{x^2}dx$ Tipo: $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$ y $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 7}{x^2}dx = \int x dx + 3\int dx - 5\int \frac{1}{x}dx + 7\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 5\ln|x| - \frac{7}{x} + C$$

d) $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}dx$ Tipo: $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$ y $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos x\,dx = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + C$$

e) $\int \frac{2\sqrt{1-x^2} - 3}{\sqrt{1-x^2}}dx$ Tipo: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsen} x + C$

$$\int \frac{2\sqrt{1-x^2} - 3}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\int dx - 3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2x - 3\operatorname{arcsen} x + C$$

f) $\int e^{-x}dx$ Tipo: $\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C \Rightarrow \int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$

g) $\int \frac{2 + t^2}{1 + t^2}dt$ Tipo: $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + C \Rightarrow \int \frac{2 + t^2}{1 + t^2}dt = \int dt + \int \frac{1}{1+t^2}dt = t + \operatorname{arctg} t + C$

h) $\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^6}}dt$ Tipo: $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}dx = \operatorname{arcsen} f(x) + C$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^6}}dt = \frac{1}{3}\int \frac{3t^2}{\sqrt{1-(t^3)^2}}dt = \frac{1}{3}\operatorname{arcsen}(t^3) + C$$

2.05

$$\int \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x}}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx + 3\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 6\sqrt{x} + C$$

Luego una primitiva sería: $f(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 6\sqrt{x}$

2.06

$f'''(x) = 24x$ entonces $f''(x) = 12x^2 + C$, como $f''(0) = 2$, se deduce que $C = 2$.

$f''(x) = 12x^2 + 2$ entonces $f'(x) = 4x^3 + 2x + C$, como $f'(0) = 1$, se deduce que $C = 1$.

$f'(x) = 4x^3 + 2x + 1$ entonces $f(x) = x^4 + x^2 + x + C$, como $f(0) = 0$, se deduce que $C = 0$.

Por tanto, $f(x) = x^4 + x^2 + x$.

2.07

Comenzamos llamando $t = 1 + x^2$, $dt = 2xdx \Rightarrow \int x\ln(1+x^2)dx = \frac{1}{2}\int \ln t dt$

Esta integral se realiza por partes tomando $f(t) = \ln t$ y $g'(t) = 1$.

f	g'
$\ln t$	1
$\frac{1}{t}$	t

$$\frac{1}{2}\int \ln t dt = \frac{1}{2}\left(t\ln t - \int \frac{1}{t} t dt\right) = \frac{1}{2}t(\ln t - 1) + C$$

Así pues, $\int x\ln(1+x^2)dx = \frac{1}{2}(1+x^2)(\ln(1+x^2) - 1) + C$

2.08

Sabemos $f'(x) = 3x + 1$, luego $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + x + C$ y como $f(1) = 1$ entonces $C = -\frac{3}{2}$.

La curva tiene ecuación $y = f(x) = \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$.

2.09

$$f(x) = \int \frac{a}{1+x}dx = a\ln(1+x) + C$$

Sustituyendo:

$f(0) = a \cdot \ln 1 + C = 1 \Rightarrow C = 1$

$f(1) = a \cdot \ln 2 + 1 = -1 \Rightarrow a = -\frac{2}{\ln 2}$

La función es $f(x) = -\frac{2\ln(1+x)}{\ln 2} + 1 = -2\log_2(1+x) + 1$.

2.10

$$x^5 F'(x) + x^3 + 2x = 3 \Rightarrow F'(x) = \frac{3 - 2x - x^3}{x^5}$$

$$F(x) = \int \frac{3 - 2x - x^3}{x^5}dx = -\frac{3}{4x^4} + \frac{2}{3x^3} + \frac{1}{x} + C$$

Como nos piden una función, tomando $C = 0$ tenemos $F(x) = -\frac{3}{4x^4} + \frac{2}{3x^3} + \frac{1}{x}$.

2.11

a) $f(x)=\int \frac{3}{(x+1)^2}dx=-\frac{3}{x+1}+C$ como $f(2)=0$ entonces $f(2)=-\frac{3}{2+1}+C=0\Rightarrow C=1$

Luego $f(x)=-\frac{3}{x+1}+1$

b) $F(x)=\int\left(-\frac{3}{x+1}+1\right)dx=-3\ln|x+1|+x+C$

$1=-3\ln|0+1|+C\Rightarrow C=1$

$F(x)=-3\ln|x+1|+x+1$

2.12

a) $\int \frac{\sqrt{5-3\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}\,dx=-\frac{2}{9}\sqrt{(5-3\operatorname{tg}x)^3}+C$

b) $\int \sqrt{x+3}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3}+C$

c) $\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx=\frac{(\ln x^2)^2}{4}+C$

d) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx=\ln|x|-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$

e) $\int \frac{x+2}{x^2+4x}\,dx=\frac{1}{2}\ln|x^2+4x|+C$

f) $\int \operatorname{sen}x^6\cos x\,dx=\frac{\operatorname{sen}^7 x}{7}+C$

2.13

$F(x)=\int 2\operatorname{tg}x\sec^2 x dx=\frac{1}{\cos^2 x}+C$

Como $P\left(\frac{\pi}{4},1\right)$, entonces $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}+C=1\Rightarrow C=-1.$

Luego, $F(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1.$

2.14

$$F(x)=\int x\sqrt{x^2-1}dx=\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3}+C$$

Como $x=2$, tenemos que $0=\frac{\sqrt{(2^2-1)^3}}{3}+C\Rightarrow 0=\frac{3\sqrt{3}}{3}+C\Rightarrow C=-\sqrt{3}$.

Luego, $F(x)=\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3}-\sqrt{3}$.

2.15

a) $\int\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{x}}dx-\int\frac{2x}{\sqrt{x}}dx+\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\frac{2\sqrt{x}}{15}(3x^2-10x+15)+C$

b) $\int e^{2x^2-x+3}(1-4x)dx=-e^{2x^2-x+3}+C$

2.16

$$F(x)=\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=\ln(e^x+1)+C$$

Como $F(0)=2$, entonces $\ln 2+C=2\Rightarrow C=2-\ln 2$.

Luego, $F(x)=\ln(e^x+1)+2-\ln 2$.

2.17

$$\int\left[\sqrt{x^2+20x}+(x^2+20x)\right](x+10)dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+20x}\cdot 2(x+10)dx+\frac{1}{2}\int(x^2+20x)\cdot 2(x+10)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{(x^2+20x)^3}}{3}+\frac{1}{4}(x^2+20x)^2+C$$

3 · Integración por partes

3.01

a) $\int (x^2-5x+1)\cos x\,dx$

f	g'
x^2-5x+1	$\cos x$
$2x-5$	$\operatorname{sen} x$
2	$-\cos x$
0	$-\operatorname{sen} x$

$$\int (x^2-5x+1)\cos x\,dx = (x^2-5x+1)\operatorname{sen} x-(2x-5)(-\cos x)+2(-\operatorname{sen} x)+C = (x^2-5x-1)\operatorname{sen} x+(2x-5)\cos x+C$$

b) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

f	g'
$arctgx$	1
$\frac{1}{1+x^2}$	x

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\cdot\operatorname{arctg} x-\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\cdot\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

c) Por partes, u = arcsen x y dv = dx. Entonces: ∫ arcsen x dx = x · arcsen x + √(1 − x²) + C.

d) $\int x\operatorname{sen}(2x)\,dx$

f	g'
x	$\operatorname{sen}(2x)$
1	$-\frac{1}{2}\cos(2x)$
0	$-\frac{1}{4}sen(2x)$

$$\int x\operatorname{sen}(2x)\,dx = -\frac{1}{2}x\cos(2x)+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)+C$$

3.01 · continuación

e) $\int (x^7 - 3x + 1)\operatorname{sen} x\, dx$

f	g'
$x^7 - 3x + 1$	$\operatorname{sen} x$
$7x^6 - 3$	$-\cos x$
$42x^5$	$-\operatorname{sen} x$
$210x^4$	$\cos x$
$840x^3$	$\operatorname{sen} x$
$2520x^2$	$-\cos x$
$5040x$	$-\operatorname{sen} x$
5040	$\cos x$
0	$\operatorname{sen} x$

$$\int (x^7 - 3x + 1)\operatorname{sen} x\, dx = (x^7 - 3x + 1)(-\cos x) - (7x^6 - 3)(-\operatorname{sen} x) + 42x^5 \cos x - 210x^4 \operatorname{sen} x + 840x^3(-\cos x) -$$
$$-2520x^2(-\operatorname{sen} x) + 5040x \cos x - 5040 \operatorname{sen} x + C = (-x^7 + 42x^5 - 840x^3 + 5043x - 1)\cos x +$$
$$+ (7x^6 - 210x^4 + 2520x^2 - 5043)\operatorname{sen} x + C$$

f) $\int e^{3x} \cos x dx$

f	g'
e^{3x}	$\cos x$
$3e^{3x}$	$\operatorname{sen} x$
$9e^{3x}$	$-\cos x$

$$\int e^{3x} \cos x dx = e^{3x} \operatorname{sen} x + 3e^{3x} \cos x + \int 9e^{3x}(-\cos x) dx$$

Despejando, $\int e^{3x} \cos x dx = \dfrac{e^{3x}(\operatorname{sen} x + 3\cos x)}{10} + C$.

3.02

$F(x)=\int (x^2+2x+1)\operatorname{sen} x\,dx$

f	g'
x^2+2x+1	$\operatorname{sen} x$
$2x+2$	$-\cos x$
2	$-\operatorname{sen} x$
0	$\cos x$

$$\int (x^2+2x+1)\operatorname{sen} x\,dx=(x^2+2x+1)(-\cos x)-(2x+2)(-\operatorname{sen} x)+2\cos x+C=$$
$$=-(x^2+2x+1)\cos x+(2x+2)\operatorname{sen} x+2\cos x+C$$

$1=-1+0+2+C \Rightarrow C=0$

Luego $F(x)=-(x^2+2x+1)\cos x+(2x+2)\operatorname{sen} x+2\cos x$

3.03

a) $\int \sqrt{x}\ln x dx$

f	g'
$\ln x$	$\sqrt{x}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

$$\int \sqrt{x}\ln x dx = \frac{2}{3}\ln x\sqrt{x^3} - \int \frac{2\sqrt{x^3}}{3x}dx = \frac{2}{3}\ln x\sqrt{x^3} - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C$$

b) $\int x(\ln x)^2 dx$

f	g'
$(\ln x)^2$	x
$\frac{2\ln x}{x}$	$\frac{1}{2}x^2$

f	g'
$\ln x$	x
$\frac{1}{x}$	x^2

$$\int x(\ln x)^2 dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \int x\ln x dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x + \int \frac{1}{2}x dx + C = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$$

c) $\int x^2(\ln x)^2 dx$

f	g'
$(\ln x)^2$	x^2
$\frac{2\ln x}{x}$	$\frac{x^3}{3}$

f	g'
$\ln x$	$\frac{2}{3}x^2$
$\frac{1}{x}$	$\frac{2}{9}x^3$

$$\int x^2(\ln x)^2 dx = \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \int \frac{2}{3}x^2\ln x dx = \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \left[\frac{2}{9}x^3(\ln x) - \int \frac{2}{9}x^2 dx\right] = \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3(\ln x) - \frac{2}{27}x^3 + C$$

d) $\int \sqrt{x}(\ln x)^2 dx$

f	g'
$(\ln x)^2$	$\sqrt{x}$
$\frac{2\ln x}{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

$$\int \sqrt{x}(\ln x)^2 dx = \frac{2\sqrt{x^3}(\ln x)^2}{3} - \int \frac{4}{3}\ln x\sqrt{x} dx = \frac{2\sqrt{x^3}(\ln x)^2}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right)\right) + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}(\ln x)^2}{3} - \frac{8}{9}\sqrt{x^3}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C$$

3.03 · continuación

e) $\int (1-x)e^{-x}dx$

f	g'
$1-x$	e^{-x}
-1	$-e^{-x}$
0	e^{-x}

$$\int (1-x)e^{-x}dx = -(1-x)e^{-x} - (-1)e^{-x} + C = xe^{-x} + C$$

f) $\int x^4 e^{2x}dx$

f	g'
x^4	e^{2x}
$4x^3$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
$12x^2$	$\frac{1}{4}e^{2x}$
$24x$	$\frac{1}{8}e^{2x}$
24	$\frac{1}{16}e^{2x}$
0	$\frac{1}{32}e^{2x}$

$$\int x^4 e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^4e^{2x} - x^3e^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x} - \frac{3}{2}xe^{2x} + \frac{3}{4}e^{2x} + C = e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right) + C$$

3.04

$$\int x^2 \ln x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x^2 - \int \frac{2}{3}x^2\, dx + C = \frac{1}{3}x^3 \ln x^2 - \frac{2}{9}x^3 + C = \frac{1}{9}x^3(3\ln x^2 - 2) + C$$

$$0 = F(1) = \frac{1}{9}(-2) + C \Rightarrow C = \frac{2}{9} \text{ y } F(x) = \frac{1}{9}x^3(3\ln x^2 - 2) + \frac{2}{9}$$

3.05

a) $\int \ln(x+1)\,dx$

f	g'
$\ln(x+1)$	1
$\dfrac{1}{x+1}$	$x+1$

$$\int \ln(x+1)\,dx = (x+1)\ln(x+1) - \int \frac{x+1}{x+1}dx = (x+1)\ln(x+1) - x + C$$

b) $\int x\,\text{arctg}(x+1)dx$

$$\int x\,\text{arctg}(x+1)dx = \frac{1}{2}x^2\,\text{arctg}(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+(1+x)^2}dx = \frac{1}{2}x^2\,\text{arctg}(x+1) - \left(\frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{-2x-2}{x^2+2x+2}dx\right) =$$
$$= \frac{x^2\,\text{arctg}(x+1)}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\ln(x^2+2x+2)}{2} + C$$

c) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln x + 1}{x} + C$$

d) $\int x\ln x\,dx$

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

e) $\int x(\ln x)^2 dx$

f	g'
$(\ln x)^2$	x
$2(\ln x)\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{x^2}{2}$

$$\int x(\ln x)^2 dx = \frac{x^2}{2}(\ln|x|)^2 - \int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}(\ln|x|)^2 - \left[\frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4}\right] + C$$

f) $\int \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x dx$

$$\int \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x dx = \int x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}dx = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \int dx - \int \frac{1}{x^2-1}dx =$$
$$\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x - \int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x - \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x - \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx =$$
$$\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x - \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| = \frac{1}{2}(x+1)(x-1)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x + C$$

3.06

f	g'
x^2	$\text{sen}2x$
$2x$	$-\frac{1}{2}\cos 2x$
2	$-\frac{1}{4}\text{sen}2x$
0	$\frac{1}{8}\cos 2x$

$$\int x^2 \,\text{sen}(2x)\,dx = -\frac{1}{2}x^2\cos(2x)+\frac{1}{2}x\,\text{sen}(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)+C$$

3.07

a) $\int x^6\cos x dx$

f	g'
x^6	$\cos x$
$6x^5$	$\text{sen}x$
$30x^4$	$-\cos x$
$120x^3$	$-\text{sen}x$
$360x^2$	$\cos x$
$720x$	$\text{sen}x$
720	$-\cos x$
0	$-\text{sen}x$

$$\int x^6\cos x dx = 6\cos x(x^5-20x^3+120x)+\text{sen}\,x(x^6-30x^4+360x^2-720)+C$$

3.07 · continuación

b) $\int x^7 e^{7x} dx$

f	g'
x^7	e^{7x}
$7x^6$	$\frac{1}{7}e^{7x}$
$42x^5$	$\frac{1}{7^2}e^{7x}$
$210x^4$	$\frac{1}{7^3}e^{7x}$
$840x^3$	$\frac{1}{7^4}e^{7x}$
$2520x^2$	$\frac{1}{7^5}e^{7x}$
$5040x$	$\frac{1}{7^6}e^{7x}$
5040	$\frac{1}{7^7}e^{7x}$
0	$\frac{1}{7^8}e^{7x}$

$$\int x^7 e^{7x} dx = e^{7x}\left(\frac{x^7}{7} - \frac{x^6}{7} + \frac{6x^5}{7^2} - \frac{30x^4}{7^3} + \frac{120x^3}{7^4} - \frac{360x^2}{7^5} + \frac{720x}{7^6} - \frac{720}{7^7}\right) + C$$

c) $\int e^{ax} \cos bx\, dx$

f	g'
$\cos bx$	e^{ax}
$-b \operatorname{sen} xb$	$\frac{e^{ax}}{a}$
$-b^2 \cos bx$	$\frac{e^{ax}}{a^2}$

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{1}{a}e^{ax} \cos bx - \frac{1}{a^2}e^{ax}(-b \operatorname{sen} bx) + \int \frac{1}{a^2}e^{ax}(-b^2 \cos bx) = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx)}{a^2 + b^2} + C$$

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{1}{a}e^{ax} \cos bx - \frac{1}{a^2}e^{ax}(-b \operatorname{sen} bx) \Rightarrow \int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx)}{a^2 + b^2} + C$$

d) $\int (x^3 + x^2 + 1)e^x dx$

f	g'
$x^3 + x^2 + 1$	e^x
$3x^2 + 2x$	e^x
$6x + 2$	e^x
6	e^x
0	e^x

$$\int (x^3 + x^2 + 1)e^x dx = e^x(x^3 - 2x^2 + 4x - 3) + C$$

3.08

$$f(x)=\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1)+C$$

3.09

$$F(x)=\int \ln(1-x^2)dx = x\ln(1-x^2) - \int -\frac{2x^2}{1-x^2}dx = x\ln(1-x^2) - 2\int dx + 2\int \frac{1}{(1-x)(1+x)}dx$$

$$x\ln(1-x^2) - 2x + \int \frac{1}{1-x}dx + \int \frac{1}{(1+x)}dx = x\ln(1-x^2) - 2x - \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| + C$$

Como pasa por (0,1) se tiene que $-\ln 1 + C = 1 \Rightarrow C = 1$ y la función es $F(x) = x\ln(1-x^2) - 2x - \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| + 1$.

3.10

$$\int e^{ax}(x^2+bx+c)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}(x^2+bx+c) - \frac{1}{a}\int e^{ax}(2x+b)\,dx = e^{ax}(x^2+bx+c) - \frac{1}{a^2}e^{ax}(2x+b) + \frac{1}{a^2}\int 2e^{ax}\,dx =$$

$$= e^{ax}\left(\frac{x^2+bx+c}{a} - \frac{2x+b}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) + C$$

3.11

f	g'
$\ln x$	x^2
$\frac{1}{x}$	$\frac{x^3}{3}$

$$\int x^2 \ln x\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \int \frac{1}{3}x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C = \frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1) + C$$

$$F(1) = \frac{1}{9}(-1) + C = 2 \Rightarrow C = \frac{19}{9}$$

Luego una primitiva sería $F(x) = \frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1) + \frac{19}{9}$.

3.12

$$f(x) = \int e^x \cos x\,dx = e^x\cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x\cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\,dx\,.$$

Despejando tenemos $f(x) = \int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x\cos x + e^x \operatorname{sen} x}{2} + C$.

$$f(0) = \frac{1}{2} + C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

Luego, $f(x) = \frac{e^x}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x + 1)$.

4 · Integrales racionales

4.01

a) $\int \frac{dx}{2x+5} = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$

b) $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{3}{x-2}dx = -\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C$

c) $\int \frac{dx}{x^2-x} = \int \frac{dx}{x(x-1)}dx = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{-1}{x}dx = \ln|x-1| - \ln|x| + C$

d) $\int \frac{dx}{x^2+2x-3} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+3}dx = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + C$

e) $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+3)(x+5)} = \frac{1}{24}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{3}{8}\int \frac{1}{x+3}dx - \frac{5}{12}\int \frac{1}{x+5}dx = \frac{1}{24}(\ln|x-1| + 9\ln|x+3| - 10\ln|x+5|) + C$

f) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx = \int (x^2+x+4)dx + \int \frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{5}{x-2}dx + \int \frac{-3}{x+2}dx =$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C$

4.02

a) $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)} = \int \frac{-dx}{x-1} + \int \frac{-dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x-2} = -\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \ln|x-2| + C$

b) $\int \frac{1+8x}{1+x^2}dx = \int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{8xdx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + 4\ln|1+x^2| + C$

c) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{3x-2}{x^2-2x+5}dx = -\ln|x-1| + \frac{3}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}dx =$

$= -\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x^2-2x+5| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$

d) $\int \frac{dx}{x^3+1} = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx +$

$+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)^2}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C$

e) $\int \frac{x^3}{x^3+x-2}dx = \int dx + \int \frac{-x+2}{x^3+x-2}dx = x + \frac{1}{4}\int \frac{(-x-6)}{x^2+x+2}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx =$

$= x - \frac{1}{8}\int \frac{2x+1}{x^2+x+2}dx - \frac{11}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{7}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}dx + \frac{1}{4}\ln|x-1| =$

$= x - \frac{1}{8}\ln|x^2+x+2| - \frac{11\sqrt{7}}{49}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + \frac{1}{4}\ln|x-1| + C$

f) $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx = \int \frac{x^3-6}{(x^2+2)(x^2+4)}dx = \int \frac{-x-3}{x^2+2}dx + \int \frac{2x+3}{x^2+4}dx =$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}dx - \frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx + \int \frac{2x}{x^2+4}dx + \frac{3}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx =$

$= -\frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \ln(x^2+4) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

4.03

En particular, si hacemos $x=1$ obtenemos $2B=-1 \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$.

Y si hacemos $x=-1$, $-2A=-9 \Rightarrow A=\frac{9}{2}$.

Luego, $\frac{4x-5}{x^2-1} = \frac{\frac{9}{2}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x-1}$.

$\int \frac{4x-5}{x^2-1}dx = \frac{9}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = \frac{9}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + C$

4.04

$$H(x)=\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx=\int \frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}dx=\int (2x+1)dx+\int \frac{12x-7}{6x^2-7x+2}dx=x^2+x+\ln\left(6x^2-7x+2\right)+C$$

Como $H(1)=1\Rightarrow 1+1+\ln 1+C=1\Rightarrow C=-1$

La función es $H(x)=x^2+x+\ln\left(6x^2-7x+2\right)-1$.

4.05

a) $\displaystyle\int \frac{2}{1+x^2}\,dx=2\operatorname{arctg} x+C$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+2x^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}}{1+\left(\sqrt{2}x\right)^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}x\right)+C$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{9+x^2}\,dx=\frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)+C$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{4+(x-3)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{2}\right)+C$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx=\int \frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx=\operatorname{arctg}(x-2)+C$

f) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+10x+41}\,dx=\int \frac{2}{(x+5)^2+16}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{x+5}{4}\right)^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+5}{4}\right)+C$

4.06

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx=\int -dx+\int \frac{x-2}{x^2+x-2}\,dx=-x+\int \frac{x-2}{(x-1)(x+2)}\,dx=-x+\int \frac{-\frac{1}{3}}{x-1}\,dx+\int \frac{\frac{4}{3}}{x+2}\,dx=$$
$$=-x-\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{4}{3}\ln|x+2|+C$$

4.07

$$\int \frac{3x}{x^2+x-2}\,dx=\int \frac{3x}{(x-1)(x+2)}\,dx=\int \frac{1}{x-1}\,dx+\int \frac{2}{x+2}\,dx=\ln|x-1|+2\ln|x+2|+C$$

4.08

$$\int \frac{x-1}{x^3+x^2}\,dx=\int \frac{x-1}{x^2(x+1)}\,dx=\int \frac{2}{x}\,dx+\int \frac{-1}{x^2}\,dx+\int \frac{-2}{x+1}\,dx=2\ln|x|+\frac{1}{x}-2\ln|x+1|+C$$

4.09

a) $\int \frac{dx}{2x-7}$

Esta integral es inmediata.

$$\int \frac{dx}{2x-7} = \frac{1}{2}\ln|2x-7| + C$$

b) $\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$

Caso C. Polinomio de 2.º grado sin raíces reales.

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}dx}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

c) $\int \frac{x}{x^2-4x-5}\,dx$

Caso A. Raíces reales distintas.

$$\int \frac{x}{x^2-4x-5}\,dx = \int \frac{x}{(x+1)(x-5)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{6}}{x+1}\,dx + \int \frac{\frac{5}{6}}{x-5}\,dx = \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{5}{6}\ln|x-5| + C$$

d) $\int \frac{1}{x^4+3x^2+2}\,dx$

Caso D. Raíces complejas de multiplicidad 1.

$$\int \frac{1}{x^4+3x^2+2}\,dx = \int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int \frac{-1}{x^2+2}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \operatorname{arctg} x - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

4.09 · continuación

e) $\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

Caso B. Solo tiene raíces reales, algunas de ellas iguales.

$$\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx = \int \frac{x+5}{(x+1)(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{-1}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}\,dx = \ln|x+1| - \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C$$

f) $\int \frac{x}{x^2+4x+7}\,dx$

Caso C. Polinomio de 2.º grado sin raíces reales.

$$\int \frac{x}{x^2+4x+7}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}\,dx - \int \frac{2}{x^2+4x+7}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+7| - \int \frac{2}{(x+2)^2+3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+7| - \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+7| - \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right) + C$$

g) $\int \frac{dx}{x^4+4}$

Caso D. Raíces complejas de multiplicidad 1.

$$\int \frac{1}{x^4+4}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2-2x+2}\,dx + \int \frac{\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx + \frac{1}{16}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\ln(x^2-2x+2) + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}(x-1) + \frac{1}{16}\ln(x^2+2x+2) + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}(x+1) + C$$

h) $\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}\,dx$

Caso A. Raíces reales distintas.

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{2x+1}{(x-2)(x-1)}\,dx = \int \frac{5}{x-2}\,dx + \int \frac{-3}{x-1}\,dx = 5\ln|x-2| - 3\ln|x-1| + C$$

5 · Cambio de variable

5.01

a) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx \qquad t=1+\sqrt{x},\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow 2(t-1)dt=dx$

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx=\int \frac{-2(t-1)(t-2)}{t}dt=-\int(2t-6)dt-4\int\frac{dt}{t}=-t^2+6t-4\ln|t|+C=$$
$$=-\left(1+\sqrt{x}\right)^2+6\left(1+\sqrt{x}\right)-4\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+C$$

b) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}dx \qquad t=\sqrt[3]{x},dt=\frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}dx \Rightarrow 3t^2dt=dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}dx=\int\frac{3t^2}{t+1}dt=3\int(t-1)dt+3\int\frac{1}{t+1}dt=\frac{3}{2}t^2-3t+3\ln|t+1|+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+C$$

c) $\int \frac{1+e^x}{e^{2x}+1}dx \qquad t=e^x,\ dt=e^xdx \Rightarrow \frac{dt}{t}=dx$

$$\int \frac{1+e^x}{e^{2x}+1}dx=\int\frac{1+t}{(t^2+1)t}dt=\int\frac{1}{t}dt+\int\frac{-t+1}{t^2+1}dt=\ln|t|-\frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2+1}dt+\int\frac{1}{t^2+1}dt=\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t^2+1|+arctg\,(t)+C=$$
$$=x-\frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+1\right|+arctg\,(e^x)+C$$

d) $\int \frac{\operatorname{sen}x-1}{\operatorname{sen}x+1}\cos x\,dx \qquad t=\operatorname{sen}x,dt=\cos x dx$

$$\int \frac{\operatorname{sen}x-1}{\operatorname{sen}x+1}\cos x dx=\int\frac{t-1}{t+1}dt=\int dt-\int\frac{2}{t+1}dt=t-2\ln|t+1|+C=\operatorname{sen}x-2\ln|\operatorname{sen}x+1|+C$$

5.02

a) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx \quad t=\sqrt[6]{x};dt=\frac{dx}{6\left(\sqrt[6]{x}\right)^5}\Rightarrow 6t^5dt=dx$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx=\int\frac{6t^5\cdot t^3}{t^2+1}dt=6\int(t^6-t^4+t^2-1)dt+6\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{6}{7}t^7-\frac{6}{5}t^5+\frac{6}{3}t^3-6t+6\operatorname{arctg}t+C=$$
$$=\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\operatorname{arctg}\left(\sqrt[6]{x}\right)+C$$

b) $\int\sqrt{\frac{x+5}{x}}dx \quad \left(\text{toma } \frac{x+5}{x}=t^2\right)$

$$\frac{x+5}{x}=t^2\Rightarrow\ t^2=1+\frac{5}{x},\ 2tdt=\frac{-5}{x^2}dx=-\frac{1}{5}\left(\frac{5}{x}\right)^2dx\Rightarrow dx=\frac{-10t}{\left(t^2-1\right)^2}dt$$

$$\int\sqrt{\frac{x+5}{x}}dx=\int\frac{-10t^2}{\left(t^2-1\right)^2}dt=-\frac{5}{2}\int\frac{1}{(t-1)}dt+\frac{5}{2}\int\frac{-1}{(t-1)^2}dt+\frac{5}{2}\int\frac{1}{(t+1)}dt+\frac{5}{2}\int\frac{-1}{(t+1)^2}dt=$$
$$=\frac{5}{2}\left(-\ln|t-1|+\frac{1}{t-1}+\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}\right)+C=\frac{5}{2}\left(-\ln\left|\sqrt{\frac{x+5}{x}}-1\right|+\frac{1}{\sqrt{\frac{x+5}{x}}-1}+\ln\left|\sqrt{\frac{x+5}{x}}+1\right|+\frac{1}{\sqrt{\frac{x+5}{x}}+1}\right)+C=$$
$$=\frac{5}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}}\right|+\sqrt{x(x+5)}+C$$

5.03

a) $\int \frac{x}{x^4+1}dx\ ,\ x^2=t$

$x^2=t \Rightarrow 2xdx=dt$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\text{arctg}\,t+C=\frac{1}{2}\text{arctg}(x^2)+C$$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+4x-2}\ ,\ 2x-1=t^2$

$2x-1=t^2 \Rightarrow 2dx=2tdt$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+4x-2}=\frac{1}{2}\int \frac{2dx}{\sqrt{2x-1}+2(2x-1)}=\frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t+2t^2}=\frac{1}{2}\int \frac{2dt}{1+2t}=\frac{1}{2}\ln|1+2t|+C=\frac{1}{2}\ln\left(1+2\sqrt{2x-1}\right)+C$$

5.04

Hacemos el cambio de variable $x=e^t \Rightarrow dx=e^tdt$

$$\int \text{sen}(\ln x)dx=\int e^t\,\text{sen}\,tdt=e^t\,\text{sen}\,t-\int e^t\cos tdt=e^t\,\text{sen}\,t-e^t\cos t-\int e^t\,\text{sen}\,tdt=x\,\text{sen}(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int \text{sen}(\ln x)dx$$

$$\int \text{sen}(\ln x)dx=\frac{x(\text{sen}(\ln x)-\cos(\ln x))}{2}+C$$

5.05

a) $t=e^x \Rightarrow dt=e^xdx$

$$\int e^{2x}\,\text{sen}\left(e^x\right)dx=\int t\,\text{sen}\,tdt=-t\cos t-\int -\cos tdt=-t\cos t+\text{sen}\,t+C=-e^x\cos(e^x)+\text{sen}(e^x)+C$$

b) $0=-e^0\cos(e^0)+\text{sen}(e^0)+C \Rightarrow C=\cos 1-\text{sen}\,1$

5.06

a) $\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx \qquad \sqrt{x}=t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt$

$$\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx=\int \frac{4t}{1+t}dt=\int \frac{4(t+1)}{1+t}dt-4\int \frac{1}{1+t}dt=4t-4\ln|1+t|+C=4\sqrt{x}-4\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C$$

b) $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx \qquad e^x=t \Rightarrow e^x dx=dt$

$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx=\int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{t}\right)t}dt=\int \frac{1}{t^2+1}dt=\operatorname{arctg}(t)+C=\operatorname{arctg}(e^x)+C$$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx \qquad x=t^6 \Rightarrow dx=6t^5dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx=\int \frac{6t^5}{t^3+t^2}dt=\int \frac{6t^3}{t+1}dt=\int (6t^2-6t+6)dt+\int \frac{-6dt}{t+1}=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C=$$
$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C$$

d) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}\,dx \qquad 1+x^3=t^2 \Rightarrow 3x^2dx=2tdt$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}\,dx=\frac{1}{3}\int \frac{((1+x^3)-1)3x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx=\frac{1}{3}\int \frac{(t^2-1)2t}{t}dt=\frac{2}{3}\int (t^2-1)dt=\frac{2}{9}t^3-\frac{2}{3}t+C=\frac{2\sqrt{1+x^3}\,(x^3-2)}{9}+C$$

e) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\,dx \qquad 2^x=t \Rightarrow 2^x\ln 2\,dx=dt$

$$\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\,dx=\frac{1}{\ln 2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{1}{\ln 2}\operatorname{arcsen}(t)+C=\frac{1}{\ln 2}\operatorname{arcsen}(2^x)+C$$

f) $\int \frac{x\operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad t=\operatorname{arcsen}x \Rightarrow dt=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$\int \frac{x\operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int t\operatorname{sen}t\,dt=-t\cos t+\int \cos t\,dt=-t\cos t+\operatorname{sen}t+C=-\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen}x+x+C$$

5.07

$$t^2=1+x^2 \Rightarrow 2tdt=2xdx \Rightarrow tdt=xdx$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,xdx=\int \frac{t^2-1}{t}tdt=\int (t^2-1)dt=\frac{t^3}{3}-t+C=\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}-\sqrt{1+x^2}+C$$

5.08

a) $\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}dx \qquad t=e^x \Rightarrow dt=e^x dx$

$$\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}dx=\int \frac{dt}{(t^2-1)(t+1)}=\int \frac{dt}{(t-1)(t+1)^2}=\int \frac{\frac{1}{4}dt}{(t-1)}+\int \frac{-\frac{1}{4}dt}{(t+1)}+\int \frac{-\frac{1}{2}dt}{(t+1)^2}=$$

$$\frac{1}{4}\ln|t-1|-\frac{1}{4}\ln|t+1|+\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}+C=\frac{1}{4}\ln|e^x-1|-\frac{1}{4}\ln|e^x+1|+\frac{1}{2(e^x+1)}+C$$

b) $\int \frac{e^x}{1-e^{-x}}dx \qquad t=e^x \Rightarrow dt=e^x dx$

$$\int \frac{e^x}{1-e^{-x}}dx=\int \frac{dt}{1-\frac{1}{t}}=\int \frac{t}{t-1}dt=\int 1+\frac{1}{t-1}dt=t+\ln|t-1|+C=e^x+\ln|e^x-1|+C$$

c) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$

Llamando $t=e^x \Rightarrow dt=e^x dx$:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx=\int \frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1}=\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln|t+1|=\frac{1}{2}\ln|e^x-1|-\frac{1}{2}\ln|e^x+1|+C=\ln\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}+C$$

5.09

$$\int x(\ln(1+x^2)+e^{-x})dx=\int x\ln(1+x^2)dx+\int xe^{-x}dx$$

Para resolver la primera integral hacemos el cambio $t=1+x^2 \Rightarrow dt=2xdx$ y después la hacemos por partes. La segunda la hacemos por partes directamente:

$$\int x\ln(1+x^2)dx+\int xe^{-x}dx=\frac{1}{2}\int \ln t dt-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=\frac{1}{2}t\ln t-\frac{1}{2}\int dt-xe^{-x}-e^{-x}=\frac{1}{2}t\ln t-\frac{1}{2}t-xe^{-x}-e^{-x}+C$$

Deshaciendo el cambio de variable obtenemos:

$$\int x(\ln(1+x^2)+e^{-x})dx=\frac{1}{2}(1+x^2)(\ln(1+x^2)-1)-e^{-x}(x+1)+C$$

5.10

$t=e^x \Rightarrow dt=e^x dx$

$$\int e^{x+e^x}dx=\int e^x e^{e^x}dx=\int e^t dt=e^t+C=e^{e^x}+C$$

5.11

$$\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$$

$$\int \sec^3 x dx = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt = \int \frac{\frac{1}{4}}{t+1} dt + \int \frac{\frac{1}{4}}{(t+1)^2} dt + \int \frac{-\frac{1}{4}}{t-1} dt + \int \frac{\frac{1}{4}}{(t-1)^2} dt =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{4}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{4}\ln|t-1| - \frac{1}{4}\frac{1}{t-1} + C = \frac{1}{4}\ln|\operatorname{sen} x+1| - \frac{1}{4}\frac{1}{\operatorname{sen} x+1} - \frac{1}{4}\ln|\operatorname{sen} x-1| - \frac{1}{4}\frac{1}{\operatorname{sen} x-1} + C$$

5.12

$$\sqrt{x^2-2} - x = t \Rightarrow dt = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-2}} - 1\right) dx = \frac{x-\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2-2}} dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}} = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} \cdot \frac{x-\sqrt{x^2-2}}{x-\sqrt{x^2-2}} dx = \int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-2}} \cdot \frac{x-\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2-2}} dx = \int \frac{1}{-t} dt = -\ln|t| + C = -\ln\left|\sqrt{x^2-2} - x\right| + C$$

6 · Integrales trigonométricas

6.01

a) $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx$

$t = \cos x, dt = -\operatorname{sen} x dx$

$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx = -\int (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x(-\operatorname{sen} x)dx = -\int (1-t^2)^2 t^2 dt$

b) $\int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^3 x} dx$

$t = \operatorname{sen} x,\ dt = \cos x dx$

$\int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^4 x} \cos x dx = \int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{(1-\operatorname{sen}^2 x)^2} \cos x dx = \int \frac{t^4}{(1-t^2)^2} dt$

c) $\int \frac{1}{\cos x} dx$

$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right),\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{2dt}{1-t^2}$

6.02

a) $\int \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x} dx$

$t = \operatorname{sen} x\ ,\ dt = \cos x dx \Rightarrow \int \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \frac{2\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen}^2 x} \cos x dx = \int \frac{2t}{1+t^2} dt$

b) $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x dx$

$t = \operatorname{tg} x\ ,\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\, dx = \int \frac{t^4}{(1+t^2)^7} dt$

c) $\int \operatorname{tg}^4 x\, dx$

$t = \operatorname{tg} x\ ,\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow \int \operatorname{tg}^4 x\, dx = \int \frac{t^4}{1+t^2} dt$

6.03

a) Hacemos el cambio $\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$

$$\int (\cos x - \cos^3 x) dx = \int \cos x (1 - \cos^2 x) dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3} + C = 0 \Rightarrow C = -\dfrac{1}{3}$

La primitiva buscada es $F(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x - 1}{3}$.

6.04

a) Haciendo el cambio $\cos x = t \Rightarrow -\operatorname{sen} x dx = dt$:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x dx = \int (1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x dx = -\int (1 - t^2) dt = \frac{1}{3} t^3 - t + C = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

b) Haciendo el cambio $\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$:

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \cos x \, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x \, dx = \int (1 - t^2) dt = t - \frac{1}{3} t^3 + C = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x + C$$

6.05

a) $\int (2\operatorname{sen}^2 x - 3\cos x)\,dx = 2\int \operatorname{sen}^2 x\,dx - 3\int \cos x\,dx$

Para calcular $\int sen^2x\,dx$ lo hacemos por partes:

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\operatorname{sen} x\cos x + \int \cos^2 x dx = -\operatorname{sen} x\cos x + \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\,dx = -\operatorname{sen} x\cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\,dx$$

Despejando, obtenemos $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x - \operatorname{sen} x\cos x}{2} + C$.

Y por tanto: $\int (2\operatorname{sen}^2 x - 3\cos x)\,dx = 2\int \operatorname{sen}^2 x\,dx - 3\int \cos x\,dx = x - \operatorname{sen} x\cos x - 3\operatorname{sen} x + C$

b) $\int \cos^5 x \operatorname{sen}^2 x\,dx$

Hacemos el cambio $\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$:

$$\int \cos^5 x \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int \cos^4 x \operatorname{sen}^2 x \cos x dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen}^2 x \cos x dx = \int (1-t^2)^2 t^2 dt = \int (t^6 - 2t^4 + t^2)dt =$$

$$= \frac{1}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x - \frac{2}{5}\operatorname{sen}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$$

c) $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

Hacemos el cambio $\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x}\cos x\,dx = \int \frac{1-t^2}{t^2}dt = \int \frac{1}{t^2}dt - \int dt = -\frac{1}{t} - t + C = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x + C$$

d) $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx$

Hacemos el cambio $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx = \int \frac{(1-t^2)^2}{4t^3}\,dt = \frac{1}{4}\int t dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt + \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^3}dt = \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{8t^2} + C =$$

$$= \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \frac{\operatorname{cotg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{8} + C$$

6.06

a) $$\int \frac{1}{2+\cos x}\,dx = \int \frac{1}{2+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{t^2+3}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + C$$

b) $$\int \frac{1}{2+\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{1}{2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}dt}{\left(\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

6.07

a) $\int \cos(5x-3)\operatorname{sen}(3x-1)\,dx$

Usamos $2\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)=\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}b \Rightarrow \begin{cases} a=(5x-3)+(3x-1)=8x-4 \\ b=(5x-3)-(3x-1)=2x-2 \end{cases}$.

$$\int \cos(5x-3)\operatorname{sen}(3x-1)\,dx=\frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(8x-4)dx-\frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2x-2)dx=-\frac{\cos(8x-4)}{16}+\frac{\cos(2x-2)}{4}+C$$

b) $\int \cos(2x+6)\cos(4x-2)\,dx$

Usamos $2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)=\cos a+\cos b \Rightarrow \begin{cases} a=6x+4 \\ b=2x-8 \end{cases}$.

$$\int \cos(2x+6)\cos(4x-2)\,dx=\frac{1}{2}\int \cos(6x+4)dx+\frac{1}{2}\int \cos(2x-8)dx=\frac{\operatorname{sen}(6x+4)}{12}+\frac{\operatorname{sen}(2x-8)}{4}+C$$

c) $\int \operatorname{sen}(2x+1)\operatorname{sen}(3x+5)\,dx$

Usamos $2\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)=\cos b-\cos a \Rightarrow \begin{cases} a=5x+6 \\ b=x+4 \end{cases}$.

$$\int \operatorname{sen}(2x+1)\operatorname{sen}(3x+5)\,dx=\frac{1}{2}\int \cos(x+4)dx-\frac{1}{2}\int \cos(5x+6)dx=\frac{\operatorname{sen}(x+4)}{2}-\frac{\operatorname{sen}(5x+6)}{10}+C$$

d) $\int \operatorname{sen}(2x+1)\cos(3x+5)\,dx$

Usamos $2\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)=\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}b \Rightarrow \begin{cases} a=5x+6 \\ b=x+4 \end{cases}$.

$$\int \operatorname{sen}(2x+1)\cos(3x+5)\,dx=\frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(5x+6)dx-\frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(x+4)dx=\frac{-\cos(5x+6)}{10}+\frac{\cos(x+4)}{2}+C$$

7 · Integrales no elementales

7.01

$F(x)=f(x)e^{g(x)} \Rightarrow F'(x)=f'(x)e^{g(x)}+f(x)g'(x)e^{g(x)}=(f'(x)+f(x)g'(x))e^{g(x)}$

Si *f(x)* y *g(x)* son funciones racionales, entonces, $R(x)=f'(x)+f(x)g'(x)$ pues la derivada de una función racional es racional y producto y suma de racionales es racional.

7.02

a) $\int\sqrt{\ln x}dx$. Llamando $x=e^{t^2}, dx=2te^{t^2}dt \Rightarrow \int\sqrt{\ln x}dx=\int\sqrt{\ln(e^{t^2})}2te^{t^2}dt=2\int t^2e^{t^2}dt$ que no es elemental.

b) $\int\frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx$. Llamando $x=e^{t^2}, dx=2te^{t^2}dt \Rightarrow \int\frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx=\int\frac{2te^{t^2}}{\sqrt{\ln(e^{t^2})}}dt=2\int e^{t^2}dt$ que no es elemental.

c) $\int\frac{e^{ax}}{\sqrt{x}}dx$. Llamando $x=t^2, dx=2tdt \Rightarrow \int\frac{e^{at^2}}{t}2tdt=2\int e^{at^2}dt$ que no es elemental.

7.03

a) Hacemos el cambio $e^t=x \Rightarrow e^tdt=dx$ $\int\frac{dx}{\ln x}=\int\frac{e^t}{t}dt$.

b) Hacemos el cambio $t=e^x \Rightarrow dt=e^xdx$ $\int e^{e^x}dx=\int\frac{e^{e^x}}{e^x}e^xdx=\int\frac{e^t}{t}dt$.

c) Hacemos el cambio $e^t=x \Rightarrow e^tdt=dx$ $\int\ln(\ln x)dx=\int\ln t\cdot e^tdt$.

Ahora, integrando por partes, tenemos $\int\ln(\ln x)dx=\int\ln t\cdot e^tdt=\ln t\cdot e^t-\int\frac{e^t}{t}dt$.

7.04

Si tomamos $f(x)=e^x$ y $g'(x)=\frac{1}{x}$:

f	g'
e^x	$\frac{1}{x}$
e^x	$\ln x$
e^x	$x(\ln x-1)$
...	...

Se observa que tanto de una forma como de la otra se llega a sumas de infinitos sumandos y, por tanto, la integral es no elemental.

8 · Problemas y repaso

8.01

a) $\int \frac{x^2+2\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}+3}{2x}dx = \frac{1}{2}\int x\,dx + \int x^{\frac{-2}{3}}dx - \frac{1}{2}\int x^{\frac{-1}{2}}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{4}x^2 + 3\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} + \frac{3}{2}\ln|x| + C$

b) $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$

Como $\operatorname{sen}^5 x = \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x$, se pone $\cos x = t$ y $-\operatorname{sen} x dx = dt$, quedándonos:

$$\int \operatorname{sen}^5 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\,dx = -\int (1-t^2)^2\,dt = -\frac{1}{5}t^5 - t + \frac{2}{3}t^3 = -\frac{1}{5}\cos^5 x - \cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x + C$$

c) $\int \sqrt{x}(1-x^2)dx$

Poniendo $x = t^2$ y $dx = 2tdt$, se tiene: $2\int t(1-t^4)t\,dt = 2\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^7}{7} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + C$

d) $\int \frac{1}{x^2-x}dx = \int \frac{dx}{x(x-1)} = \int \frac{-dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} = -\ln|x| + \ln|x-1| + C$

e) $\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$

Haciendo $1+x = t^2$ y $dx = 2tdt$, se tiene:

$$\int (t^2-1)^2 t \cdot 2t\,dt = 2\left(\frac{t^7}{7} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right) = 2\sqrt{(1+x)^3}\left(\frac{(1+x)^2}{7} - \frac{2}{5}(1+x) + \frac{1}{3}\right) + C = \frac{2}{105}\sqrt{(1+x)^3}(15x^2 - 12x + 8) + C$$

8.01 · continuación

f) $\int\left(\frac{x-2\sqrt{x}}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=\int\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=x-4\sqrt{x}-\frac{6}{x}-\ln|x|+C$

g) $\int \text{tg}(ax)\sec^2(ax)dx$

Haciendo $\text{tg}(ax)=t$ y $a\sec^2(ax)dx=dt$, se llega a $\frac{1}{a}\int t\,dt=\frac{1}{a}\cdot\frac{t^2}{2}=\frac{1}{2a}\text{tg}^2(ax)+C$.

h) $\int x\ln(x+a)dx=\frac{x^2\ln(a+x)}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+a}dx=\frac{x^2\ln(a+x)}{2}-\frac{1}{2}\int(x-a)dx-\frac{1}{2}\int\frac{a^2}{x+a}dx=$

$=\frac{x^2\ln(a+x)}{2}-\frac{1}{4}(x-a)^2-\frac{a^2}{2}\ln(x+a)+C=\frac{1}{2}\ln(x+a)(x^2-a^2)-\frac{1}{4}(x-a)^2+C$

i) $\int\frac{x}{(x-2)(x^2-9)}dx=\int\frac{x}{(x-2)(x-3)(x+3)}dx=-\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{1}{10}\int\frac{dx}{x+3}=$

$=-\frac{2}{5}\ln|x-2|+\frac{1}{2}\ln|x-3|-\frac{1}{10}\ln|x+3|+C$

j) $\int x\,\text{sen}(2x)\,dx$

f	g'
x	$\text{sen}(2x)$
1	$-\frac{1}{2}\cos(2x)$
0	$-\frac{1}{4}\text{sen}(2x)$

$\int x\,\text{sen}(2x)\,dx=-\frac{1}{2}x\cos(2x)+\frac{1}{4}\text{sen}2x+C$

8.02

a) $\int x^a \ln x\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}\ln x - \frac{1}{a+1}\int x^{a+1}\frac{1}{x}dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}\ln x - \frac{1}{a+1}\cdot\frac{x^{a+1}}{a+1} = \frac{1}{a+1}x^{a+1}\left(\ln x - \frac{1}{a+1}\right)+C$

Si $a=-1$, $\int x^a \ln x\,dx = \int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$

b) $\int e^{-x}\cos(5x)dx = -e^{-x}\cos(5x) + 5e^{-x}sen(5x) - 25\int e^{-x}\cos(5x)dx \Rightarrow \int e^{-x}\cos(5x)dx =$

$= \frac{-e^{-x}\cos(5x) + 5e^{-x}sen(5x)}{26} + C$

c) $\int x\sqrt{x-3}\,dx$

Haciendo $x-3=t^2$ y $dx = 2tdt$, se tiene:

$\int x\sqrt{x-3}\,dx = \int (t^2+3)t\cdot 2t\,dt = 2\left(\frac{t^5}{5}+t^3\right) = \frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5} + 2\sqrt{(x-3)^3} + C$

d) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$

Se denomina $f(x)=\ln x$ y $g'(x)=\frac{1}{x^3}$.

$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = -\frac{1}{2}\ln x\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{2}\ln x\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$

8.02 · continuación

e) $\int \frac{4}{x^4-1}dx$

$$\frac{4}{x^4-1}=\frac{4}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1}=\frac{(Ax+B)(x^2-1)+C(x^2+1)(x-1)+D(x^2+1)(x+1)}{x^4-1}$$

De la igualdad $4=(Ax+B)(x^2-1)+C(x^2+1)(x-1)+D(x^2+1)(x+1)$, haciendo:

$x=1\Rightarrow 4=4D\Rightarrow D=1$

$x=-1\Rightarrow 4=-4C\Rightarrow C=-1$

$x=0\Rightarrow 4=-B-C+D\Rightarrow B=-2$

$x=2\Rightarrow 4=6A+3B+5C+15D\Rightarrow A=0$

Luego la integral pedida es:

$$\int \frac{4}{x^4-1}dx=-2\,arctgx-\ln|x+1|+\ln|x-1|+C$$

f) $\int x\ln\sqrt{1+x^2}\,dx$

Como $x\ln\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)\Rightarrow\int x\ln\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int x\ln(1+x^2)dx$. La integral se puede resolver haciendo $1+x^2=t$ y $2xdx=dt$ y se transforma en $\frac{1}{2}\int \ln t dt=\frac{1}{2}(t\ln t-t)=\frac{1}{2}t(\ln t-1)$.

Así que la integral pedida es $\int x\ln\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{4}(1+x^2)(\ln(1+x^2)-1)+C$.

g) $\int x(ax^2+b)^n\,dx$

Si $n=-1$, $\int \frac{x}{ax^2+b}dx=\frac{1}{2a}\ln|ax^2+b|+C$

Si $n\neq 1$, haciendo $ax^2+b=t$ y $2axdx=dt$, se tiene que:

$$\int x(ax^2+b)^n\,dx=\frac{1}{2a}\int t^n dt=\frac{1}{2a(n+1)}(ax^2+b)^{n+1}+C$$

h) $\int \frac{\pi}{\cos^2(\pi x-1)}dx=tg(\pi x-1)+C$

i) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

Haciendo $x=t^6$ y $dx=6t^5dt$, se tiene que resolver $6\int \frac{t^3-1}{t^2+1}\cdot t^5dt$

Como $t^8-t^5=(t^2+1)(t^6-t^4-t^3+t^2+t-1)+(1-t)$ la integral pedida es:

$$6\int(t^6-t^4-t^3+t^2+t-1)dt+6\int\frac{1-t}{t^2+1}dt=$$
$$=6\left(\frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{1}{4}\sqrt[6]{x^4}+\frac{1}{3}\sqrt[6]{x^3}+\frac{1}{2}\sqrt[6]{x^2}-\sqrt[6]{x}\right)+6arctg\sqrt[6]{x}-3\ln\left(\sqrt[6]{x^2}+1\right)+C$$

j) $\int \frac{\text{sen}x}{1+\text{tg}^2x}dx=\int \text{sen}x\cos^2x dx=-\frac{1}{3}cos^3x+C$

k) $\int\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2dx$

Como $\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x}-2)$

Así pues $\int\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}-2x\right)+C$

8.02 · continuación

l) $\int \frac{x^2}{x^3+x^2-2x}dx$

$$\frac{x^2}{x^3+x^2-2x}=\frac{x}{x^2+x-2}=\frac{x}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

Como $x=A(x-1)+B(x+2)\Rightarrow A=\frac{2}{3},B=\frac{1}{3}$ por lo que $\int \frac{x^2}{x^3+x^2-2x}dx=\frac{2}{3}\ln|x+2|+\frac{1}{3}\ln|x-1|+C$

m) $\int \frac{x-3}{x^2+9}dx=\int \frac{x}{x^2+9}dx-\int \frac{3}{x^2+9}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+9)-\int \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+9)-\text{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)+C$

n) $\int x\sqrt{x^2-9}\,dx$ Haciendo $x^2-9=t$ y $2xdx=dt$:

$$\int x\sqrt{x^2-9}\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3}=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-9)^3}+C$$

o) $\int (e^{\text{sen}3x})^3\cos(3x)dx$

Haciendo $e^{sen3x}=t$ y $e^{\text{sen}3x}\cdot 3\cos 3xdx=dt$, se tiene que:

$$\int (e^{\text{sen}3x})^3\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}\int t^2dt=\frac{1}{9}t^3=\frac{1}{9}(e^{sen3x})^3+C$$

p) $\int \cos\frac{x}{2}\cos x\,dx$

Usamos $2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)=\cos a+\cos b\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}x\\ b=\frac{1}{2}x\end{cases}$

$$\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int\cos\left(\frac{3x}{2}\right)dx+\frac{1}{2}\int\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{3}sen\left(\frac{3x}{2}\right)+sen\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

q) $\int \frac{x-3}{x^3+x^2+x}dx=-3\ln|x|+\int \frac{3x+4}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$ y esta última integral se resuelve como:

$$\int \frac{3x+4}{x^2+x+1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+\frac{8}{3}}{x^2+x+1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+1+\frac{5}{3}}{x^2+x+1}dx=\frac{3}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{5}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$ y, finalmente,

$$\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\frac{4}{3}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

Así pues, $\int \frac{x-3}{x^3+x^2+x}dx=-3\ln|x|+\frac{3}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{5}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$

r) $\int \frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2}dx$

$$\frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2}=\frac{A(x+1)(x+2)^2+B(x+2)^2+C(x+1)^2(x+2)+D(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)^2}$$

$x^2+3x-2=A\,(x+1)(x+2)^2+B\,(x+2)^2+C\,(x+1)^2\,(x+2)+D\,(x+1)^2$

Si $x=-1\Rightarrow -4=B$

Si $x=-2\Rightarrow -4=D$

Si $x=0\Rightarrow -2=4A+4B+2C+D$

Si $x=1$ es $2=18A+9B+12C+4D$

Por tanto, $B=-4$, $D=-4$, $4A+2C=18$; $18A+12C=54$, por lo que $A=9$, $C=-9$ y la integral pedida es:

$$\int \frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2}dx=9\ln|x+1|+\frac{4}{x+1}-9\ln|x+2|+\frac{4}{x+2}+C$$

8.02 · continuación

s) $\int \frac{(1+x)^3}{\sqrt{x}}dx$

$\frac{(1+x)^3}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}$, así que $\int \frac{(1+x)^3}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x^3} + \frac{6}{5}\sqrt{x^5} + \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + C$

t) $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx$

Poniendo $\sqrt{x+1} = t$ y $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx = dt$, se tiene que:

$\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx = 2\int \ln t^2 dt = 4(t\ln t - t) = 4\sqrt{x+1}\,(\ln\sqrt{x+1} - 1) + C$

u) $\int \frac{5\cdot 2^x + 3^x}{3^{x-1}}dx$

Operando: $\frac{5\cdot 2^x + 3^x}{3^{x-1}} = 15\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3$

Así pues $\int \frac{5\cdot 2^x + 3^x}{3^{x-1}}dx = 15\int\left(\frac{2}{3}\right)^x dx + 3x = \frac{15}{\ln\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3x + C$

v) $\int \frac{2x+5}{x^2+x+1}dx$

Como $\frac{2x+5}{x^2+x+1} = \frac{2x+1+4}{x^2+x+1}$, se tiene que:

$\int \frac{2x+5}{x^2+x+1}dx = \ln(x^2+x+1) + 4\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \ln(x^2+x+1) + 4\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

w) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx = \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}dx - \int \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx$

Llamando $t = e^x; dt = e^x dx$ y $s = e^{-x}; ds = -e^{-x}dx$

$\int \frac{t}{t^2+1}dt + \int \frac{s}{1+s^2}ds = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \frac{1}{2}\ln(s^2+1) + C = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + \frac{1}{2}\ln(e^{-2x}+1) + C$

x) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{x+1}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + 2\sqrt{x+1} + C$

y) $\int \frac{x^2}{1-x^6}dx$ Llamando $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2dx$:

$\int \frac{x^2}{1-x^6}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{6}\int \frac{dt}{1+t} = -\frac{1}{6}\ln|1-t| + \frac{1}{6}\ln|1+t| + C = -\frac{1}{6}\ln|1-x^3| + \frac{1}{6}\ln|1+x^3| + C$

z) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{x+1}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}} - \int \frac{dx}{x+1} = 2\sqrt{x+1} - \ln|x+1| + C$

8.03

Como $F(-1) = 0 \Rightarrow 0 = (-1+1)^2 e^1 + C \Rightarrow C = 0$ la función buscada es $F(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

8.04

a) $f'(x) = (x-1)^3(x-3), f(0) = 1$

$$f(x) = \int (x-1)^3(x-3)dx = \int (x^3-3x^2+3x-1)(x-3)dx = \int (x^4-6x^3+12x^2-10x+3)dx = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + 4x^3 - 5x^2 + 3x + C$$

Como $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$, la función buscada es $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + 4x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.

b) $f'(x) = (3x - 2)^2 (x - 2), f(2) = 0$

$$f(x) = \int (3x-2)^2 (x-2)dx = \int (9x^3 - 30x^2 + 28x - 8)dx = \frac{9}{4}x^4 - 10x^3 + 14x^2 - 8x + C$$

Como $f(2) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{9}{4} \cdot 16 - 10 \cdot 8 + 14 \cdot 4 - 8 \cdot 2 + C \Rightarrow C = 4$, la función buscada es:

$$f(x) = \frac{9}{4}x^4 - 10x^3 + 14x^2 - 8x + 4.$$

8.05

$$\int \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) dx = \int \frac{x}{x^2-4}dx + \int \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-4| + \frac{1}{2}\ln^2(x+1) + C$$

8.06

$$\int \frac{3x+7}{(x^2-3x+2)(x-3)}dx = \int \frac{3x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$$

Debemos integrar una función ración racional por lo que la escribimos como: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} = \frac{3x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

Resolviendo $\begin{cases} A+B+C=0 \\ -5A-4B-3C=3 \\ 6A+3B+2C=7 \end{cases}$ obtenemos $A = 5$, $B = -13$, $C = 8$ y podemos escribir la integral como:

$$\int \frac{3x+7}{(x^2-3x+2)(x-3)}dx = \int \frac{5}{(x-1)}dx + \int \frac{-13}{(x-2)}dx + \int \frac{8}{(x-3)}dx = 5\ln|x-1| - 13\ln|x-2| + 8\ln|x-3| + C$$

8.07

a) $\int \sqrt{1-4x^2}dx = \int \sqrt{1-(2x)^2}dx$

Haciendo $2x = t$ y $2dx = dt$, se tiene que $\int \sqrt{1-4x^2}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1-t^2}dt$.

Poniendo ahora $t = \operatorname{sen} u$ y $dt = \cos u du$ se tiene:

$$\frac{1}{2}\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2u}{4}\right) = \frac{1}{2}(\operatorname{arcsen}\ t + t\sqrt{1-t^2}) = \frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} 2x + 2x\sqrt{1-4x^2}) + C$$

b) $\int \sqrt{6x - x^2 - 8}\, dx$

Como $6x - x^2 - 8 = 1-(x-3)^2$, se tiene que $\int \sqrt{6x - x^2 - 8}\, dx = \int \sqrt{1-(x-3)^2}dx$.

Haciendo $x-3 = t$ y $dx = dt$ se tiene:

$$\int \sqrt{1-t^2}\ dt = \frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} t + t\sqrt{1-t^2}) = \frac{1}{2}(\operatorname{arcsen}(x-3) + (x-3)\sqrt{1-(x-3)^2}) + C$$

c) $\int \sqrt{1-(2x-1)^2}\ dx$

Haciendo $2x-1 = t$ y $2dx = dt$, se tiene que:

$$\int \sqrt{1-(2x-1)^2}\ dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1-t^2}\ dt = \frac{1}{4}(\operatorname{arcsen} t + t\sqrt{1-t^2}) = \frac{1}{4}(\operatorname{arcsen}(2x-1) + (2x-1)\sqrt{1-(2x-1)^2}) + C$$

d) $\int \sqrt{3 - x^2 + 2x}\, dx$

Como $3 - x^2 + 2x = 4 - (x-1)^2$, se tiene que $\int \sqrt{3 - x^2 + 2x}\, dx = \int \sqrt{4-(x-1)^2}\, dx$.

Haciendo $x-1 = 2t$ y $dx = 2dt$, se tiene:

$$2\int \sqrt{4-4t^2}\ dt = 4\int \sqrt{1-t^2}\ dt = 2(\operatorname{arcsen} t + t\sqrt{1-t^2}) = 2\left(\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}\right) + C$$

8.08

Poniendo $x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} t}$ y $dx = \dfrac{-\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}dt$, la integral dada se transforma en $-\int \dfrac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^3 t}dt$.

Haciendo en esta última integral $\cos t = u$ y $-\operatorname{sen} t dt = du$, se tiene que $\int \dfrac{u^2}{(1-u^2)^2}du$, cociente de polinomios.

$$\frac{u^2}{(1-u^2)^2} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{(1+u)^2} + \frac{C}{1-u} + \frac{D}{(1-u)^2} = \frac{A(1+u)(1-u)^2 + B(1-u)^2 + C(1-u)(1+u)^2 + D(1+u)^2}{(1+u)^2(1-u)^2}$$

En la igualdad $u^2 = A\,(1+u)(1-u)^2 + B\,(1-u)^2 + C\,(1-u)(1+u)^2 + D\,(1+u)^2$, haciendo:

$$u = 1 \Rightarrow 1 = 4D \Rightarrow D = \frac{1}{4}$$

$$u = -1 \Rightarrow 1 = 4B \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 0 \Rightarrow 0 = A + B + C + D \\ u = 2 \Rightarrow 4 = 3A + B - 9C + 9D \end{array}\right\} \Rightarrow A = C = -\frac{1}{4}$$

La integral será:

$$\int \frac{u^2}{(1-u^2)^2}du = -\frac{1}{4}\ln|1+u| - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+u} + \frac{1}{4}\ln|1-u| + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-u} = \frac{1}{2}\cdot\frac{u}{1-u^2} - \frac{1}{4}\ln\frac{1+u}{1-u}$$

Deshaciendo el cambio, se tiene:

$$\frac{u}{1-u^2} = \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t} = \frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}{\dfrac{1}{x^2}} = x\sqrt{x^2-1}$$

$$\frac{1+u}{1-u} = \frac{1+\cos t}{1-\cos t} = \frac{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} = \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2$$

Luego $\int \sqrt{x^2-1}dx = \int \dfrac{u^2}{(1-u^2)^2}du = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{u}{1-u^2} - \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+u}{1-u} = \dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right) + C$

8.09

a) Cuando $F'(x) = f(x)$.

b) Llamando $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow x = t^2+1$ y $dx = 2tdt$

$$F(x) = \int x\sqrt{x-1}dx = \int (t^2+1)t\cdot 2tdt = \int (2t^4+2t^2)dt = \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + C$$

Como $F(1) = 0 \Rightarrow \dfrac{2}{5}\left(\sqrt{1-1}\right)^5 + \dfrac{2}{3}\left(\sqrt{1-1}\right)^3 + C = 0 \Rightarrow C = 0$ y la función es $F(x) = \dfrac{2}{5}\sqrt{x-1}(x-1)^2 + \dfrac{2}{3}\sqrt{x-1}(x-1)$.

8.10

a) $F'(x) = 2xe^x + x^2e^x$

$f(x) = x^2$ y $g(x) = e^x$ y $F(x) = x^2e^x$

b) $F'(x) = 2x\cos x - x^2 \operatorname{sen} x$

$f(x) = x^2$ y $g(x) = \cos x$ y $F(x) = x^2 \cos x$

c) $F'(x) = \frac{1}{x}\operatorname{sen} x + \ln x \cos x$

$f(x) = \ln x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $F(x) = \ln x \operatorname{sen} x$

d) $F'(x) = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$

$f(x) = e^x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $F(x) = e^x \operatorname{sen} x$

e) $F'(x) = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$

$f(x) = -e^x$ y $g(x) = \cos x$ y $F(x) = -e^x \cos x$

f) $F'(x) = 1 + \ln x = \frac{1}{x} \cdot x + \ln x \cdot 1$

$f(x) = \ln x$ y $g(x) = x$ y $F(x) = x \ln x$

8.11

Como $F'(x)$ debe ser igual a xe^x, derivó $F(x)$ y obtuvo:

$F'(x) = Ae^x + Axe^x + Be^x = xe^x$ para todo x.

Si $x = 0$ obtenemos $A + B = 0$ y si $x = 1$ obtenemos $2Ae + Be = e$ por lo que $A = 1$ y $B = -1$ y la primitiva buscada es $F(x) = xe^x - e^x$.

8.12

La pendiente de la tangente en el punto $(x, f(x))$ es $f'(x)$ por lo que $f'(x) = 3x^2 f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 3x^2$

Así pues $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 3x^2 dx$ .Luego $\ln|f(x)| = x^3 + C \Rightarrow f(x) = e^{x^3+C} = e^{x^3} \cdot D$

Como $f(0) = 1 \cdot D = 8 \Rightarrow D = 8$

La función buscada es $f(x) = 8e^{x^3}$.

8.13

Como $\int \frac{1}{(x+p)^2+q^2}dx = \int \frac{1}{q^2\left[\left(\frac{x+p}{q}\right)^2+1\right]}dx = \frac{1}{q}\int \frac{\frac{1}{q}}{\left[\left(\frac{x+p}{q}\right)^2+1\right]}dx$

Llamando $t = \frac{x+p}{q} \Rightarrow dt = \frac{1}{q}dx$ se tiene que:

$$\frac{1}{q}\int \frac{\frac{1}{q}}{\left[\left(\frac{x+p}{q}\right)^2+1\right]}dx = \frac{1}{q}\int \frac{dt}{t^2+1}dx = \frac{1}{q}\text{arctg}\,t + C = \frac{1}{q}\text{arctg}\left(\frac{x+p}{q}\right)+C\ .$$

8.14

Llamando $f(x) = \ln^n x$ y $g'(x) = 1$ se tiene que $f'(x) = \frac{n\ln^{n-1}x}{x}$ y $g(x) = x$.

Integrando por partes $\int \ln^n x dx = x\ln^n x - \int x\cdot\frac{n\ln^{n-1}x}{x}dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1}x dx$.

$\int \ln^3 x dx = x\ln^3 x - 3\int \ln^2 x dx = x\ln^3 x - 3\left(x\ln^2 x - 2\int \ln x dx\right) = x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6\left(x\ln x - \int dx\right) =$
$x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6x + C$

8.15

Hemos integrado por partes llamando $f(x) = f(x)$ y $g'(x) = \cos 2x$.

Como $g(x) = g(x) = \frac{1}{2}\text{sen}\,2x$ la integral quedaría:

$\int f(x)\cos 2x dx = \frac{1}{2}f(x)\text{sen}\,2x - \int \frac{1}{2}f'(x)\text{sen}\,2x dx$. Así pues, $\int \frac{1}{2}f'(x)\text{sen}\,2x dx = \int e^{2x}\text{sen}\,2x dx$ y, por tanto $f'(x) = 2e^{2x}$ por lo que $f(x) = e^{2x} + C$.

Como queremos que $f(0) = e^{2\cdot 0} + C = 1 + C = \frac{1}{2}e^2 \Rightarrow C = \frac{1}{2}e^2 - 1$ y la función buscada es $f(x) = e^{2x} + \frac{1}{2}e^2 - 1$.

8.16

No, no hay ningún error en el razonamiento, lo que ocurre es que esas dos funciones solo difieren en la constante $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y, por tanto, ambas son primitivas de la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

8.17

Si $g'(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, entonces $g(x) = -\cos x + \operatorname{sen} x$, por lo que $g^2(x) = 1 - \operatorname{sen}\ 2x$.

Así pues la integral $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{3 + \operatorname{sen} 2x} dx$, se puede escribir como $\int \frac{g'(x)\,dx}{4 - g^2(x)}$ que, con $g(x) = t$ y $g'(x)dx = dt$, se transforma en $\int \frac{dt}{4 - t^2}$. Descomponiendo en fracciones simples:

$\frac{1}{4-t^2} = \frac{A}{2+t} + \frac{B}{2-t} = \frac{A(2-t)+B(2+t)}{4-t^2}$ se tiene que $1 = A\,(2-t) + B\,(2+t)$ y haciendo $t = 2 \Rightarrow 1 = 4B \Rightarrow B = \frac{1}{4}$ y $t = -2 \Rightarrow 1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

Luego $\int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\ln|2+t| - \frac{1}{4}\ln|2-t| = \frac{1}{4}\ln\frac{|2+t|}{|2-t|}$

Así pues $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{3 + \operatorname{sen} 2x} dx = \frac{1}{4}\ln\frac{2 + \operatorname{sen} x - \cos x}{2 + \cos x - \operatorname{sen} x} + C$.

8.18

Si $e^x - 1 = t^2$ y $e^x dx = 2t dt$, se tiene que:

$$\int \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}\,dx = \int \frac{2t\,dt}{(t^2+4)t} = \int \frac{2\,dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2} = \operatorname{arctg}\frac{t}{2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{e^x-1}}{2} + C$$

8.19

$$F(x) = \int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{dx}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}dx = -\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x| + C$$

Como $F(2) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2+1} = 0$, queremos que:

$F(2) = -\frac{1}{2}\ln|1-2| + \frac{1}{2}\ln|1+2| + C = \frac{1}{2}\ln 3 + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}\ln 3$.

Luego $F(x) = \frac{1}{2}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\ln|1+x| - \frac{1}{2}\ln 3$

8.20

Si $\int f(x)\operatorname{sen} x dx = -f(x)\cos x + \int 3x^2 \cos x\,dx$ se tiene que $f'(x) = 3x^2$, por lo que $f(x) = x^3 + C$.

Como $f(1) = 2 \Rightarrow 2 = 1^3 + C \Rightarrow C = 1$, luego $f(x) = x^3 + 1$.

8.21

Gema: $u = \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \cos x\, dx \Rightarrow \int 2\operatorname{sen} x \cos x\, dx = \int 2u\, du = u^2 + C = \operatorname{sen}^2 x + C$

Fernando: $u = \cos x \Rightarrow du = -\operatorname{sen} x\, dx \Rightarrow \int 2\operatorname{sen} x \cos x\, dx = -\int 2u\, du = -u^2 + C = -\cos^2 x + C$

Iván: $2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x \Rightarrow \int 2\operatorname{sen} x \cos x\, dx = \int \operatorname{sen} 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

Las tres respuestas son correctas, pues difieren solo en una constante.

En efecto, $\operatorname{sen}^2 x = -\cos^2 x + 1$, $-\frac{1}{2}\cos 2x = -\cos^2 x + \frac{1}{2}$.

8.22

Se sabe que $e(t) = \int v(t)dt = \int (12t - 5)dt = 6t^2 - 5t + C$.

Como $e(0) = 10 \Rightarrow C = 10$ entonces $e(t) = 6t^2 - 5t + 10$.

La velocidad media es $v_m(0, 2) = \frac{e(2) - e(0)}{2 - 0} = 7$ m/s.

8.23

La tasa de crecimiento es la derivada de la función que mide la altura, luego $C(x) = \int 1 - \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = x + \frac{1}{x+1} + C$.

Como $5 = C(5) = 5 + \frac{1}{6} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{6}$.

Luego $C(x) = x + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{6} \Rightarrow C(0) = \frac{5}{6}$. Por tanto, al ser trasplantado medía $\frac{5}{6}$ **m.**

8.24

a) $\frac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2}$ y descomponiendo la fracción se tiene que $\frac{3x-2}{(x-1)^2} = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$.

Luego $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\, dx = \int (x+2)\, dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\, dx + \int \frac{3}{x-1}\, dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{x-1} + 3\ln|x-1| + C$.

b) Si se hace el cambio $t = x - 1$ y $dt = dx$ se tiene:

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\, dx = \int \frac{(t+1)^3}{t^2}\, dt = \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

Observa que $\frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} + 3x - 3 = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$.

8.25

a) Como $f'(x) = -3xf(x)$, entonces $-3x = \dfrac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f(x))'$. Así pues, $\int -3x\,dx = \int (\ln f(x))'\,dx$ y por tanto $-\dfrac{3}{2}x^2 + C = \ln f(x)$. Se tiene entonces que $f(x) = e^{\left(-\frac{3}{2}x^2 + C\right)} = e^{-\frac{3}{2}x^2} \cdot C'$ y como se sabe que $f(0) = 1$ se tiene que $C' = 1$. Luego la función buscada es $f(x) = e^{-\frac{3}{2}x^2}$.

b) $f'(x) = \dfrac{x}{f(x) + x^2 f(x)} = \dfrac{x}{f(x)(1+x^2)}$ y por tanto $\dfrac{x}{(1+x^2)} = f'(x)\cdot f(x) = \dfrac{1}{2}\left((f(x))^2\right)'$

Así pues, $\int \dfrac{x}{(1+x^2)}\,dx = \dfrac{1}{2}\int \left((f(x))^2\right)'dx \Rightarrow \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C = \dfrac{1}{2}(f(x))^2$

Luego puede ser $f(x) = \pm\sqrt{\ln(1+x^2) + C}$ y como $f(0) = -1$, entonces debe ser $f(x) = -\sqrt{\ln(1+x^2) + 1}$.

c) $f'(x) = f^2(x)(x^2-1) + x^2 - 1 = (f^2(x)+1)(x^2-1)$, luego $(x^2-1) = \dfrac{f'(x)}{(f^2(x)+1)} = (\operatorname{arctg}(f(x)))'$

Así pues, $\int (x^2-1)\,dx = \int (\operatorname{arctg}(f(x)))'\,dx$ y por tanto $\dfrac{1}{3}x^3 - x + C = \operatorname{arctg}(f(x)) \Rightarrow f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{3}x^3 - x + C\right)$

Como $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$. Luego la función buscada es $f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{3}x^3 - x\right)$.

8.26

Se pide encontrar el polinomio $P(x) = ax^2 + 1$, y tal que $\int \dfrac{ax^2+1}{x^3(x-1)^2}\,dx$ sea una función racional.

Si se descompone el integrando en fracciones simples, se obtiene:

$\dfrac{ax^2+1}{x^3(x-1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{D}{x-1} + \dfrac{E}{(x-1)^2}$ y para que $\int \dfrac{ax^2+1}{x^3(x-1)^2}\,dx$ sea una función racional, debería ocurrir que $A = 0$ y $D = 0$ por lo que la descomposición tomaría la forma:

$$\frac{ax^2+1}{x^3(x-1)^2} = \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{E}{(x-1)^2} = \frac{B(x-1)^2x + C(x-1)^2 + Ex^3}{x^3(x-1)^2}$$

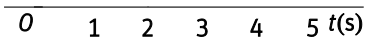
Así pues $ax^2 + 1 = (B+E)x^3 + x^2(-2B+C) + x(B-2C) + C$, con lo que, identificando coeficientes, se tiene que:

$C = 1$, $B - 2C = 0$, $-2B + C = a$ y $B + E = 0$, es decir, $C = 1$, $B = 2$, $a = -3$, $E = -2$.

Por tanto, el polinomio pedido es $P(x) = -3x^2 + 1$.

8.27

A la vista de la gráfica, se deduce la ecuación de la aceleración es $a(t) = 2t$. De este modo:



$v(t) = \int a(t)\,dt = \int 2t\,dt = t^2 + C$ Como $v(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v(t) = t^2$

$x(t) = \int v(t)\,dt = \int t^2\,dt = \dfrac{t^3}{3} + C$ Como $x(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x(t) = \dfrac{t^3}{3}$

8.28

a) $\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$ con n par mayor que 2.

$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = \int \operatorname{sen}^{n-1} x\ \operatorname{sen} x dx$, que llamando $f(x) = \operatorname{sen}^{n-1} x$ y $g'(x) = \operatorname{sen} x$, resulta ser:

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\cos^2 x dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x(1-\operatorname{sen}^2 x)dx =$$
$$= -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int (\operatorname{sen}^{n-2} x - \operatorname{sen}^n x)\,dx$$

Así pues, $\int \operatorname{sen}^n x dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x - (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x dx + (n-1)\int \operatorname{sen}^n x dx$, es decir:

$$n\int \operatorname{sen}^n x dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x dx \Rightarrow \int \operatorname{sen}^n x dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x dx .$$

b) $\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\ \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$ con n par mayor que 2.

De forma análoga resultaría la fórmula pedida, pero podría ser más cómodo si se escribe:

$\int \cos^n x dx = \int \operatorname{sen}^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx$ y, llamando $\frac{\pi}{2} - x = t$ y $-dx = dt$, quedaría $-\int \operatorname{sen}^n t\,dt$. Luego volviendo al apartado a:

$$-\left(-\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx\right) = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\ \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

Obsérvese que estas fórmulas son válidas aunque n no fuera par. La observación de n par tiene sentido pues si n fuera impar sería mucho más cómodo hacer la integral directamente sin acudir a ninguna fórmula de reducción.

c) $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx$

Se tiene que $\frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$,

por lo que $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}dx$.

Para resolver $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}dx$, sea $f(x) = x$, $g'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)^{1-n}\ \frac{1}{1-n}$.

De este modo: $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx - \left(\frac{1}{2(1-n)}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx\right)$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \frac{-1}{2-2n}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx - \frac{1}{2n-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx =$$
$$= \frac{-1}{2-2n}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \left(1 - \frac{1}{2n-2}\right)\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx = \frac{-1}{2-2n}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx$$

8.29

a) $\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\cos^3 x \operatorname{sen} x + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\,dx$

Finalmente, como $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ sustituyendo en la última integral, se tiene que:

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\cos^3 x \operatorname{sen} x + \frac{3}{8}\left(x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right) + C$$

b) $\int \operatorname{sen}^6 x\,dx = -\frac{1}{6}\operatorname{sen}^5 x \cos x + \frac{5}{6}\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$.

Ahora $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = -\frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x\,\cos x + \frac{3}{4}\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$

Finalmente, como $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos\ 2x)$, sustituyendo en la última integral, se tiene que:

$$\int \operatorname{sen}^6 x\,dx = -\frac{1}{6}\operatorname{sen}^5 x \cos x + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x \cos x + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)\right) =$$
$$= -\frac{1}{6}\operatorname{sen}^5 x \cos x - \frac{5}{24}\operatorname{sen}^3 x \cos x + \frac{5}{16}\left(x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right) + C$$

8.30

a)

f	g'
x^5	e^{-x}
$5x^4$	$-e^{-x}$
$20x^3$	e^{-x}
$60x^2$	$-e^{-x}$
$120x$	e^{-x}
120	$-e^{-x}$
0	e^{-x}

$$\int e^{-x}x^5\,dx = -x^5e^{-x} - 5x^4e^{-x} - 20x^3e^{-x} - 60x^2e^{-x} - 120xe^{-x} - 120e^{-x} + C = -e^{-x}(x^5 + 5x^4 + 20x^3 + 60x^2 + 120x + 120) + C$$

b) $\int e^{-x}x^5\,dx = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5)e^{-x}$

Derivando:

$$e^{-x}x^5 = (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4)e^{-x} - e^{-x}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{-x}x^5dx = -e^{-x}(a_5x^5 + (a_4 - 5a_5)x^4 + (a_3 - 4a_4)x^3 + (a_2 - 3a_3)x^2 + (a_1 - 2a_2)x + a_0 - a_1)$$

Así pues, identificando coeficientes, se tiene que:

$a_5 = -1,\ a_4 = -5,\ a_3 = -20,\ a_2 = -60,\ a_1 = -120,\ a_0 = -120$

$$\int e^{-x}x^5dx == -e^{-x}(x^5 + 5x^4 + +20x^3 + 60x^2 + 120x + 120) + C$$

8.31

a) Si $x = t^{12}$ y $dx = 12t^{11}dt$, se tiene $\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{x+\sqrt[4]{x}}dx = 12\int \frac{t^4+2}{t^{12}+t^3}t^{11}dt = 12\int \frac{t^{12}+2t^8}{1+t^9}dt$.

b) b) Si $\frac{x-1}{x-2} = t^6$, es decir, $x - 1 = t^6 x - 2t^6 \Rightarrow 2t^6 - 1 = x(t^6 - 1) \Rightarrow x = \frac{2t^6-1}{t^6-1}$ y, de este modo, se tiene entonces: $dx = \frac{12t^5(t^6-1)-6t^5(2t^6-1)}{(t^6-1)^2}dt = \frac{-6t^5}{(t^6-1)^2}dt$

c) Por tanto, $\int \frac{x+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}}}{x^2-2\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}}dx = -6\int \frac{\frac{2t^6-1}{t^6-1}+t^2}{\left(\frac{2t^6-1}{t^6-1}\right)^2-2t^3}\cdot\frac{t^5}{(t^6-1)^2}dt$, que es una integral cociente de polinomios.

8.32

a) Si $1-x = t^3$ y $-dx = 3t^2dt$, se tiene $\int x^{-2}\sqrt[3]{1-x}\,dx = -\int \frac{1}{(1-t^3)^2}3t^3\,dt$.

b) Haciendo $x = t^4$ y $dx = 4t^3dt$, se tiene $\int \sqrt[4]{x}(1-x)^2dx = \int t(1-t^4)^2 4t^3dt$.

c) $\int x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{5}{3}}dx = \int\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{5}{3}}x^2dx$ pues $2-\frac{5}{3} = \frac{1}{3}$

Así $\int x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{5}{3}}\,dx = \int x^2\sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{x}\right)^5}\,dx$ y haciendo $\frac{1-x}{x} = t^3$, es decir, $1-x = xt^3 \Rightarrow 1 = x(t^3+1) \Rightarrow x = \frac{1}{t^3+1}$ y $dx = \frac{-3t^2}{(t^3+1)^2}dt$, se transformaría en $-3\int \frac{1}{(t^3+1)^2}t^5\frac{t^2}{(t^3+1)^2}dt$, que es un cociente de polinomios.

8.33

En el ejercicio anterior, se ha visto que $\int x^p(1-x)^q\,dx$ con p y q racionales se podría poner como cociente de polinomios, al menos en estos tres casos: $p = -2, q = 2, p+q = \frac{1}{3}+\frac{5}{3} = 2$

En general, procediendo exactamente igual que antes, si $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ o $p+q \in \mathbb{Z}$, la integral dada se convierte en cociente de polinomios:

En *a*, si $q = \frac{m}{n}$, se toma $1-x = t^n$.

En *c*, si $p = \frac{m}{n}$, se toma $x = t^n$ en b se escribe $x^p(1-x)^q$ como $\left(\frac{1-x}{x}\right)^q x^{p+q}$, y si $q = \frac{m}{n}$, se toma $\frac{1-x}{x} = t^n$.

8.34

a) Bastaría ver que $\int \sqrt{1-x^3}dx$ no responde a ninguno de los casos anteriores.

En efecto, haciendo $x^3 = t$ y $3x^2dx = dt$, se tiene $\int \sqrt{1-x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{1-t}\,\frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}}$, es decir, $\frac{1}{3}\int t^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt$ en la que $p = -\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$, $q = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ y $p+q = -\frac{2}{3}+\frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \notin \mathbb{Z}$.

b) Haciendo $x^n = t$ y $nx^{n-1}dx = dt$, se tiene $\int (1-x^n)^{\frac{1}{m}}dx = \frac{1}{n}\int (1-t)^{\frac{1}{m}}t^{\frac{1-n}{n}}dt$.

Así pues, si m o $n = 1$, se está en uno de los dos casos: a o b.

Si $m = n = 2$, $\frac{1}{m}+\frac{1-n}{n} = 0$ y se está en el caso c.

Si $m \neq 1$, $n \neq 1$ ni $\frac{1}{m}$ ni $\frac{1-n}{n}$ son enteros y su suma $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1$ tampoco, si m y n no son ambos igual a 2.

c) Haciendo $\operatorname{sen} x = \sqrt{t}$ y $\cos x dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$, la integral dada se transforma en:

$\int \sqrt[4]{t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t}}dt = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt$ y ni p ni q son enteros ($p = -\frac{1}{4}$, $q = -\frac{1}{2}$), ni $p+q = -\frac{1}{4}-\frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$.

d) Escribiendo $\int \operatorname{sen}^p x \cos^q x\,dx = \int \operatorname{sen}^p x \cos^{q-1}\cos x\,dx$ y haciendo $senx = \sqrt{t}$ y $cosxdx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$

Como $\cos^{q-1}x = (1-\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{q-1}{2}}$ se tiene $\int t^{\frac{p}{2}}(1-t)^{\frac{q-1}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{p-1}{2}}(1-t)^{\frac{q-1}{2}}dt$

Si p o q es un entero impar, $\frac{p-1}{2}$ o $\frac{q-1}{2}$ es entero.

Si $p+q$ es un entero par, resulta que $\frac{p-1}{2} + \frac{q-1}{2} = \frac{p+q}{2} - 1$ sería entero.

Pero si ni p ni q es un entero impar, $\frac{p-1}{2}$ ni $\frac{q-1}{2}$ es entero y si $p+q$ no es un entero par $\frac{p+q}{2}-1 \notin \mathbb{Z}$.

8.34 · continuación

e) Haciendo $x^n = t$ y $nx^{n-1}dx = dt$, se tiene $\frac{1}{n}\int t^{\frac{1}{n}}(1+t)^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{1-n}{n}}dt = \frac{1}{n}\int t^{\frac{2}{n}-1}(1+t)^{-\frac{1}{2}}dt$

$q = -\frac{1}{2}$ no es entero.

Si $n = 1$ o 2, $\frac{2}{n} - 1$ es entero. Si $n = 4$, $\frac{2}{n} - 1 - \frac{1}{2}$ es entero.

Si $n \neq 1$, 2 o 4, $\frac{2}{n} - 1 \notin \mathbb{Z}$ y $\frac{2}{n} - 1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{n} - \frac{3}{2}$ que es entero solamente si $n = 4$.

Si $n = 1$, es $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$ y haciendo $1 + x = t^2$ y $dx = 2tdt$, se transforma en: $\int \frac{t^2-1}{t}2t\,dt = 2\int (t^2-1)\,dt = 2\left(\frac{\sqrt{(1+x)^3}}{3} - \sqrt{1+x}\right) + C$

Si $n = 2$, es $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ y haciendo $1 + x^2 = t$ y $2xdx = dt$, se transforma en: $\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{t} = \sqrt{1+x^2} + C$

Si $n = 4$, es $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx$ y haciendo $x^2 = t$ y $2xdx = dt$, se transforma en: $\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$

Poniendo ahora $t = \text{tg}u$ y $dt = \frac{1}{\cos^2 u}du$, resulta $\frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos u}du = \frac{1}{2}\int \frac{\cos u}{1-\text{sen}^2 u}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-y^2}dy$ con $y = \text{sen}u$ y $dy = \cos u du$.

Finalmente como, $\frac{1}{1-y^2} = \frac{A}{1+y} + \frac{B}{1-y} = \frac{A(1-y)+B(1+y)}{1-y^2}$, de la igualdad $1 = A(1-y) + B(1+y)$, se obtiene $A = B = \frac{1}{2}$ por lo que $\int \frac{1}{1-y^2}dy = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\text{sen}u}{1-\text{sen}u}$.

Si $t = \text{tg}u$ se tiene que $1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2 u}$, $\cos^2 u = \frac{1}{1-t^2}$, $\text{sen}\,u = \sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$$\frac{1+\text{sen}u}{1-\text{sen}u} = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}} = \frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}-t} = \left(\sqrt{1+t^2}+t\right)^2$$, por lo que $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\text{sen}u}{1-\text{sen}u} = \ln\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)$

Así pues, $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x^4}+x^2\right) + C$.

f) $\int \text{sen}^q x\,dx$

Poniendo $\int \text{sen}^q x\,dx = \int \text{sen}^{q-1}\text{sen}\,x\,dx = \int (\text{sen}^2 x)^{\frac{q-1}{2}}\text{sen}\,x dx$.

Haciendo $\cos x = \sqrt{t}$ y $-\text{sen}\,x dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$, se tiene $\int \text{sen}^q x\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-t)^{\frac{q-1}{2}}\cdot t^{-\frac{1}{2}}dt$.

Así pues, como $\int t^p(1-t)^q\,dt$ es elemental solo cuando p, q o $p+q$ son enteros, se tiene que esta integral sería elemental solo si $\frac{q-1}{2} \in \mathbb{Z}$ o $\frac{q-1}{2} - \frac{1}{2}$ sea entero, es decir, $\frac{q-1}{2} \in \mathbb{Z}$ o $\frac{q}{2} \in \mathbb{Z}$, es decir $q \in \mathbb{Z}$.

Nota: Obsérvese que, en cualquier caso, esta integral se reduce al apartado d, $\int \text{sen}^q x \cos^p x\,dx$ con $p = 0$ y allí se vio que era elemental cuando alguno era entero impar, en este caso q, o cuando la suma era entero par, en este caso q, es decir, $\int \text{sen}^q x\,dx$ es elemental solo si $q \in \mathbb{Z}$.

8.35

Racionalizando se tiene $f(x)=\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^2-\sqrt{x^2-1}}=x^2+x\sqrt{x^2-1}$.

$$\int\frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}dx=\int x^2\,dx+\int x\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{x^3}{3}+\int x\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\int(x^2-1)^{\frac{1}{2}}2x\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+C=$$
$$=\frac{1}{3}\left(x^3+\sqrt{(x^2-1)^3}\right)+C$$

8.36

Calculamos $\int f(x)\,dx=\dfrac{x^2}{2}-\int x\ln x\,dx$.

Llamando $u(x)=lnx$ y $v'(x)=x$, se tiene que $\int x\ln x\,dx=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\int\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2$

Así que $\int x(1-\ln x)\,dx=\dfrac{x^2}{2}-\left(\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{x^2}{4}\right)=\dfrac{3x^2}{4}-\dfrac{1}{2}x^2\ln x=\dfrac{1}{2}x^2\left(\dfrac{3}{2}-\ln x\right)+C$.

Como la curva pedida pasa por (1, 1) resulta que $1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}+C\Rightarrow C=\dfrac{1}{4}$ y la primitiva buscada es $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2\left(\dfrac{3}{2}-\ln x\right)+\dfrac{1}{4}$.

8.37

Para calcular $\int e^{2x}\operatorname{sen}x\,dx$, se construye la tabla:

f	g'
e^{2x}	$\operatorname{sen}x$
$2e^{2x}$	$-\cos x$
$4e^{2x}$	$-\operatorname{sen}x$

$\int e^{2x}\operatorname{sen}x\,dx=-e^{2x}\cos x+2e^{2x}\operatorname{sen}x-4\int e^{2x}\operatorname{sen}x\,dx$, por lo que $5\int e^{2x}\operatorname{sen}x\,dx=e^{2x}(-\cos x+2\operatorname{sen}x)$ de donde

$f(x)=\int e^{2x}\operatorname{sen}x\,dx=\dfrac{1}{5}e^{2x}(-\cos x+2\operatorname{sen}x)+C$

Como $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{5}e^{\pi}\cdot 2+C=1\Rightarrow C=1-\dfrac{2}{5}e^{\pi}$

Luego $f(x)=\dfrac{1}{5}e^{2x}(-\cos x+2\operatorname{sen}x)+1-\dfrac{2}{5}e^{\pi}$

8.38

Poniendo $x+1=t^2$ y $dx=2tdt$, se tiene que $\int\dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}dx=\int\dfrac{2t\,dt}{1+t}=\int\left(2-\dfrac{2}{1+t}\right)dt=2t-2\ln(1+t)$.

Deshaciendo el cambio, nos lleva a $\int\dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}dx=2\sqrt{x+1}-2\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)+C$.

8.39

Escribiendo la tabla, se tiene que:

f	g'
$\ln x$	x^2-2x
$\frac{1}{x}$	$\frac{x^3}{3}-x^2$

$$\int \ln x(x^2-2x)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\ln x-\int\frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}+C$$

8.40

Efectuando la división dada, tenemos que $f'(x)=x-\frac{x+1}{x^3-x^2}$ así que $f(x)=\frac{x^2}{2}-\int\frac{x+1}{x^2(x-1)}dx$.

Por el teorema de descomposición en fracciones simples, $\frac{x+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$ así que $Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2=x+1$ y haciendo:

$x=0\Rightarrow B=-1$

$x=1\Rightarrow C=2$

$x=-1\Rightarrow 2A-2B+C=0\Rightarrow A=-2$

$$\int\frac{x+1}{x^2(x+1)}dx=\int\frac{-2}{x}dx+\int\frac{-1}{x^2}dx+\int\frac{2}{x-1}dx=-2\ln|x|+\frac{1}{x}+2\ln|x-1|$$

Luego $f(x)=\frac{x^2}{2}+2\ln|x|-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|+C=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+C$

Como $f(2)=\ln 4$, tenemos que $\ln 4=2-\frac{1}{2}+2\ln 2+C\Rightarrow C=-\frac{3}{2}$ y $f(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{3}{2}$

8.41

$\int\frac{\text{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx=\int\frac{(1-\cos^2 x)\text{sen}\,x}{\sqrt{\cos x}}dx$. Poniendo $\cos x=t$ y $-\text{sen}\,x\,dx=dt$, se tiene que:

$$-\int\frac{(1-t^2)}{\sqrt{t}}dt=\int t^{\frac{3}{2}}dt-\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}$$

Deshaciendo el cambio nos lleva a $\int\frac{\text{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx=\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x}-2\sqrt{\cos x}+C$.

8.42

a) $\int\frac{2x}{x^2-5}dx=\ln|x^2-5|+C$ **b)** $\int\frac{2x}{x^2+5}dx=\ln(x^2+5)+C$

¿Por qué en la primera integral es preciso tomar el valor absoluto y en la segunda no?

Porque x^2-5 puede tomar valores negativos (por ejemplo si $x=0$) mientras que x^2+5 es siempre positivo.

8.43

Escribiendo la tabla:

f	g'
x^2	e^{2x}
$2x$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
2	$\frac{1}{4}e^{2x}$
0	$\frac{1}{8}e^{2x}$

$$\int x^2e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

8.44

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{9-(2x)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{2x}{3} + C$$

Como pasa por el origen, $F(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$F(1) = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{2}{3}$

La respuesta correcta es la D.

8.45

Integrando por ambas partes $\int f(x)f'(x)dx = \int 1dx$ se tiene que $\frac{1}{2}(f(x))^2 = x + C$

Como $f(8) = 4 \Rightarrow C = 0$ y $f(x) = \sqrt{2x}$

La respuesta correcta es la B.

8.46

$$\int \frac{5(x+1)}{2x^2+x-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{5x+5}{(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}dx$$

Aplicando el teorema de descomposición en fracciones simples:

$$\frac{5x+5}{(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{\left(x+\frac{3}{2}\right)} = \frac{A\left(x+\frac{3}{2}\right)+B(x-1)}{(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}$$ e igualando se tiene:

$5x+5 = A\left(x+\frac{3}{2}\right)+B(x-1)$ y haciendo:

$x=1 \Rightarrow 10 = \frac{5}{2}A \Rightarrow A = 4$

$x=-\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{5}{2} = -\frac{5}{2}B \Rightarrow B = 1$

$$F(x) = \int \frac{5(x+1)}{2x^2+x-3}dx = 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$$

La respuesta correcta es la B.

8.47

$F(x) = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \text{arctg}\,x + C$. Como $F(0) = 0 \Rightarrow F(x) = \text{arctg}\,$ **x.**

Si $F(1) = \frac{\pi}{4}$ entonces $F(1) = \text{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{cases} G(x) = \text{arctg}(\text{tg}\,x) \\ G'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow G(x)G'(x) = x$$

Las respuestas correctas son la A y B.

8.48

$$F(x) = \int 6\,\text{sen}\,x\cos x dx = 6\int \text{sen}\,x\cos x dx = 3\,\text{sen}^2 x dx + C$$

Aplicando la fórmula del ángulo mitad $\text{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ se llega a $F(x) = -\frac{3}{2}\cos 2x + C$.

Las respuestas correctas son la A y la C.

8.49

Con $v\left(-\frac{1}{2}\right)$ y $v(-1)$ se pueden hallar *a* y *b*. Por tanto el dato innecesario es 2.