2.º BACHILLERATO

Determinantes

Matemáticas Aplicadas
a las Ciencias Sociales II

Practica, razona y comprueba tus respuestas.

1 Cálculo de determinantes de orden 2 y 3

2 Propiedades de los determinantes

3 Menores, adjuntos y desarrollo

4 Determinantes de orden superior

5 Ecuaciones con determinantes

6 Rango y parámetros

7 Razonamiento y profundización

8 Autoevaluación

137 actividades · 8 bloques

TU RUTA DE TRABAJO

Índice

Ejercicios organizados por contenidos, con espacio para trabajar y soluciones al final.

1 Cálculo de determinantes de orden 2 y 3 3

2 Propiedades de los determinantes 10

3 Menores, adjuntos y desarrollo 16

4 Determinantes de orden superior 18

5 Ecuaciones con determinantes 25

6 Rango y parámetros 29

7 Razonamiento y profundización 39

8 Autoevaluación 45

Solucionario 47

Cómo usar el dosier
El código 2.03 identifica la tercera actividad del bloque 2. Busca ese mismo código en el solucionario. Justifica los procedimientos y comprueba los resultados en los enunciados.

BLOQUE 1

Cálculo de determinantes de orden 2 y 3

1.01 Resuelve el sistema y calcula el determinante de su matriz de coeficientes.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 29 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

1.02 Resuelve el sistema y calcula el determinante de su matriz de coeficientes.

$$\begin{cases} 5x - 3y = 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{cases}$$

1.03 Resuelve el sistema y calcula el determinante de su matriz de coeficientes.

$$\begin{cases} 4x + y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{cases}$$

1.04 Resuelve el sistema y calcula el determinante de su matriz de coeficientes.

$$\begin{cases} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{cases}$$

1.05 Resuelve el sistema y calcula el determinante de su matriz de coeficientes.

$$\begin{cases} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{cases}$$

1.06 Resuelve el sistema y calcula el determinante de su matriz de coeficientes.

$$\begin{cases} 3x + 11y = 128 \\ 8x - 7y = 46 \end{cases}$$

1.07 Calcula todos los productos de tres factores que contienen un elemento de cada fila y de cada columna de

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escribe también los productos para una matriz genérica de orden 3.

1.08 ¿Cuántos productos de cuatro factores, uno de cada fila y columna, hay en una matriz de orden 4? Generaliza para orden n.

1.09 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.10 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

1.11 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.12 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}.$$

1.13 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{bmatrix}.$$

1.14 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{bmatrix}.$$

1.15 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

1.16 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.17 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.18 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

1.19 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

1.20 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 8 \\ -9 & -4 \end{bmatrix}.$$

1.21 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.22 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.23 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.24 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

BLOQUE 2

Propiedades de los determinantes

2.01 Si $A = \begin{pmatrix} l & m \\ n & p \end{pmatrix}$ y $\det A = -13$, calcula: a) $\begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix}$; b) $\det(6A)$; c) $\begin{vmatrix} l & 4m \\ n & 4p \end{vmatrix}$; d) $\det(A^{-1})$.

2.02 Calcula el determinante y justifica el resultado sin desarrollarlo.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.03 Calcula el determinante y justifica el resultado sin desarrollarlo.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{bmatrix}.$$

2.04 Calcula el determinante y justifica el resultado sin desarrollarlo.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 71 \end{bmatrix}.$$

2.05 Calcula el determinante y justifica el resultado sin desarrollarlo.

$$A = \begin{bmatrix} 45 & 11 & 10 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.06 Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcula sin desarrollar:

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$.

2.07 Sea $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 7$. Calcula y justifica: a) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 3a & b \\ 3c & d \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a & b+2a \\ c & d+2c \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix}$.

2.08 Indica qué igualdades son correctas y justifica la propiedad utilizada.

a) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$.

d) $\begin{vmatrix} a-1 & a \\ b+2 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & a \\ 2 & b \end{vmatrix}$.

e) $\begin{vmatrix} 2a & a-b \\ 2b & b \end{vmatrix} = 2b\begin{vmatrix} a & a-b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2.09 Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, calcula:

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix}$.

En e), $m \neq 0$.

2.10 Completa las igualdades usando la linealidad del determinante.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & 7 \\ \cdots & -3 \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$.

2.11 Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula sin desarrollar $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ \frac{x}{2} & \frac{y}{2} & \frac{z}{2} \end{vmatrix}$.

2.12 Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula sin desarrollar $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2.13 Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula sin desarrollar $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -a+c & b-c & c \\ -x+z & y-z & z \end{vmatrix}$.

2.14 Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula sin desarrollar $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$.

2.15 Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula sin desarrollar $\begin{vmatrix} x & y & z \\ -a+x & -b+y & -c+z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

2.16 Calcula el determinante y justifica el resultado sin desarrollarlo.

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 25 & 40 \\ \frac{2}{5} & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.17 Calcula el determinante y justifica el resultado sin desarrollarlo.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{bmatrix}.$$

2.18 Calcula el determinante y justifica el resultado sin desarrollarlo.

$$A = \begin{bmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{bmatrix}.$$

2.19 Calcula el determinante y justifica el resultado sin desarrollarlo.

$$A = \begin{bmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{bmatrix}.$$

BLOQUE 3

Menores, adjuntos y desarrollo

3.01 Halla dos menores de orden 2 y otros dos de orden 3 de esta matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

3.02 Calcula los menores complementarios y adjuntos de a_{12}, a_{33} y a_{43}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

3.03 Calcula el determinante por Sarrus, por cada fila y por cada columna. Comprueba los siete resultados.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

3.04 Para esta matriz, calcula: a) la suma de los elementos de la primera fila por los adjuntos correspondientes de la tercera; b) la suma de los elementos de la tercera columna por los adjuntos de la segunda. Justifica los resultados.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

BLOQUE 4

Determinantes de orden superior

4.01 Calcula el determinante y justifica el resultado sin desarrollarlo.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 27 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & 36 \\ 0 & 6 & 2 & 54 \end{bmatrix}.$$

4.02 Calcula el determinante y justifica el resultado sin desarrollarlo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 612 & 704 & 410 & 103 \\ 6 & 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.03 Calcula el determinante y justifica el resultado sin desarrollarlo.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.04 Calcula el determinante y justifica el resultado sin desarrollarlo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.05 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

4.06 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4.07 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.08 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.09 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 6 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.10 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 27 \\ 1 & 5 & 3 & 12 \\ 5 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

4.11 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4.12 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.13 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.14 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.15 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

4.16 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.17 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4.18 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{bmatrix}.$$

4.19 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{bmatrix}.$$

4.20 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{bmatrix}.$$

BLOQUE 5

Ecuaciones con determinantes

5.01 Resuelve la ecuación en los números reales.

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1-x \\ 1-x & x+1 \end{vmatrix} = 12.$$

5.02 Resuelve la ecuación en los números reales.

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x \end{vmatrix} = 6.$$

5.03 Resuelve la ecuación en los números reales.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 0.$$

5.04 Resuelve la ecuación en los números reales.

$$\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

5.05 Resuelve la ecuación en los números reales.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 0.$$

5.06 Resuelve la ecuación en los números reales.

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

5.07 Resuelve la ecuación en los números reales.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0.$$

5.08 Resuelve según los parámetros a, b, c: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0.$

5.09 Resuelve la ecuación en los números reales.

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0.$$

5.10 Resuelve la ecuación en los números reales.

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0.$$

BLOQUE 6

Rango y parámetros

6.01 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

6.02 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{bmatrix}.$$

6.03 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.04 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

6.05 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.06 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

6.07 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.08 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.09 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

Discute según a.

6.10 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Discute según a.

6.11 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Discute según a.

6.12 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

Discute según a.

6.13 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Discute según a.

6.14 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

Discute según a.

6.15 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{bmatrix}.$$

Discute según a.

6.16 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} a-2 & 1-2a & -1 \\ a & a & 2a \end{bmatrix}.$$

Discute según a.

6.17 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Discute según k.

6.18 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Discute según k.

6.19 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} m & m-1 & m\,(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{bmatrix}.$$

Discute según m.

6.20 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}.$$

Discute según k.

6.21 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{bmatrix}.$$

Discute según t.

6.22 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -t & 6 & 3-t & 9-t \end{bmatrix}.$$

Discute según t.

6.23 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & -1 \\ 1 & a+3 & 4-a & 0 \\ 1 & a+3 & a^2+2 & a+2 \end{bmatrix}.$$

Discute según a.

6.24 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Discute según t.

6.25 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{bmatrix}.$$

Discute según t.

6.26 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & t+2 \\ t+2 & 0 & t \end{bmatrix}.$$

Discute según t.

6.27 Si a, b, c son no nulos, calcula el rango y el número de columnas linealmente independientes.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{bmatrix}.$$

6.28 Estudia el rango según a, b, c.

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{bmatrix}.$$

6.29 Estudia el rango según α de $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

BLOQUE 7

Razonamiento y profundización

7.01 Justifica el determinante de la matriz identidad de orden n y el de una matriz triangular de orden n.

7.02 Prueba que una matriz de orden 3 y su traspuesta tienen el mismo determinante.

7.03 ¿Cuál puede formar parte del desarrollo de un determinante de orden 4? a) $a_{12}a_{23}a_{31}a_{42}$. b) $a_{14}a_{41}a_{23}a_{32}$.

7.04 Comprueba que $\det(AB) = \det A \det B$ para dos matrices diagonales de orden 3.

7.05 Justifica que $\det(A^{-1}) = 1/\det A$ cuando existe la inversa.

7.06 Para una matriz de orden 4, calcula $a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}+a_{24}A_{14}$, donde A_{ij} son adjuntos.

7.07 Dos matrices A, B tienen 3 filas y 12 columnas. Solo se conocen, respectivamente, estos tres vectores columna:

$$A_0=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 0\\ -7 & 5 & -2\end{bmatrix},\qquad B_0=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 0 & 1\\ 5 & 4 & 0\end{bmatrix}.$$

¿Qué puede afirmarse de sus rangos? ¿Y del rango de la matriz C que reúne las 24 columnas?

7.08 Una matriz $A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ m & n & p\end{pmatrix}$ tiene rango 2. ¿Cuál es el rango de $B=\begin{pmatrix}a & b & c\\ m & n & p\\ m-a & n-b & p-c\end{pmatrix}$?

7.09 Para matrices A, B de orden 4 con $\det A=3$ y $\det B=2$, calcula $\det(A^{-1})$, $\det(B^TA)$ y $\det((AB^{-1})^T)$.

7.10 Si $\det A=-1$ y $\det(2A)=-8$, ¿cuál es el orden de A?

7.11 Si $\det(c_1, c_2, c_3) = 5$, calcula: a) $\det(c_1 - 3c_2, c_2, c_3)$; b) $\det(c_1, c_2, 2c_3)$; c) $\det(c_1, c_1 - c_2, c_3)$.

7.12 Define el rango y decide si son ciertas: I) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(-A)$; II) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^T$; III) $\operatorname{rg}(A + B) = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$; IV) $\operatorname{rg}(A^2) = (\operatorname{rg} A)^2$; V) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^{-1}$ si existe la inversa.

7.13 Si $A^2 = A$, demuestra que $\det A$ es 0 o 1.

7.14 Escribe matrices A, B de orden 2 tales que: a) $\det(A + B) \neq \det A + \det B$; b) $\det(A + B) = \det A + \det B$.

7.15 Demuestra sin desarrollar: $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$.

7.16 Demuestra sin desarrollar: $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$.

7.17 Prueba la identidad de Vandermonde: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

7.18 Determina todas las matrices de orden 2 con elementos enteros, determinante -1 e inversa igual a su traspuesta.

7.19 Escribe una matriz de orden 3 con exactamente tres elementos nulos y ningún menor de orden 2 nulo.

7.20 Calcula el determinante.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

7.21 Calcula el determinante.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

7.22 Demuestra $\det(AB) = \det A \det B$ para matrices de orden 2 utilizando la linealidad en las columnas. Identifica los términos que se anulan.

7.23 Calcula la matriz C de adjuntos de A, comprueba $AC^T = (\det A)I$ y explica la relación con la inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7.24 Sea A de orden 3 con determinante no nulo y C su matriz de adjuntos. Relaciona $\det C$ y $\det A$.

7.25 Generaliza la relación entre el determinante de una matriz de orden $n \geq 2$ y el de su matriz de adjuntos C.

BLOQUE 8

Autoevaluación

8.01 Calcula el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{bmatrix}.$$

8.02 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Discute según a.

8.03 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a+1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a+1 & a \end{bmatrix}.$$

Discute según a.

8.04 Calcula el determinante y justifica el resultado sin desarrollarlo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a+1 & a+2 & a+3 & a+4 \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

8.05 Si las columnas c_1, c_2, c_3 de A verifican $\det A = 6$, calcula: a) $\det A^3$; b) $\det A^{-1}$; c) $\det(2A)$; d) $\det(3c_1 - c_3, 2c_3, c_2)$.

8.06 Para matrices cuadradas A, B del mismo orden, ¿se cumple $\det(AB) = \det(BA)$? Justifica y da un ejemplo.

Solucionario

Los códigos corresponden a las actividades del dosier.

1 · Cálculo de determinantes de orden 2 y 3

1.01 Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = (4,\ 7)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

El determinante de los coeficientes es -11.

1.02 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y) = \left(\frac{3\lambda + 8}{5},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El determinante de los coeficientes es 0.

1.03 Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = (5,\ -3)\,.$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

El determinante de los coeficientes es 3.

1.04 Sistema incompatible: no tiene solución. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El determinante de los coeficientes es 0.

1.05 Sistema compatible indeterminado.

$$(x, y) = \left(-\frac{4\lambda - 1}{3},\ \lambda\right).$$

Los parámetros son números reales. Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El determinante de los coeficientes es 0.

1.06 Sistema compatible determinado.

$$(x, y) = \left(\frac{1402}{109},\ \frac{886}{109}\right).$$

Una matriz ampliada reducida equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1402}{109} \\ 0 & 1 & \frac{886}{109} \end{bmatrix}.$$

El determinante de los coeficientes es -109.

1.07 Hay $3! = 6$ productos: 30, 336, 18, 288, 42, 60. Para una matriz genérica son $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$ y $a_{13}a_{22}a_{31}$.

1.08 Hay $4! = 24$. Para orden n, hay $n!$: elegida una columna en la primera fila, quedan $n-1$ para la segunda, y así sucesivamente.

1.09

$$\det A = 2.$$

Desarrollo por la primera fila: $(26) + (-24) = 2$.

1.10

$$\det A = -50.$$

Desarrollo por la primera fila: $(-26) + (-24) = -50$.

1.11

$$\det A = 0.$$

Desarrollo por la primera fila: $(0) + (0) = 0$.

1.12

$$\det A = 0.$$

Desarrollo por la primera fila: $(-14) + (14) = 0$.

1.13

$$\det A = 0.$$

Desarrollo por la primera fila: $(231) + (-231) = 0$.

1.14

$$\det A = 0.$$

Desarrollo por la primera fila: $(420) + (-420) = 0$.

1.15

$$\det A = -114.$$

Desarrollo por la primera fila: $(-60) + (54) + (-108) = -114$.

1.16

$$\det A = 3.$$

Desarrollo por la primera fila: $(9) + (0) + (-6) = 3$.

1.17

$$\det A = 14.$$

Desarrollo por la primera fila: $(0) + (8) + (6) = 14$.

1.18

$$\det A = 1000.$$

Desarrollo por la primera fila: $(1000) + (0) + (0) = 1000$.

1.19

$$\det A = 1.$$

Desarrollo por la primera fila: $(-14) + (15) = 1$.

1.20

$$\det A = 12.$$

Desarrollo por la primera fila: $(-60) + (72) = 12$.

1.21

$$\det A = -25.$$

Desarrollo por la primera fila: $(-49) + (24) + (0) = -25$.

1.22

$$\det A = 10.$$

Desarrollo por la primera fila: $(0) + (18) + (-8) = 10$.

1.23

$$\det A = 14.$$

Desarrollo por la primera fila: $(0) + (8) + (6) = 14$.

1.24

$$\det A = 2.$$

Desarrollo por la primera fila: $(1) + (0) + (1) = 2$.

2 · Propiedades de los determinantes

2.01 a) 13, por intercambiar filas. b) $6^2(-13) = -468$. c) $4(-13) = -52$. d) $1/(-13) = -1/13$.

2.02

$$\det A = 0.$$

Desarrollo por la primera fila: $(0) + (0) + (0) = 0$. La segunda fila es nula.

2.03

$$\det A = 0.$$

Desarrollo por la primera fila: $(-496) + (20) + (476) = 0$. $F_3 = -2F_1$.

2.04

$$\det A = 0.$$

Desarrollo por la primera fila: $(-133) + (188) + (-55) = 0$. $F_3 = F_1 + 10F_2$.

2.05

$$\det A = 0.$$

Desarrollo por la primera fila: $(-45) + (55) + (-10) = 0$. $F_1 = 10F_2 + F_3$.

2.06 a) 3: se multiplica una fila por 3. b) 1: se multiplica una fila por 5 y otra por $1/5$. c) 1: sumar múltiplos de otra fila no cambia el determinante.

2.07 a) 7, por trasposición. b) -7, por intercambio de columnas. c) 21, por multiplicar una columna por 3. d) 7, por sumar un múltiplo de otra columna. e) 28, porque se multiplican las dos filas por 2.

2.08 a) Correcta: columnas iguales. b) Correcta: se ha multiplicado cada fila por 2; ambos miembros valen 8. c) Incorrecta: $8 \neq 4$. d) Correcta: $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$. e) Correcta: se extrae $2b$ de la segunda fila; ambos miembros valen $2b^2$, también si $b = 0$.

2.09 a) -5: trasposición y suma de filas. b) 5: trasposición e intercambio. c) -15: intercambio y factores $3, -1$. d) 10: intercambio y factor 2. e) -5: factores $1/m, m$. f) 0: columnas proporcionales.

2.10 a) Faltan 1 y 2 en la primera columna: $(3, 5) = (2, 3) + (1, 2)$. b) Faltan -10 y 4 en la primera fila: $(-4, 3) = (6, -1) + (-10, 4)$.

2.11 Las operaciones de filas o columnas dan un factor $\frac{1}{2}$ respecto al determinante inicial. El valor es $\frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}$.

2.12 Las operaciones de filas o columnas dan un factor 1 respecto al determinante inicial. El valor es $1 \cdot 5 = 5$.

2.13 Las operaciones de filas o columnas dan un factor -1 respecto al determinante inicial. El valor es $-1 \cdot 5 = -5$.

2.14 Las operaciones de filas o columnas dan un factor 2 respecto al determinante inicial. El valor es $2 \cdot 5 = 10$.

2.15 Las operaciones de filas o columnas dan un factor 3 respecto al determinante inicial. El valor es $3 \cdot 5 = 15$.

2.16

$$\det A = 0.$$

Desarrollo por la primera fila: $(-432) + (0) + (432) = 0$. $C_3 = -5C_1$.

2.17

$$\det A = 0.$$

El resultado se expresa factorizado. $F_2 + F_3 = \frac{a+b+c}{5} F_1$.

2.18

$$\det A = 0.$$

El resultado se expresa factorizado. $F_1 - 2F_2 + F_3 = 0$.

2.19

$$\det A = 0.$$

El resultado se expresa factorizado. Para $xyz \neq 0$, $F_1 = xyzF_3$.

3 · Menores, adjuntos y desarrollo

3.01 Por ejemplo, tomando los índices de filas y columnas indicados:

Filas [1, 2], columnas [1, 2]: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$

Filas [1, 3], columnas [1, 3]: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 9.$

Filas [1, 2, 3], columnas [1, 2, 3]: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 68.$

Filas [2, 3, 4], columnas [2, 3, 4]: $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 25.$

3.02 El adjunto es $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

$M_{12} = -2, \quad A_{12} = 2.$

$M_{33} = 108, \quad A_{33} = 108.$

$M_{43} = 16, \quad A_{43} = -16.$

3.03 Por Sarrus: $3 \cdot 2 \cdot 4 + 7 \cdot 6 \cdot 9 + (-1)(-5)8 - (-1)2 \cdot 9 - 7(-5)4 - 3 \cdot 6 \cdot 8 = 456$. La matriz de adjuntos es

$$C = \begin{bmatrix} -40 & 74 & -58 \\ -36 & 21 & 39 \\ 44 & -13 & 41 \end{bmatrix}.$$

Fila 1: $(-120) + (518) + (58) = 456.$

Fila 2: $(180) + (42) + (234) = 456.$

Fila 3: $(396) + (-104) + (164) = 456.$

Columna 1: $(-120) + (180) + (396) = 456.$

Columna 2: $(518) + (42) + (-104) = 456.$

Columna 3: $(58) + (234) + (164) = 456.$

3.04 a) $3 \cdot 44 + 7 \cdot (-13) + (-1) \cdot 41 = 0.$ b) $(-1) \cdot 74 + 6 \cdot 21 + 4 \cdot (-13) = 0.$ Cada suma es el desarrollo de un determinante con dos filas o dos columnas iguales.

4 · Determinantes de orden superior

4.01

$$\det A = 0.$$

Desarrollo por la primera fila: $(0) + (1566) + (0) + (-1566) = 0$. $C_4 = 9C_2$.

4.02

$$\det A = 0.$$

Desarrollo por la primera fila: $(-170) + (0) + (170) + (0) = 0$. $F_3 = 10F_1 + F_2 + 100F_4$.

4.03

$$\det A = -96.$$

Desarrollo por la primera fila: $(-96) + (0) + (0) + (0) = -96$. Solo contribuye la permutación $(1, 3, 4, 2)$, que tiene signo positivo: $4 \cdot 8 \cdot 1 \cdot (-3) = -96$.

4.04

$$\det A = -1.$$

Desarrollo por la primera fila: $(-1) + (0) + (0) + (0) = -1$. Es triangular: se multiplican los elementos diagonales.

4.05

$$\det A = -2030.$$

Desarrollo por la primera fila: $(-1421) + (0) + (-609) + (0) = -2030$.

4.06

$$\det A = 0.$$

Desarrollo por la primera fila: $(66) + (22) + (-22) + (-66) = 0$.

4.07

$$\det A = -28.$$

Desarrollo por la primera fila: $(0) + (0) + (-36) + (8) = -28$.

4.08

$$\det A = 83.$$

Desarrollo por la primera fila: $(48) + (15) + (20) + (0) = 83$.

4.09

$$\det A = 290.$$

Desarrollo por la primera fila: $(-744) + (108) + (882) + (44) = 290$.

4.10

$$\det A = 0.$$

Desarrollo por la primera fila: $(-297) + (495) + (-396) + (198) = 0$.

4.11

$$\det A = -16.$$

Desarrollo por la primera fila: $(12) + (-56) + (0) + (60) + (-32) = -16$.

4.12

$$\det A = 11.$$

Desarrollo por la primera fila: $(0) + (0) + (39) + (-28) = 11$.

4.13

$$\det A = -24.$$

Desarrollo por la primera fila: $(0) + (0) + (-24) + (0) = -24$.

4.14

$$\det A = 0.$$

Desarrollo por la primera fila: $(14) + (-16) + (15) + (-13) = 0$.

4.15

$$\det A = -72.$$

Desarrollo por la primera fila: $(-43) + (0) + (-21) + (-8) = -72$.

4.16

$$\det A = -18.$$

Desarrollo por la primera fila: $(-9) + (-11) + (2) + (0) = -18$.

4.17

$$\det A = 0.$$

Desarrollo por la primera fila: $(21) + (-42) + (-63) + (84) = 0$.

4.18

$$\det A = 938.$$

Desarrollo por la primera fila: $(-175) + (882) + (266) + (-35) = 938$.

4.19

$$\det A = 4a + 1.$$

El resultado se expresa factorizado.

4.20

$$\det A = a\,(a-2)^3.$$

El resultado se expresa factorizado.

5 · Ecuaciones con determinantes

5.01 La ecuación equivale a $4\,(x-3)=0$. Por tanto, el conjunto de soluciones es $\{3\}$.

5.02 La ecuación equivale a $3\,(x-2)\,(x+1)=0$. Por tanto, el conjunto de soluciones es $\{-1,2\}$.

5.03 La ecuación equivale a $-7\,(a-1)=0$. Por tanto, el conjunto de soluciones es $\{1\}$.

5.04 La ecuación equivale a $(a-1)\,(a+3)=0$. Por tanto, el conjunto de soluciones es $\{-3,1\}$.

5.05 La ecuación equivale a $4\,(a^2-3)=0$. Por tanto, el conjunto de soluciones es $\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$.

5.06 La ecuación equivale a $-a\,(a-2)\,(a+3)=0$. Por tanto, el conjunto de soluciones es $\{-3,0,2\}$.

5.07 La ecuación equivale a $(x-1)\,(x+1)\,(x^2+1)=0$. Por tanto, el conjunto de soluciones es $\{-1,1\}$.

5.08 Restando la primera fila a las otras dos, queda $a(x-b)(x-c)=0$. Si $a=0$, cualquier $x\in\mathbb{R}$ es solución. Si $a\neq 0$, $x=b$ o $x=c$ (una única solución si $b=c$).

5.09 La ecuación equivale a $x^2\,(x-2)\,(x+2)=0$. Por tanto, el conjunto de soluciones es $\{-2,0,2\}$.

5.10 La ecuación equivale a $(x-1)\,(x+1)\,(x^2-x+1)=0$. Por tanto, el conjunto de soluciones es $\{-1,1\}$.

6 · Rango y parámetros

6.01 Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.02 Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.03 Rango 4. Se pueden elegir 4 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.04 Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.05 Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.06 Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

6.07 Rango 4. Se pueden elegir 4 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.08 Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.09 Si $a \notin \{2\}$: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.
Si $a = 2$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.

6.10 Si $a \notin \{0, \frac{1}{2}\}$: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.
Si $a = 0$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.
Si $a = \frac{1}{2}$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.

6.11 Si $a \notin \{-8, 1\}$: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.
Si $a = -8$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.
Si $a = 1$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.

6.12 Si $a \notin \{-1, 1\}$: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.
Si $a = -1$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.
Si $a = 1$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.

6.13 Si $a \notin \{2\}$: Rango 4. Se pueden elegir 4 columnas linealmente independientes.
Si $a = 2$: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.

6.14 Si $a \notin \{4\}$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.
Si $a = 4$: Rango 1. Se pueden elegir 1 columnas linealmente independientes.

6.15 Si $a \notin \{1\}$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.
Si $a = 1$: Rango 1. Se pueden elegir 1 columnas linealmente independientes.

6.16 Si $a \notin \{0\}$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.
Si $a = 0$: Rango 1. Se pueden elegir 1 columnas linealmente independientes.

6.17 Si $k \notin \{0\}$: Rango 4. Se pueden elegir 4 columnas linealmente independientes.
Si $k = 0$: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.

6.18 Para todos los valores reales del parámetro: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.

6.19 Si $m \notin \{0, 2\}$: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.
Si $m = 0$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.
Si $m = 2$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.

6.20 Si $k \notin \{-1\}$: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.
Si $k = -1$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.

6.21 Si $t \notin \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.
Si $t = -\sqrt{2}$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.
Si $t = 0$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.
Si $t = \sqrt{2}$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.

6.22 Si $t \notin \{9\}$: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.
Si $t = 9$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.

6.23 Si $a \notin \{-2\}$: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.
Si $a = -2$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.

6.24 Si $t \notin \{2\}$: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.
Si $t = 2$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.

6.25 Si $t \notin \{0, 1, 2\}$: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.
Si $t = 0$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.
Si $t = 1$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.
Si $t = 2$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.

6.26 Si $t \notin \{2\}$: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.
Si $t = 2$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.

6.27 $F_3 = F_1 + F_2$, luego el rango es menor que 3. El menor de filas y columnas 1,2 vale $-3ab \neq 0$, por lo que el rango es 2 y pueden elegirse dos columnas independientes.

6.28 Como $F_2 + F_3 = \frac{a+b+c}{5} F_1$, el rango no supera 2. Si $a = b = c$, todas las filas son proporcionales y el rango es 1. En otro caso, alguna diferencia $b - a$, $c - a$ o $c - b$ es no nula y existe un menor de orden 2 no nulo: el rango es 2.

6.29 $\det A = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$. Por tanto, el rango es 3 para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

7 · Razonamiento y profundización

7.01 $\det I_n = 1$. En una matriz triangular, $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$. En el desarrollo por permutaciones, todos los términos salvo el diagonal contienen un cero; el término diagonal tiene signo positivo.

7.02 Por Sarrus, $\det A = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$. Al intercambiar los índices de fila y columna aparecen exactamente los mismos productos con los mismos signos, así que $\det A^T = \det A$.

7.03 a) No: aparece dos veces la columna 2 y ninguna vez la 4. b) Sí: aparecen exactamente una vez cada fila y cada columna. La permutación $(4,3,2,1)$ es par, por lo que su signo es positivo.

7.04 Si $A = \text{diag}(a_1,a_2,a_3)$ y $B = \text{diag}(b_1,b_2,b_3)$, entonces $AB = \text{diag}(a_1b_1,a_2b_2,a_3b_3)$ y $\det(AB) = (a_1a_2a_3)(b_1b_2b_3) = \det A \det B$.

7.05 $AA^{-1} = I$ implica $\det A \det(A^{-1}) = 1$. Como $\det A \neq 0$, se puede dividir y obtener $\det(A^{-1}) = 1/\det A$.

7.06 El resultado es 0. Es el desarrollo por la primera fila de la matriz obtenida al sustituir la primera fila por la segunda, que tiene dos filas iguales.

7.07 $\text{rg}(A_0) = 2$, por lo que $\text{rg}(A)$ puede ser 2 o 3, según las columnas restantes. $\det B_0 = 23 \neq 0$, de modo que $\text{rg}(B) = 3$. Como C contiene esas tres columnas independientes y tiene tres filas, $\text{rg}(C) = 3$.

7.08 El rango es 2: las primeras dos filas son independientes y la tercera es $F_2 - F_1$, de modo que no aumenta el rango.

7.09 $\det(A^{-1}) = 1/3$; $\det(B^TA) = \det B \det A = 6$; $\det((AB^{-1})^T) = \det A/\det B = 3/2$.

7.10 Para orden n, $\det(2A) = 2^n \det A$. Así, $-8 = -2^n$, luego $2^n = 8$ y $n = 3$.

7.11 a) 5: sumar múltiplos de otra columna no altera el determinante. b) 10: linealidad en la tercera columna. c) -5: al separar la segunda columna, el término con dos columnas iguales es cero y queda el opuesto del original.

7.12 El rango es el máximo número de filas o columnas linealmente independientes, equivalente al máximo orden de un menor no nulo. I) Cierta: cambiar signos no altera la independencia. II) Cierta: coinciden los rangos por filas y columnas. III) Falsa: $A = I_2$, $B = -I_2$ dan $0 \neq 4$. IV) Falsa: $A = I_2$ da $2 \neq 4$. V) Cierta: ambas matrices invertibles tienen rango máximo.

7.13 Tomando determinantes, $(\det A)^2 = \det A$. Por tanto, $\det A(\det A - 1) = 0$, lo que implica $\det A \in \{0,1\}$.

7.14 a) $A = B = I_2$: $\det(2I_2) = 4 \neq 2$. b) $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: ambos miembros valen 0.

7.15 Aplica $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ y $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$, y extrae $a-b$ de ambas columnas. Resulta $(a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b & b^2 \\ 2 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Después, $C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2$ deja una matriz triangular con diagonal $a-b, 1, 1$, de modo que el resultado es $(a-b)^3$.

7.16 Si $abc \neq 0$, multiplica las filas del determinante derecho por a, b, c, respectivamente. La primera columna queda constante abc y las restantes son $(a^2, b^2, c^2)^T$ y $(a^3, b^3, c^3)^T$. Extraer abc de la primera columna y cancelar los factores prueba la igualdad. Como ambos miembros son polinomios, la identidad también se cumple cuando algún parámetro es cero, por continuidad.

7.17 Resta C_1 a C_2 y C_3 y extrae $b-a$ y $c-a$ de las columnas respectivas. Queda $(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & a+b & a+c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

7.18 $AA^T = I$ obliga a que las filas enteras sean vectores unitarios perpendiculares. Por tanto, son matrices de permutación con signos. Las cuatro con determinante -1 son $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

7.19 Una posibilidad es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sus nueve menores de orden 2 son -1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, -1. Todos son no nulos.

7.20

$$\det A = 2.$$

Desarrollo por la primera fila: $(1) + (1) + (0) + (0) + (0) = 2$.

7.21

$$\det A = 8.$$

Desarrollo por la primera fila: $(5) + (3) + (0) + (0) + (0) = 8$.

7.22 Sean u, v las columnas de A. Las columnas de AB son $b_{11}u + b_{21}v$ y $b_{12}u + b_{22}v$. La linealidad da cuatro términos: $b_{11}b_{12}\det(u,u) + b_{11}b_{22}\det(u,v) + b_{21}b_{12}\det(v,u) + b_{21}b_{22}\det(v,v)$. El primero y el cuarto se anulan. Como $\det(v,u) = -\det(u,v)$, queda $(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})\det A = \det B \det A$.

7.23

$$C = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -4 & -8 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$AC^T = \begin{bmatrix} -13 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} = (\det A)I, \qquad \det A = -13.$$

Como el determinante es no nulo, $A^{-1} = C^T / \det A$.

7.24 De $AC^T = (\det A)I_3$ se obtiene $\det A \det C = (\det A)^3$. Al dividir por $\det A \neq 0$, resulta $\det C = (\det A)^2$.

7.25 $\det C = (\det A)^{n-1}$. Si A es invertible, se deduce de $AC^T = (\det A)I_n$ tomando determinantes y dividiendo por $\det A$. Si A es singular, la misma identidad se extiende por continuidad de los polinomios que dan ambos determinantes.

8 · Autoevaluación

8.01

$$\det A = -3\,(x-3)^3\,(x+1)\,.$$

El resultado se expresa factorizado.

8.02 Si $a \notin \{2\}$: Rango 4. Se pueden elegir 4 columnas linealmente independientes.
Si $a = 2$: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.

8.03 Si $a \notin \{0\}$: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.
Si $a = 0$: Rango 1. Se pueden elegir 1 columnas linealmente independientes.

8.04

$$\det A = 0.$$

El resultado se expresa factorizado. $F_2 = F_1 + F_3$.

8.05 a) $6^3 = 216$. b) $1/6$. c) $2^3 \cdot 6 = 48$. d) Por linealidad, el término con dos columnas c_3 se anula; queda $6\det(c_1, c_3, c_2) = -6\det A = -36$.

8.06 Sí: $\det(AB) = \det A \det B = \det B \det A = \det(BA)$. Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dan $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; ambas tienen determinante 1 aunque $AB \neq BA$.