2.º BACHILLERATO

Álgebra de matrices

Matemáticas Aplicadas
a las Ciencias Sociales II

Practica, razona y comprueba tus respuestas.

1 Matrices e interpretación de datos
2 Operaciones y propiedades
3 Ecuaciones matriciales
4 Matriz inversa y ortogonalidad
5 Rango y dependencia lineal
6 Potencias y polinomios matriciales
7 Razonamiento y profundización
8 Autoevaluación

120 actividades · 8 bloques

TU RUTA DE TRABAJO

Índice

Ejercicios organizados por contenidos, con espacio para trabajar y soluciones al final.

1 Matrices e interpretación de datos 3

2 Operaciones y propiedades 7

3 Ecuaciones matriciales 12

4 Matriz inversa y ortogonalidad 17

5 Rango y dependencia lineal 22

6 Potencias y polinomios matriciales 32

7 Razonamiento y profundización 34

8 Autoevaluación 37

Solucionario 39

Cómo usar el dosier
El código 2.03 identifica la tercera actividad del bloque 2. Busca ese mismo código en el solucionario. Justifica los procedimientos y comprueba los resultados en los enunciados.

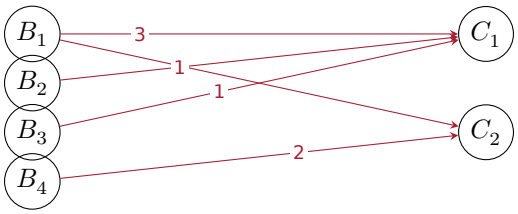
BLOQUE 1

Matrices e interpretación de datos

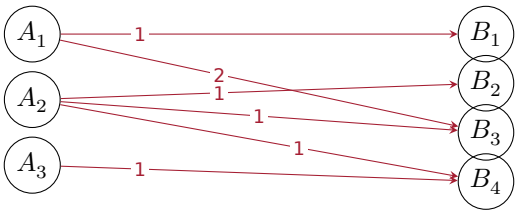
1.01 Seis consejeros A–F valoran a los candidatos A–F. Las filas corresponden a quienes votan y las columnas a los candidatos; 1 indica apoyo, 0 neutralidad y −1 rechazo. Analiza la votación y razona quién debería ser presidente.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.02 Construye la matriz de vuelos del país B al país C. Cada etiqueta indica el número de vuelos entre ambos aeropuertos.



1.03 Una persona sale el lunes de A, pasa la noche en B y llega el martes a C. Usa las conexiones siguientes y los vuelos B–C de la actividad anterior para calcular las combinaciones posibles entre cada aeropuerto de A y cada aeropuerto de C.



1.04 Escribe la matriz traspuesta de $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$.

1.05 Escribe la matriz traspuesta de $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1.06 Escribe la matriz traspuesta de $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

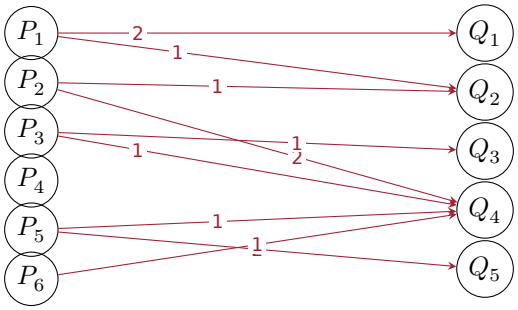
1.07 Escribe la matriz traspuesta de $\begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

1.08 Escribe la matriz traspuesta de $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

1.09 Escribe la matriz traspuesta de $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$.

1.10 Escribe una matriz simétrica y comprueba que coincide con su traspuesta.

1.11 Escribe la matriz del diagrama. Las etiquetas indican cuántas conexiones hay entre los elementos; usa P para las filas y Q para las columnas.



1.12 Las viviendas L3, L4 y L5 tienen, respectivamente, 4 y 3, 5 y 4, y 6 y 5 ventanas pequeñas y grandes. Cada ventana pequeña lleva 2 cristales y 4 bisagras; cada grande, 4 cristales y 6 bisagras. Escribe las matrices de estos datos y calcula la cantidad de cristales y bisagras de cada vivienda.

1.13 La producción semanal de bombillas transparentes y opacas es, por modelos M1 a M4, la matriz P siguiente. Los porcentajes defectuosos son 2%, 5%, 8% y 10%. Calcula una matriz con los totales de bombillas buenas y defectuosas, transparentes y opacas.

$$P = \begin{bmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{bmatrix}.$$

BLOQUE 2

Operaciones y propiedades

2.01 Calcula $E = 2A - 3B + C - 2D$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.02 Efectúa todos los productos de dos matrices que estén definidos, incluyendo productos de una matriz por sí misma.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

2.03 Encuentra una matriz I_3 tal que $AI_3 = I_3A = A$ para toda matriz cuadrada A de orden 3. Generaliza a cualquier orden.

2.04 Con $a = 3$ y $b = 6$, comprueba $(a+b)A = aA + bA$ y $a(A+B) = aA + aB$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

2.05 Comprueba $A(B+C) = AB + AC$ y $(B+C)D = BD + CD$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

2.06 Comprueba las identidades $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$ y $A(BC) = (AB)C$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.07 Calcula $AB + AC$, $(A-B)C$ y ABC.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

2.08 Comprueba que $(A-I)^2=0$.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

2.09 Calcula $-2A+3B$, AB, $B(-A/2)$ y A^2-B^2.

$$A=\begin{bmatrix}7 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ -2 & 2\end{bmatrix}.$$

2.10 Efectúa el producto $\begin{bmatrix}-3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

2.11 ¿Son iguales A y B? Calcula, cuando estén definidas, AB, BA, $A+B$ y $A-B^T$.

$$A=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}.$$

2.12 Comprueba $(A+B)^T = A^T + B^T$ y $(3A)^T = 3A^T$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.13 Calcula $3AA^T - 2I$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

2.14 Comprueba $(AB)^T = B^T A^T$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.15 Comprueba $(A+I)^2 = 6I$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

2.16 Comprueba que $(A+I)^2=0$ y expresa A^2 como combinación lineal de A e I.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{bmatrix}.$$

BLOQUE 3

Ecuaciones matriciales

3.01 Calcula x, y, z, t para que $A \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = B$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.02 Halla X si $3X - 2A = 5B$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

3.03 Halla A, B de orden 2 tales que $2A + B = C$ y $A - B = D$.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.04 Halla X, Y si $2X - 3Y = C$ y $X - Y = D$.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

3.05 Determina todas las matrices X de orden 2 que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, es decir, $XA = AX$.

3.06 Calcula B para que $A + B = C$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.07 Calcula B para que $2A - 3B = C$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.08 Halla X e Y tales que $2X + Y = C$ y $X - Y = D$.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.09 Halla X para que $X - B^2 = AB$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.10 Determina los valores de m para que $X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ satisfaga $X^2 - \frac{5}{2}X + I = 0$.

3.11 Resuelve la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3.12 Halla A y B tales que $2A + 3B = C$ y $-A + 5B = D$.

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{bmatrix}.$$

3.13 Halla X e Y si $X - 2M = 3N$ y $M + N - Y = I$.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.14 Halla B para que $AB = C$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.15 Halla todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ que satisfacen $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.16 Encuentra una matriz X que conmute con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y calcula después $A^2 + 2A^{-1}X$.

3.17 Sean $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. a) Halla las condiciones para que $AB = BA$. b) Si $a = b = c = 1$, calcula B^{10}.

3.18 Resuelve $AXB = C$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{bmatrix}.$$

BLOQUE 4

Matriz inversa y ortogonalidad

4.01 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.02 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

4.03 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

4.04 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

4.05 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

4.06 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.07 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.08 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}.$$

4.09 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.10 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.11 Comprueba que B es la inversa de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.12 Decide cuál de M y N es la inversa de A y compruébalo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

4.13 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.14 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

4.15 Calcula la inversa mediante operaciones elementales, o justifica que no existe.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.16 Una matriz es ortogonal si su inversa coincide con su traspuesta. Halla x e y para que $A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sea ortogonal.

BLOQUE 5

Rango y dependencia lineal

5.01 Para $u = (7, 4, -2)$, $v = (5, 0, 6)$, $w = (4, 6, -3)$, $a = 8$ y $b = -5$, comprueba: asociatividad y conmutatividad de la suma; vector cero; vector opuesto; $a(u + v) = au + av$; $(a + b)u = au + bu$; $a(bu) = (ab)u$; y $1u = u$.

5.02 Estudia la dependencia o independencia lineal de los vectores que forman las filas de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

5.03 Estudia la dependencia o independencia lineal de los vectores que forman las filas de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.04 Estudia la dependencia o independencia lineal de los vectores que forman las filas de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5.05 Estudia la dependencia o independencia lineal de los vectores que forman las filas de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.06 Explica por qué un conjunto de vectores que contiene el vector cero es linealmente dependiente.

5.07 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.08 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{bmatrix}.$$

5.09 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

5.10 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix}.$$

5.11 Estudia la dependencia o independencia lineal de los vectores que forman las filas de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.12 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{bmatrix}.$$

5.13 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.14 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 12 & -24 & 36 \end{bmatrix}.$$

5.15 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.16 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.17 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.18 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{bmatrix}.$$

5.19 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

5.20 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

5.21 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5.22 Estudia la dependencia o independencia lineal de los vectores que forman las filas de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

5.23 Estudia la dependencia o independencia lineal de los vectores que forman las filas de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

5.24 Estudia la dependencia o independencia lineal de los vectores que forman las filas de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & t \end{bmatrix}.$$

Discute según t.

5.25 Estudia la dependencia o independencia lineal de los vectores que forman las filas de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Discute según t.

5.26 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{bmatrix}.$$

Discute según k.

5.27 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{bmatrix}.$$

Discute según k.

5.28 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{bmatrix}.$$

Discute según k.

5.29 Calcula el rango de la matriz e indica cuántas columnas linealmente independientes pueden elegirse.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{bmatrix}.$$

Discute según k.

BLOQUE 6

Potencias y polinomios matriciales

6.01 Comprueba $A^2 = 2A - I$ y utiliza la identidad para calcular A^4.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

6.02 Prueba que $A^3 = 0$ y demuestra que $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.03 Calcula A^n y B^n para enteros $n \geq 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

6.04 Calcula $A^2, A^3, \ldots, A^{128}$ identificando un patrón.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.05 Determina si existe un valor de k para el que $(A - kI)^2 = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

6.06 Prueba que $A^3 + I = 0$ y utiliza la igualdad para calcular A^{10}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

BLOQUE 7

Razonamiento y profundización

7.01 Explica por qué $(A+B)(A-B) = A^2-B^2$ no es una identidad válida para cualesquiera matrices cuadradas del mismo orden.

7.02 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Existe B tal que AB tenga una sola fila? ¿Y para BA? Justifica y da ejemplos cuando sea posible.

7.03 ¿Es necesariamente simétrico el producto de dos matrices simétricas del mismo orden? Justifica o da un contraejemplo.

7.04 Una matriz de orden 2 tiene rango 2. ¿Puede cambiar su rango al añadir una fila? ¿Y al añadir una columna?

7.05 Una matriz de orden 3 tiene rango 3. a) ¿Qué rango tendrá al quitar una columna? b) Si quitamos una fila y una columna, ¿será siempre de rango 2?

7.06 Demuestra que el producto de dos matrices diagonales de orden 3 es diagonal.

7.07 La traza de una matriz cuadrada es la suma de sus elementos diagonales. Prueba que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ para matrices de orden 2.

7.08 a) Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, encuentra matrices distintas B y C con $AB = AC$. b) ¿Qué condición sobre A permite deducir $B = C$ de $AB = AC$?

7.09 a) Si A es invertible y $AB + BA = 0$, demuestra que $BA^{-1} + A^{-1}B = 0$. b) Para $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, halla una matriz $B \neq 0$ que cumpla $AB + BA = 0$.

7.10 Halla una matriz cuadrada de orden 2, distinta de I y de −I, cuya inversa sea su traspuesta.

7.11 a) Halla la forma general de una matriz antisimétrica de orden 2, es decir, $A^T = -A$. b) Demuestra que la diagonal de cualquier matriz antisimétrica es nula.

7.12 Una matriz es mágica de suma k si todas sus filas, columnas y ambas diagonales suman k. ¿Cuánto vale k si además es antisimétrica? Halla todas las de orden 3.

7.13 Halla todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 y suma 0.

7.14 Halla todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 y suma 3.

BLOQUE 8

Autoevaluación

8.01 Calcula $M = P^2 - 3P - 2I$.

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.02 Calcula A y B si $A + B = C$ y $2A - 2B = D$.

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

8.03 Comprueba que C es la inversa de A y calcula X para que $XA = B$, con $B = (1, -2, 3)$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{6}{5} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

8.04 Determina a y b para que $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = A$.

8.05 Halla el valor de k para que A tenga rango 2.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{bmatrix}.$$

8.06 ¿Puede añadirse una fila a la matriz para que la nueva matriz tenga rango 4? Razona la respuesta.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

8.07 Calcula $A^{22} - 12A^2 + 2A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8.08 La matriz da las vitaminas A, B y C por unidad de peso de los productos P, Q, R y S (filas). Se desea una dieta con los cuatro productos, que aporte 20 unidades de A, 25 de B y 6 de C. a) ¿Es posible y de cuántas formas? b) Expresa P, R y S según Q e indica qué valores puede tomar Q.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solucionario

Los códigos corresponden a las actividades del dosier.

1 · Matrices e interpretación de datos

1.01 Las sumas por columnas, de A a F, son $(-3, 1, 3, 1, -5, -1)$. C obtiene la mayor puntuación y es la elección más respaldada. B y D reciben las mismas valoraciones; E no recibe ningún apoyo positivo.

1.02 Filas B y columnas C:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1.03 Matriz A–B:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de conexiones A–C:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1.04 Traspuesta:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

1.05 Traspuesta:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

1.06 Traspuesta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1.07 Traspuesta:

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

1.08 Traspuesta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1.09 Traspuesta:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.10 Una posibilidad es $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Sus elementos cumplen $x_{ij} = x_{ji}$, de modo que $X^T = X$.

1.11 Resultado:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.12 Viviendas × ventanas:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Ventanas × componentes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Viviendas × componentes:

$$\begin{bmatrix} 20 & 34 \\ 26 & 44 \\ 32 & 54 \end{bmatrix}$$

1.13 Con filas «buenas, defectuosas» y columnas «transparentes, opacas», el cálculo es

$$\begin{bmatrix} 1354 & \frac{8691}{10} \\ 96 & \frac{609}{10} \end{bmatrix}$$

Los valores fraccionarios representan cantidades estimadas al aplicar los porcentajes: 60,9 opacas defectuosas y 869,1 buenas; no son recuentos enteros observados.

2 · Operaciones y propiedades

2.01 Resultado:

$$\begin{bmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{bmatrix}$$

2.02 AC:

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{bmatrix}$$

AD:

$$\begin{bmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{bmatrix}$$

BA:

$$\begin{bmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -5 & 26 & 13 \end{bmatrix}$$

CB:

$$\begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & -4 \end{bmatrix}$$

DC:

$$\begin{bmatrix} -6 & -1 & 2 & 5 \\ 26 & 5 & 2 & 0 \\ 28 & 38 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

DD:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 31 & 4 \\ -4 & 4 & 17 \end{bmatrix}$$

2.03 $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En cualquier orden, la matriz identidad tiene unos en la diagonal principal y ceros fuera de ella.

2.04 Ambos miembros de la primera igualdad:

$$\begin{bmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{bmatrix}$$

Ambos miembros de la segunda igualdad:

$$\begin{bmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{bmatrix}$$

2.05 Primera igualdad:

$$\begin{bmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{bmatrix}$$

Segunda igualdad:

$$\begin{bmatrix} -24 \\ -60 \end{bmatrix}$$

2.06 Primera:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{bmatrix}$$

Segunda:

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{bmatrix}$$

Tercera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{bmatrix}$$

2.07 AB+AC:

$$\begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 6 \end{bmatrix}$$

(A−B)C:

$$\begin{bmatrix} -10 & -15 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

ABC:

$$\begin{bmatrix} 23 & 12 \\ 9 & -9 \end{bmatrix}$$

2.08 A−I:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(A-I)^2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.09 a:

$$\begin{bmatrix} -23 & 4 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}$$

b:

$$\begin{bmatrix} -17 & -4 \\ -11 & 2 \end{bmatrix}$$

c:

$$\begin{bmatrix} \frac{21}{2} & -3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

d:

$$\begin{bmatrix} 34 & -16 \\ 22 & -9 \end{bmatrix}$$

2.10 Resultado:

$$\begin{bmatrix} 7 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

2.11 No son iguales: sus dimensiones son 2×1 y 1×2.

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}, \qquad BA = \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}.$$

$A + B$ no está definida. $A - B^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2.12 Primera identidad:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segunda identidad:

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

2.13 Resultado:

$$\begin{bmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{bmatrix}$$

2.14 Ambos miembros:

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

2.15 Resultado:

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

2.16 $(A+I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Al desarrollar, $A^2 + 2A + I = 0$; por tanto, $A^2 = -2A - I$.

3 · Ecuaciones matriciales

3.01 Matriz de las incógnitas:

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3.02 X:

$$\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -\frac{17}{3} \end{bmatrix}$$

3.03 A:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

B:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.04 X:

$$\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}$$

Y:

$$\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

3.05 Si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la igualdad obliga a $c = 0$ y $d = a$. Por tanto, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

3.06 B:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

3.07 B:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

3.08 X:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Y:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.09 X:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3.10 La segunda entrada diagonal ya verifica la ecuación. La primera exige $m^2 - \frac{5}{2}m + 1 = 0$, cuyas raíces son $m = 2$ y $m = 1/2$.

3.11 La igualdad equivale a $x - y = 3 + 2x$ y $3x + 2y = 3y - 2$. Se obtiene $x = -5/4$ e $y = -7/4$.

3.12 A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

B:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3.13 X:

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Y:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

3.14 B:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3.15 Las condiciones son $a^2 = b^2 = c^2 = 1$, $a + b = 0$ y $b + c = 0$. Hay dos soluciones: $(a, b, c) = (1, -1, 1)$ y $(-1, 1, -1)$.

3.16 Por ejemplo, $X = I$, que conmuta con toda matriz. En este caso, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, por lo que $A^2 + 2A^{-1}X = 3I$.

3.17 a) La igualdad impone $b = c$ y $a = c$, es decir, $a = b = c$. b) El bloque superior de unos verifica $J^n = 2^{n-1}J$ para $n \geq 1$. Así, $B^{10} = \begin{pmatrix} 512 & 512 & 0 \\ 512 & 512 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.18 X = inversa de A · C · inversa de B:

$$\begin{bmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$$

4 · Matriz inversa y ortogonalidad

4.01

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se verifica $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

4.02

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Se verifica $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

4.03 No tiene inversa: $det\ A = 0$ y su rango es 1.

4.04 No tiene inversa: $det\ A = 0$ y su rango es 2.

4.05

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se verifica $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

4.06

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

Se verifica $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

4.07

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Se verifica $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

4.08

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}.$$

Se verifica $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

4.09

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se verifica $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

4.10

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se verifica $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

4.11 AB:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

BA:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.12 La inversa es N:

$$AN = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad NA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

M no es inversa, pues $AM = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4.13

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Se verifica $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

4.14

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Se verifica $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

4.15

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se verifica $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

4.16 La condición $A^TA = I$ exige $x^2 = y^2 = 16/25$ y $x = y$. Las posibilidades son $(x, y) = (4/5, 4/5)$ y $(-4/5, -4/5)$.

5 · Rango y dependencia lineal

5.01 (u+v)+w = u+(v+w):

$$\begin{bmatrix}16\\10\\1\end{bmatrix}$$

u+v = v+u:

$$\begin{bmatrix}12\\4\\4\end{bmatrix}$$

u+0:

$$\begin{bmatrix}7\\4\\-2\end{bmatrix}$$

u+(−u):

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

a(u+v):

$$\begin{bmatrix}96\\32\\32\end{bmatrix}$$

(a+b)u:

$$\begin{bmatrix}21\\12\\-6\end{bmatrix}$$

a(bu):

$$\begin{bmatrix}-280\\-160\\80\end{bmatrix}$$

1u:

$$\begin{bmatrix}7\\4\\-2\end{bmatrix}$$

5.02 Rango 4. Se pueden elegir 4 columnas linealmente independientes. Los vectores son linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

5.03 Rango 4. Se pueden elegir 4 columnas linealmente independientes. Los vectores son linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

5.04 Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes. Los vectores son linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.05 Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes. Los vectores son linealmente dependientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una relación no trivial entre los vectores es $v_3 = 0$.

5.06 Existe una combinación lineal nula con coeficientes no todos nulos: basta asignar coeficiente 1 al vector cero y 0 a los demás.

5.07 Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.08 Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.09 Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.10 Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{11} & \frac{9}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.11 Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes. Los vectores son linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{14} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5.12 Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.13 Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5.14 Rango 1. Se pueden elegir 1 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.15 Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.16 Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.17 Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.18 Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{27}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{46}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{41}{11} \end{bmatrix}$$

5.19 Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.20 Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.21 Rango 4. Se pueden elegir 4 columnas linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.22 Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes. Los vectores son linealmente independientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{15}{7} & \frac{39}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{6}{7} & -\frac{10}{7} \end{bmatrix}$$

5.23 Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes. Los vectores son linealmente dependientes. Una forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una relación no trivial entre los vectores es $-2v_1 - v_2 + v_3 = 0$.

5.24 Para todos los valores reales del parámetro: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes. Los vectores son linealmente independientes.

5.25 Si $t \notin \{1\}$: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes. Los vectores son linealmente dependientes.
Si $t = 1$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes. Los vectores son linealmente dependientes.

5.26 Para todos los valores reales del parámetro: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.

5.27 Si $k \notin \{-\frac{1}{2}\}$: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.
Si $k = -\frac{1}{2}$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.

5.28 Si $k \notin \{-2\}$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.
Si $k = -2$: Rango 1. Se pueden elegir 1 columnas linealmente independientes.

5.29 Si $k \notin \{2\}$: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.
Si $k = 2$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.

6 · Potencias y polinomios matriciales

6.01 La identidad se verifica por multiplicación. $A^4 = (2A - I)^2 = 4A^2 - 4A + I = 4A - 3I$.

$$A4 = \begin{bmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{bmatrix}.$$

6.02 $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $A^3 = 0$. Además, $(I - A)(I + A + A^2) = I - A^3 = I$, y lo mismo en el orden inverso. La inversa es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.03 $A = I + N$, con $N^2 = 0$; luego $A^n = I + nN = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Al ser B diagonal, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

6.04 $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ y $A^3 = I$. Por tanto, $A^{3q} = I$, $A^{3q+1} = A$ y $A^{3q+2} = A^2$. Como $128 = 3 \cdot 42 + 2$, $A^{128} = A^2$.

6.05 Sí: $k = 1$. La entrada (1,1) de $(A - kI)^2$ es $k^2 - 1$, y la entrada (1,2) es $2k - 2$; ambas se anulan simultáneamente solo si $k = 1$. La sustitución anula toda la matriz.

6.06 $A^3 = -I$. Por tanto, $A^{10} = (A^3)^3 A = -A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$.

7 · Razonamiento y profundización

7.01 El producto es $A^2 - AB + BA - B^2$. Los términos intermedios solo se cancelan si $AB = BA$, lo cual no sucede en general.

7.02 AB siempre tiene dos filas, por lo que el primer caso es imposible. BA puede tener una fila si B tiene dimensión 1×2. Por ejemplo, $B = (1\ 1)$ da $BA = (3\ 1\ 0)$.

7.03 No. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ son simétricas, pero $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no lo es. Se cumple $(AB)^T = BA$, de modo que el producto es simétrico exactamente cuando conmutan.

7.04 No. Añadir una fila no reduce el rango y deja solo dos columnas; añadir una columna deja solo dos filas. En ambos casos el rango sigue siendo 2.

7.05 a) Rango 2: cualquier par de columnas de una matriz invertible es linealmente independiente. b) No. En I_3, al quitar la primera fila y la segunda columna queda $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de rango 1. También puede quedar rango 2, por ejemplo, quitando la misma fila y columna de I_3.

7.06 Si $A = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$ y $B = \text{diag}(b_1, b_2, b_3)$, entonces $AB = \text{diag}(a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3)$, que es diagonal.

7.07 Para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, $\text{tr}(AB) = ae + bg + cf + dh$ y $\text{tr}(BA) = ea + fc + gb + hd$. Son iguales por la conmutatividad de los números reales.

7.08 a) Sirven $B = I$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, pues ambos productos valen A. b) Que A sea invertible: al multiplicar por A^{-1} a la izquierda resulta $B = C$.

7.09 a) Multiplica $AB+BA = 0$ por A^{-1} a izquierda y derecha. b) Una solución es $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$: $AB = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ y $BA = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

7.10 Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se verifica $AA^T = A^TA = I$, por lo que $A^{-1} = A^T$.

7.11 a) $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. b) En la diagonal, $a_{ii} = -a_{ii}$; sobre los reales, $2a_{ii} = 0$ implica $a_{ii} = 0$.

7.12 La diagonal principal es nula, por lo que $k = 0$. Todas son $\begin{pmatrix} 0 & t & -t \\ -t & 0 & t \\ t & -t & 0 \end{pmatrix}$, con $t \in \mathbb{R}$.

7.13 La familia completa es

$$\begin{bmatrix} t & -t & 0 \\ -t & 0 & t \\ 0 & t & -t \end{bmatrix}$$

con $t \in \mathbb{R}$. Cada fila, columna y diagonal suma 0.

7.14 La familia completa es

$$\begin{bmatrix} t & 2-t & 1 \\ 2-t & 1 & t \\ 1 & t & 2-t \end{bmatrix}$$

con $t \in \mathbb{R}$. Cada fila, columna y diagonal suma 3.

8 · Autoevaluación

8.01 M:

$$\begin{bmatrix} 8 & -9 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

8.02 A:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

B:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.03 AC = CA:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

X:

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -2 \end{bmatrix}$$

8.04 De las entradas (1,1) y (1,2) se obtiene $4-a=2$ y $-2-b=-1$, luego $a=2$, $b=-1$. Estos valores verifican también las otras dos entradas.

8.05 Si $k \notin \{2\}$: Rango 3. Se pueden elegir 3 columnas linealmente independientes.
Si $k=2$: Rango 2. Se pueden elegir 2 columnas linealmente independientes.

8.06 No. La tercera fila es dos veces la primera más tres veces la segunda, así que el rango inicial es 2. Una sola fila adicional puede aumentarlo como máximo a 3.

8.07 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, $A^{22} - 12A^2 + 2A = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} = -9I$.

8.08 Sean p, q, r, s las cantidades. Se cumple $p+q+2r+s=20$, $2p+r+s=25$ y $2q+s=6$. Tomando $q=t$, resulta $p=8+t$, $r=3$ y $s=6-2t$. Para que entren los cuatro productos con cantidades positivas, $0<t<3$. Hay infinitas dietas posibles. Si se permitieran cantidades nulas, el intervalo sería $0 \le t \le 3$.