SITUACIONES DE APRENDIZAJE

Matemáticas

4.º ESO

Matemáticas B

10 situaciones de aprendizaje completas

Con secuencia didáctica, evaluación, rúbricas y anexos listos para usar

Índice

Presentación del cuaderno 3

Plan general 5

SdA 01 **Números reales: precisión y estructura** 6

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 12

SdA 02 **Expresiones que revelan estructura** 34

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 41

SdA 03 **Ecuaciones, inecuaciones y restricciones** 64

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 71

SdA 04 **Generalizar patrones con álgebra** 94

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 100

SdA 05 **Modelos lineales y no lineales** 122

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 129

SdA 06 **Geometría analítica de la recta** 151

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 158

SdA 07 **Trigonometría para medir lo inaccesible** 184

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 191

SdA 08 **Estadística de dos variables** 215

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 222

SdA 09 **Probabilidad de experimentos compuestos** 247

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 254

SdA 10 **Investigar, modelizar y argumentar** 278

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 286

Créditos, fuentes y condiciones de uso 313

PRESENTACIÓN

Un cuaderno para pensar con las matemáticas

Este cuaderno reúne **10 situaciones de aprendizaje** completas de Matemáticas para 4.º ESO · Matemáticas B, con un total de **79 sesiones**. Cada situación parte de un reto con sentido y culmina en un producto final en el que el alumnado interpreta, modeliza, resuelve, comprueba y comunica.

Sobre este volumen

En 4.º ESO el RD 217/2022 diferencia Matemáticas A y Matemáticas B. Matemáticas B profundiza en procedimientos algebraicos, geométricos, analíticos y estadísticos, incorporando contextos matemáticos, científicos y sociales. Este cuaderno mantiene la resolución de problemas como eje y eleva la formalización y la generalización.

Criterio de uso curricular. La concreción y secuenciación propuestas son orientativas. Deben adaptarse al currículo de la comunidad autónoma, a la programación del departamento, al número real de sesiones y al punto de partida del alumnado.

Criterios metodológicos comunes

- ✓ Resolución de problemas como eje de aprendizaje, evitando reducir las situaciones a una sucesión de ejercicios rutinarios.
- ✓ Conexión entre representaciones numéricas, algebraicas, gráficas, geométricas y verbales.
- ✓ Uso razonado de calculadora, hoja de cálculo, geometría dinámica u otras herramientas cuando mejoran la comprensión o la comprobación.
- ✓ Evaluación continua y formativa mediante producciones de proceso, producto final y evidencia individual.
- ✓ Trabajo explícito del sentido socioafectivo: perseverancia, revisión del error, comunicación, cooperación e inclusión.

Cómo está organizada cada situación

Contexto y reto
Pregunta guía, reto y producto final.

Currículo
Competencias, criterios, saberes y objetivos.

Sesiones
Secuencia con una evidencia por sesión.

DUA
Medidas de inclusión, refuerzo y ampliación.

Evaluación
Instrumentos, rúbrica y variantes.

Los diez anexos de cada situación

Cada situación incluye anexos listos para imprimir o proyectar: dossier con datos, tablas, gráficas y esquemas, fichas de trabajo, plantillas, instrumentos de evaluación y una guía docente con todas las soluciones. Los del alumnado llevan cabecera para nombre, grupo y fecha.

1. Ficha de lanzamiento del reto
2. Dossier de fuentes y materiales base
3. Fichas de actividades del alumnado
4. Plantilla del producto final
5. Lista de cotejo para el proceso y la entrega
6. Rúbrica imprimible
7. Autoevaluación y coevaluación
8. Material de apoyo y refuerzo
9. Actividad de ampliación
10. Guía docente de respuestas y orientaciones

Claves de lectura: competencias y sentidos

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICAS (SÍNTESIS)

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE4** Utilizar el pensamiento computacional: descomponer, reconocer patrones, generalizar y crear algoritmos.
- **CE5** Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.
- **CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.
- **CE9** Gestionar emociones, aceptar el error y perseverar en el aprendizaje de las matemáticas.
- **CE10** Trabajar en equipo con respeto, asumiendo roles y valorando la diversidad.

SENTIDOS DE LOS SABERES BÁSICOS

- **A** Sentido numérico
- **B** Sentido de la medida
- **C** Sentido espacial
- **D** Sentido algebraico
- **E** Sentido estocástico
- **F** Sentido socioafectivo

Base normativa: LOMLOE y Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo. La secuenciación es orientativa y debe adaptarse al currículo autonómico. En cada situación, los criterios de evaluación se presentan en síntesis operativa; su formulación literal figura en el anexo II del real decreto.

Plan general · 4.º ESO · Matemáticas B

1.º trimestre	1.º-2.º trimestre	2.º trimestre	2.º-3.º trimestre	3.º trimestre
3 situaciones · 23 sesiones	1 situación · 7 sesiones	2 situaciones · 16 sesiones	1 situación · 8 sesiones	3 situaciones · 25 sesiones

1 Números reales: precisión y estructura

7 sesiones · 1.º trimestre

Mapa razonado de los números reales

2 Expresiones que revelan estructura

8 sesiones · 1.º trimestre

Dossier de equivalencias algebraicas

3 Ecuaciones, inecuaciones y restricciones

8 sesiones · 1.º trimestre

Atlas de conjuntos solución

4 Generalizar patrones con álgebra

7 sesiones · 1.º-2.º trimestre

Informe de conjetura y generalización

5 Modelos lineales y no lineales

8 sesiones · 2.º trimestre

Laboratorio de funciones

6 Geometría analítica de la recta

8 sesiones · 2.º trimestre

Mapa de trayectorias en el plano

7 Trigonometría para medir lo inaccesible

8 sesiones · 2.º-3.º trimestre

Informe trigonométrico de medida indirecta

8 Estadística de dos variables

8 sesiones · 3.º trimestre

Estudio de relación entre variables

9 Probabilidad de experimentos compuestos

8 sesiones · 3.º trimestre

Dossier de estrategias de recuento

10 Investigar, modelizar y argumentar

9 sesiones · 3.º trimestre

Proyecto matemático de investigación

01

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Números reales: precisión y estructura

PREGUNTA GUÍA

¿Cómo elegimos una representación exacta o aproximada sin perder información relevante?

CURSO	4.º ESO · Matemáticas B
SESIONES	7 sesiones · 1.º trimestre
SENTIDOS PRIORITARIOS	A · Sentido numérico
COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CE1, CE2, CE3, CE7
PRODUCTO FINAL	Mapa razonado de los números reales
CRITERIOS DE EVALUACIÓN	1.1, 1.2, 2.1, 3.1, 7.1

Contexto, reto y sentido

El aula de fabricación digital del centro va a cortar con láser un lote de piezas de metacrilato para una exposición: cuadrados de **área 2 dm²**, la diagonal de un cuadrado de **1 dm de lado** o un disco de **5 cm de radio**. El profesor de Tecnología pregunta: «¿qué longitud le pongo a la máquina?». La calculadora responde 1,414213562… y la pantalla se acaba, pero la medida exacta no.

Estas piezas obligan a distinguir entre números **exactos** (como $\sqrt{2}$, π o $\frac{7}{4}$) y sus **aproximaciones**, a situarlos en la recta real, a describir conjuntos de valores válidos con intervalos y a decidir cuánto error se puede permitir. El producto final es un mapa en el que cada afirmación sobre los números reales queda sostenida por un ejemplo, un cálculo o un contraejemplo.

Reto

Construir un mapa razonado de los números reales que clasifique números, los sitúe en la recta, explique cuándo conviene el valor exacto o una aproximación y acote el error, defendiendo cada afirmación con un ejemplo o un contraejemplo.

Producto final

Mapa razonado de los números reales.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

1.1 Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.

1.2 Analizar y seleccionar diferentes herramientas y estrategias elaboradas en la resolución de un mismo problema, valorando su eficiencia.

2.1 Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.

3.1 Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada.

7.1 Representar matemáticamente la información más relevante de un problema, conceptos, procedimientos y resultados, visualizando ideas y estructurando procesos.

Saberes básicos prioritarios

A
Sentido numérico

- Necesidad de ampliar los conjuntos numéricos: N, Z, Q y R; relaciones de inclusión entre ellos.
- Números racionales: expresión decimal exacta o periódica y fracción generatriz. Números irracionales: expresión decimal infinita no periódica.
- Representación de números reales en la recta (construcción de raíces con el teorema de Pitágoras), orden y valor absoluto como distancia.
- Intervalos: notación, representación, unión e intersección; descripción de tolerancias y restricciones.
- Operaciones con radicales y potencias de exponente racional; propiedades y ejemplos/contraejemplos sobre la suma y el producto de racionales e irracionales.
- Aproximación por redondeo y truncamiento; error absoluto y relativo; cota del error y cifras significativas.

F
Sentido socioafectivo

- Valor del error como fuente de aprendizaje: revisar, contrastar con otro equipo y corregir.
- Trabajo cooperativo con roles y argumentación respetuosa de las ideas ajenas.

Objetivos didácticos

- ✓ Relacionar N, Z, Q y R.
- ✓ Operar y ordenar números reales.
- ✓ Usar intervalos para describir conjuntos de valores.
- ✓ Analizar precisión y error en aproximaciones.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Necesidad de ampliar conjuntos

Evidencia: Ficha 1: diagnóstico inicial y tabla de ecuaciones que solo tienen solución al ampliar el conjunto numérico.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Racionales e irracionales

Evidencia: Ficha 2: clasificación de las tarjetas de números en N, Z, Q o I y cálculo de fracciones generatrices.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Recta real e intervalos

Evidencia: Ficha 3: construcción de √5 en la recta, traducción entre desigualdades, intervalos y rectas, y ordenación de números.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Operaciones y propiedades

Evidencia: Ficha 4: simplificación de radicales, potencias de exponente racional y tabla de ejemplos sobre suma y producto de irracionales.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Aproximación y acotación del error

Evidencia: Ficha 5: tabla de errores absoluto y relativo de aproximaciones de π, tolerancia como intervalo y cotas de error.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Mapa razonado con contraejemplos

Evidencia: Ficha 6: afirmaciones verdaderas o falsas con ejemplo o contraejemplo y borrador del mapa razonado del equipo.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Reto individual

Evidencia: Ficha 7: reto individual de clasificación, tolerancia, error y refutación de una afirmación falsa.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Calculadora científica · recta real · tarjetas

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Conjuntos anidados y ejemplos seleccionados.

Ampliación

Anexo 9

Construir intervalos que satisfagan restricciones simultáneas y representarlos algebraica/gráficamente.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Reformulación del reto de la pieza láser con dibujos y tabla (¿qué medida es exacta y cuál aproximada?) e interpretación de los datos del problema.	Ficha 1 y Ficha 5 / lista de cotejo
1.2	Elección razonada entre valor exacto y aproximación, o entre varios caminos (fracción, decimal, radical) para comparar y operar con números reales.	Fichas 3 y 4 / escala de valoración
2.1	Comprobación de resultados con calculadora, con una cota ($1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$) o con el error relativo, y detección de errores en afirmaciones ajenas.	Fichas 5 y 7 / rúbrica
3.1	Formulación y comprobación de conjeturas sobre suma y producto de racionales e irracionales mediante ejemplos y contraejemplos.	Ficha 6 (afirmaciones de F9) / rúbrica
7.1	Mapa de conjuntos, recta real con números situados e intervalos representados con notación y gráficas correctas.	Mapa razonado (Anexo 4) / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Mapa, operaciones e intervalos.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 1 · Números reales: precisión y estructura

ALUMNADO

En el aula de fabricación digital hay una cortadora láser lista y una orden de trabajo: «cuadrado de metacrilato de área 2 dm^2». Escribís en el ordenador el lado y la máquina pide un número con decimales. Tecleáis 1,414 y la pieza sale con un cuadrado de área 1,999… ¿Sirve? ¿Cuánto error se puede permitir? ¿Existe un número que sea exactamente el lado? Vais a ser el equipo de metrología del instituto: clasificar números, ponerlos en la recta, acotar errores y defender con ejemplos y contraejemplos todo lo que afirméis.

> *¿Cómo elegimos una representación exacta o aproximada sin perder información relevante?*

Vuestro reto

Construir un mapa razonado de los números reales que clasifique números, los sitúe en la recta, explique cuándo conviene el valor exacto o una aproximación y acote el error, defendiendo cada afirmación con un ejemplo o un contraejemplo.

Lo que vais a producir

Mapa razonado de los números reales.

Hoja de ruta · 7 sesiones

1. Ampliamos conjuntos: ¿qué ecuaciones necesitan números nuevos?
2. Clasificamos tarjetas de números en racionales e irracionales.
3. Situamos números en la recta real y escribimos intervalos.
4. Operamos con radicales y estudiamos qué pasa al sumar o multiplicar irracionales.
5. Aproximamos y acotamos el error: absoluto, relativo y tolerancia.
6. Probamos afirmaciones con ejemplos y contraejemplos y montamos el mapa.
7. Resolvemos un reto individual de metrología.

Al terminar seré capaz de…

- ✓ Relacionar N, Z, Q y R.
- ✓ Operar y ordenar números reales.
- ✓ Usar intervalos para describir conjuntos de valores.
- ✓ Analizar precisión y error en aproximaciones.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 1 · Números reales: precisión y estructura

ALUMNADO

Tarjetas de números, esquemas de conjuntos y de la recta real, intervalos, fracción generatriz, radicales, errores de aproximación de π y afirmaciones para investigar. Los datos del taller de láser son ficticios y están creados para el aula.

F1 Tarjetas de números

DATOS

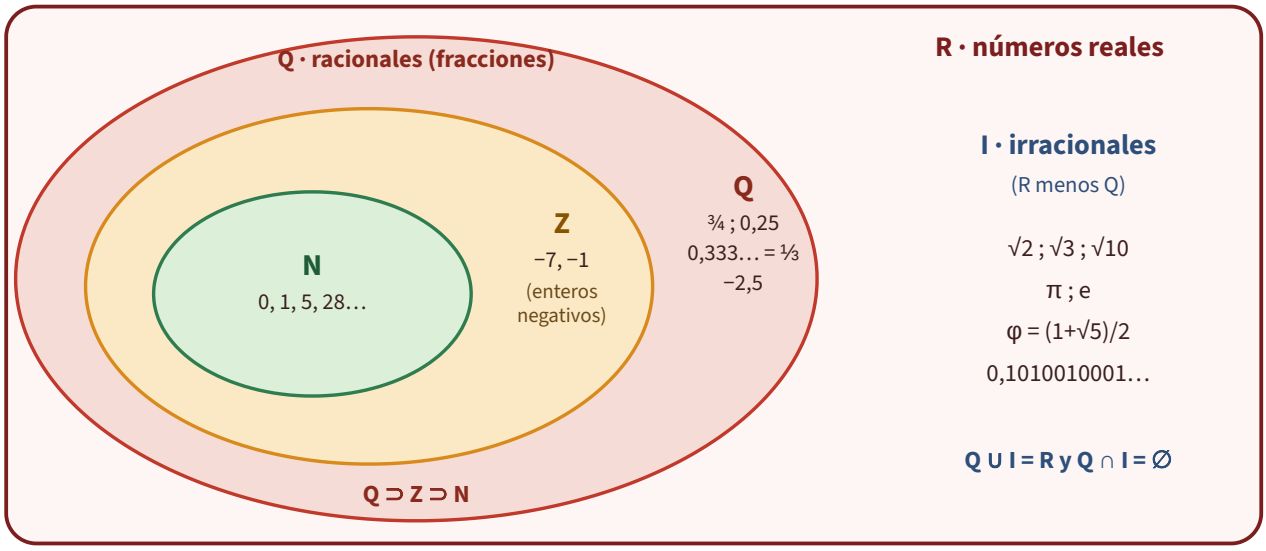
Tarjeta	Número	Tarjeta	Número
T1	-7	T8	$2{,}5$
T2	0	T9	$0{,}1010010001\ldots$ (cada vez un 0 más entre los unos)
T3	$\frac{7}{4}$	T10	$-\frac{9}{3}$
T4	$\sqrt{2}$	T11	$\sqrt{12}$
T5	$0{,}333\ldots$	T12	$1{,}2454545\ldots$ (el 45 se repite)
T6	π	T13	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
T7	$\sqrt{16}$	T14	$\sqrt[3]{-8}$

Fuente: Elaboración propia. Colección de 14 números para clasificar.

En este cuaderno se considera que N = {0, 1, 2, 3…}. Antes de clasificar, simplifica los números que puedas.

F2 Mapa de los conjuntos numéricos

ESQUEMA



Fuente: Esquema de elaboración propia.

Cada número pertenece al conjunto más pequeño en el que cabe, y también a todos los que lo contienen. ¿En qué conjuntos está −7?

F3 Tipos de decimales y fracción generatriz

TEXTO

Racionales: se pueden escribir como fracción $\frac{a}{b}$ con a, b enteros y $b \neq 0$. Su expresión decimal es **exacta** ($\frac{7}{4} = 1{,}75$) o **periódica** ($\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$).

Irracionales: su expresión decimal tiene infinitas cifras **sin periodo** ($\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots, \pi = 3{,}14159265\ldots$). No se pueden escribir como fracción.

Fracción generatriz. Ejemplo resuelto. Para $x = 2{,}\overline{45}$: el periodo tiene 2 cifras, multiplicamos por 100.

$100x = 245{,}4545\ldots$ y $x = 2{,}4545\ldots$. Restando: $99x = 243$, luego $x = \frac{243}{99} = \frac{27}{11}$.

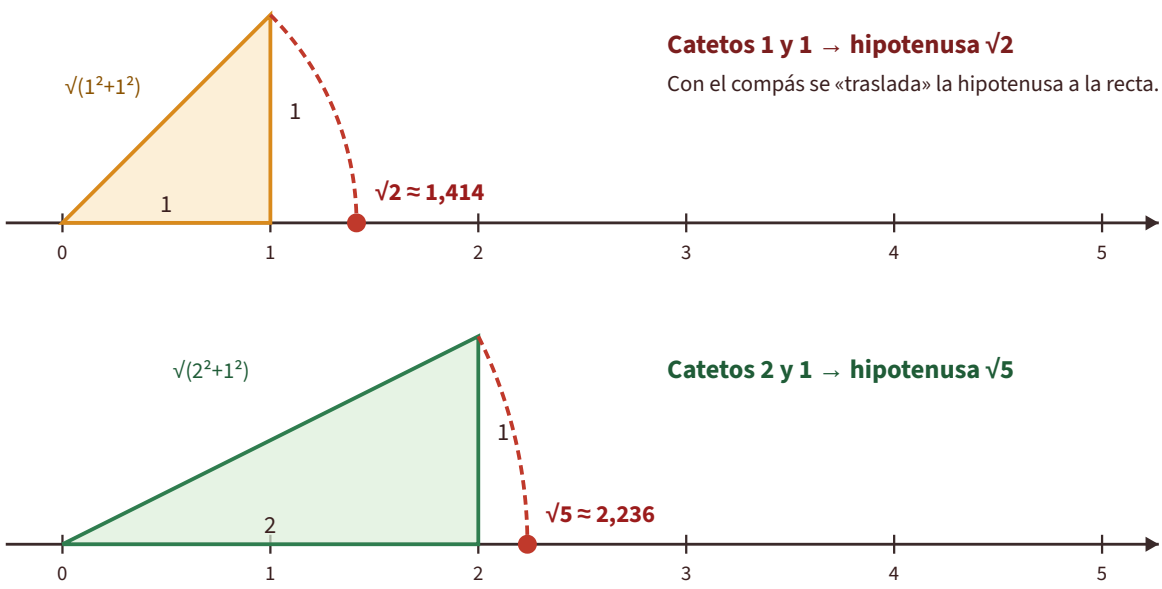
Con anteperiodo. Para $y = 1{,}2\overline{3}$: $100y - 10y = 123{,}33\ldots - 12{,}33\ldots = 111$, luego $y = \frac{111}{90} = \frac{37}{30}$.

Fuente: Elaboración propia.

Truco: 9 en el denominador por cada cifra del periodo y 0 por cada cifra del anteperiodo.

F4 Raíces en la recta real con Pitágoras

ESQUEMA

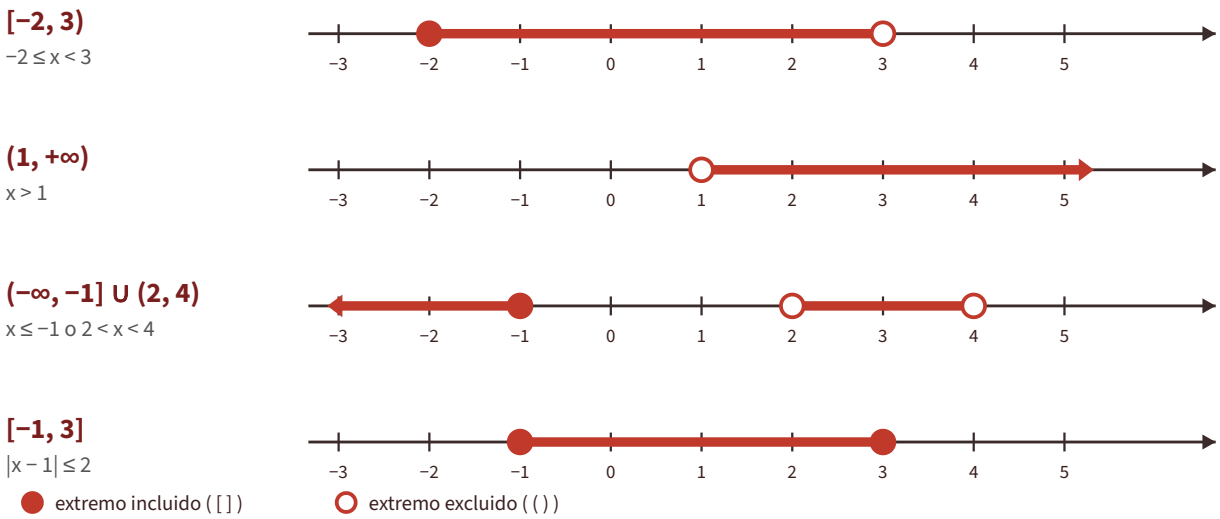


Fuente: Esquema de elaboración propia.

El teorema de Pitágoras sitúa √2 y √5 de forma exacta con regla y compás. ¿Cómo situarías √3?

F5 Intervalos: notación y recta

ESQUEMA



Fuente: Esquema de elaboración propia.

Los corchetes incluyen el extremo, los paréntesis lo excluyen. +∞ y −∞ siempre llevan paréntesis. El símbolo ∪ (unión) junta, y ∩ (intersección) deja lo común.

F6 Radicales y potencias de exponente racional

TEXTO

Propiedades (con $a, b \geq 0$): $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$; $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$; $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

Extraer factores. $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$.

Sumar solo se puede si el radical es el mismo: $\sqrt{18} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

Racionalizar. $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

Producto notable. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, por eso $(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$.

Ejemplo con exponentes. $27^{2/3} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$.

Fuente: Elaboración propia.

¡Cuidado! $\sqrt{a + b}$ no es igual a $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ (prueba con $a = 9, b = 16$).

F7 Aproximaciones de π

DATOS

Aproximación	Valor decimal	Error absoluto (≈)
3	3	$0{,}1416$
$\frac{22}{7}$	$3{,}142857\ldots$	$0{,}00126$
$3{,}14$	$3{,}14$	$0{,}00159$
$\frac{355}{113}$	$3{,}1415929\ldots$	$0{,}00000027$
$3{,}1416$	$3{,}1416$	$0{,}0000073$

Fuente: Valores calculados para este cuaderno. Valor de referencia: π = 3,14159265358979…

El error absoluto no basta para comparar: hay que verlo en relación con el tamaño de lo que se mide (error relativo, F8).

F8 Error y tolerancia: fórmulas clave

TEXTO

- **Error absoluto:** $E_a = |\, v_{\text{real}} - v_{\text{aprox}} \,|$.
- **Error relativo:** $E_r = \dfrac{E_a}{|v_{\text{real}}|}$ (suele darse en %).
- **Tolerancia:** «$a \pm e$» equivale al intervalo $[a - e,\ a + e]$ y a $|x - a| \leq e$.
- **Redondeo y truncamiento.** Redondear a las milésimas: $\frac{2}{3} \approx 0{,}667$. Truncar: $0{,}666$.
- **Cota.** Si $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$, tomar 1,41 supone un error menor que 0,01.

Caso del taller. La cortadora acepta una pieza cuadrada si su lado se desvía del lado ideal menos de 0,005 cm. Para un cuadrado de área 5 cm², el lado ideal es $\sqrt{5} = 2{,}2360679\ldots$ cm.

Fuente: Elaboración propia. El taller de láser es una situación ficticia.

Aproximar es útil, pero siempre hay que decir cuánto error se comete.

F9 Afirmaciones para investigar

DATOS

N.º	Afirmación
A1	La suma de dos números racionales es siempre racional.
A2	La suma de dos números irracionales es siempre irracional.
A3	El producto de dos números irracionales es siempre irracional.
A4	Entre dos racionales distintos siempre hay otro racional.
A5	Todo número con raíz cuadrada es irracional.
A6	Si x es racional y distinto de 0, y es irracional, entonces x · y es irracional.
A7	$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ para todos los números positivos a y b.
A8	Entre dos racionales distintos siempre hay algún irracional.

Fuente: Elaboración propia.

Para refutar basta un contraejemplo; para afirmar hace falta una razón que valga siempre.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 1 · Números reales: precisión y estructura

ALUMNADO

FICHA 1 Ampliar los conjuntos numéricos

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Lee el reto del taller de láser. Primero comprueba qué sabes; después descubre por qué hacen falta números nuevos.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

El número $\frac{3}{4}$ escrito en decimal es…

☐ 0,34 ☐ 0,75 ☐ 0,7

¿Cuál de estos números es irracional?

☐ $\sqrt{9}$ ☐ $\sqrt{10}$ ☐ $10/3$

El número 2 pertenece al intervalo…

☐ $[2, 5)$ ☐ $(2, 5)$ ☐ $(-1, 2)$

2 **Completa la tabla: indica con Sí o No en qué conjuntos tiene solución cada ecuación y escribe la solución.**

Ecuación	¿N?	¿Z?	¿Q?	¿R?	Solución
$x + 3 = 1$					
$4x = 3$					
$x^2 = 9$					
$x^2 = 2$					

3 **La calculadora da $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$. Eleva ese número al cuadrado (con la calculadora y a mano, sin redondear). ¿Obtienes exactamente 2? ¿Qué te dice eso del lado de un cuadrado de área 2 dm²?**

FICHA 2 Racionales e irracionales

Sesión 2

Usa las tarjetas de F1, el mapa de F2 y la fracción generatriz de F3.

1 **Clasifica las tarjetas: escribe el conjunto más pequeño (N, Z, Q o I) y una razón breve.**

Tarjeta	Número	Conjunto	Razón
T1	-7		
T2	0		
T3	$\frac{7}{4}$		
T4	$\sqrt{2}$		
T5	$0{,}333\ldots$		
T6	π		
T7	$\sqrt{16}$		
T9	$0{,}1010010001\ldots$		
T10	$-\frac{9}{3}$		
T11	$\sqrt{12}$		
T12	$1{,}2\overline{45}$		
T14	$\sqrt[3]{-8}$		

2 **Calcula la fracción generatriz y simplifícala: a) $0{,}\overline{18}$; b) $3{,}\overline{45}$; c) $1{,}2\overline{3}$.**

3 **Verdadero o falso. Corrige las falsas.**

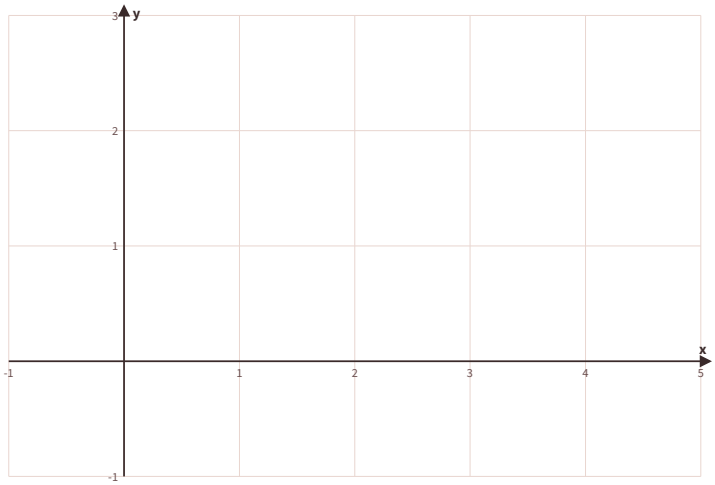
	V	F
Todo número decimal con infinitas cifras es irracional.	☐	☐
Todo número entero es racional.	☐	☐
$\sqrt{16}$ es un número irracional.	☐	☐
Un decimal sin periodo y con infinitas cifras no es una fracción.	☐	☐
$3{,}14 = \pi$.	☐	☐

FICHA 3 La recta real y los intervalos

Sesión 3

Usa F4 para construir raíces y F5 para pasar entre desigualdades, intervalos y rectas.

1 **Construye √5 con regla y compás: dibuja el triángulo de vértices (0, 0), (2, 0) y (2, 1) y traza con el compás un arco de centro el origen y radio la hipotenusa hasta el eje x. Marca y rotula el punto.**



2 **Completa la tabla de intervalos.**

Desigualdad	Intervalo	Recta (dibuja)
$-2 \leq x < 3$		
$x > 1$		
	$(-\infty, 4]$	
$\lvert x - 2 \rvert \leq 3$		
	$[-1, 2] \cap [0, 5]$	
	$(-\infty, -1) \cup [3, +\infty)$	

3 **Ordena de menor a mayor: $\sqrt{3}, 1{,}7, \frac{7}{4}, \frac{\pi}{2}, 1{,}73$. Escribe cada valor con cuatro decimales.**

FICHA 4 Operar con números reales

Sesión 4

Usa las propiedades de F6. Escribe todos los pasos.

1 **Simplifica y calcula.**

Expresión	Pasos	Resultado
$\sqrt{50}$		
$\sqrt{18}+\sqrt{8}$		
$\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$		
$\dfrac{6}{\sqrt{3}}$		
$(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})$		

2 **Calcula con potencias de exponente racional:** $8^{2/3}$; $25^{-1/2}$; $2^{1/2}\cdot 2^{3/2}$.

3 **En cada fila decide si el resultado es racional o irracional y escribe el valor simplificado.**

Operación	Resultado simplificado	¿Racional o irracional?
$2+\sqrt{3}$		
$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$		
$\sqrt{2}+(3-\sqrt{2})$		
$\frac{1}{2}\cdot\pi$		
$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$		

4 **Un rectángulo mide $\sqrt{18}$ cm de largo y $\sqrt{8}$ cm de ancho. Calcula su perímetro y su área en forma exacta y con una aproximación de dos decimales. ¿Qué observas en el área?**

FICHA 5

Aproximar y acotar el error

Sesión 5

Usa F7 y F8. Calcula con la calculadora y redondea solo al final.

1 **Completa el error relativo de cada aproximación de π (en %). ¿Cuál es la mejor? ¿Y la mejor de las que tienen un denominador pequeño?**

Aproximación	Error absoluto	Error relativo (%)
3	0,1416	
$\frac{22}{7}$	0,00126	
3,14	0,00159	
$\frac{355}{113}$	0,00000027	

2 **Una pieza debe medir 24,0 mm con una tolerancia de ±0,3 mm. Escribe el intervalo permitido y decide si se aceptan las piezas de 23,6 mm; 24,25 mm y 24,31 mm.**

3 **Aproxima 2/3 a las milésimas por redondeo y por truncamiento. Calcula el error absoluto de cada una. ¿Cuál es mejor?**

4 **Se mide un campo de 100 m con un error de 1 m y un tornillo de 20 mm con un error de 0,5 mm. ¿Qué medida es más precisa? Justifícalo con los errores relativos.**

FICHA 6 Ejemplos, contraejemplos y mapa

Sesión 6

En equipo, con los roles de siempre. Investigad las afirmaciones de F9 y empezad el mapa razonado del Anexo 4.

1 **Decide si cada afirmación de F9 es verdadera o falsa. Si es falsa, da un contraejemplo; si es verdadera, da un ejemplo y una razón general.**

N.º	¿V o F?	Ejemplo o contraejemplo	Razón
A1			
A2			
A3			
A4			
A5			
A6			
A7			
A8			

2 **Elegid una afirmación verdadera y redactad una justificación para otro equipo (por ejemplo, la A6: si x·y fuese racional, ¿qué pasaría con y?).**

3 **Revisión cruzada del borrador del mapa.**

- [ ] Aparecen N, Z, Q, I y R bien anidados
- [ ] Hay al menos cinco números situados en la recta
- [ ] Se ha escrito algún intervalo con su gráfica
- [ ] Se ha calculado un error absoluto y otro relativo
- [ ] Cada afirmación lleva ejemplo o contraejemplo

FICHA 7 Reto individual de metrología

Sesión 7

Resuelve sin ayuda del equipo. Puedes usar la calculadora para comprobar, pero escribe todos los pasos.

1 **Clasifica cada número en N, Z, Q o I (el conjunto más pequeño) y justifica: $\sqrt{49}$; $-\frac{5}{3}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$; $\pi-3$; $4{,}\overline{16}$.**

2 **Se corta un cuadrado de área 5 cm² con lado 2,24 cm. Calcula el error absoluto y el relativo (en %). ¿Cumple la tolerancia de F8 (menos de 0,005 cm)?**

3 **Una pieza de 18,0 mm tiene tolerancia ±0,2 mm. Escribe el intervalo y di si valen 17,85 mm; 18,15 mm y 18,25 mm.**

4 **Marta dice: «$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$». Refútala con números y explica qué propiedad confunde.**

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 1 · Números reales: precisión y estructura

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Mapa razonado de los números reales. Cada afirmación debe llevar un ejemplo, un cálculo o un contraejemplo.

Título y equipo

Mapa de conjuntos

N, Z, Q, I y R con ejemplos tomados de las tarjetas.

Recta real

Al menos cinco números situados (uno construido con Pitágoras).

Intervalos y tolerancia

Un intervalo con su gráfica y una pieza con tolerancia.

Error

Error absoluto y relativo de una aproximación.

Ejemplos y contraejemplos

Tres afirmaciones de F9: ¿V o F? Razón.

Exacto o aproximado

¿Cuándo usamos cada uno?

Conclusión y revisión

Firma del equipo revisor.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 1 · Números reales: precisión y estructura

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Mapa razonado de los números reales**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] Los números están clasificados en el conjunto más pequeño y sin contradicciones con F2.
- [ ] Las inclusiones $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y la separación Q / I se ven claramente en el mapa.
- [ ] Hay una fracción generatriz calculada y simplificada.
- [ ] Al menos cinco números están situados en la recta, y $\sqrt{2}$ o $\sqrt{5}$ está construido con Pitágoras.
- [ ] Los intervalos tienen notación correcta y gráfica con extremos incluidos o excluidos bien marcados.
- [ ] Se calcula un error absoluto y otro relativo con su fórmula y unidades.
- [ ] Cada afirmación del mapa lleva un ejemplo o un contraejemplo concreto.
- [ ] Se distingue claramente entre valor exacto (radical, π) y aproximación (con su error).
- [ ] El mapa se comprobó con la calculadora o con otro equipo.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 1 · Números reales: precisión y estructura

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Mapa razonado de los números reales**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 1 · Números reales: precisión y estructura

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé clasificar un número real y justificar por qué es racional o irracional.	◯	◯	◯	◯
Sé acotar el error de una aproximación y decir si cumple una tolerancia.	◯	◯	◯	◯
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	◯	◯	◯	◯
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	◯	◯	◯	◯
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	◯	◯	◯	◯
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	◯	◯	◯	◯

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 1 · Números reales: precisión y estructura

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Los conjuntos numéricos paso a paso: un ejemplo resuelto, símbolos esenciales y actividades guiadas.

Ejemplo modelado: clasificar −3/4

1. ¿Es natural? No: es negativo. **2.** ¿Es entero? No: no es un número sin parte decimal. **3.** ¿Es fracción de enteros? Sí: $\frac{-3}{4}$. **4.** Entonces es racional. En decimal: $-0{,}75$ (exacto). **Conclusión:** $-\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$ y también $\in \mathbb{R}$, pero no está en N ni en Z.

Símbolos esenciales

$\mathbb{N}$ naturales · $\mathbb{Z}$ enteros · $\mathbb{Q}$ racionales · $\mathbb{I}$ irracionales · $\mathbb{R}$ reales · $\in$ «pertenece a» · $\notin$ «no pertenece a» · $\subset$ «está contenido en» · $\cup$ unión · $\cap$ intersección · ∞ infinito. Intervalo: [ ] incluye el extremo, ( ) lo excluye.

1 **Marca con una X en qué conjuntos está cada número (puede estar en varios).**

Número	N	Z	Q	I	R
12					
-5					
$0{,}75$					
$\sqrt{3}$					
$0{,}\overline{6}$					

2 **Completa.**

N ⊂ _____ ⊂ _____ ⊂ R. Un decimal exacto o periódico es un número _____; un decimal con infinitas cifras y sin periodo es un número _____.

3 **Escribe en forma de intervalo: a)** $x \geq 2$**; b)** $-1 < x \leq 4$**; c)** $x < 0$.

4 **Redondea 2/3 a las centésimas y calcula el error absoluto (usa la calculadora para 2/3).**

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 1 · Números reales: precisión y estructura

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Restricciones simultáneas: ¿qué alturas puede tener el dron?

Un dron de reparto debe volar a una altura h (en m) que cumpla a la vez varias restricciones: R1 el sensor solo funciona si $|h - 70| \leq 40$; R2 debe superar los tejados, $h > 50$; R3 la norma interna exige $h \leq 100$. Cada restricción es un intervalo y las condiciones simultáneas son la intersección.

Pasos

1. Escribe cada restricción como intervalo y represéntalas en tres rectas alineadas.
2. Calcula R1 ∩ R2, R1 ∩ R3, R2 ∩ R3 y R1 ∩ R2 ∩ R3.
3. Añade R4: $|h - 100| < 20$ y después R5: $h \geq 100$. ¿Qué intervalo queda en cada caso?
4. Inventa una restricción que deje el conjunto vacío y otra que lo deje reducido a un solo punto.
5. Generaliza: ¿cuándo es no vacía la intersección de [a, b] y [c, d]? ¿Cambia si algún extremo es abierto?

1 **Completa la tabla de intersecciones.**

Restricciones	Intervalo resultante	Gráfica o comentario
R1		
R1 ∩ R2		
R1 ∩ R3		
R2 ∩ R3		
R1 ∩ R2 ∩ R3		
R1 ∩ R2 ∩ R3 ∩ R4		
R1 ∩ R2 ∩ R3 ∩ R4 ∩ R5		

Entrega

Tabla completa, dos restricciones inventadas (una con intersección vacía y otra con un solo punto) y una regla general escrita, justificada con dos ejemplos.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 1 · Números reales: precisión y estructura

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: 0,75; $\sqrt{10}$; [2, 5).
2. $x+3=1$: $x=-2$ (No N, Sí Z, Q, R). $4x=3$: $x=\frac{3}{4}$ (No N, No Z, Sí Q, R). $x^2=9$: $x=3$ en N (y $x=-3$ en Z). $x^2=2$: $x=\pm\sqrt{2}$, solo en R (ni en Q).
3. $1{,}414213562^2=1{,}999999998944727844$, no es 2. Una pantalla solo guarda un número finito de cifras: el lado exacto es $\sqrt{2}$, que no es un decimal finito ni periódico. Cualquier decimal que tecleemos es una aproximación.

Ficha 2

1. T1: Z. T2: N (con $0\in$ N). T3: Q (fracción, decimal exacto 1,75). T4: I. T5: Q ($0{,}\overline{3}=\frac{1}{3}$). T6: I. T7: $\sqrt{16}=4$, N. T9: I (sin periodo). T10: -3, Z. T11: $2\sqrt{3}$, I. T12: Q (periódico mixto). T14: $\sqrt[3]{-8}=-2$, Z.
2. a) $x=0{,}\overline{18}$: $100x-x=18$, $x=\frac{18}{99}=\frac{2}{11}$. b) $3{,}\overline{45}$: $99x=342$, $x=\frac{38}{11}$. c) $1{,}2\overline{3}$: $\frac{123-12}{90}=\frac{111}{90}=\frac{37}{30}$.
3. F (el 1/3 tiene infinitas cifras y es racional). V. F ($\sqrt{16}=4$). V. F ($3{,}14$ es solo una aproximación).

Ficha 3

1. El arco de radio $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}\approx 2{,}236$ corta el eje x en un punto situado un poco más allá de 2 (entre 2 y 2,5).
2. $[-2,3)$; $(1,+\infty)$; $x\le 4$; $|x-2|\le 3\Rightarrow -1\le x\le 5$, es decir $[-1,5]$; $[-1,2]\cap[0,5]=[0,2]$; $x<-1$ o $x\ge 3$. En las rectas: punto relleno si el extremo está incluido, vacío si no.
3. $\frac{\pi}{2}=1{,}5708<1{,}7000<1{,}7300<\sqrt{3}=1{,}7321<\frac{7}{4}=1{,}7500$.

Ficha 4

1. $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$; $\sqrt{18}+\sqrt{8}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$; $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{36}=6$; $\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$; $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=9-2=7$.
2. $8^{2/3}=(\sqrt[3]{8})^2=4$; $25^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{25}}=\frac{1}{5}$; $2^{1/2}\cdot 2^{3/2}=2^2=4$.
3. $2+\sqrt{3}$: irracional. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{16}=4$: racional. $\sqrt{2}+(3-\sqrt{2})=3$: racional. $\frac{1}{2}\pi$: irracional. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$: irracional. Conclusión: sumar o multiplicar irracionales a veces da un racional.
4. Largo $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, ancho $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Perímetro $2(3\sqrt{2}+2\sqrt{2})=10\sqrt{2}\approx 14{,}14$ cm. Área $3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=6\cdot 2=12$ cm²: es un número entero aunque los lados son irracionales.

Ficha 5

1. Error relativo $E_r=\frac{E_a}{\pi}$: 3: $\frac{0{,}1416}{3{,}1416}\approx 4{,}51\,\%$; $\frac{22}{7}$: $\approx 0{,}040\,\%$; 3,14: $\approx 0{,}051\,\%$; $\frac{355}{113}$: $\approx 0{,}0000085\,\%$ ($8{,}5\cdot 10^{-6}\,\%$). La mejor es $\frac{355}{113}$ (con denominador 113); entre las pequeñas, $\frac{22}{7}$ mejora a 3,14.
2. Intervalo $[23{,}7;\ 24{,}3]$. 23,6 no vale (fuera); 24,25 sí vale; 24,31 no vale.
3. $\frac{2}{3}=0{,}666\ldots$. Redondeo 0,667: $E_a\approx 0{,}00033$. Truncamiento 0,666: $E_a\approx 0{,}00067$. Mejor el redondeo.
4. Campo: $E_r=\frac{1}{100}=1\,\%$. Tornillo: $E_r=\frac{0{,}5}{20}=2{,}5\,\%$. Es más precisa la medida del campo, aunque su error absoluto sea mayor.

Ficha 6

1. A1 V: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$. A2 F: $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$. A3 F: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$. A4 V: la media $\frac{p+q}{2}$ es racional y está entre ambos (ej. entre 1 y 2, 1,5). A5 F: $\sqrt{16}=4$. A6 V: si $x\cdot y=q$ fuese racional, $y=\frac{q}{x}$ sería racional (contradicción). A7 F: $a=9$, $b=16$: $\sqrt{25}=5\neq 3+4=7$. A8 V (ej.: entre 1 y 2 está $\sqrt{2}$; en general, si $p<q$ son racionales, $p+\frac{q-p}{\sqrt{2}}$ está entre ambos y es irracional; se acepta un ejemplo bien elegido).
2. Respuesta esperable para A6: si $x\cdot y$ fuese una fracción, dividiendo entre x (que es una fracción no nula) y sería también una fracción, y y es irracional: contradicción. Se valora cualquier razón correcta.
3. Revisión cruzada: respuestas abiertas, deben tener los cinco elementos del cotejo.

Ficha 7

1. $\sqrt{49}=7$: N. $-\frac{5}{3}$: Q. $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$: I. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{16}=4$: N. $\pi-3$: I (si fuese racional, $\pi=3+(\pi-3)$ lo sería). $4{,}\overline{16}=4+\frac{16}{99}=\frac{412}{99}$: Q.
2. $E_a=|2{,}24-2{,}2360679\ldots|\approx 0{,}00393$ cm. $E_r=\frac{0{,}00393}{2{,}23607}\approx 0{,}00176=0{,}18\,\%$. Como $0{,}00393<0{,}005$, cumple la tolerancia.
3. Intervalo $[17{,}8;\ 18{,}2]$: 17,85 sí; 18,15 sí; 18,25 no.
4. Con la calculadora: $\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 1{,}414+1{,}732=3{,}146$, pero $\sqrt{5}\approx 2{,}236$. Marta confunde $\sqrt{a+b}$ con $\sqrt{a}+\sqrt{b}$: la raíz no se distribuye sobre la suma.

Refuerzo

1. 12: N, Z, Q, R. −5: Z, Q, R. 0,75: Q, R. $\sqrt{3}$: I, R. $0{,}\overline{6}=\frac{2}{3}$: Q, R.
2. N ⊂ Z ⊂ Q ⊂ R; racional; irracional.
3. a) $[2,+\infty)$; b) $(-1,4]$; c) $(-\infty,0)$.
4. $\frac{2}{3}\approx 0{,}67$; $E_a=|0{,}67-0{,}6667|\approx 0{,}0033$.

Ampliación

1. R1: $[30,110]$; R2: $(50,+\infty)$; R3: $(-\infty,100]$. R1∩R2 = $(50,110]$; R1∩R3 = $[30,100]$; R2∩R3 = $(50,100]$; R1∩R2∩R3 = $(50,100]$.
2. R4: $|h-100|<20\Rightarrow(80,120)$. R1∩R2∩R3∩R4 = $(80,100]$. Con R5 ($h\geq 100$): queda $\{100\}$, un solo punto.
3. Vacío: por ejemplo $h<40$ junto a R2. Un punto: $h\geq 100$ junto a R3.
4. Regla: $[a,b]\cap[c,d]\neq\emptyset\iff\max(a,c)\leq\min(b,d)$. Si el extremo común es abierto en alguno de los dos, la intersección en ese punto queda vacía: $[1,3]\cap(3,5]=\emptyset$, pero $[1,3]\cap[3,5]=\{3\}$.

⚠ Errores frecuentes

- Creer que todo decimal con infinitas cifras es irracional (olvidar los periódicos).
- Pensar que 3,14 o 22/7 son exactamente π, en lugar de aproximaciones.
- Confundir intervalo abierto y cerrado o escribir el corchete en +∞ o −∞.
- Aplicar mal la raíz: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ o sumar radicales con distinto radicando.
- Calcular el error relativo sin dividir entre el valor real, o confundir error absoluto y error relativo al comparar precisión.
- Creer que la suma o el producto de dos irracionales es siempre irracional.

⚖ Criterios para valorar respuestas abiertas

- En las justificaciones de F9 se valora que el razonamiento sea general (verdaderas) o que el contraejemplo sea concreto y verificable (falsas).
- Se acepta otra convención sobre el 0 en N si se explicita y se aplica con coherencia.
- En el mapa se valora la claridad de la conexión entre representaciones (conjuntos, recta, intervalos) y que cada afirmación tenga una razón escrita.
- La calculadora sirve para comprobar, pero los pasos de simplificación y el error deben aparecer escritos.

02

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Expresiones que revelan estructura

PREGUNTA GUÍA

¿Qué forma de una expresión nos permite ver mejor la información que necesitamos?

CURSO 4.º ESO · Matemáticas B	SESIONES 8 sesiones · 1.º trimestre	SENTIDOS PRIORITARIOS D · Sentido algebraico
COMPETENCIAS ESPECÍFICAS CE1, CE2, CE3, CE5, CE8	PRODUCTO FINAL Dossier de equivalencias algebraicas	CRITERIOS DE EVALUACIÓN 1.1, 1.2, 2.1, 3.1, 5.2, 8.1

Contexto, reto y sentido

El instituto va a rodear la jardinera cuadrada del patio con un **paseo de adoquines** de ancho constante. Tres alumnos del taller de diseño entregan tres expresiones distintas para la superficie del paseo: $(a+2b)^2-a^2$, $4ab+4b^2$ y $4b(a+b)$, donde a es el lado de la jardinera y b el ancho del paseo. El conserje pregunta: «¿son la misma cuenta o hay alguna equivocada?». Y la tesorera, cuál sirve para saber si el dinero llega.

La situación pone en juego el sentido algebraico: **transformar** una expresión sin cambiar su valor (desarrollo, productos notables, factor común, factorización), **demostrar** que dos formas son equivalentes y **elegir** la forma que deja ver lo que se busca (cuánto cuesta, cuándo vale cero, de qué piezas se compone). El dossier final reúne equivalencias comprobadas con álgebra, con tablas o tecnología y con dibujos.

Reto

Elaborar un dossier de equivalencias algebraicas sobre la superficie del paseo de la jardinera: demostrar cada equivalencia, comprobarla de otro modo, detectar las falsas y decidir qué forma conviene para cada pregunta.

Producto final

Dossier de equivalencias algebraicas.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE5** Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- **1.1** Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.
- **1.2** Analizar y seleccionar diferentes herramientas y estrategias elaboradas en la resolución de un mismo problema, valorando su eficiencia.
- **2.1** Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.
- **3.1** Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada.
- **5.2** Analizar y poner en práctica conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.
- **8.1** Comunicar ideas, conclusiones, conjeturas y razonamientos matemáticos utilizando diferentes medios, con coherencia, claridad y terminología apropiada.

Saberes básicos prioritarios

D
Sentido algebraico

- Expresiones algebraicas equivalentes: valor numérico, equivalencia e identidades; diferencia entre ecuación e identidad.
- Operaciones con polinomios: suma, resta y producto; grado y coeficientes.
- Productos notables (cuadrado de una suma y de una diferencia, suma por diferencia) y su interpretación geométrica con áreas.
- Factorización de polinomios: factor común, identidades notables, trinomios con raíces enteras y regla de Ruffini en casos sencillos.
- Elección de la forma de una expresión (desarrollada, factorizada, de vértice) según la información que se quiere obtener.
- Uso de herramientas digitales (hoja de cálculo, GeoGebra, Desmos o CAS) para comprobar equivalencias, sin sustituir la demostración.

F
Sentido socioafectivo

- Aceptación del error como parte del proceso: contraejemplos propios y ajenos.
- Comunicación de razonamientos algebraicos con claridad y respeto por otras estrategias.

Objetivos didácticos

- ✓ Transformar expresiones manteniendo equivalencia.
- ✓ Factorizar expresiones en casos adecuados.
- ✓ Reconocer qué forma facilita raíces, signo o cálculo.
- ✓ Comprobar identidades algebraicamente y con tecnología.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Formas distintas, mismo objeto

Evidencia: Ficha 1: tabla de valores del paseo con tres expresiones y significado geométrico de cada término.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Operaciones y productos notables

Evidencia: Ficha 2: desarrollo de productos notables y polinomios, y modelo de área de un cuadrado de una suma.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Factor común

Evidencia: Ficha 3: factor común numérico, literal y por agrupación, con comprobación al desarrollar.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Factorización de casos básicos

Evidencia: Ficha 4: factorización por identidades notables, trinomios y regla de Ruffini.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Equivalencia y comprobación

Evidencia: Ficha 5: clasificación de identidades verdaderas y falsas con valores de prueba, demostración y comprobación con tecnología.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Elección de forma según objetivo

Evidencia: Ficha 6: elección de la forma más útil según la pregunta (jardín de 40 m de valla y ancho del paseo).

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Dossier de transformaciones

Evidencia: Ficha 7: borrador del dossier con tres equivalencias demostradas y comprobadas.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

8

SESIÓN 8

Reto de generalización

Evidencia: Ficha 8: reto individual de simplificación, factorización, conjetura y refutación.

Ficha: Anexo 3 · ficha 8

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

- Álgebra manipulativa opcional
- calculadora CAS/GeoGebra solo para comprobación

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo Anexo 8

Expresiones de grado 2 y guion de pasos.

Ampliación Anexo 9

Investigar una identidad paramétrica sencilla y justificarla geométrica y algebraicamente.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial
Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa
Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final
Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Reformulación del problema del paseo con dibujo y datos (a, b, coste por m^2, presupuesto) e interpretación de cada término de las expresiones.	Ficha 1 / lista de cotejo
1.2	Elección razonada de la técnica (factor común, identidad notable, trinomio, Ruffini) y de la forma de la expresión según el objetivo, valorando su eficiencia.	Fichas 3, 4 y 6 / escala de valoración
2.1	Comprobación de equivalencias con tabla de valores, tecnología y desarrollo, y detección de identidades falsas con contraejemplo.	Ficha 5 y Ficha 8 / rúbrica
3.1	Conjetura sobre expresiones que dan siempre un cuadrado perfecto o un valor constante y su comprobación con casos y con álgebra.	Ficha 8 (tarea de n(n+2)+1) / rúbrica
5.2	Conexión entre representaciones: modelo de área, expresión algebraica, ecuación del ancho del paseo y gráfica del área de la jardinera.	Fichas 2 y 6 y dossier (Anexo 4) / rúbrica
8.1	Redacción de demostraciones y justificaciones del dossier con lenguaje algebraico correcto (igualdad, paréntesis, factor, término) y explicación oral breve.	Dossier (Anexo 4) y Ficha 7 / rúbrica

Evidencias clave de esta SdA

Dossier, demostraciones y comprobaciones.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 2 · Expresiones que revelan estructura

ALUMNADO

El instituto quiere un paseo de adoquines alrededor de la jardinera del patio. Tres compañeros del taller de diseño traen tres fórmulas distintas para calcular los metros cuadrados: $(a+2b)^2-a^2$, $4ab+4b^2$ y $4b(a+b)$. Con $a = 6$ m y $b = 1$ m las tres dan 28 m^2; con $b = 2$ m dan 64 m^2. ¿Casualidad? Y si una estuviese mal, ¿cómo lo demostraríais? Vais a ser el gabinete que decide si las fórmulas son equivalentes, qué forma conviene para cada pregunta y a quién da la razón el álgebra.

¿Qué forma de una expresión nos permite ver mejor la información que necesitamos?

Vuestro reto

Elaborar un dossier de equivalencias algebraicas sobre la superficie del paseo de la jardinera: demostrar cada equivalencia, comprobarla de otro modo, detectar las falsas y decidir qué forma conviene para cada pregunta.

Lo que vais a producir

Dossier de equivalencias algebraicas.

Hoja de ruta · 8 sesiones

1. Calculamos el área del paseo con tres fórmulas y miramos qué significa cada término.
2. Desarrollamos productos notables y operamos polinomios; vemos por qué $(a+b)^2$ no es a^2+b^2.
3. Sacamos factor común y comprobamos desarrollando.
4. Factorizamos con identidades notables, trinomios y Ruffini.
5. Comprobamos equivalencias con tablas, tecnología y demostraciones; cazamos las falsas.
6. Elegimos la forma más útil según lo que queremos saber.
7. Montamos el dossier con tres equivalencias demostradas.
8. Resolvemos un reto de generalización individual.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Transformar expresiones manteniendo equivalencia.
- ✓ Factorizar expresiones en casos adecuados.
- ✓ Reconocer qué forma facilita raíces, signo o cálculo.
- ✓ Comprobar identidades algebraicamente y con tecnología.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 2 · Expresiones que revelan estructura

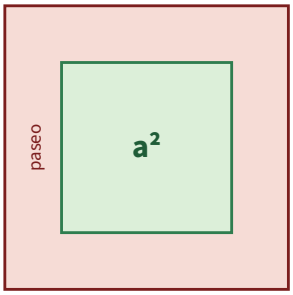
ALUMNADO

Dibujos del paseo y de los productos notables, datos del proyecto (ficticios), cuadro de fórmulas, tabla de valores, identidades para probar, una gráfica y un protocolo para comprobar con tecnología.

F1 El paseo de la jardinera, de tres maneras

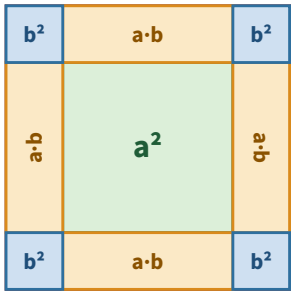
ESQUEMA

$(a + 2b)^2 - a^2$



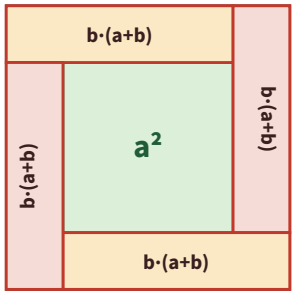
cuadrado grande menos jardinera

$4ab + 4b^2$



4 rectángulos a·b y 4 esquinas b^2

$4b(a + b)$



4 rectángulos iguales b·(a + b)

Fuente: Esquema de elaboración propia. a = lado de la jardinera, b = ancho del paseo.

Cada dibujo corresponde a una de las tres expresiones del equipo de diseño. ¿Qué parte del dibujo es cada término?

F2 Datos del proyecto

DATOS

Dato	Valor
Jardinera	Cuadrada, de lado $a = 6$ m
Propuesta A	Paseo de ancho $b = 1{,}5$ m
Propuesta B	Paseo de ancho $b = 2$ m
Precio del adoquín colocado	35 € por m^2
Presupuesto máximo	2 000 €
Horario de obras	Del 1 al 15 de julio (dato que no influye en el cálculo)

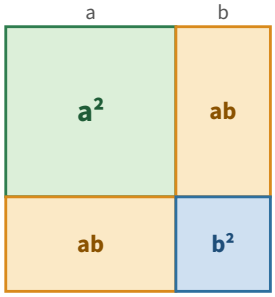
Fuente: Datos ficticios creados para el aula.

¿Qué propuesta se puede pagar? Ten en cuenta qué datos hacen falta.

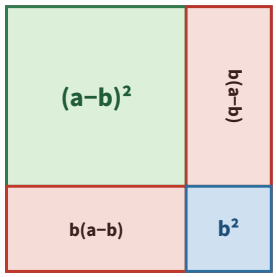
F3 Modelos de área de los productos notables

ESQUEMA

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



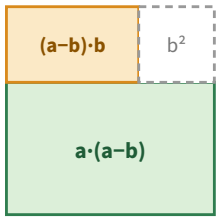
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



$a^2 = (a-b)^2 + 2\cdot b(a-b) + b^2$

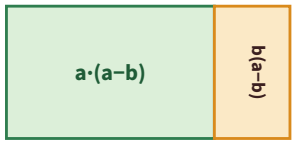
despejando: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$



cuadrado a^2 sin la esquina b^2

se recoloca la pieza naranja:



altura a − b

base a + b

Fuente: Esquema de elaboración propia.

Los productos notables son áreas: en el primero, el cuadrado grande se corta en cuatro piezas. ¿Por qué falta el término 2ab en $(a+b)^2 = a^2 + b^2$?

F4 Cuadro de fórmulas: desarrollar y factorizar

TEXTO

Productos notables: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \cdot (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \cdot (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Factor común. $6x^2 - 9x = 3x(2x-3)$. Se comprueba desarrollando: $3x \cdot 2x - 3x \cdot 3 = 6x^2 - 9x$.

Por agrupación. $ax + ay + bx + by = a(x+y) + b(x+y) = (a+b)(x+y)$.

Trinomio $x^2 + bx + c$. Se buscan dos números que **sumen** b y **multipliquen** c: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, porque $-2-3 = -5$ y $(-2)(-3) = 6$.

Regla de Ruffini (para polinomios de grado 3 o más): se prueba como raíz un divisor del término independiente; si el resto de la división es 0, $x - r$ es factor. Mira el esquema en F9.

Fuente: Elaboración propia.

Factorizar y desarrollar son operaciones inversas: cada una sirve para comprobar la otra.

F5 Tabla de valores del paseo (a = 6 m)

DATOS

b (m)	E1: $(a+2b)^2 - a^2$	E2: $4ab + 4b^2$	E3: $4b(a+b)$	E4: $4b^2$
0	0	0	0	0
1	28	28	28	4
2	64	64	64	16
3	108	108	108	36
4	160	160	160	64

Fuente: Valores calculados para este cuaderno. La expresión E4 es un error frecuente que circula en la clase.

Los valores se dan en m². E4 viene de pensar que $(a+2b)^2 = a^2 + 4b^2$. ¿Qué falta? ¿Por qué E4 coincide con las demás cuando $b = 0$?

F6 Identidades para probar

DATOS

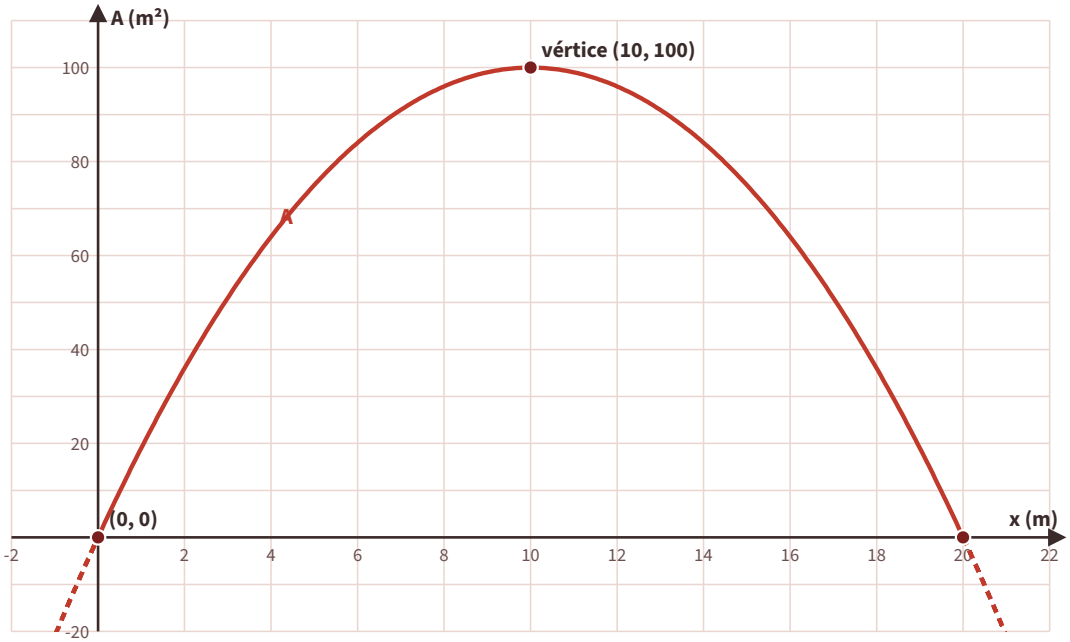
N.º	Igualdad
I1	$(x+3)^2 = x^2 + 9$
I2	$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$
I3	$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$
I4	$(2x)^2 = 2x^2$
I5	$x^2 - 9 = (x-3)^2$
I6	$2(x+5) = 2x + 5$

Fuente: Elaboración propia.

Una igualdad es una identidad si es cierta para todos los valores de x. Para negarla basta un valor que no la cumpla.

F7 El jardín de 40 m de valla: A(x) = x(20 − x)

GRÁFICO



Tres formas de la misma expresión: $A(x) = x(20 - x)$ (factorizada), $A(x) = 20x - x^2$ (desarrollada) y $A(x) = 100 - (x - 10)^2$ (de vértice).

Fuente: Gráfica generada para este cuaderno. Situación ficticia: un jardín rectangular con 40 m de valla y ancho x metros.

¿Qué forma te deja ver más rápido cuándo el área es 0? ¿Y cuál es el máximo?

F8 Cómo comprobar con tecnología

PROTOCOLO

- **Gráficas.** Escribe las dos expresiones como $f(x)$ y $g(x)$. Si las gráficas coinciden en toda la ventana, hay una **fuerte pista** de equivalencia, no una demostración.
- **Tabla.** En la hoja de cálculo, calcula las dos expresiones para al menos 6 valores, incluidos negativos y decimales.
- **CAS.** Pide «Simplifica» o «Desarrolla» a la diferencia $f(x) - g(x)$: si da 0, son equivalentes.
- **Desconfía.** Si algo no coincide, busca el valor concreto que lo prueba y escríbelo como contraejemplo.
- **Demuestra.** La tecnología confirma; el álgebra explica por qué.

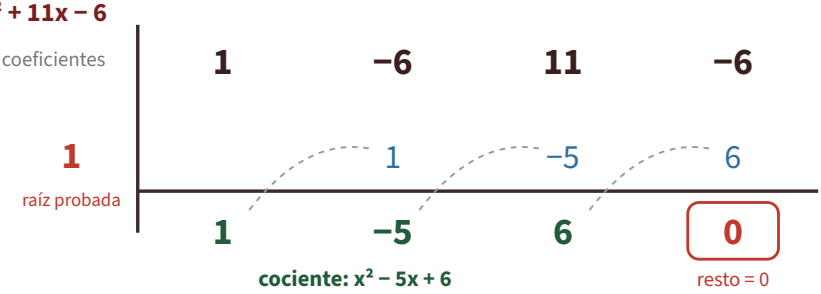
Fuente: Elaboración propia. Válido con GeoGebra, Desmos u hoja de cálculo.

Una captura de pantalla no demuestra nada: acompáñala siempre de una razón escrita.

F9 Regla de Ruffini paso a paso

ESQUEMA

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$



Se baja el 1. Cada resultado se multiplica por la raíz (1) y se suma al coeficiente siguiente: $-6 + 1 = -5$; $11 + (-5) = 6$; $-6 + 6 = 0$.

Resto 0 ⇒ $x - 1$ es factor: $P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Fuente: Esquema de elaboración propia.

Prueba con otra raíz ($x = 2$ o $x = 3$): el resto también es 0. ¿Por qué solo probamos divisores de −6?

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 2 · Expresiones que revelan estructura

ALUMNADO

FICHA 1 Tres expresiones, un mismo paseo

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Lee F1, F2 y F5. Antes de manipular nada, comprueba qué dicen las tres expresiones.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

(x + 2)(x + 3) es igual a…

☐ $x^2 + 5x + 6$ ☐ $x^2 + 6$ ☐ $x^2 + 5x + 5$

Un factor común de 6x + 9 es…

☐ 3 ☐ 6 ☐ 9

El valor de $3x^2 - 1$ para x = −2 es…

☐ 11 ☐ −13 ☐ 35

2 **Calcula el área del paseo con cada expresión y comprueba que coinciden.**

Expresión	a = 6, b = 1	a = 6, b = 2	a = 12, b = 1,5
$E_1 = (a + 2b)^2 - a^2$			
$E_2 = 4ab + 4b^2$			
$E_3 = 4b(a + b)$			

3 **Con F1, explica qué parte del dibujo es cada término de $4ab + 4b^2$ y cada factor de $4b(a + b)$.**

4 **Con F2, calcula el coste de la propuesta A y de la B. ¿Cuál cabe en el presupuesto? ¿Qué expresión usas y por qué?**

FICHA 2

Productos notables y polinomios

Sesión 2

Usa F3 y F4. El álgebra de áreas te ayuda a ver por qué salen los términos.

1 **Desarrolla y reduce.**

Expresión	Desarrollo
$(x+4)^2$	
$(x-5)^2$	
$(2x+3)(2x-3)$	
$(3x-2)^2$	
$(x+2)(x^2-3x+1)$	

2 **Sean $P(x)=2x^2-3x+1$ y $Q(x)=x^2+4x-5$. Calcula $P+Q$, $P-Q$ y $P\cdot Q$ e indica el grado de cada resultado.**

3 **Dibuja un cuadrado de lado $x+3$ y colócale las cuatro piezas de área (x^2, $3x$, $3x$ y 9). Escribe el desarrollo.**

4 **Desarrolla $(a+2b)^2-a^2$ y comprueba que obtienes E_2 de F5. ¿Qué paso explica que desaparezca a^2?**

FICHA 3 Factor común

Sesión 3

Factorizar es el camino de vuelta de desarrollar. Comprueba cada resultado desarrollando.

1 **Saca factor común y comprueba.**

Expresión	Factor común	Resultado	Comprobación
$6x + 9$			
$x^2 - 5x$			
$12a^2b - 18ab^2$			
$4x^3 - 8x^2 + 6x$			
$ax + ay + bx + by$			

2 **Usa el factor común para calcular de cabeza: a)** $83 \cdot 17 + 83 \cdot 83$; **b)** $7{,}3 \cdot 12 + 7{,}3 \cdot 8$.

3 **Parte de** $E_2 = 4ab + 4b^2$ **y obtén** E_3. **Calcula el área para** $a = 12$ **y** $b = 1{,}5$ **con la forma que te parezca más cómoda y explica la elección.**

FICHA 4 Factorizar con identidades, trinomios y Ruffini

Sesión 4

Usa el cuadro de F4 y el esquema de F9. Antes de factorizar, pregúntate: ¿hay factor común?, ¿es diferencia de cuadrados?, ¿es un cuadrado perfecto?

1 **Relaciona cada expresión con su factorización.**

1	$x^2 - 49$	a	$(x - 2)(x - 3)$
2	$x^2 + 10x + 25$	b	$(3x - 2)^2$
3	$x^2 - 5x + 6$	c	$(x - 7)(x + 7)$
4	$9x^2 - 12x + 4$	d	$(x + 5)^2$

2 **Factoriza completamente.**

Expresión	Tipo	Factorización
$x^2 - 81$		
$4x^2 - 25$		
$x^2 + 8x + 16$		
$x^2 + x - 12$		
$x^2 - 7x + 10$		
$2x^2 - 18$		

3 **Comprueba que $x = 1$ es raíz de $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, divide con Ruffini y factoriza el resultado.**

4 **Aplica la diferencia de cuadrados a $(a + 2b)^2 - a^2$ para llegar a E_3.**

FICHA 5 Equivalencia y comprobación

Sesión 5

Usa F5, F6 y F8. Un valor que coincide no demuestra nada; un valor que falla lo refuta todo.

1 **Con F5: ¿cuáles de E1, E2, E3 y E4 son equivalentes? Calcula también los valores para $b = 1{,}5$ y $b = 5$. ¿Por qué E4 engaña cuando $b = 0$?**

2 **Clasifica las igualdades de F6. Si es falsa, escribe un valor de x que la refute; si es verdadera, demuéstrala desarrollando.**

N.º	¿Identidad?	Valor de prueba o demostración
I1		
I2		
I3		
I4		
I5		
I6		

3 **Demuestra con álgebra que $(a+2b)^2 - a^2 = 4b(a+b)$ y compruébalo con tecnología (F8): describe qué hiciste y qué viste.**

FICHA 6 ¿Qué forma conviene? Sesión 6

Usa F7. Cada pregunta se responde mejor desde una forma distinta de la misma expresión.

1 **Relaciona el objetivo con la forma más útil.**

1 Saber cuándo vale 0 ●	● **a** Desarrollada (suma de términos)
2 Hallar el valor máximo ●	● **b** Factorizada (producto)
3 Contar piezas de cada tipo ●	● **c** De vértice (cuadrado perfecto)

2 Para $A(x) = x(20 - x)$ de F7: a) ¿para qué valores de x vale 0?; b) ¿cuál es el área máxima y para qué x?; c) ¿cuánto vale $A(7)$? Indica con qué forma lo resuelves.

3 Comprueba que $100 - (x - 10)^2 = 20x - x^2$ desarrollando.

4 Con $a = 6$, ¿qué ancho b da un paseo de exactamente 64 m²? Plantea $4b(6 + b) = 64$, simplifica, factoriza y justifica qué solución se descarta. ¿Cabe en el presupuesto de F2?

FICHA 7 Borrador del dossier

Sesión 7

En equipo, con los roles de siempre. Elegid tres equivalencias (una debe ser la del paseo) y completad su ficha.

1 Elegid tres equivalencias: la del paseo $(a + 2b)^2 - a^2 \equiv 4b(a + b)$, otra de F6 y una nueva (por ejemplo $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 4x$). Completad la tabla.

Equivalencia	Demostración algebraica	Comprobación (tabla o tecnología)	Interpretación o forma útil

2 **Redactad una conclusión de tres frases: qué forma recomendáis para el cálculo del coste y por qué.**

3 **Revisión cruzada: otro equipo comprueba vuestro dossier.**

- [ ] Cada equivalencia tiene una demostración paso a paso
- [ ] Hay una comprobación con valores o tecnología
- [ ] Se dice qué forma conviene y para qué
- [ ] No aparecen igualdades falsas sin contraejemplo
- [ ] El lenguaje algebraico es correcto

FICHA 8 Reto de generalización

Sesión 8

Prueba individual. Escribe todos los pasos.

1 **Simplifica $(x+5)^2-(x-1)(x+1)-10x$. ¿Qué observas?**

2 **Factoriza: a) $3x^2-12$; b) x^2-6x+9; c) x^2-x-12.**

3 **Calcula $n(n+2)+1$ para $n=1,2,3,4$. Enuncia una conjetura y demuéstrala.**

4 Una jardinera de lado $a = 10$ m lleva un paseo de ancho $b = 1$ m. Calcula el área con la forma factorizada. ¿Qué forma muestra que el área es siempre múltiplo de 4 si a y b son enteros?

5 Un compañero afirma que $(x - 4)^2 = x^2 - 16$. Refútalo con un valor y corrige la igualdad.

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 2 · Expresiones que revelan estructura

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Dossier de equivalencias algebraicas del paseo de la jardinera. Cada equivalencia lleva demostración, comprobación y comentario.

Título y equipo

Datos y dibujo del paseo

a, b, coste por m^2 y presupuesto; dibujo con medidas.

Tres formas del área

Escribid E1, E2 y E3 y relacionadlas con el dibujo.

Demostración algebraica

Paso a paso, con razones.

Comprobación

Tabla de valores o tecnología.

Otras dos equivalencias

Una identidad de F6 y una nueva, con su demostración.

¿Qué forma conviene?

Para coste, para ancho del paseo y para contar piezas.

Contraejemplo y conclusión

Una igualdad falsa refutada y recomendación final.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 2 · Expresiones que revelan estructura

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Dossier de equivalencias algebraicas**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] El dibujo del paseo tiene a y b señaladas y coincide con las expresiones escritas.
- [ ] Las tres expresiones del área están escritas sin errores de signo ni de paréntesis.
- [ ] Cada equivalencia está demostrada paso a paso, sin saltos injustificados.
- [ ] Hay una comprobación con tabla, tecnología o desarrollo, y los valores son correctos.
- [ ] Se incluye al menos una igualdad falsa refutada con un contraejemplo.
- [ ] Se explica qué forma conviene para cada pregunta (coste, ancho del paseo, piezas).
- [ ] Los productos notables y los factores comunes están bien aplicados.
- [ ] Se usan las unidades (m, m^2, €) en los resultados numéricos.
- [ ] El lenguaje algebraico es preciso (igualdad, factor, término, identidad).

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 2 · Expresiones que revelan estructura

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Dossier de equivalencias algebraicas**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 2 · Expresiones que revelan estructura

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé desarrollar y factorizar expresiones usando productos notables y factor común.	◯	◯	◯	◯
Sé comprobar si dos expresiones son equivalentes y buscar un contraejemplo si no lo son.	◯	◯	◯	◯
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	◯	◯	◯	◯
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	◯	◯	◯	◯
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	◯	◯	◯	◯
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	◯	◯	◯	◯

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 2 · Expresiones que revelan estructura

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Expresiones de grado 2 con un guion de pasos para factorizar y desarrollar sin perderte.

Guion de pasos para factorizar

1. ¿Hay un factor común? Sácalo. **2.** ¿Son dos términos que son cuadrados con un signo menos? Diferencia de cuadrados. **3.** ¿Son tres términos con dos cuadrados y el doble producto? Cuadrado perfecto. **4.** Si no, busca dos números que **sumen** el coeficiente de x y **multipliquen** el término independiente. **5.** Comprueba desarrollando.

Ejemplo modelado: $x^2 + 5x + 6$

Buscamos dos números que sumen 5 y multipliquen 6: son 2 y 3 (porque $2 + 3 = 5$ y $2 \cdot 3 = 6$). Entonces $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$. Comprobación: $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$. ✔

Glosario

Identidad: igualdad cierta para todos los valores. **Desarrollar:** quitar paréntesis y reducir. **Factorizar:** escribir como producto. **Binomio / trinomio:** expresión de 2 / 3 términos. **Raíz:** valor de x que hace 0 la expresión.

1 Completa los desarrollos.

Expresión	Primer término al cuadrado	Doble producto	Último término al cuadrado	Desarrollo
$(x + 2)^2$	x^2			
$(x - 3)^2$				
$(x + 5)(x - 5)$				

2 Busca los dos números y factoriza.

Trinomio	Suman	Multiplican	Los números	Factorización
$x^2 + 7x + 12$	7	12		
$x^2 - x - 6$	−1	−6		
$x^2 - 8x + 15$				

3 Completa: $x^2 - 25 = (x - \_\_\_)(x + \_\_\_)$ y $6x + 12 = \_\_\_ \cdot (x + \_\_\_)$.

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 2 · Expresiones que revelan estructura

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Una identidad que fabrica ternas pitagóricas

La identidad $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ tiene una prueba geométrica muy visual y una prueba algebraica muy corta. Con ella se puede construir una fórmula que genera ternas de números enteros con $x^2+y^2=z^2$.

Pasos

1. Dibuja un cuadrado de lado $a+b$ y dentro un cuadrado de lado $a-b$ (con $a>b$); explica por qué el espacio restante son 4 rectángulos de área ab.
2. Demuestra la identidad $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ desarrollando.
3. Sustituye $a=m^2$ y $b=n^2$ y llega a $(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$.
4. Genera ternas con valores de $m>n$ y comprueba cada una con la calculadora.
5. Responde y justifica: ¿qué pasa si $m=n$? ¿Se obtiene (9, 12, 15) con enteros? ¿Por qué?

1 **Completa la tabla de ternas.**

m	n	m^2-n^2	$2mn$	m^2+n^2	¿Cumple $x^2+y^2=z^2$?
2	1				
3	2				
4	1				
4	3				
5	2				

Entrega

Una página con la prueba geométrica, la prueba algebraica, la tabla de ternas comprobadas y la respuesta razonada a las dos últimas preguntas.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 2 · Expresiones que revelan estructura

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: $x^2 + 5x + 6$; 3; 11.
2. E_1: $(6+2)^2 - 36 = 28$; $(6+4)^2 - 36 = 64$; $(12+3)^2 - 144 = 81$. E_2: $24 + 4 = 28$; $48 + 16 = 64$; $72 + 9 = 81$. E_3: $4 \cdot 1 \cdot 7 = 28$; $4 \cdot 2 \cdot 8 = 64$; $4 \cdot 1{,}5 \cdot 13{,}5 = 81$. Coinciden siempre.
3. En $4ab + 4b^2$: cuatro rectángulos $a \cdot b$ (los lados del paseo) y cuatro cuadrados b^2 (las esquinas). En $4b(a+b)$: cuatro rectángulos iguales de lados b y $a+b$ colocados en molinillo.
4. A: $b = 1{,}5$, área $4 \cdot 1{,}5 \cdot 7{,}5 = 45$ m², coste $45 \cdot 35 = 1\,575$ €: cabe. B: $b = 2$, área 64 m², coste $64 \cdot 35 = 2\,240$ €: supera los 2 000 €. Conviene la forma factorizada porque exige menos operaciones. El horario de obras no hace falta.

Ficha 2

1. $x^2 + 8x + 16$; $x^2 - 10x + 25$; $4x^2 - 9$; $9x^2 - 12x + 4$; $(x+2)(x^2 - 3x + 1) = x^3 - 3x^2 + x + 2x^2 - 6x + 2 = x^3 - x^2 - 5x + 2$.
2. $P + Q = 3x^2 + x - 4$ (grado 2). $P - Q = x^2 - 7x + 6$ (grado 2). $P \cdot Q = 2x^4 + 8x^3 - 10x^2 - 3x^3 - 12x^2 + 15x + x^2 + 4x - 5 = 2x^4 + 5x^3 - 21x^2 + 19x - 5$ (grado 4).
3. Cuadrado de lado $x+3$: una pieza $x \cdot x = x^2$, dos piezas $3x$ y una pieza $3 \cdot 3 = 9$. $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$.
4. $(a+2b)^2 - a^2 = a^2 + 4ab + 4b^2 - a^2 = 4ab + 4b^2$. Desaparece porque a^2 y $-a^2$ se anulan (se resta la jardinera).

Ficha 3

1. $6x + 9 = 3(2x+3)$; $x^2 - 5x = x(x-5)$; $12a^2b - 18ab^2 = 6ab(2a - 3b)$; $4x^3 - 8x^2 + 6x = 2x(2x^2 - 4x + 3)$; $ax + ay + bx + by = a(x+y) + b(x+y) = (a+b)(x+y)$. Comprobación: desarrollar cada resultado.
2. a) $83(17+83) = 83 \cdot 100 = 8\,300$. b) $7{,}3(12+8) = 7{,}3 \cdot 20 = 146$.
3. $4ab + 4b^2 = 4b(a+b)$. Con $a = 12$, $b = 1{,}5$: $4 \cdot 1{,}5 \cdot 13{,}5 = 6 \cdot 13{,}5 = 81$ m². La forma factorizada exige solo dos operaciones sencillas.

Ficha 4

1. $x^2 - 49 \to (x-7)(x+7)$; $x^2 + 10x + 25 \to (x+5)^2$; $x^2 - 5x + 6 \to (x-2)(x-3)$; $9x^2 - 12x + 4 \to (3x-2)^2$. Es decir, 1-c, 2-d, 3-a, 4-b.
2. $x^2 - 81 = (x-9)(x+9)$ (diferencia de cuadrados); $4x^2 - 25 = (2x-5)(2x+5)$; $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$ (cuadrado perfecto); $x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$ (suman 1 y multiplican −12: 4 y −3); $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$; $2x^2 - 18 = 2(x^2 - 9) = 2(x-3)(x+3)$.
3. $P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$. Ruffini con 1: coeficientes 1, −6, 11, −6 → 1, −5, 6 y resto 0. Cociente $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Por tanto $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.
4. $(a+2b)^2 - a^2 = ((a+2b) - a)((a+2b) + a) = 2b \cdot (2a + 2b) = 4b(a+b)$.

Ficha 5

1. E1, E2 y E3 son equivalentes; E4 no. Para $b = 1{,}5$: 45, 45, 45 y 9. Para $b = 5$: 220, 220, 220 y 100. E4 coincide cuando $b = 0$ porque todas las expresiones valen 0 si el paseo no existe: un único valor no demuestra equivalencia. Falta el doble producto $4ab$ al desarrollar $(a + 2b)^2$.
2. I1 falsa ($x = 1$: 16 y 10). I2 verdadera ($(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$). I3 verdadera ($(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$). I4 falsa ($x = 1$: 4 y 2). I5 falsa ($x = 0$: −9 y 9). I6 falsa ($x = 0$: 10 y 5).
3. $(a + 2b)^2 - a^2 = 4ab + 4b^2 = 4b(a + b)$ (desarrollar y sacar factor común). Con tecnología: las gráficas de $f(b)$ y $g(b)$ coinciden y $f - g$ se simplifica a 0; es una comprobación, no la demostración.

Ficha 6

1. Saber cuándo vale 0: factorizada (1-b). Hallar el máximo: forma de vértice (2-c). Contar piezas: desarrollada (3-a). Para calcular rápido con números redondos también conviene la factorizada.
2. a) $x(20 - x) = 0$: $x = 0$ o $x = 20$ (forma factorizada). b) $100 - (x - 10)^2 \leq 100$, igual a 100 solo si $x = 10$: área máxima 100 m² para $x = 10$ (forma de vértice). c) $A(7) = 7 \cdot 13 = 91$ m².
3. $100 - (x - 10)^2 = 100 - (x^2 - 20x + 100) = 100 - x^2 + 20x - 100 = 20x - x^2$.
4. $4b(6 + b) = 64 \Rightarrow b^2 + 6b - 16 = 0 \Rightarrow (b + 8)(b - 2) = 0$. $b = -8$ se descarta (un ancho no puede ser negativo); $b = 2$ m. El coste sería $64 \cdot 35 = 2\,240$ € y no cabe en 2 000 €.

Ficha 7

1. Respuesta abierta. Debe incluir: paseo $(a + 2b)^2 - a^2 = 4ab + 4b^2 = 4b(a + b)$; una identidad de F6 (I2 o I3) y la nueva ($(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 4x$) con demostración, comprobación con tres o más valores o con tecnología y comentario sobre la forma útil.
2. Recomendación esperable: la forma factorizada $4b(a + b)$ para el coste (pocas operaciones); la desarrollada para contar piezas (4 rectángulos y 4 esquinas).
3. Criterios de revisión cruzada en el Anexo 5.

Ficha 8

1. $(x + 5)^2 - (x - 1)(x + 1) - 10x = x^2 + 10x + 25 - x^2 + 1 - 10x = 26$. El resultado es constante: no depende de x.
2. a) $3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$; b) $(x - 3)^2$; c) $(x - 4)(x + 3)$.
3. $n = 1, 2, 3, 4$: $4, 9, 16, 25$. Conjetura: siempre es un cuadrado perfecto, $(n + 1)^2$. Demostración: $n(n + 2) + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$.
4. $4 \cdot 1 \cdot (10 + 1) = 44$ m². La forma $4b(a + b)$ tiene el factor 4 a la vista.
5. Con $x = 0$: $(0 - 4)^2 = 16$ y $0^2 - 16 = -16$. Correcto: $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$.

Refuerzo

1. $(x + 2)^2$: $x^2, 4x, 4 \to x^2 + 4x + 4$. $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$. $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$.
2. $x^2 + 7x + 12$: suman 7, multiplican 12 → 3 y 4 → $(x + 3)(x + 4)$. $x^2 - x - 6$: suman −1, multiplican −6 → −3 y 2 → $(x - 3)(x + 2)$. $x^2 - 8x + 15$: suman −8, multiplican 15 → −3 y −5 → $(x - 3)(x - 5)$.
3. $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$; $6x + 12 = 6(x + 2)$.

Ampliación

1. El cuadrado grande de lado $a+b$ tiene área $(a+b)^2$; el interior, $(a-b)^2$. La corona restante se puede cortar en 4 rectángulos de lados a y b: área $4ab$.
2. $(a+b)^2-(a-b)^2=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2=4ab$.
3. Con $a=m^2, b=n^2$: $(m^2+n^2)^2-(m^2-n^2)^2=4m^2n^2=(2mn)^2$; luego $(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$.
4. (2,1): 3, 4, 5. (3,2): 5, 12, 13. (4,1): 15, 8, 17. (4,3): 7, 24, 25. (5,2): 21, 20, 29. Comprobaciones: $25=9+16$; $169=25+144$; $289=225+64$; $625=49+576$; $841=441+400$.
5. Si $m=n$: $m^2-n^2=0$ y no hay triángulo (por eso se exige $m>n$). Para $(9,12,15)$ haría falta $2mn=12$, es decir $mn=6$, con $(m,n)=(6,1)$ o $(3,2)$ (con $m>n$), que dan $m^2-n^2=35$ o 5, nunca 9. En realidad $(9,12,15)=3\cdot(3,4,5)$: la fórmula genera las ternas base y para obtener sus múltiplos hay que multiplicar por un factor k.

Errores frecuentes

- Escribir $(a+b)^2=a^2+b^2$ olvidando el doble producto.
- Errores de signo al desarrollar $(a-b)^2$ o al restar un paréntesis: $-(x-1)=-x-1$.
- Dar por demostrada una equivalencia porque coincide en uno o dos valores (por ejemplo, 0 o 1).
- Factorizar sin sacar antes el factor común (por ejemplo, dejar $2x^2-18$ sin factorizar completamente).
- Elegir los números del trinomio con producto correcto pero suma incorrecta.
- Confundir una ecuación (solo algunos valores) con una identidad (todos los valores).

Criterios para valorar respuestas abiertas

- En las demostraciones se valora que cada paso tenga una razón (propiedad distributiva, producto notable, factor común), no solo el resultado.
- Una comprobación con tecnología se acepta como pista, pero la demostración debe estar escrita en álgebra.
- En el dossier se acepta cualquier equivalencia nueva si está bien demostrada y comprobada.
- La elección de forma se valora por la justificación (qué información deja ver), no por una respuesta única.

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

03 Ecuaciones, inecuaciones y restricciones

PREGUNTA GUÍA

¿Cómo cambia la solución cuando pasamos de una igualdad a una restricción?

CURSO 4.º ESO · Matemáticas B	**SESIONES** 8 sesiones · 1.º trimestre	**SENTIDOS PRIORITARIOS** D · Sentido algebraico
COMPETENCIAS ESPECÍFICAS CE1, CE2, CE3, CE4, CE7	**PRODUCTO FINAL** Atlas de conjuntos solución	**CRITERIOS DE EVALUACIÓN** 1.1, 1.2, 2.1, 3.2, 4.2, 7.1

Contexto, reto y sentido

La clase de 4.º organiza un **mercadillo solidario de camisetas**. Cada camiseta lisa cuesta 5 € y la estampación tiene un coste fijo de 150 €. Los tutores calculan que, si el precio de venta es p euros, se venderán unas $50 - 2p$ camisetas: cuanto más caras, menos se venden. El equipo se enfrenta a preguntas distintas con la misma situación: ¿cuánto vale p para no perder dinero?, ¿entre qué precios se gana?, ¿qué ocurre si además hay que vender al menos 20 camisetas?

Cada pregunta se traduce en un tipo distinto de objeto matemático: una **ecuación** (valores concretos), una **inecuación** (un intervalo de valores), un **sistema** (dos condiciones a la vez) o un conjunto de **restricciones** (intersección de conjuntos solución). El producto final, un atlas, recoge un ejemplo de cada tipo con su resolución, su representación y su comprobación.

Reto

Construir un atlas de conjuntos solución del mercadillo: resolver y discutir ecuaciones, sistemas e inecuaciones, representar cada conjunto solución y comprobar con los datos del problema qué soluciones son válidas.

Producto final

Atlas de conjuntos solución.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE4** Utilizar el pensamiento computacional: descomponer, reconocer patrones, generalizar y crear algoritmos.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- **1.1** Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.
- **1.2** Analizar y seleccionar diferentes herramientas y estrategias elaboradas en la resolución de un mismo problema, valorando su eficiencia.
- **2.1** Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.
- **3.2** Plantear variantes de un problema que lleven a una generalización.
- **4.2** Modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz interpretando, modificando, generalizando y creando algoritmos.
- **7.1** Representar matemáticamente la información más relevante de un problema, conceptos, procedimientos y resultados, visualizando ideas y estructurando procesos.

Saberes básicos prioritarios

D
Sentido algebraico

- Ecuaciones lineales y cuadráticas: resolución, discriminante y discusión del número de soluciones.
- Ecuaciones racionales y radicales sencillas: restricciones del dominio, soluciones extrañas y comprobación.
- Sistemas de ecuaciones lineales y de un caso no lineal sencillo (recta y parábola): resolución algebraica y gráfica.
- Inecuaciones lineales y cuadráticas: cambio de sentido al multiplicar por un número negativo, tabla de signos y expresión en forma de intervalo.
- Modelización de restricciones con ecuaciones e inecuaciones; conjuntos solución como intersección de intervalos.
- Representación gráfica de conjuntos solución en la recta real y en el plano.

F
Sentido socioafectivo

- Perseverancia al comprobar y descartar soluciones, y aprendizaje a partir del error.
- Responsabilidad en el reparto de tareas y revisión cruzada del trabajo del equipo.

Objetivos didácticos

- ✓ Resolver y discutir ecuaciones de distintos tipos adecuados al nivel.
- ✓ Resolver sistemas lineales y no lineales sencillos cuando proceda.
- ✓ Representar soluciones de inecuaciones e intervalos.
- ✓ Comprobar y justificar conjuntos solución.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos
El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas
Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples
Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito
Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente
Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Ecuación frente a inecuación

Evidencia: Ficha 1: tabla de beneficio por número de camisetas y contraste entre la ecuación y la inecuación de equilibrio.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Lineales y cuadráticas

Evidencia: Ficha 2: resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas con discriminante y precios de beneficio cero.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Ecuaciones racionales/sencillas según secuenciación

Evidencia: Ficha 3: ecuaciones racionales y radicales con comprobación de soluciones.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Sistemas y representación

Evidencia: Ficha 4: sistemas lineales y no lineal, con representación gráfica y problema de camisetas infantiles y adultas.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Inecuaciones lineales

Evidencia: Ficha 5: inecuaciones lineales, intervalos y rectas, y aplicación al número de camisetas.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Restricciones y conjuntos solución

Evidencia: Ficha 6: restricciones del mercadillo, tabla de signos de la inecuación cuadrática e intersección de conjuntos solución.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Atlas de ejemplos

Evidencia: Ficha 7: borrador del atlas con un ejemplo de cada tipo, resolución, representación y comprobación.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

8

SESIÓN 8

Problema individual de discusión

Evidencia: Ficha 8: problema individual de las pegatinas con ecuación, inecuación, restricción y discusión de un parámetro.

Ficha: Anexo 3 · ficha 8

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Calculadora gráfica/GeoGebra · recta real · banco de ecuaciones

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Ecuaciones lineales/cuadráticas y una inecuación por caso.

Ampliación

Anexo 9

Crear una variante que cambie el número de soluciones y explicar el parámetro responsable.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial
Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa
Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final
Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Reformulación del problema del mercadillo con tabla y recta numérica e identificación de datos útiles (coste fijo, coste por camiseta, demanda).	Ficha 1 / lista de cotejo
1.2	Elección razonada del método (factorización, fórmula, sustitución, reducción, tabla de signos, gráfica) y comparación de la eficiencia de dos caminos.	Fichas 2, 4 y 6 / escala de valoración
2.1	Comprobación de soluciones en la ecuación original y en el contexto (soluciones extrañas, valores fuera del dominio).	Fichas 3 y 6 / rúbrica
3.2	Planteamiento de variantes que cambian el número de soluciones (parámetro k, coste fijo F, pegatinas) y generalización con el discriminante.	Ficha 8 y ampliación (Anexo 9) / rúbrica
4.2	Modelización del mercadillo con ecuaciones, sistemas e inecuaciones y descripción del procedimiento de resolución como algoritmo reutilizable.	Fichas 2 a 5 y atlas (Anexo 4) / rúbrica
7.1	Representación de conjuntos solución en la recta, en el plano y con tabla de signos, correctamente rotulada y con extremos bien marcados.	Fichas 4 a 6 y atlas (Anexo 4) / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Atlas, comprobaciones y representación.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 3 · Ecuaciones, inecuaciones y restricciones

ALUMNADO

Vuestra clase organiza un mercadillo solidario de camisetas. Las camisetas cuestan 5 € cada una, la estampación 150 € y los tutores estiman que a un precio de p euros se venderán 50 − 2p unidades. Un compañero propone 12 €; otro, 20 €; y la tesorera quiere saber a partir de qué cantidad no se pierde dinero. ¿Una ecuación basta? ¿Cuándo hace falta una inecuación? ¿Qué pasa si hay que vender al menos 20 camisetas? Vais a crear el atlas que dice, para cada pregunta, qué valores sirven y cuáles no.

> *¿Cómo cambia la solución cuando pasamos de una igualdad a una restricción?*

Vuestro reto

Construir un atlas de conjuntos solución del mercadillo: resolver y discutir ecuaciones, sistemas e inecuaciones, representar cada conjunto solución y comprobar con los datos del problema qué soluciones son válidas.

Lo que vais a producir

Atlas de conjuntos solución.

Hoja de ruta · 8 sesiones

1. Comparamos ecuación e inecuación con el punto de equilibrio.
2. Resolvemos ecuaciones lineales y cuadráticas y discutimos cuántas soluciones tienen.
3. Resolvemos ecuaciones racionales y radicales y comprobamos las soluciones.
4. Resolvemos sistemas y los representamos.
5. Resolvemos inecuaciones lineales y escribimos intervalos.
6. Combinamos restricciones y calculamos su intersección.
7. Montamos el atlas de conjuntos solución.
8. Resolvemos un problema individual de discusión.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Resolver y discutir ecuaciones de distintos tipos adecuados al nivel.
- ✓ Resolver sistemas lineales y no lineales sencillos cuando proceda.
- ✓ Representar soluciones de inecuaciones e intervalos.
- ✓ Comprobar y justificar conjuntos solución.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 3 · Ecuaciones, inecuaciones y restricciones

ALUMNADO

Caso del mercadillo (datos ficticios), tabla de beneficios, gráficas de ingresos, costes y beneficio, esquemas de conjuntos solución y tabla de signos, tarjetas de restricciones y un banco graduado de ecuaciones, sistemas e inecuaciones.

F1 El mercadillo solidario de camisetas

ESTUDIO DE CASO

La clase de 4.º encarga camisetas blancas para estamparlas con el logotipo del curso y venderlas a favor de una ONG.

- **Coste por camiseta:** 5 €.
- **Coste fijo de estampación (pantallas, diseño):** 150 €, se paga aunque se venda poco.
- **Venta con precio fijo de 12 €:** si se venden n camisetas, el ingreso es $12n$.
- **Modelo con demanda:** si el precio es p euros, se venden $q = 50 - 2p$ camisetas (el tutor lo ha estimado con ventas de otros años). Por tanto $0 \leq p \leq 25$.
- **Stock máximo:** como mucho se pueden preparar 36 camisetas.

Fórmulas. Ingresos $I(p) = p(50 - 2p)$, costes $C(p) = 5(50 - 2p) + 150 = 400 - 10p$ y beneficio $B(p) = I(p) - C(p) = -2p^2 + 60p - 400$.

Fuente: Situación ficticia creada para el aula.

Con precio fijo, ¿cuántas camisetas hay que vender para ganar dinero? Con el modelo de demanda, ¿a qué precios se pierde dinero?

F2 Beneficio según el precio

DATOS

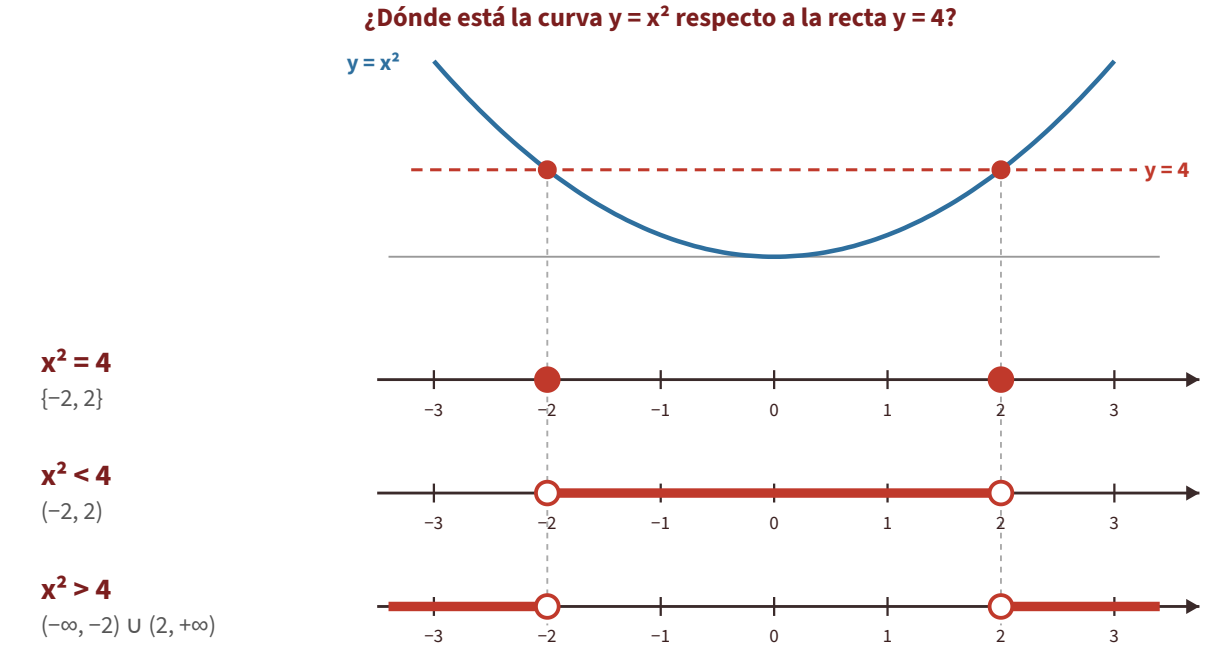
Precio p (€)	Camisetas $q = 50 - 2p$	Ingresos (€)	Costes (€)	Beneficio (€)
5	40	200	350	−150
10	30	300	300	0
12	26	312	280	32
15	20	300	250	50
20	10	200	200	0
25	0	0	150	−150

Fuente: Valores calculados con el modelo de F1. Datos ficticios.

¿Para qué precios no se pierde dinero? Observa que el beneficio es 0 para dos precios distintos.

F3 Ecuación, inecuación y la gráfica que las explica

ESQUEMA



Fuente: Esquema de elaboración propia.

Una ecuación da puntos; una inecuación da un intervalo o una unión de intervalos. ¿Qué cambia cuando la desigualdad es no estricta (≤ o ≥)?

F4 Métodos de resolución: cuadro resumen

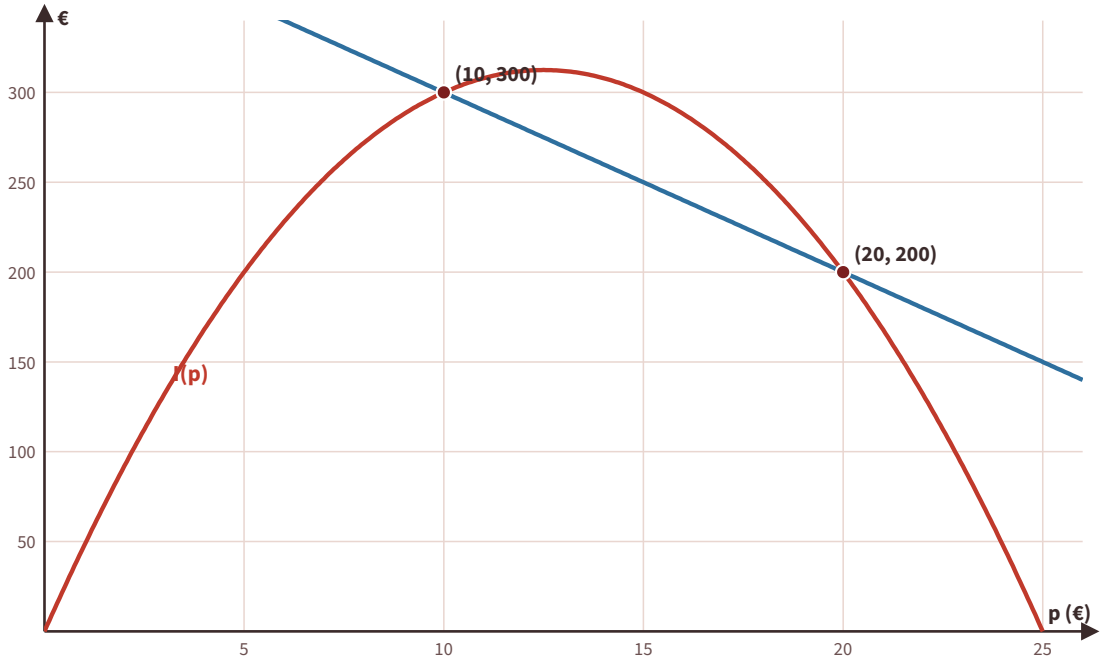
TEXTO

- **Lineal** $ax + b = c$: se agrupan los términos en x y se despeja. Ej.: $3x - 5 = 10 \Rightarrow x = 5$.
- **Cuadrática** $ax^2 + bx + c = 0$: factorizar o usar $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ con $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta > 0$, dos soluciones; si $\Delta = 0$, una (doble); si $\Delta < 0$, ninguna real.
- **Racional:** se multiplica por el denominador común y se descartan los valores que anulan un denominador. Ej.: $\frac{x+2}{x} = 3 \Rightarrow x + 2 = 3x \Rightarrow x = 1$ ($x \neq 0$).
- **Radical:** se aísla la raíz, se eleva al cuadrado y se **comprueba** (al elevar al cuadrado pueden aparecer **soluciones extrañas**).
- **Sistema:** sustitución, reducción o gráfica (los puntos de corte).
- **Inecuación lineal:** igual que una ecuación, pero **al multiplicar o dividir por un número negativo cambia el sentido** de la desigualdad: $-3x > 6 \Rightarrow x < -2$.
- **Inecuación cuadrática:** se resuelve la ecuación asociada y se estudia el signo en cada intervalo con una tabla de signos (F7).
- **Discusión con parámetro:** en $x^2 - 6x + k = 0$ se tiene $\Delta = 36 - 4k$: dos soluciones si $k < 9$, una si $k = 9$ y ninguna si $k > 9$ (la recta $y = -k$ corta, toca o no corta la parábola $y = x^2 - 6x$, cuyo mínimo es -9).

Fuente: Elaboración propia.

F5 Ingresos y costes del mercadillo

GRÁFICO

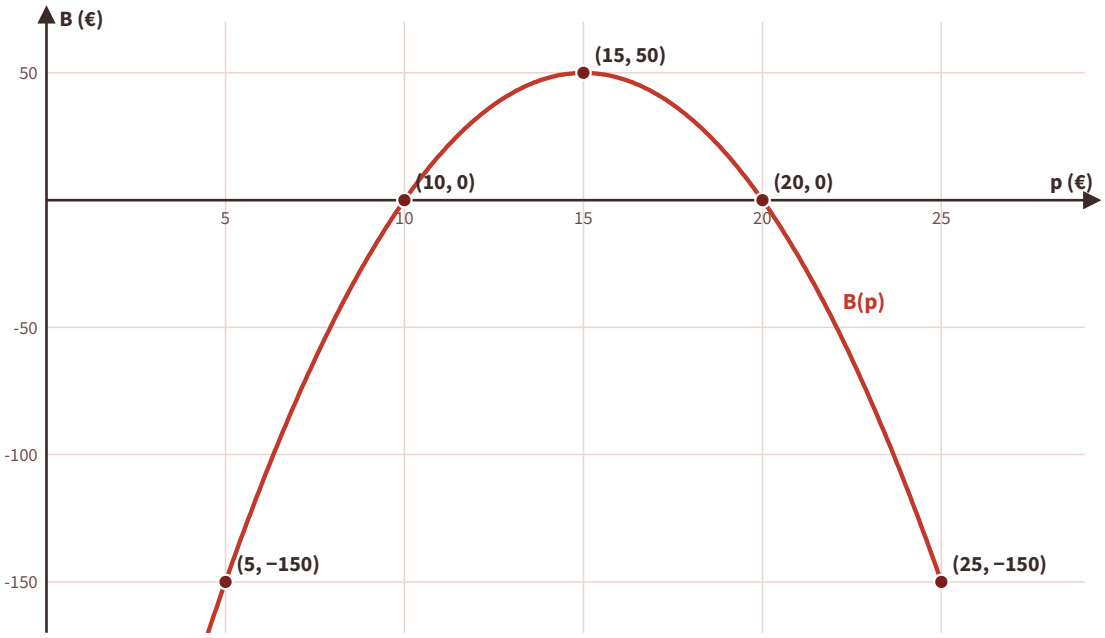


Fuente: Gráfica generada con las fórmulas de F1. Datos ficticios.

La curva es el ingreso y la recta el coste. ¿Entre qué precios queda la curva por encima de la recta?

F6 Beneficio $B(p) = -2p^2 + 60p - 400$

GRÁFICO

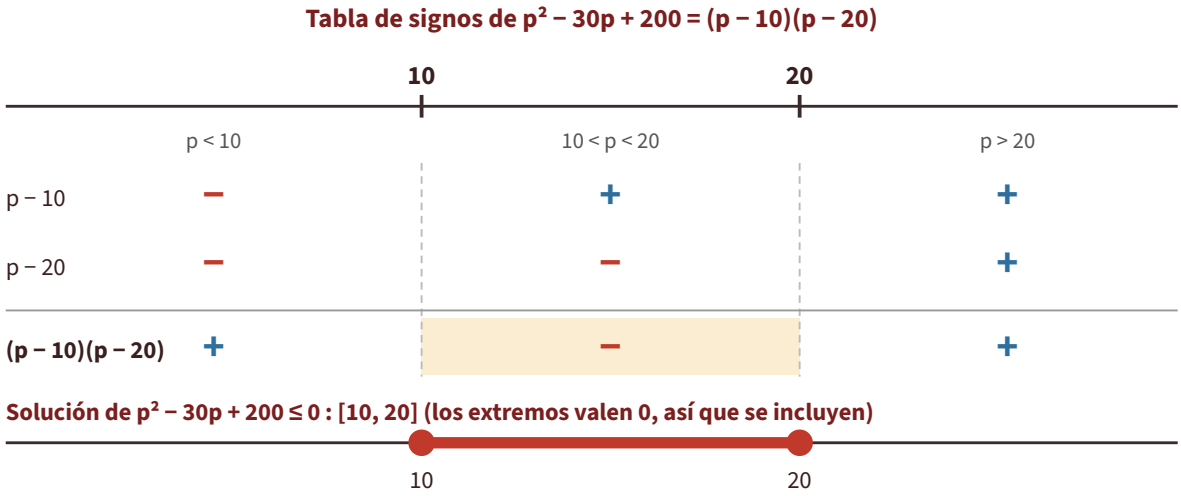


Fuente: Gráfica generada con las fórmulas de F1. Datos ficticios.

¿Qué relación hay entre los puntos de corte de F5 y los ceros de B(p)? ¿Dónde es $B(p) \geq 0$?

F7 Tabla de signos de una inecuación cuadrática

ESQUEMA



Fuente: Esquema de elaboración propia.

La inecuación B(p) ≥ 0 equivale a $p^2 - 30p + 200 \leq 0$ (se dividió entre −2 y cambió el sentido). ¿Dónde se ve en F6 que el beneficio es positivo entre 10 y 20?

F8 Tarjetas de restricciones del mercadillo

DATOS

Tarjeta	Restricción	Modelo
R0	El precio tiene sentido entre 0 € y el precio al que no se vende nada.	$0 \leq p \leq 25$
R1	No se pueden tener pérdidas.	$B(p) \geq 0$
R2	Se quieren vender al menos 20 camisetas.	$50 - 2p \geq 20$
R3	El precio no puede bajar de 12 € (acuerdo con el centro).	$p \geq 12$
R4	Se propone un precio inferior a 11 €.	$p < 11$

Fuente: Elaboración propia a partir de F1.

Las soluciones de varias restricciones a la vez son la intersección de sus conjuntos solución.

F9 Banco graduado de ecuaciones, sistemas e inecuaciones

DATOS

Código	Tipo	Enunciado
A1	Lineal	$3x - 5 = 10$
A2	Lineal	$2(x + 3) = x - 4$
A3	Lineal	$\frac{x+1}{2} - \frac{x-2}{3} = 2$
B1	Cuadrática	$x^2 - 9 = 0$
B2	Cuadrática	$x^2 - 5x + 6 = 0$
B3	Cuadrática	$2x^2 + 3x - 2 = 0$
B4	Cuadrática	$x^2 + 2x + 5 = 0$
B5	Cuadrática	$x^2 - 6x + 9 = 0$
C1	Racional	$\frac{150+5n}{n} = 8$
C2	Racional	$\frac{x+2}{x} = 3$
C3	Racional	$\frac{2}{x-1} = \frac{3}{x+1}$
C4	Radical	$\sqrt{x + 6} = x$
C5	Radical	$\sqrt{2x - 1} = 3$
D1	Sistema	$x + y = 7,\ x - y = 1$
D2	Sistema	$2x + 3y = 12,\ x - y = 1$
D3	Sistema no lineal	$y = x^2,\ y = 2x + 3$
E1	Inecuación	$2x + 3 < 11$
E2	Inecuación	$-3x + 5 > 11$
E3	Inecuación	$\frac{x-1}{2} \geq 3 - x$
E4	Inecuación cuadrática	$x^2 - 5x + 6 \leq 0$
E5	Inecuación cuadrática	$x^2 - 4 > 0$

Fuente: Elaboración propia.

Los códigos se usan en las fichas y en el atlas.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 3 · Ecuaciones, inecuaciones y restricciones

ALUMNADO

FICHA 1 Ecuación frente a inecuación

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Lee F1 y F2. Con precio fijo de 12 €: ¿cuántas camisetas hay que vender?

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

La solución de $2x + 3 = 11$ es…

☐ $x = 4$ ☐ $x = 7$ ☐ $x = 8$

Las soluciones de $x^2 = 16$ son…

☐ $x = 4$ ☐ $x = 4$ y $x = -4$ ☐ $x = 8$

La solución de $-2x > 6$ es…

☐ $x > -3$ ☐ $x < -3$ ☐ $x < 3$

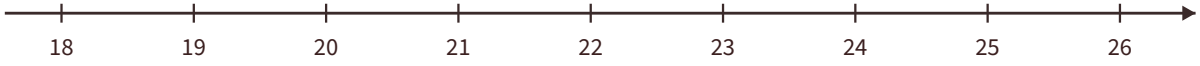
2 **Con precio fijo de 12 €, completa: ingresos $12n$, costes $150 + 5n$ y beneficio $7n - 150$.**

n (camisetas)	Ingresos (€)	Costes (€)	Beneficio (€)
10			
20			
21			
22			
30			

3 **Plantea y resuelve la ecuación de equilibrio $12n = 150 + 5n$. ¿Puede ser solución real del problema? Después plantea la inecuación $12n \geq 150 + 5n$, resuélvela y escribe el menor número entero de camisetas que da beneficio.**

4 **Representa en la recta el conjunto solución de la ecuación y el de la inecuación, e indica en qué se diferencian.**

Marca aquí las soluciones (número de camisetas n)



FICHA 2

Ecuaciones lineales y cuadráticas

Sesión 2

Usa F9 y F4. Escribe todos los pasos y comprueba en la ecuación original.

1 **Resuelve las ecuaciones lineales A1, A2 y A3 de F9.**

Código	Pasos	Solución	Comprobación
A1			
A2			
A3			

2 **Resuelve las cuadráticas B1 a B5 de F9. Indica el discriminante y cuántas soluciones reales tiene cada una.**

Código	Método y pasos	Δ	Soluciones
B1			
B2			
B3			
B4			
B5			

3 **Con F1 y F2, plantea $B(p) = 0$, simplifica y resuelve. ¿Qué significan las dos soluciones en el mercadillo?**

FICHA 3

Ecuaciones racionales y radicales

Sesión 3

Usa F4. Antes de resolver, anota qué valores no pueden ser solución; después comprueba.

1 **Resuelve C1, C2 y C3 de F9 e indica qué valor no puede ser solución en cada caso.**

Código	Valores prohibidos	Pasos	Solución
C1			
C2			
C3			

2 **En C1, n es el número de camisetas y el primer miembro es el coste medio por camiseta. Interpreta la solución.**

3 **Resuelve C4 y C5 de F9, elevando al cuadrado. Comprueba cada solución sustituyendo y descarta la extraña.**

FICHA 4

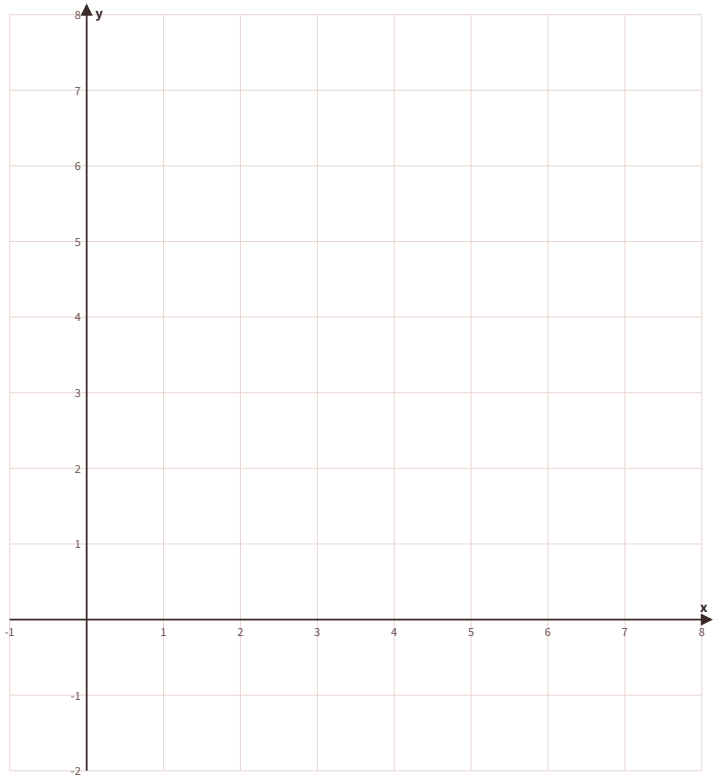
Sistemas y representación

Sesión 4

Usa F5 y F9. Resuelve de forma algebraica y comprueba con la gráfica.

1 **Resuelve D1 por reducción y D2 por sustitución.**

2 **Representa las rectas de D1 en la cuadrícula y marca la solución. ¿Qué observas?**



3 **En el mercadillo se vendieron 40 camisetas por 420 €: las infantiles a 9 € y las de adulto a 12 €. Plantea el sistema y resuélvelo.**

4 Resuelve D3 (recta y parábola). Con F5, ¿qué relación hay entre las soluciones de $p(50 - 2p) = 400 - 10p$ y los puntos de corte de la gráfica?

FICHA 5 Inecuaciones lineales

Sesión 5

Recuerda: al multiplicar o dividir por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido.

1 Resuelve E1, E2 y E3 de F9. Escribe el intervalo y dibuja la recta.

Código	Pasos	Intervalo	Recta
E1			
E2			
E3			

2 Explica con un ejemplo numérico por qué en $-3x > 6$ hay que cambiar el sentido de la desigualdad.

3 Con precio de 12 € y beneficio $7n - 150$: a) ¿cuántas camisetas hay que vender para ganar al menos 60 €?; b) con el stock máximo de 36 camisetas, ¿entre qué valores de n está la solución?

FICHA 6 Restricciones y conjuntos solución

Sesión 6

Usa F6, F7 y F8. Cada restricción es un conjunto solución; la solución final es su intersección.

1 **Resuelve cada restricción de F8 y escribe su conjunto solución como intervalo.**

Tarjeta	Resolución	Intervalo
R0		
R1		
R2		
R3		
R4		

2 **Resuelve R1 con la tabla de signos de F7: parte de $-2p^2 + 60p - 400 \geq 0$ y explica el paso en que cambia el sentido.**

3 **Calcula la intersección R1 ∩ R2 ∩ R3 y represéntala. ¿Qué precio da mayor beneficio dentro de ese intervalo y cuánto vale?**

4 **Si añadimos R4, ¿qué intervalo queda? Interprétalo.**

FICHA 7 Borrador del atlas

Sesión 7

En equipo y con roles: calculista, comprobador, secretario y portavoz. Elegid un ejemplo de cada tipo del banco F9 (distintos de los que ya resolvisteis).

1 **Completad el borrador del atlas.**

Tipo y código	Pasos de resolución	Conjunto solución	Representación	Comprobación
Lineal				
Cuadrática				
Racional o radical				
Sistema				
Inecuación				

2 **Redactad un algoritmo breve (3 a 5 pasos) para resolver una ecuación racional o radical sin aceptar soluciones extrañas.**

3 **Revisión cruzada: otro equipo comprueba vuestro atlas.**

- [ ] Todas las soluciones están comprobadas en la ecuación original
- [ ] Los intervalos tienen extremos bien marcados (abierto o cerrado)
- [ ] Hay al menos una solución descartada y justificada
- [ ] Cada representación tiene ejes y unidades rotulados
- [ ] El procedimiento de cada tipo se entiende sin ayuda

FICHA 8 # Problema individual de discusión

Sesión 8

Otra clase vende pegatinas: coste de 2 € por unidad, sin coste fijo, y demanda $q = 30 - p$ si el precio es p euros. El beneficio es $B(p) = (p - 2)(30 - p)$. Resuelve sin ayuda.

1 **Desarrolla $B(p)$ y resuelve la ecuación $B(p) = 75$.**

2 **Resuelve la inecuación $B(p) \geq 75$ con una tabla de signos y escribe el conjunto solución.**

3 **Además, se quieren vender al menos 10 pegatinas. Escribe esa restricción como inecuación y calcula la intersección con el resultado anterior.**

4 **Discute: ¿cuántos precios dan un beneficio exactamente igual a K euros según el valor de K? Calcula el discriminante y describe los casos.**

5 **Inventa un valor de K para el que haya exactamente una solución y explica qué significa en el problema.**

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 3 · Ecuaciones, inecuaciones y restricciones

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Atlas de conjuntos solución del mercadillo. Cada ejemplo lleva resolución, conjunto solución, representación y comprobación.

Título y equipo

Ecuación lineal y cuadrática

Pasos, discriminante y soluciones; qué soluciones valen en el mercadillo.

Racional o radical

Valores prohibidos, solución y solución extraña descartada.

Sistema

Método y gráfica con el punto de corte.

Inecuación

Resolución, intervalo y recta numérica.

Restricciones

R1 ∩ R2 ∩ R3: intersección y mejor precio.

Discusión

Qué parámetro cambia el número de soluciones y por qué.

Conclusión y revisión

Qué precio recomendáis; firma del equipo revisor.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 3 · Ecuaciones, inecuaciones y restricciones

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Atlas de conjuntos solución**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] Cada ecuación está resuelta paso a paso y comprobada en la ecuación original.
- [ ] En las ecuaciones cuadráticas se calcula el discriminante y se indica el número de soluciones.
- [ ] En las racionales y radicales se anotan los valores prohibidos y se descarta (o se justifica) cualquier solución extraña.
- [ ] Los sistemas están resueltos de forma algebraica y comprobados con la gráfica.
- [ ] Las inecuaciones respetan el cambio de sentido al multiplicar o dividir por un número negativo.
- [ ] Los conjuntos solución se escriben como intervalos con los extremos correctos (corchete o paréntesis).
- [ ] Las representaciones (recta, plano, tabla de signos) están rotuladas y a escala.
- [ ] La intersección de restricciones está calculada y se explica qué precio conviene.
- [ ] Se interpreta cada solución en el contexto (euros, número de camisetas, valores enteros).

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 3 · Ecuaciones, inecuaciones y restricciones

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Atlas de conjuntos solución**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 3 · Ecuaciones, inecuaciones y restricciones

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé resolver ecuaciones, sistemas e inecuaciones y comprobar las soluciones.	◯	◯	◯	◯
Sé explicar por qué algunas soluciones se descartan y cómo cambia el número de soluciones.	◯	◯	◯	◯
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	◯	◯	◯	◯
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	◯	◯	◯	◯
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	◯	◯	◯	◯
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	◯	◯	◯	◯

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 3 · Ecuaciones, inecuaciones y restricciones

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Ecuaciones lineales y cuadráticas, y una inecuación por cada caso, con ejemplo modelado y glosario.

Ejemplo modelado

Lineal: $3x - 5 = 10 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$.
Cuadrática: $x^2 - 5x + 6 = 0$: buscamos dos números que sumen -5 y multipliquen 6: -2 y -3, luego $(x - 2)(x - 3) = 0$ y $x = 2$ o $x = 3$.
Inecuación: $2x + 3 < 11 \Rightarrow 2x < 8 \Rightarrow x < 4$, es decir, $(-\infty, 4)$.

Símbolos y vocabulario

Solución: valor que hace cierta la igualdad o desigualdad. **Conjunto solución:** todas las soluciones. **Discriminante:** $\Delta = b^2 - 4ac$. **Intervalo abierto (a, b):** sin extremos; **cerrado [a, b]:** con extremos. $\cup$ unión y $\cap$ intersección. Al multiplicar por un número negativo, $<$ pasa a $>$.

1 **Resuelve y comprueba: a) $2x + 7 = 15$; b) $x^2 - 16 = 0$; c) $x^2 + x - 6 = 0$.**

Ecuación	Pasos	Solución	Comprobación
a)			
b)			
c)			

2 **Resuelve y representa en la recta: a) $x + 4 < 9$; b) $-2x \geq 6$.**

3 **Completa: «La ecuación $x^2 - 4 = 0$ tiene ___ soluciones y la inecuación $x^2 - 4 < 0$ tiene como solución el intervalo ___».**

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 3 · Ecuaciones, inecuaciones y restricciones

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

El parámetro que cambia el número de soluciones

En el mercadillo, el beneficio es $B(p) = -2p^2 + 60p - 400$. Si se pregunta «¿a qué precio el beneficio es exactamente k euros?», la respuesta depende del valor de k. Investiga qué parámetro es responsable del cambio y generalízalo.

Pasos

1. Resuelve $B(p) = k$ para $k = -150, 0, 30, 50$ y 60 y completa la tabla.
2. Escribe la ecuación como $2p^2 - 60p + (400 + k) = 0$ y calcula el discriminante en función de k.
3. Escribe para qué valores de k hay dos soluciones, una o ninguna, y relaciona el valor límite con el beneficio máximo (F6).
4. Cambia ahora el coste fijo de 150 € por un valor F. ¿Para qué valores de F el mercadillo puede dar beneficio 0 o más?

1 **Tabla de discusión.**

k (€)	Ecuación	Discriminante	Soluciones
−150			
0			
30			
50			
60			

Entrega

La tabla completa, la regla general sobre k y F justificada con el discriminante y una frase que explique qué significa cada caso en el mercadillo.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 3 · Ecuaciones, inecuaciones y restricciones

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: x = 4; x = 4 y x = −4; x < −3.
2. n = 10: ingresos 120, costes 200, beneficio −80. n = 20: 240, 250, −10. n = 21: 252, 255, −3. n = 22: 264, 260, +4. n = 30: 360, 300, +60.
3. $12n = 150 + 5n \Rightarrow 7n = 150 \Rightarrow n = \frac{150}{7} \approx 21{,}43$: no es un número entero, no se pueden vender 21,43 camisetas, luego la ecuación no se cumple exactamente con ninguna cantidad. Inecuación: $7n \geq 150 \Rightarrow n \geq 21{,}43$, y con enteros $n \geq 22$. Con 22 camisetas ya hay beneficio (4 €).
4. Ecuación: un único punto, 21,43 (fuera de los enteros). Inecuación: la semirrecta $[21{,}43;\ +\infty)$, y con enteros, los puntos 22, 23, 24… En la recta se marcan 22, 23, 24… (o la semirrecta desde 21,43). La ecuación da un valor; la inecuación, infinitos.

Ficha 2

1. A1: $3x = 15, x = 5$ ($15 - 5 = 10$ ✔). A2: $2x + 6 = x - 4 \Rightarrow x = -10$ ($2(-7) = -14$ y $-10 - 4 = -14$ ✔). A3: $3(x + 1) - 2(x - 2) = 12 \Rightarrow x + 7 = 12 \Rightarrow x = 5$ ($3 - 1 = 2$ ✔).
2. B1: $x = \pm 3$ ($\Delta = 36$, 2 soluciones). B2: $\Delta = 1, x = \frac{5 \pm 1}{2}$: 2 y 3. B3: $\Delta = 9 + 16 = 25, x = \frac{-3 \pm 5}{4}$: $\frac{1}{2}$ y -2. B4: $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$: ninguna. B5: $\Delta = 0$: $x = 3$ (doble).
3. $-2p^2 + 60p - 400 = 0 \Rightarrow p^2 - 30p + 200 = 0 \Rightarrow (p - 10)(p - 20) = 0$: $p = 10$ o $p = 20$. Con esos precios el beneficio es 0 (ni se gana ni se pierde); coincide con F2.

Ficha 3

1. C1: $n \neq 0; 150 + 5n = 8n \Rightarrow n = 50$. C2: $x \neq 0; x + 2 = 3x \Rightarrow x = 1$. C3: $x \neq 1, -1; 2(x + 1) = 3(x - 1) \Rightarrow 2x + 2 = 3x - 3 \Rightarrow x = 5$.
2. Con 50 camisetas el coste medio por camiseta es 8 €: $\frac{150 + 250}{50} = 8$. Con menos camisetas el coste medio es mayor porque el coste fijo se reparte entre menos.
3. C4: $x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ o $x = -2$. $x = 3$: $\sqrt{9} = 3$ ✔. $x = -2$: $\sqrt{4} = 2 \neq -2$: solución extraña. C5: $2x - 1 = 9 \Rightarrow x = 5$: $\sqrt{9} = 3$ ✔.

Ficha 4

1. D1 (reducción): sumando, $2x = 8, x = 4, y = 3$. D2 (sustitución): $x = y + 1; 2(y + 1) + 3y = 12 \Rightarrow 5y = 10 \Rightarrow y = 2, x = 3$.
2. Las rectas $y = 7 - x$ e $y = x - 1$ se cortan en (4, 3), que es la solución.
3. $x + y = 40, 9x + 12y = 420$. $x = 40 - y$: $360 - 9y + 12y = 420 \Rightarrow 3y = 60 \Rightarrow y = 20$ y $x = 20$. 20 infantiles (180 €) y 20 de adulto (240 €).
4. D3: $x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ o $x = -1$; puntos (3, 9) y (−1, 1). En F5: $p(50 - 2p) = 400 - 10p$ da $-2p^2 + 60p - 400 = 0$ y $p = 10, 20$; los precios son las abscisas de los puntos de corte (10, 300) y (20, 200).

Ficha 5

1. E1: $2x < 8, x < 4$: $(-\infty, 4)$. E2: $-3x > 6 \Rightarrow x < -2$ (cambia el sentido): $(-\infty, -2)$. E3: $x - 1 \geq 6 - 2x \Rightarrow 3x \geq 7 \Rightarrow x \geq \frac{7}{3}$: $\left[\frac{7}{3}, +\infty\right)$.
2. Con $x = -3$: $-3(-3) = 9 > 6$ ✔. Con $x = 0$: $0 > 6$ falso. Las soluciones son valores menores que −2, así que al dividir entre −3 la desigualdad se invierte. Ejemplo: $2 < 5$ pero $-2 > -5$.
3. a) $7n - 150 \geq 60 \Rightarrow n \geq 30$. b) Con stock 36: $30 \leq n \leq 36$, es decir, $n \in \{30, \ldots, 36\}$ (en enteros).

Ficha 6

1. R0: $[0, 25]$. R1: ver tarea siguiente: $[10, 20]$. R2: $50 - 2p \geq 20 \Rightarrow p \leq 15$: $(-\infty, 15]$ (en el contexto $[0, 15]$). R3: $[12, +\infty)$. R4: $(-\infty, 11)$.
2. $-2p^2 + 60p - 400 \geq 0$; dividimos entre -2 (cambia el sentido): $p^2 - 30p + 200 \leq 0$. Ceros 10 y 20; tabla de signos: positiva fuera de [10, 20], negativa dentro. Como queremos ≤ 0: $[10, 20]$.
3. $[10, 20] \cap (-\infty, 15] \cap [12, +\infty) = [12, 15]$. Mayor beneficio en $p = 15$: $B(15) = 50$ € (con 20 camisetas). Comprobación: $B(12) = 32, B(15) = 50$.
4. Con R4 además: $[12, 15] \cap (-\infty, 11) = \emptyset$: no hay precio que cumpla todo (contradicción entre R3 y R4).

Ficha 7

1. Respuesta abierta. Se espera un ejemplo por tipo, con: pasos, conjunto solución, gráfica o recta y comprobación. Ver soluciones del banco: A2 -10; A3 5; B3 $\frac{1}{2}$ y -2; C3 $x = 5$; D2 $(3, 2)$; D3 $(3, 9)$ y $(-1, 1)$; E3 $\left[\frac{7}{3}, +\infty\right)$; E4 $[2, 3]$; E5 $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.
2. Algoritmo esperable: 1) anotar los valores que anulan denominadores o dejan negativo el radicando; 2) eliminar denominadores o aislar y elevar al cuadrado; 3) resolver la ecuación resultante; 4) comprobar cada solución en la ecuación original; 5) descartar las extrañas.
3. Revisión cruzada: respuestas abiertas (criterios en el Anexo 5).

Ficha 8

1. $B(p) = (p - 2)(30 - p) = -p^2 + 32p - 60$. $B(p) = 75 \Rightarrow p^2 - 32p + 135 = 0 \Rightarrow (p - 5)(p - 27) = 0$: $p = 5$ o $p = 27$. Comprobación: $(3)(25) = 75$ y $(25)(3) = 75$.
2. $B(p) \geq 75 \Leftrightarrow p^2 - 32p + 135 \leq 0$. Tabla de signos de $(p - 5)(p - 27)$: negativa entre 5 y 27: $[5, 27]$.
3. $30 - p \geq 10 \Rightarrow p \leq 20$. Intersección $[5, 27] \cap (-\infty, 20] = [5, 20]$.
4. $B(p) = K \Rightarrow p^2 - 32p + (60 + K) = 0, \Delta = 1024 - 240 - 4K = 784 - 4K$. Si $K < 196$: dos precios; si $K = 196$: un precio ($p = 16$); si $K > 196$: ninguno. 196 es el beneficio máximo: $B(16) = 14 \cdot 14 = 196$ €.
5. $K = 196$: solo $p = 16$ €, el precio de máximo beneficio. Se acepta cualquier justificación correcta.

Refuerzo

1. a) $2x = 8, x = 4$. b) $x^2 = 16, x = \pm 4$. c) $(x + 3)(x - 2) = 0, x = -3$ o $x = 2$. Comprobaciones por sustitución.
2. a) $x < 5$: $(-\infty, 5)$. b) $x \leq -3$ (cambia el sentido): $(-\infty, -3]$.
3. 2 soluciones; el intervalo $(-2, 2)$.

Ampliación

1. $k = -150$: $2p^2 - 60p + 250 = 0$, $\Delta = 1600$, $p = 5$ o 25. $k = 0$: $\Delta = 400$, $p = 10$ o 20. $k = 30$: $\Delta = 160$, $p = 15 \pm \sqrt{10} \approx 11{,}84$ o $18{,}16$. $k = 50$: $\Delta = 0$, $p = 15$. $k = 60$: $\Delta = -80$, ninguna.
2. $\Delta = 60^2 - 8(400 + k) = 400 - 8k$.
3. Dos soluciones si $k < 50$; una si $k = 50$; ninguna si $k > 50$. 50 es el beneficio máximo (vértice en $p = 15$): no se puede ganar más.
4. Con coste fijo F: $B(p) = -2p^2 + 60p - 250 - F$, máximo $200 - F$ en $p = 15$. Hay precios con beneficio ≥ 0 si $F \leq 200$. Para $F = 150$ el máximo es 50.

Errores frecuentes

- No cambiar el sentido de la desigualdad al multiplicar o dividir por un número negativo.
- No comprobar las soluciones de una ecuación radical o racional y aceptar soluciones extrañas.
- Olvidar una de las dos soluciones de la ecuación cuadrática (por ejemplo, $x^2 = 9$ solo con $x = 3$) o aceptar valores sin sentido en el contexto.
- Usar mal la fórmula de la ecuación de segundo grado (signos de $-b$ o de Δ).
- Confundir corchete y paréntesis, o escribir mal la unión y la intersección de intervalos.
- Tratar una inecuación cuadrática como si fuera una ecuación y dar solo los dos ceros.

Criterios para valorar respuestas abiertas

- Se valora que la solución se interprete en el contexto: precios entre 0 y 25, número entero de camisetas.
- En el atlas se acepta cualquier ejemplo del banco F9 o propio, si está bien resuelto, representado y comprobado.
- En la discusión del parámetro se valora que el alumnado relacione el signo del discriminante con la forma de la gráfica.
- La calculadora gráfica o GeoGebra se usan para comprobar la gráfica y los puntos de corte, no para sustituir la resolución escrita.

04

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Generalizar patrones con álgebra

PREGUNTA GUÍA

¿Cómo podemos pasar de varios ejemplos a una regla que funcione siempre?

CURSO
4.º ESO · Matemáticas B

SESIONES
7 sesiones · 1.º-2.º trimestre

SENTIDOS PRIORITARIOS
D · Sentido algebraico

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE3, CE4, CE5, CE8

PRODUCTO FINAL
Informe de conjetura y generalización

CRITERIOS DE EVALUACIÓN
3.1, 3.2, 4.1, 5.1, 8.1

Contexto, reto y sentido

La empresa de reformas **Mosaicos Alcalá** (ficticia) necesita saber cuántas piezas lleva la figura número 100 de tres diseños de azulejos y vallas del patio del instituto. Contarlas una a una es inviable: hace falta **una regla** que funcione para cualquier n. Además, un compañero ha oído que «con 5 puntos en un círculo salen 16 regiones, así que siempre se duplican» y otro que $n^2 + n + 41$ «siempre da un número primo». ¿Cómo saber cuándo una regla es de fiar?

La situación trabaja el sentido algebraico como **generalización**: observar casos, organizar datos en tablas y diferencias, proponer una expresión, comprobarla con casos pequeños y **lejanos**, explicarla con un razonamiento (geométrico o algebraico) y buscar **contraejemplos** y variantes que la pongan a prueba. El informe final recoge la conjetura, la regla y la razón por la que es válida.

Reto

Redactar un informe de conjetura y generalización: descubrir la regla de un patrón, comprobarla en casos pequeños y lejanos, explicar por qué siempre funciona y mostrar una variante o contraejemplo que obligue a revisarla.

Producto final

Informe de conjetura y generalización.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE4** Utilizar el pensamiento computacional: descomponer, reconocer patrones, generalizar y crear algoritmos.
- **CE5** Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

3.1 Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada.

3.2 Plantear variantes de un problema que lleven a una generalización.

4.1 Generalizar patrones y proporcionar una representación computacional de situaciones problematizadas.

5.1 Deducir relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente.

8.1 Comunicar ideas, conclusiones, conjeturas y razonamientos matemáticos utilizando diferentes medios, con coherencia, claridad y terminología apropiada.

Saberes básicos prioritarios

D
Sentido algebraico

- Patrones, pautas y regularidades en situaciones numéricas y figurativas: observación, descripción verbal y tabla de valores.
- Sucesiones: término general, diferencias sucesivas y reconocimiento de patrones lineales y cuadráticos.
- Expresión algebraica general de un patrón y equivalencia de expresiones obtenidas por descomposiciones distintas.
- Conjetura, comprobación con casos, contraejemplo y justificación: diferencia entre comprobar y demostrar.
- Uso de la hoja de cálculo o de GeoGebra para generar términos y representar computacionalmente un patrón.
- Planteamiento de variantes de un problema y revisión de la regla general.

F
Sentido socioafectivo

- Gestión de la frustración ante conjeturas que fallan: el contraejemplo como avance.
- Comunicación clara y respetuosa de razonamientos propios y ajenos.

Objetivos didácticos

- ✓ Detectar invariantes y regularidades.
- ✓ Proponer una expresión general.
- ✓ Comprobar la conjetura con casos y razonamiento.
- ✓ Crear variantes que obliguen a revisar la regla.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Patrón geométrico

Evidencia: Ficha 1: tabla de las primeras figuras de los patrones A, B y C y descripción verbal de cómo crecen.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Tabla y diferencias

Evidencia: Ficha 2: tabla de diferencias primeras y segundas y clasificación de secuencias en lineales y cuadráticas.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Expresión general

Evidencia: Ficha 3: expresión general de A, B y C con descomposiciones geométricas y equivalencia algebraica.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Comprobación para casos lejanos

Evidencia: Ficha 4: predicción de casos lejanos, fórmulas de hoja de cálculo y análisis del caso $n^2 + n + 41$.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Variante que rompe una conjetura ingenua

Evidencia: Ficha 5: regiones del círculo, contraejemplo de $n^2 + n + 41$ y variantes de los patrones A y B.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Generalización y explicación

Evidencia: Ficha 6: diagonales de un polígono con tabla, conjetura y explicación escrita.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Informe final

Evidencia: Ficha 7: informe individual con secuencia nueva, comprobación, demostración y refutación.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

- Patrones de puntos/mosaicos
- hoja de cálculo/GeoGebra

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo Anexo 8

Patrones lineales y tabla guiada.

Ampliación Anexo 9

Generalizar un patrón cuadrático sencillo y justificar por descomposición geométrica.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial
Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa
Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final
Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
3.1	Formulación de conjeturas sobre los patrones y sobre las secuencias de F7, y su comprobación con casos pequeños, casos lejanos y razonamiento.	Fichas 2 y 4 / lista de cotejo
3.2	Planteamiento de variantes del patrón (valla en dos filas, marco de grosor 2, secuencia propia) y revisión de la regla general para cada una.	Ficha 5 y ampliación (Anexo 9) / rúbrica
4.1	Generalización de cada patrón con una expresión algebraica y su representación computacional (fórmula de hoja de cálculo, tabla de valores).	Fichas 3 y 4 y informe (Anexo 4) / escala de valoración
5.1	Relación entre la tabla de valores, la descomposición geométrica y la expresión algebraica para formar un todo coherente.	Fichas 3 y 6 / rúbrica
8.1	Redacción de la conjetura, la regla y su explicación con lenguaje matemático correcto, con ejemplos y contraejemplos, y exposición oral.	Informe (Anexo 4), Ficha 6 y Ficha 7 / rúbrica

Evidencias clave de esta SdA

Informe, regla y comprobación.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 4 · Generalizar patrones con álgebra

ALUMNADO

Mosaicos Alcalá debe reformar el patio y os pide una regla: «¿cuántas baldosas lleva la figura 100 del diseño en marco?». Contarlas una a una os llevaría un día entero. Un compañero asegura que con 5 puntos en un círculo salen 16 regiones y que por tanto siempre se duplican; otro, que $n^2 + n + 41$ da siempre un número primo. ¿Y si no es verdad? Vais a trabajar como un equipo de investigación: encontrar reglas que valgan para siempre, probarlas con casos lejanos, buscar contraejemplos y explicar por qué una regla funciona, con dibujos y álgebra.

> *¿Cómo podemos pasar de varios ejemplos a una regla que funcione siempre?*

Vuestro reto

Redactar un informe de conjetura y generalización: descubrir la regla de un patrón, comprobarla en casos pequeños y lejanos, explicar por qué siempre funciona y mostrar una variante o contraejemplo que obligue a revisarla.

Lo que vais a producir

Informe de conjetura y generalización.

Hoja de ruta · 7 sesiones

1. Observamos tres patrones geométricos y describimos cómo crecen.
2. Organizamos los datos en tablas y calculamos diferencias.
3. Escribimos la expresión general y la justificamos con dibujos.
4. Comprobamos la regla en casos lejanos y analizamos conjeturas dudosas.
5. Buscamos contraejemplos y creamos variantes.
6. Generalizamos un nuevo patrón y explicamos por qué funciona.
7. Redactamos y defendemos el informe de conjetura y generalización.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Detectar invariantes y regularidades.
- ✓ Proponer una expresión general.
- ✓ Comprobar la conjetura con casos y razonamiento.
- ✓ Crear variantes que obliguen a revisar la regla.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 4 · Generalizar patrones con álgebra

ALUMNADO

Tres patrones geométricos (vallas, marcos y bolas), tablas de valores, descomposiciones del marco, el caso del círculo, una tabla que rompe $n^2 + n + 41$, un banco de secuencias y un protocolo para el informe. Los patrones y los datos de la empresa son ficticios.

F1 Los tres patrones del azulejista

ESQUEMA

A

Valla de cuadrados



n = 1 4 listones

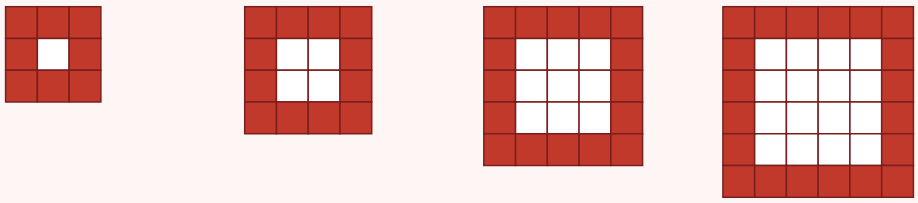
n = 2 7 listones

n = 3 10 listones

n = 4 13 listones

B

Marco de baldosas oscuras



n = 1 8 baldosas

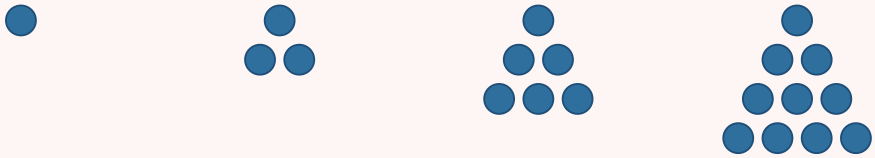
n = 2 12 baldosas

n = 3 16 baldosas

n = 4 20 baldosas

C

Bolas en triángulo



n = 1 1 bola

n = 2 3 bolas

n = 3 6 bolas

n = 4 10 bolas

Fuente: Esquemas de elaboración propia. Patrones ficticios inspirados en vallas, marcos de baldosas y apilamientos de bolas.

Describe con palabras cómo se pasa de una figura a la siguiente en cada patrón.

F2 Valores de las primeras figuras

DATOS

n	A: listones	B: baldosas oscuras	B: baldosas totales	C: bolas
1	4	8	9	1
2	7	12	16	3
3	10	16	25	6
4	13	20	36	10
5	16	24	49	15
6	19	28	64	21

Fuente: Valores calculados para este cuaderno a partir de F1.

Mira cómo cambia cada columna al pasar de una fila a la siguiente. ¿Qué columnas crecen siempre lo mismo?

F3 Del patrón a la regla: estrategias

TEXTO

1. Tabla y diferencias. Se restan términos consecutivos. Si la **primera diferencia es constante** d, la regla es lineal: $a_n = d\,n + c$. Si la **segunda diferencia es constante** y vale $2a$, la regla es cuadrática: $a_n = an^2 + bn + c$.

Ejemplo. $2, 5, 10, 17, \ldots$: primera diferencia $3, 5, 7$; segunda $2, 2$. Entonces $a = 1$. Con $n = 1$: $1 + b + c = 2$ y con $n = 2$: $4 + 2b + c = 5$. Resolviendo: $b = 0, c = 1$, luego $a_n = n^2 + 1$ (comprobación: $n = 3 \Rightarrow 10$).

2. Descomposición geométrica. Se descompone la figura en partes que dependen de n. Por ejemplo, en el marco de F1, las baldosas oscuras se pueden contar de varias formas (F4).

3. Comprobar. Una regla se pone a prueba con casos pequeños, con **casos lejanos** (por ejemplo $n = 100$) y con un razonamiento que explique por qué siempre funciona. Un solo **contraejemplo** basta para rechazarla.

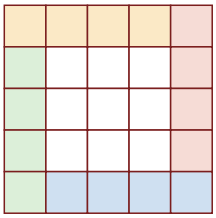
Fuente: Elaboración propia.

Comprobar muchos casos da confianza; solo una explicación general da seguridad.

F4 El marco de tres maneras (n = 3)

ESQUEMA

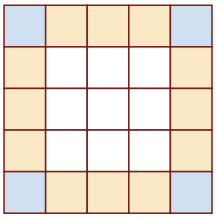
$4(n + 1)$



4 lados de n + 1 baldosas

n = 3: 4 · 4 = 16

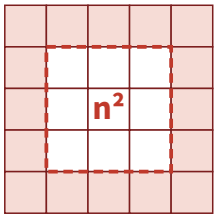
$4n + 4$



4 lados de n baldosas + 4 esquinas

n = 3: 4 · 3 + 4 = 16

$(n + 2)^2 - n^2$



cuadrado grande menos hueco

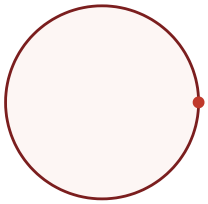
$(n + 2)^2 = 25$ y $n^2 = 9 \rightarrow 25 - 9 = 16$

Fuente: Esquema de elaboración propia.

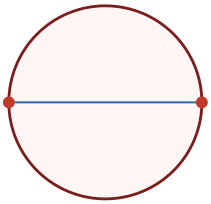
Las tres expresiones cuentan las mismas 16 baldosas. ¿Cuál de las tres crees que se obtiene mirando el dibujo y cuál restando áreas?

F5 Puntos en un círculo y regiones

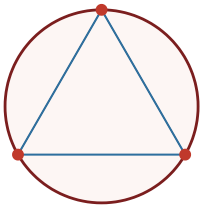
ESQUEMA



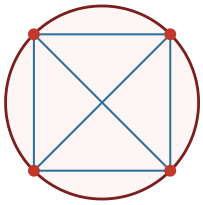
n = 1 puntos
1 región



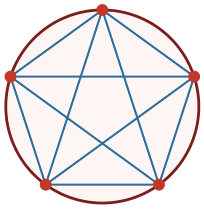
n = 2 puntos
2 regiones



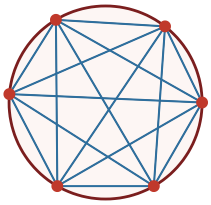
n = 3 puntos
4 regiones



n = 4 puntos
8 regiones



n = 5 puntos
16 regiones



n = 6 puntos
31 regiones

Fuente: Esquema de elaboración propia. Los puntos del círculo de 6 se han colocado de forma que no se crucen tres cuerdas en un mismo punto.

Cuenta las regiones para n = 1, 2, 3, 4 y 5. ¿Qué regla propondrías? ¿Y si cuentas con cuidado las de n = 6?

F6 ¿Siempre primo? El caso de n² + n + 41

DATOS

n	$n^2 + n + 41$	¿Es primo?
0	41	Sí
1	43	Sí
2	47	Sí
3	53	Sí
4	61	Sí
5	71	Sí
6	83	Sí
7	97	Sí
38	1 523	Sí
39	1 601	Sí
40	1 681	No: $41 \cdot 41$
41	1 763	No: $41 \cdot 43$

Fuente: Valores calculados para este cuaderno (cálculo exacto).

Comprobamos casi 40 valores y falló en el siguiente. ¿Qué enseña esto sobre las conjeturas basadas en pocos casos?

F7 Banco de secuencias

DATOS

Código	Términos	Contexto
S1	$5, 8, 11, 14, 17, \ldots$ (para $n = 1, 2, 3, \ldots$)	Escalera de cerillas: la figura 1 usa 5.
S2	$2, 6, 12, 20, 30, \ldots$	Rectángulo de baldosas de n por $n + 1$.
S3	$3, 8, 15, 24, 35, \ldots$	Baldosas de un pasillo que crece con n.
S4	$2, 4, 7, 11, 16, \ldots$	Trozos de pizza con n cortes rectos, cuando es máximo.
S5	$1, 5, 13, 25, 41, \ldots$	Rombos de baldosas (números cuadrados centrados).
S6	$0, 2, 5, 9, 14, \ldots$ (para $n = 3, 4, 5, 6, 7$ lados)	Diagonales de un polígono de n lados.

Fuente: Elaboración propia. Contextos ficticios o tomados de problemas clásicos.

Cada secuencia tiene una regla que se descubre con diferencias o con un dibujo.

F8 Guion del informe de generalización

PROTOCOLO

- **Observa.** Describe el patrón con palabras y con un dibujo o una tabla.
- **Conjetura.** Escribe una regla (con palabras y con símbolos) y di en qué casos la has obtenido.
- **Comprueba.** Prueba la regla con casos pequeños, con un caso lejano y, si puedes, con la hoja de cálculo (por ejemplo, en la celda de $n = 2$ escribe «=3*A2+1» y arrastra hacia abajo).
- **Explica.** Justifica por qué siempre funciona: con un dibujo, con una descomposición o con álgebra.
- **Pon a prueba.** Busca un contraejemplo o una variante (cambia un dato del patrón) y revisa la regla.
- **Concluye.** Resume la regla final, su dominio y lo que has aprendido.

Fuente: Elaboración propia.

Un buen informe dice qué se ha comprobado y qué se ha demostrado.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 4 · Generalizar patrones con álgebra

ALUMNADO

FICHA 1 Observamos patrones

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Mira F1 y F2. Todavía no hace falta ninguna fórmula: describelos con palabras.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

El siguiente término de 5, 9, 13, 17, … es…

☐ 19 ☐ 21 ☐ 22

La regla de la secuencia 2, 4, 6, 8, … es…

☐ n + 2 ☐ 2n ☐ n^2

Si f(n) = 3n + 1, entonces f(10) es…

☐ 31 ☐ 13 ☐ 40

2 **Completa la tabla con las figuras 5 y 6 (cuéntalas con ayuda de F1) y escribe una estimación para la figura 10.**

Patrón	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	Estimación n = 10
A (listones)	4	7	10	13		
B (baldosas oscuras)	8	12	16	20		
C (bolas)	1	3	6	10		

3 **Describe con palabras cómo se construye la figura siguiente en cada patrón, de modo que un compañero pueda dibujarla sin verla.**

4 **Sin fórmula todavía: ¿cuántos listones tendrá la figura 20 del patrón A? Explica tu razonamiento con claridad.**

FICHA 2 Tablas y diferencias

Sesión 2

Usa F2, F3 y F7. Calcula las diferencias con cuidado.

1 **Completa las diferencias de cada secuencia y decide si es lineal (primera diferencia constante) o cuadrática (segunda diferencia constante).**

Secuencia	Primera diferencia	Segunda diferencia	Tipo
A: 4, 7, 10, 13, 16			
B total: 9, 16, 25, 36, 49			
C: 1, 3, 6, 10, 15			
S1: 5, 8, 11, 14, 17			
S2: 2, 6, 12, 20, 30			

2 **Para S1 (lineal), escribe $a_n = dn + c$ calculando d y c con los dos primeros términos.**

3 **Para S3 y S4 (cuadráticas), halla a con la segunda diferencia y después b y c con los dos primeros términos, como en el ejemplo de F3. Comprueba con el tercer término.**

FICHA 3 La expresión general

Sesión 3

Combina lo que ves en el dibujo con lo que calculas en la tabla.

1 **Patrón A. Explica cómo cuentas los listones (por ejemplo, 1 listón vertical más n grupos de 3, o $4n$ menos los listones compartidos) y escribe la expresión general. ¿Es la misma con las dos formas de contar?**

2 **Patrón B (con F4). Escribe tres expresiones para las baldosas oscuras y demuestra con álgebra que son equivalentes.**

3 **Patrón C. Dibuja dos triángulos de $n = 4$ juntos para formar un rectángulo de 4×5. ¿Cuántas bolas hay en cada triángulo? Explica cómo se generaliza a un triángulo de n filas.**

4 **Escribe la regla de C con símbolos y calcula T_{10} y T_{100}.**

FICHA 4 Casos lejanos

Sesión 4

Una regla se comprueba más allá de los primeros casos. Usa F6, F8 y la hoja de cálculo si la tienes a mano.

1 **Con tus reglas de A, B y C, completa la tabla de casos lejanos.**

n	A (listones)	B (baldosas oscuras)	B (baldosas totales)	C (bolas)
10				
50				
100				

2 **En una hoja de cálculo, la columna A contiene n (A2 = 1, A3 = 2, …). Escribe la fórmula que pones en B2 para obtener los listones del patrón A y la que pones en C2 para las bolas del patrón C, y explica cómo completas la columna.**

3 **Con F6: un compañero dice «ya hemos comprobado 40 casos, así que $n^2 + n + 41$ siempre es primo». ¿Qué le respondes? ¿Qué pasa con $n = 40$?**

4 **Otra compañera dice que A para $n = 10$ da 30 listones (porque $3 \cdot 10$). Encuentra el error y corrígelo comprobando con un dibujo de $n = 2$.**

FICHA 5 Contraejemplos y variantes

Sesión 5

Un contraejemplo es un caso que rompe la regla; una variante cambia un dato del patrón.

1 **Con F5, completa la tabla. ¿Funciona la conjetura «las regiones se duplican»? ¿En qué caso falla?**

n (puntos)	Regiones (contadas en F5)	Predicción 2^{n-1}	¿Coinciden?
1			
2			
3			
4			
5			
6			

2 **Variante de B: ahora el marco tiene grosor 2 (dos filas de baldosas oscuras). Calcula las baldosas oscuras para $n = 1, 2, 3, 4$, propón una regla y compruébala para $n = 10$.**

n	Baldosas oscuras (grosor 2)	Regla
1		
2		
3		
4		

3 **Variante de A: la valla tiene dos filas de cuadrados (de n cuadrados cada una). Cuenta los listones para $n = 1, 2, 3$ y propón una regla.**

4 **Inventa tu propia variante de un patrón, escribe sus primeros términos y di si la regla cambia.**

FICHA 6 Generalizamos y explicamos

Sesión 6

Trabajad en equipo: observad, conjeturad, comprobad y explicad. Roles: investigador, comprobador, secretario y portavoz.

1 **Diagonales de un polígono (S6 de F7). Dibuja y cuenta las diagonales de polígonos de 3 a 7 lados y completa la tabla.**

Lados n	3	4	5	6	7	8
Diagonales						
Primera diferencia						

2 **Propón una conjetura para el número de diagonales de un polígono de n lados.**

3 **Completa la explicación de la regla $\frac{n(n-3)}{2}$.**

Desde cada vértice salen _____ diagonales (no se une a sí mismo ni a sus dos vecinos). Con n vértices se cuentan _____ extremos de diagonal; como cada diagonal tiene 2 extremos, se ha contado _____ veces y hay que dividir entre _____.

4 **Usa la regla: a) ¿cuántas diagonales tiene un polígono de 100 lados?; b) ¿qué polígono tiene 77 diagonales? (plantea una ecuación).**

FICHA 7 Informe individual

Sesión 7

Trabajo individual. Escribe todos los pasos y justifica.

1 **Sea la secuencia S3 de F7: 3, 8, 15, 24, 35, … Calcula las diferencias, decide el tipo y halla la expresión general.**

2 **Comprueba la regla con el término 7 (calcúlalo contando diferencias) y averigua qué figura tiene 120 baldosas.**

3 **Explica con un dibujo o con álgebra por qué la regla es igual a $(n+1)^2 - 1$.**

4 **Pedro conjetura que los trozos de pizza con n cortes (S4) son 2^n. Refútalo con los términos de S4 y propón una regla correcta.**

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 4 · Generalizar patrones con álgebra

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Informe de conjetura y generalización. Cada afirmación debe estar comprobada o explicada.

Título y equipo

Patrón estudiado

Dibujo de las primeras figuras y descripción con palabras.

Tabla y diferencias

Valores, primera y segunda diferencia.

Conjetura

Regla con palabras y con símbolos.

Comprobación

Casos pequeños y al menos un caso lejano; fórmula de hoja de cálculo.

Explicación

Por qué siempre funciona (dibujo o álgebra).

Contraejemplo o variante

Un caso que rompe una conjetura ingenua o una variante del patrón y su regla.

Conclusión y revisión

Regla final, su dominio, lo aprendido y firma del equipo revisor.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 4 · Generalizar patrones con álgebra

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Informe de conjetura y generalización**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] El patrón se describe con palabras y con una tabla de al menos cinco valores.
- [ ] Las diferencias están bien calculadas y se identifica el tipo de patrón (lineal o cuadrático).
- [ ] La conjetura está escrita con símbolos y es coherente con la tabla.
- [ ] Se comprueba con casos pequeños y con al menos un caso lejano (n = 50 o n = 100).
- [ ] La explicación general usa un dibujo o un razonamiento algebraico, no solo ejemplos.
- [ ] Se incluye un contraejemplo o una variante y se indica si la regla cambia.
- [ ] Se distingue entre «comprobado en estos casos» y «demostrado para todo n».
- [ ] Las expresiones equivalentes (si las hay) se han demostrado con álgebra.
- [ ] El lenguaje es matemático y claro (n, término general, diferencia, conjetura).

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 4 · Generalizar patrones con álgebra

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Informe de conjetura y generalización**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 4 · Generalizar patrones con álgebra

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé descubrir la regla de un patrón con una tabla de diferencias y comprobarla en un caso lejano.	○	○	○	○
Sé explicar por qué una regla funciona siempre y buscar un contraejemplo cuando no estoy seguro.	○	○	○	○
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	○	○	○	○
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	○	○	○	○
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	○	○	○	○
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	○	○	○	○

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 4 · Generalizar patrones con álgebra

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Patrones lineales paso a paso con una tabla guiada.

Ejemplo modelado: la valla de cuadrados

Listones: 4, 7, 10, 13… **1.** Diferencias: $7-4=3$, $10-7=3, 13-10=3$: constante, patrón **lineal**. **2.** Cada figura añade 3, luego $a_n = 3n + c$. **3.** Con $n=1$: $3\cdot 1 + c = 4 \Rightarrow c = 1$. **4.** Regla: $a_n = 3n + 1$. **5.** Comprobación: $n = 4 \Rightarrow 13$ ✔.

Glosario

Término: cada número de una secuencia. **Término general** a_n: regla que da el término de lugar n. **Diferencia:** resta de dos términos consecutivos. **Conjetura:** regla que creemos cierta. **Contraejemplo:** caso que la rompe.

1 **Completa la tabla guiada para la secuencia 5, 8, 11, 14, 17, …**

n	Término	Diferencia con el anterior	$3n$	Término − $3n$
1	5	—	3	2
2	8	3		
3	11			
4	14			
5	17			

2 **Completa: la regla de 5, 8, 11, 14, … es a_n = ___ · n + ___. Calcula el término 10.**

3 **Una escalera de cerillas usa 4, 7, 10, 13… cerillas en sus primeras figuras. Escribe la regla y calcula las cerillas de la figura 20.**

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 4 · Generalizar patrones con álgebra

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rombos de baldosas: un patrón cuadrático y su descomposición

Los rombos de baldosas tienen 1, 5, 13, 25, 41… baldosas (S5 de F7). Generaliza el patrón y justifícalo con una descomposición geométrica.

Pasos

1. Dibuja los rombos de $n = 1, 2, 3$ en una cuadrícula y cuenta sus baldosas.
2. Calcula las diferencias y deduce la expresión $an^2 + bn + c$ con el método de F3.
3. Descompón el rombo en dos cuadrados: uno de lado n y otro de lado $n - 1$. Comprueba que $n^2 + (n-1)^2$ da la misma expresión.
4. Comprueba la regla para $n = 10$ y explica por qué es una explicación general y no solo una comprobación.
5. Plantea una variante (por ejemplo, un rombo hueco) y averigua su regla.

1 **Tabla de valores y diferencias.**

n	1	2	3	4	5
Baldosas					
1.ª diferencia					
2.ª diferencia					

Entrega

Una página con la tabla, la regla, el dibujo de la descomposición, la demostración algebraica de $n^2 + (n-1)^2 = 2n^2 - 2n + 1$ y la variante propuesta con su regla.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 4 · Generalizar patrones con álgebra

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: 21; 2n; 31.
2. A: n=5, 16; n=6, 19; estimación n=10: 31. B oscuras: 24 y 28; n=10: 44. C: 15 y 21; n=10: 55. Se aceptan estimaciones razonables si se explican.
3. A: se añade un cuadrado con 3 listones nuevos. B: se añade una fila y una columna al cuadrado interior y el marco crece 4 baldosas. C: se añade una fila con una bola más que la anterior.
4. A figura 20: $4 + 3 \cdot 19 = 61$ listones (se parte de 4 y se añaden 3 diecinueve veces).

Ficha 2

1. A: dif 3, 3, 3, 3; 2.ª 0: lineal. B total: dif 7, 9, 11, 13; 2.ª 2, 2, 2: cuadrática. C: dif 2, 3, 4, 5; 2.ª 1, 1, 1: cuadrática. S1: dif 3: lineal. S2: dif 4, 6, 8, 10; 2.ª 2: cuadrática.
2. S1: $d = 3; 3 \cdot 1 + c = 5 \Rightarrow c = 2; a_n = 3n + 2$.
3. S3: dif 5, 7, 9, 11; 2.ª 2, luego $a = 1. 1 + b + c = 3$ y $4 + 2b + c = 8: b + c = 2$ y $2b + c = 4 \to b = 2, c = 0$; $a_n = n^2 + 2n$ (n=3: 15 ✔). S4: dif 2, 3, 4, 5; 2.ª 1, luego $a = \frac{1}{2}. \frac{1}{2} + b + c = 2$ y $2 + 2b + c = 4: b + c = \frac{3}{2}$ y $2b + c = 2 \to b = \frac{1}{2}, c = 1; a_n = \frac{n^2+n+2}{2}$ (n=3: 7 ✔).

Ficha 3

1. A: un listón vertical inicial y, por cada cuadrado, 3 más: $3n + 1$. O bien $4n - (n - 1) = 3n + 1$ (cada cuadrado tiene 4 y se comparten $n - 1$). Coinciden: $4n - n + 1 = 3n + 1$.
2. B: $4(n + 1)$ (4 lados de $n + 1$); $4n + 4$ (4 lados de n más 4 esquinas); $(n + 2)^2 - n^2$ (cuadrado grande menos hueco). $(n + 2)^2 - n^2 = n^2 + 4n + 4 - n^2 = 4n + 4 = 4(n + 1)$.
3. C: cada triángulo de $n = 4$ tiene 10 bolas; dos juntos forman un rectángulo de $4 \times 5 = 20$ bolas, luego $T_4 = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$. En general, dos triángulos forman un rectángulo $n \times (n + 1)$: $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
4. $T_{10} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55; T_{100} = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5\,050$.

Ficha 4

1. n=10: A 31; B oscuras 44; B totales 144; C 55. n=50: A 151; B oscuras 204; B totales 2 704; C 1 275. n=100: A 301; B oscuras 404; B totales 10 404; C 5 050.
2. En B2: «=3*A2+1»; en C2: «=A2*(A2+1)/2». Se seleccionan las celdas y se arrastra el controlador de relleno hacia abajo para completar la columna.
3. Que 40 casos no son una demostración: $n = 40$ da $40^2 + 40 + 41 = 1\,681 = 41 \cdot 41$, que no es primo. Un solo caso que falle refuta la conjetura.
4. El error es olvidar el listón inicial: $3 \cdot 10 + 1 = 31$, no 30. Con $n = 2$: 7 listones (no 6).

Ficha 5

1. n=1..6: 1, 2, 4, 8, 16, 31. Predicción 2^{n-1}: 1, 2, 4, 8, 16, 32. Coinciden hasta n=5; en n=6 hay 31 (no 32). La conjetura falla en n=6.
2. Grosor 2: n=1: $25 - 1 = 24$; n=2: $36 - 4 = 32$; n=3: $49 - 9 = 40$; n=4: $64 - 16 = 48$. Regla: $8n + 16$ (diferencia constante 8). Para n=10: $(14)^2 - 10^2 = 96 = 8 \cdot 10 + 16$ ✔.
3. Dos filas: n=1: 7; n=2: 12; n=3: 17. Regla: $5n + 2$ (cada columna añade 5).
4. Respuesta abierta: se valora que la variante genere una secuencia, se calcule la diferencia y se justifique la regla.

Ficha 6

1. n=3: 0; 4: 2; 5: 5; 6: 9; 7: 14; 8: 20. Primeras diferencias: 2, 3, 4, 5, 6.
2. Conjetura: $\frac{n(n-3)}{2}$ (por ejemplo, n=6: $\frac{6\cdot 3}{2} = 9$ ✔).
3. Huecos: $n - 3$; $n(n-3)$; 2; 2. Es decir, desde cada vértice salen $n - 3$ diagonales; con n vértices se cuentan $n(n-3)$ extremos; cada diagonal se cuenta 2 veces, luego hay $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.
4. a) $\frac{100\cdot 97}{2} = 4\,850$. b) $\frac{n(n-3)}{2} = 77 \Rightarrow n^2 - 3n - 154 = 0 \Rightarrow (n-14)(n+11) = 0; n = 14$ (se descarta -11). Comprobación: $\frac{14\cdot 11}{2} = 77$.

Ficha 7

1. Diferencias 5, 7, 9, 11; 2.ª 2, 2, 2: cuadrática con $a = 1$. $1 + b + c = 3$ y $4 + 2b + c = 8 \to b = 2, c = 0$. $a_n = n^2 + 2n$.
2. Término 6: 48 (diferencia 13); término 7: 63 ($7^2 + 14 = 63$). Para 120: $n^2 + 2n = 120 \Rightarrow n^2 + 2n - 120 = 0 \Rightarrow (n+12)(n-10) = 0; n = 10$.
3. $n^2 + 2n = (n+1)^2 - 1$ porque $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Dibujo: un cuadrado de lado $n + 1$ al que se quita una baldosa.
4. S4: 2, 4, 7, 11, 16. 2^n da 2, 4, 8: falla en $n = 3$ (7 trozos y no 8). Regla correcta: $\frac{n^2+n+2}{2}$.

Refuerzo

1. Diferencias 3, 3, 3, 3. Columna $3n$: 3, 6, 9, 12, 15; término − $3n$: siempre 2. Regla $a_n = 3n + 2$.
2. $a_n = 3n + 2; a_{10} = 32$.
3. Diferencias 3: $a_n = 3n + 1$; figura 20: $3 \cdot 20 + 1 = 61$ cerillas.

Ampliación

1. Rombos: 1, 5, 13, 25, 41. Diferencias 4, 8, 12, 16; 2.ª 4: $a = 2$. $2 + b + c = 1$ y $8 + 2b + c = 5 \to b + c = -1$ y $2b + c = -3 \to b = -2, c = 1$. $a_n = 2n^2 - 2n + 1$.
2. $n^2 + (n-1)^2 = n^2 + n^2 - 2n + 1 = 2n^2 - 2n + 1$. Descomposición: un cuadrado de lado n y otro de lado $n - 1$ encajados (en los dos colores de un tablero).
3. $n = 10$: $100 + 81 = 181 = 2 \cdot 100 - 20 + 1$. La descomposición explica por qué siempre funciona, mientras que la comprobación en $n = 10$ solo es un caso.
4. Variante abierta (por ejemplo, rombo hueco: $4(n-1)$ para $n \geq 2$): se valora el cálculo de la regla y su comprobación.

⚠ Errores frecuentes

- Extrapolar una regla con solo tres o cuatro casos y darla por demostrada.
- Confundir los términos de la secuencia con las diferencias, o las diferencias primeras con las segundas.
- Olvidar el término constante al pasar de «añado 3 cada vez» a $a_n = 3n + c$ (por ejemplo, escribir $3n$ en lugar de $3n + 1$).
- Contar mal las baldosas compartidas o las esquinas en el marco (contar dos veces las esquinas).
- Comprobar la regla solo en los casos con los que se obtuvo, sin probar un caso nuevo.
- Confundir «comprobar» con «demostrar»: un dibujo con un ejemplo no explica por qué vale para todo n.

⚖ Criterios para valorar respuestas abiertas

- Las conjeturas abiertas se valoran por su coherencia con los datos y por cómo se comprueban (caso lejano, contraejemplo).
- Se acepta cualquier variante propia si la secuencia está bien calculada y la regla se comprueba con un caso nuevo.
- En las explicaciones se valora que se use un dibujo o un razonamiento general, y no solo una lista de ejemplos.
- La hoja de cálculo o GeoGebra se usan para generar términos y detectar la regla; la explicación debe estar escrita.

05

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Modelos lineales y no lineales

PREGUNTA GUÍA

¿Cómo identificamos el modelo que explica mejor una relación entre variables?

CURSO
4.º ESO · Matemáticas B

SESIONES
8 sesiones · 2.º trimestre

SENTIDOS PRIORITARIOS
D · Sentido algebraico · B · Sentido de la medida

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE3, CE5, CE6, CE7, CE8

PRODUCTO FINAL
Laboratorio de funciones

CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 3.1, 5.2, 6.1, 7.1, 8.1

Contexto, reto y sentido

El Departamento de Ciencias monta un **laboratorio de funciones** con cuatro experimentos de aula (datos ficticios): un muelle que se alarga al colgarle pesas, un balón lanzado hacia arriba, una jeringuilla cerrada cuyo volumen cambia con la presión y un cultivo de levadura que se multiplica cada hora. Nadie sabe todavía qué fórmula explica cada tabla, pero el director quiere informes que respondan a cuestiones como: ¿cuánto medirá el muelle con 720 g?, ¿cuándo tocará el suelo el balón?, ¿qué presión necesita la jeringuilla para reducir su volumen a 5 mL?

Estas preguntas piden **modelos**: lineales cuando el cambio es constante, cuadráticos cuando hay un máximo, de proporcionalidad inversa cuando el producto se mantiene y exponenciales cuando se multiplica cada vez por lo mismo. Se aprende a leer parámetros (pendiente, ordenada, vértice), a calcular tasas de cambio con sus unidades, a hallar puntos de intersección y a discutir hasta dónde se puede fiar uno de un modelo.

Reto

Montar un laboratorio de funciones: identificar el modelo que explica mejor cada relación, interpretar sus parámetros y tasas de cambio, hacer predicciones y discutir sus límites.

Producto final

Laboratorio de funciones.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE5** Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.
- **CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- **1.1** Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.
- **3.1** Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada.
- **5.2** Analizar y poner en práctica conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.
- **6.1** Proponer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.
- **7.1** Representar matemáticamente la información más relevante de un problema, conceptos, procedimientos y resultados, visualizando ideas y estructurando procesos.
- **8.1** Comunicar ideas, conclusiones, conjeturas y razonamientos matemáticos utilizando diferentes medios, con coherencia, claridad y terminología apropiada.

Saberes básicos prioritarios

D
Sentido algebraico

- Funciones lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa y exponenciales sencillas como modelos de situaciones reales.
- Análisis de gráficas y tablas: dominio, crecimiento y decrecimiento, extremos y puntos de corte con los ejes.
- Parámetros de una función y su significado en el contexto: pendiente, ordenada, vértice, constante de proporcionalidad y razón.
- Puntos de intersección de dos funciones y su interpretación en el contexto.
- Elección de un modelo según el patrón de los datos (diferencias, productos, cocientes) y uso de herramientas digitales con deslizadores.

B
Sentido de la medida

- Tasa de variación media: cálculo e interpretación con sus unidades (cm/g, m/s, células/h).
- Magnitudes y unidades en los modelos; límites de la extrapolación.

F
Sentido socioafectivo

- Argumentación y revisión del propio trabajo a partir de la crítica del equipo.
- Valoración de la incertidumbre: un modelo no es la realidad.

Objetivos didácticos

- ✓ Analizar dominio, crecimiento, extremos e intersecciones.
- ✓ Relacionar representaciones de funciones.
- ✓ Comparar modelos lineales y no lineales.
- ✓ Interpretar tasas de cambio y parámetros.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Funciones como modelos

Evidencia: Ficha 1: variables, unidades y dominio de los cuatro experimentos; gráfica de puntos del muelle.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Rectas y parámetros

Evidencia: Ficha 2: pendiente y ordenada del muelle, tabla de parámetros de rectas y comparación de dos muelles.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Cuadráticas y vértice desde gráfica

Evidencia: Ficha 3: vértice y puntos de corte del balón, forma factorizada y forma de vértice.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Otras no lineales sencillas según contexto

Evidencia: Ficha 4: producto constante en el gas y razón constante en la levadura; límites del modelo.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Tasas de cambio

Evidencia: Ficha 5: tasas de variación media del muelle, del balón y de la levadura con unidades.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Puntos de intersección

Evidencia: Ficha 6: intersección de dos muelles y del balón con un dron, con soluciones algebraicas y gráficas.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Laboratorio con tecnología

Evidencia: Ficha 7: ajuste con tecnología de un modelo con deslizadores, tabla de parámetros y propuesta de situaciones.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

8

SESIÓN 8

Informe individual

Evidencia: Ficha 8: informe individual con tres conjuntos de datos nuevos, predicción, intersección y límites.

Ficha: Anexo 3 · ficha 8

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

GeoGebra/Desmos/hoja de cálculo · datos ficticios

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Modelos lineales y cuadráticos con parámetros enteros.

Ampliación

Anexo 9

Ajustar dos modelos plausibles a datos y discutir extrapolación.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Reformulación de cada experimento con variables, unidades, dominio y tipo de cambio esperado, y representación inicial de los datos.	Ficha 1 / lista de cotejo
3.1	Conjeturas sobre el modelo de cada experimento (diferencias, productos, cocientes) y comprobación con valores nuevos o con la tecnología.	Fichas 3 y 4 / escala de valoración
5.2	Conexión entre tabla, gráfica, ecuación y tasa de cambio de una misma función, y entre la intersección gráfica y la ecuación que se resuelve.	Fichas 5 y 6 / rúbrica
6.1	Propuesta de situaciones reales que se modelan con funciones lineales, cuadráticas u otras no lineales, con variables y unidades razonadas.	Ficha 7 (tarea 2) y Ficha 8 / rúbrica
7.1	Gráficas de funciones bien construidas (ejes, escala, puntos clave), tablas de valores y capturas con tecnología en el laboratorio.	Laboratorio (Anexo 4) y Fichas 1, 3 y 7 / rúbrica

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
8.1	Explicación escrita de la elección del modelo, del significado de los parámetros y de los límites de la predicción con lenguaje matemático correcto.	Informe individual (Ficha 8) y laboratorio (Anexo 4) / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Laboratorio, gráficas, parámetros y conclusiones.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 5 · Modelos lineales y no lineales

ALUMNADO

El Departamento de Ciencias ha dejado en el laboratorio cuatro cajas con material y cuatro tablas de datos: un muelle con pesas, un balón que se lanza hacia arriba, una jeringuilla cerrada y un cultivo de levadura. Cada tabla esconde una fórmula. Con la del muelle sabréis cuánto mide con 720 g; con la del balón, cuándo toca el suelo; con la de la levadura, por qué «se multiplican» más rápido que cualquier plan lineal. Pero ¡cuidado!: ¿hasta qué punto podéis fiaros de un modelo? Vais a convertiros en un equipo de laboratorio de funciones.

> *¿Cómo identificamos el modelo que explica mejor una relación entre variables?*

Vuestro reto

Montar un laboratorio de funciones: identificar el modelo que explica mejor cada relación, interpretar sus parámetros y tasas de cambio, hacer predicciones y discutir sus límites.

Lo que vais a producir

Laboratorio de funciones.

Hoja de ruta · 8 sesiones

1. Analizamos las variables, las unidades y el dominio de los cuatro experimentos.
2. Estudiamos el muelle: pendiente, ordenada y qué significan.
3. Estudiamos el balón: vértice, puntos de corte y formas de la cuadrática.
4. Identificamos los modelos de proporcionalidad inversa y exponencial.
5. Calculamos tasas de variación media y las interpretamos.
6. Buscamos puntos de intersección entre dos funciones.
7. Ajustamos modelos con tecnología y proponemos nuevas situaciones.
8. Resolvemos el informe individual del laboratorio.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Analizar dominio, crecimiento, extremos e intersecciones.
- ✓ Relacionar representaciones de funciones.
- ✓ Comparar modelos lineales y no lineales.
- ✓ Interpretar tasas de cambio y parámetros.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 5 · Modelos lineales y no lineales

ALUMNADO

Descripción del laboratorio, tablas de datos de los cuatro experimentos, familias de funciones, cuadro de parámetros y tasas, una gráfica de balón y dron, un cuadro para decidir el modelo y un protocolo para usar deslizadores. Todos los datos son ficticios y creados para el aula.

F1 El laboratorio de funciones

ESTUDIO DE CASO

El Departamento de Ciencias prepara cuatro experimentos:

- **Muelle (A).** Se cuelgan pesas de masa m (en g) y se mide la longitud L del muelle (en cm). Hay un muelle de repuesto (B) con otras características.
- **Balón (B).** Se lanza un balón hacia arriba desde 1,5 m de altura y se mide su altura h (en m) cada 0,5 s (t en s).
- **Gas (C).** En una jeringuilla cerrada se mide el volumen V (en mL) a distintas presiones P (en atmósferas).
- **Levadura (D).** Se cuenta el número de células N de un cultivo, cada hora t.

Además, un dron de seguimiento desciende con altura $d(t) = 11{,}5 - 5t$ (en m, con t en s) mientras el balón sube y baja.

Fuente: Situación y datos ficticios creados para el aula.

¿Qué variable es independiente y cuál dependiente en cada experimento? ¿Qué unidad tiene cada una?

F2 Datos del muelle y del balón

DATOS

Masa m (g)	Longitud L (cm)	Tiempo t (s)	Altura h (m)
0	12	0	1,5
100	14,5	0,5	5,25
200	17	1	6,5
300	19,5	1,5	5,25
400	22	2	1,5

Fuente: Datos ficticios creados para el aula.

Las dos primeras columnas son del muelle; las dos últimas, del balón. ¿Qué patrones ves en cada pareja de columnas?

F3 Datos de la jeringuilla y de la levadura

DATOS

Presión P (atm)	Volumen V (mL)	Tiempo t (h)	Células N
1	60	0	100
2	30	1	200
3	20	2	400
4	15	3	800
6	10	4	1 600

Fuente: Datos ficticios creados para el aula.

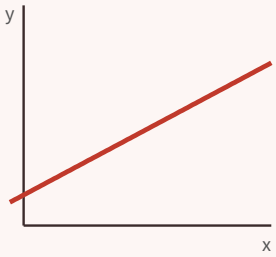
Las dos primeras columnas son del gas; las dos últimas, de la levadura. Fíjate en las presiones: no van de uno en uno.

F4 Cuatro familias de funciones

ESQUEMA

Lineal

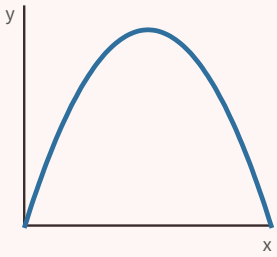
$y = m \cdot x + n$



m: pendiente (tasa de cambio constante)
n: ordenada (valor en x = 0)

Cuadrática

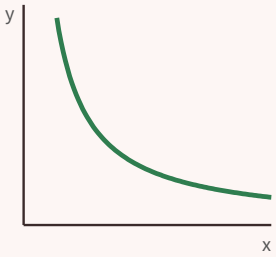
$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$



vértice en $x = -b/(2a)$
$a < 0$: abre hacia abajo (máximo)

Inversa

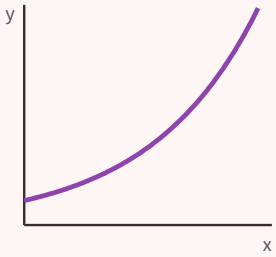
$y = k / x$



el producto x·y es constante (k)
nunca toca los ejes

Exponencial

$y = a \cdot b^x$



$b > 1$: cada paso multiplica por b
el cociente y(x+1)/y(x) es constante

Fuente: Esquema de elaboración propia.

¿A qué familia corresponde cada experimento? ¿Qué dos parámetros determinan la recta?

F5 Parámetros y tasas de cambio: cuadro de fórmulas

TEXTO

- **Recta** $y = mx + n$: m es la **pendiente** (cuánto cambia y por cada unidad de x) y n la **ordenada** (valor para $x = 0$). Con dos puntos: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
- **Parábola** $y = ax^2 + bx + c$: el **vértice** está en $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ y su altura es $y_v = f(x_v)$; si $a < 0$ es un máximo y si $a > 0$ un mínimo. Corta al eje y en $(0, c)$ y al eje x en las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$.
- **Forma de vértice:** $y = a(x - x_v)^2 + y_v$.
- **Inversa** $y = \dfrac{k}{x}$: el producto $x \cdot y = k$ es constante.
- **Exponencial** $y = a \cdot b^x$: el cociente $\dfrac{y(x+1)}{y(x)} = b$ es constante.
- **Tasa de variación media** en $[a, b]$: $\mathrm{TVM} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, con unidades «unidades de y por unidad de x».
- **Intersección:** los cortes de f y g son las soluciones de $f(x) = g(x)$.

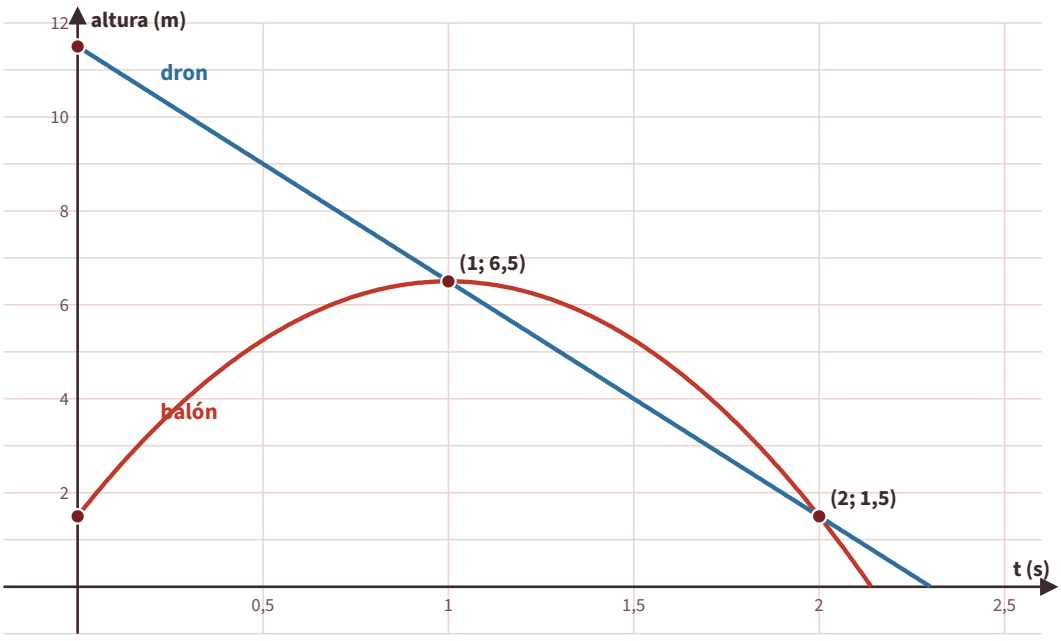
Ejemplo. En el muelle, entre 100 g y 300 g: $\mathrm{TVM} = \frac{19{,}5 - 14{,}5}{300 - 100} = 0{,}025$ cm/g.

Fuente: Elaboración propia.

La tasa de variación media de una recta es siempre su pendiente; la de una curva cambia según el intervalo.

F6 El balón y el dron

GRÁFICO



Fuente: Gráfica generada con las fórmulas $h(t) = 1{,}5 + 10t - 5t^2$ y $d(t) = 11{,}5 - 5t$ (datos ficticios).

¿Qué significan los puntos de corte? ¿Qué ecuación hay que resolver para hallarlos?

F7 Cuadro para decidir el modelo

DATOS

Modelo	Pista en una tabla (valores de x equiespaciados)	Ejemplo del laboratorio
Lineal	Las diferencias de y son constantes.	Muelle: 2,5 cm cada 100 g.
Cuadrática	Las segundas diferencias de y son constantes.	Balón: diferencias 3,75; 1,25; −1,25; −3,75.
Proporcionalidad inversa	El producto $x \cdot y$ es constante.	Gas: $P \cdot V = 60$.
Exponencial	El cociente de términos consecutivos es constante.	Levadura: cada hora se multiplica por 2.

Fuente: Elaboración propia.

Si ninguna pista funciona, dibuja los puntos: la forma también orienta. Pero siempre hay que comprobar con un valor nuevo.

F8 Ajuste de un modelo con deslizadores

PROTOCOLO

- **Datos.** Introduce los puntos de la tabla (en GeoGebra, una lista de puntos; en Desmos, una tabla).
- **Deslizadores.** Crea parámetros: m y n para una recta; a, b y c para una parábola; k para $y = k/x$; a y b para $y = a \cdot b^x$.
- **Modelo.** Escribe la función con los parámetros y mueve los deslizadores hasta que la curva pase por los puntos.
- **Comprueba.** ¿Pasa por todos los puntos? Calcula el valor del modelo en un punto que no hayas usado y compáralo con otro dato.
- **Límites.** Prolonga la gráfica y razona si los valores tienen sentido en el contexto (por ejemplo, volumen negativo o muelle roto).

Fuente: Elaboración propia. Válido con GeoGebra, Desmos u hoja de cálculo.

Un modelo ajustado a pocos datos puede fallar fuera del rango medido: pregúntate siempre «¿hasta dónde?».

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 5 · Modelos lineales y no lineales

ALUMNADO

FICHA 1 Funciones como modelos

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Lee F1, F2 y F3. Antes de buscar fórmulas, define las variables y representa los datos.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

Si f(x) = 2x + 1, f(3) es…

☐ 7 ☐ 6 ☐ 5

La gráfica de $y = x^2$ es…

☐ una recta ☐ una parábola ☐ una hipérbola

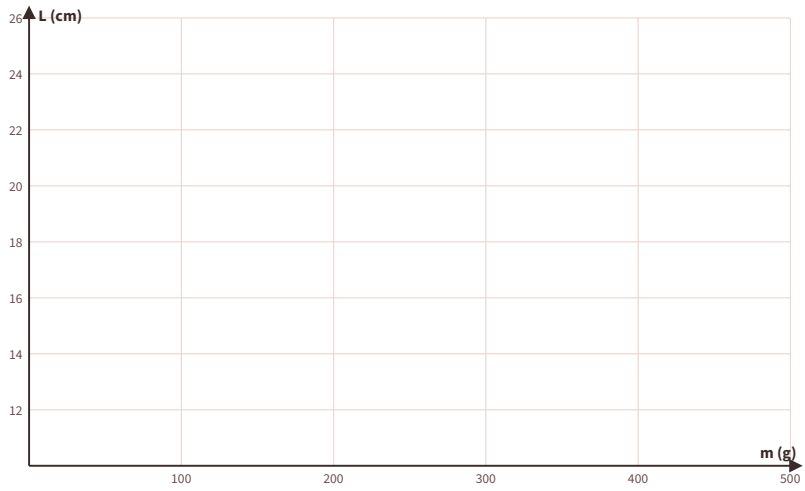
Si al aumentar x aumenta y siempre lo mismo, la relación es…

☐ lineal ☐ cuadrática ☐ inversa

2 **Completa la tabla con las variables y las unidades de cada experimento.**

Experimento	Variable independiente (unidad)	Variable dependiente (unidad)	¿Qué esperas? (sube, baja, sube y baja…)
Muelle			
Balón			
Gas			
Levadura			

3 **Representa los puntos del muelle (F2) en la cuadrícula. ¿Qué forma tienen?**



4 En el balón, ¿entre qué valores de t tiene sentido el modelo? ¿Qué altura máxima se observa en la tabla de F2 y en qué instante?

FICHA 2 Rectas y parámetros

Sesión 2

Usa F2 (muelle) y F5. Escribe las unidades en cada resultado.

1 Calcula la pendiente del muelle con dos pares de puntos distintos de F2 y escribe la ecuación $L = n + m \cdot \text{masa}$. Interpreta m y n con sus unidades.

2 Con tu ecuación: a) ¿cuánto mide el muelle con 350 g?; b) ¿qué masa hace que mida 30 cm?; c) ¿por qué no podemos fiarnos del modelo para 10 kg?

3 Completa la tabla sobre el efecto de los parámetros.

Recta	Pendiente	Ordenada	¿Crece o decrece?	Corte con el eje x
$y = 2x + 1$				
$y = 2x - 3$				
$y = -x + 4$				
$y = 0{,}5x$				

4 El muelle de repuesto (B) cumple $L_B = 9 + 0{,}03\,m$. ¿Cuál se estira más por cada gramo? ¿Cuál es más largo con 100 g? Con F8, comprueba con deslizadores qué cambia al modificar m y n.

FICHA 3 Parábolas: vértice y cortes

Sesión 3

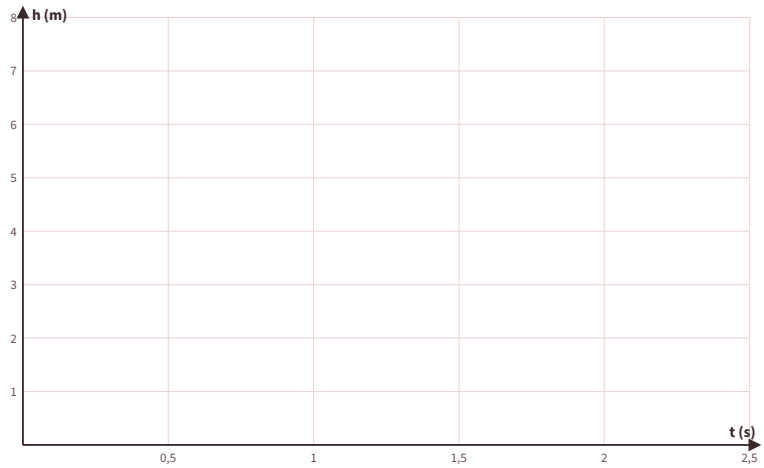
Usa F2 (balón), F5 y F6. Compara dos formas de la misma función.

1 Observa la tabla del balón: $h(0) = h(2)$ y $h(0{,}5) = h(1{,}5)$. ¿Dónde está el vértice? ¿Por qué ocurre esta simetría?

2 El modelo es $h(t) = -5t^2 + 10t + 1{,}5$. Calcula: a) el vértice con $x_v = -b/(2a)$; b) la ordenada y su significado; c) en qué instante toca el suelo (resuelve $h = 0$ y descarta la solución sin sentido).

3 Comprueba que $h(t) = -5(t-1)^2 + 6{,}5$ desarrollando. ¿Qué información da cada forma a simple vista?

4 Dibuja $h(t)$ para $t \in [0; 2{,}5]$ marcando el vértice y los puntos de corte.



FICHA 4 Proporcionalidad inversa y exponencial

Sesión 4

Usa F3 y F7. Decide con el cuadro del modelo y comprueba con valores nuevos.

1 Gas: completa la tabla y encuentra la constante. Calcula V para $P = 0{,}5$ atm y $P = 12$ atm.

P (atm)	V (mL)	P · V
1	60	
2	30	
3	20	
4	15	
6	10	
0,5		
12		

2 Levadura: completa la razón entre valores consecutivos, escribe la fórmula $N(t)$ y calcula $N(5)$ y $N(10)$.

t (h)	N	Razón N(t)/N(t−1)
0	100	—
1	200	
2	400	
3	800	
4	1 600	

3 Con F7, indica para cada experimento qué prueba usas, qué resultado da y qué modelo eliges.

Experimento	Prueba	Resultado	Modelo
Muelle			
Balón			
Gas			
Levadura			

4 ¿Es razonable que el volumen sea 120 mL a 0,5 atm? ¿Y que la levadura se duplique cada hora durante 10 horas? Justifica los límites de cada modelo.

FICHA 5 Tasas de variación

Sesión 5

Usa la fórmula de la TVM de F5. Escribe siempre las unidades.

1 Muelle: calcula la TVM en $[0, 200]$, $[200, 400]$ y $[0, 400]$. ¿Qué observas y por qué?

2 Balón: calcula la TVM en cada intervalo de 0,5 s y explica qué significan los signos.

Intervalo (s)	Cálculo	TVM (m/s)	Interpretación
[0; 0,5]			
[0,5; 1]			
[1; 1,5]			
[1,5; 2]			

3 **Levadura: calcula la TVM en cada intervalo de 1 h. ¿Es constante? Compárala con la de un modelo lineal.**

4 **En una frase para cada experimento, indica si la tasa de variación es constante, creciente o cambia de signo, y qué te dice del modelo.**

FICHA 6 Puntos de intersección

Sesión 6

Usa F6 y F5. Resuelve las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y comprueba con la gráfica.

1 **Muelles A y B: $L_A = 12 + 0{,}025\,m$ y $L_B = 9 + 0{,}03\,m$. Halla la masa para la que miden lo mismo y esa longitud. ¿Cuál es más largo antes y después?**

2 **Balón y dron (F6): resuelve $1{,}5 + 10t - 5t^2 = 11{,}5 - 5t$ y calcula las alturas de los cruces. ¿Qué significa cada solución?**

3 **Si el dron descendiera con $d(t) = 11{,}5 - 4t$, ¿se cruzaría con el balón? Plantea la ecuación y calcula el discriminante.**

FICHA 7 Laboratorio con tecnología

Sesión 7

En equipo, con GeoGebra, Desmos u hoja de cálculo. Repartid roles: operador, comprobador, secretario y portavoz. Seguid F8.

1 **Elegid un experimento y registrad el ajuste del modelo.**

Experimento	Modelo y fórmula	Parámetros ajustados	¿Pasa por todos los puntos?	Predicción y comprobación

2 **Proponed una situación real distinta de las del laboratorio para cada tipo: lineal, cuadrática y otra no lineal. Indicad variables, unidades y qué significaría cada parámetro.**

Tipo	Situación	Variables y unidades	Significado de los parámetros
Lineal			
Cuadrática			
Inversa o exponencial			

3 **Revisión cruzada: otro equipo comprueba vuestro laboratorio.**

- ☐ El modelo elegido se justifica con una prueba (diferencias, producto o cociente)
- ☐ Los parámetros tienen unidades y significado
- ☐ Hay una predicción comprobada con un dato nuevo
- ☐ Las gráficas tienen ejes, escala y puntos clave rotulados
- ☐ Se discute hasta dónde vale el modelo

FICHA 8 Informe individual

Sesión 8

Resuelve sin ayuda del equipo. Tres conjuntos de datos nuevos (ficticios): D1, volumen de un depósito V (L) a los x minutos; D2, cuota y (€) de una excursión de 120 € que se reparte entre x personas; D3, nivel y (m) del cable de un puente a x metros del extremo.

1 **Completa la tabla, decide el modelo de cada conjunto de datos y escribe su ecuación.**

Conjunto	Datos	Prueba y resultado	Ecuación
D1	x: 0, 1, 2, 3, 4 → V: 20, 26, 32, 38, 44		
D2	x: 1, 2, 3, 4, 6 → y: 120, 60, 40, 30, 20		
D3	x: 0, 1, 2, 3, 4 → y: 3, 0, −1, 0, 3		

2 **Interpreta los parámetros de D1 con sus unidades y calcula cuándo el depósito llega a 110 L.**

3 **Otro depósito sigue $V = 44 + 2x$. ¿Cuándo tienen el mismo volumen? ¿Cuánto vale entonces?**

4 **Con D3: halla el vértice y calcula el nivel para $x = 6$. Calcula también la TVM en $[0, 2]$ e interprétala.**

5 **Un compañero usa D1 para predecir el volumen a las 24 h (1 440 min). ¿Qué resultado obtiene y por qué no es razonable? Propón una situación real no lineal que sí podrías modelar con D2 o D3.**

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 5 · Modelos lineales y no lineales

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Laboratorio de funciones. Cada modelo se justifica con datos, se interpreta con unidades y se discute en sus límites.

Título y equipo

Experimento y variables

Variables, unidades y datos.

Modelo elegido

Prueba usada, ecuación y parámetros.

Gráfica del modelo y de los datos

Ejes, escala y puntos clave rotulados.

Tasa de cambio

TVM con unidades e interpretación.

Predicción e intersección

Un valor nuevo o un cruce con otra función.

Límites del modelo

¿Hasta dónde se puede fiar de él?

Conclusión y revisión

Resumen y firma del equipo revisor.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 5 · Modelos lineales y no lineales

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Laboratorio de funciones**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] Las variables y las unidades de cada experimento están bien identificadas.
- [ ] El modelo elegido se justifica con una prueba (diferencias, producto o cociente) y no solo con el aspecto de la gráfica.
- [ ] La ecuación pasa por los puntos de la tabla y se ha comprobado con al menos un dato.
- [ ] Los parámetros (pendiente, ordenada, vértice, constante) se interpretan en el contexto, con unidades.
- [ ] La gráfica tiene ejes rotulados, escala adecuada y los puntos clave señalados.
- [ ] Las tasas de variación media están calculadas con sus unidades y bien interpretadas.
- [ ] Se ha resuelto al menos una intersección con álgebra y se ha comprobado con la gráfica.
- [ ] Se discute hasta dónde es válido el modelo (dominio y extrapolación).
- [ ] Se incluye una captura o descripción del ajuste con tecnología (deslizadores).

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 5 · Modelos lineales y no lineales

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Laboratorio de funciones**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 5 · Modelos lineales y no lineales

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé elegir un modelo para unos datos y justificar la elección con una prueba.	○	○	○	○
Sé interpretar parámetros y tasas de cambio con sus unidades y decir hasta dónde vale el modelo.	○	○	○	○
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	○	○	○	○
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	○	○	○	○
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	○	○	○	○
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	○	○	○	○

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 5 · Modelos lineales y no lineales

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Modelos lineales y cuadráticos con parámetros enteros: ejemplos resueltos y actividades guiadas.

Ejemplo modelado

Recta $y = 2x + 1$: pendiente 2 (sube 2 por cada 1 que avanza) y ordenada 1. Puntos: (0, 1), (1, 3), (2, 5). **Parábola** $y = x^2 - 4x + 3$: $x_v = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$ y $y_v = 4 - 8 + 3 = -1$, vértice $(2, -1)$. Corta al eje y en $(0, 3)$ y al eje x en $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ o $x = 3$.

Símbolos y vocabulario

Pendiente m: cambio de y por cada unidad de x. **Ordenada** n: valor de y cuando $x = 0$. **Vértice:** punto más alto o más bajo de una parábola. **TVM:** $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. **Dominio:** valores de x con sentido.

1 **Completa las tablas de valores.**

x	−2	−1	0	1	2	3
$y = 2x - 1$						
$y = -x + 3$						
$y = x^2 - 2x - 3$						

2 **Para $y = x^2 - 2x - 3$ calcula el vértice, el corte con el eje y y los cortes con el eje x.**

3 **Una bici de alquiler cuesta 3 € de fianza más 2 € por hora. Escribe la función $C(t)$, calcula $C(4)$ e interpreta la pendiente.**

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 5 · Modelos lineales y no lineales

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Dos modelos plausibles para la levadura: ¿cuál elegir?

Con solo las tres primeras mediciones de la levadura ($t = 0$: 100; $t = 1$: 200; $t = 2$: 400), dos técnicos proponen modelos distintos que pasan exactamente por esos tres puntos: el técnico X propone el cuadrático $N = 50t^2 + 50t + 100$ y la técnica Y, el exponencial $N = 100 \cdot 2^t$. Los dos son «plausibles», pero predicen cosas muy distintas.

Pasos

1. Comprueba que ambos modelos pasan por los tres puntos.
2. Calcula los dos modelos para $t = 3, 4$ y 10 y compáralos con los datos de F3.
3. Calcula la TVM de cada modelo en $[0, 1]$ y $[3, 4]$ y explica qué tipo de cambio muestra cada uno.
4. Responde: ¿qué dato habría permitido decidir antes de hacer la predicción? ¿Se puede estar seguro con tres puntos?
5. Redacta una recomendación para el director del laboratorio sobre el uso de cada modelo fuera del rango medido.

1 **Tabla comparativa.**

t (h)	Datos reales	Modelo cuadrático	Modelo exponencial
0	100		
1	200		
2	400		
3	800		
4	1 600		
10	—		

Entrega

La tabla completada, las TVM, una explicación de por qué dos modelos que coinciden en tres puntos pueden divergir y una recomendación razonada sobre la extrapolación.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 5 · Modelos lineales y no lineales

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: 7; una parábola; lineal.
2. Muelle: m (g) → L (cm); sube. Balón: t (s) → h (m); sube y baja. Gas: P (atm) → V (mL); baja. Levadura: t (h) → N (células); sube cada vez más deprisa.
3. Los puntos (0, 12), (100, 14,5), (200, 17), (300, 19,5), (400, 22) están alineados: forma de recta.
4. Sentido del modelo: desde $t = 0$ hasta que toca el suelo (hacia $t \approx 2{,}14$ s). En la tabla, altura máxima 6,5 m en $t = 1$ s.

Ficha 2

1. $m = \frac{14{,}5-12}{100-0} = 0{,}025$ cm/g y $m = \frac{22-17}{400-200} = 0{,}025$ cm/g. $n = 12$ cm (longitud sin pesas). $L = 12 + 0{,}025\,m$. Cada gramo alarga 0,025 cm; sin masa mide 12 cm.
2. a) $L(350) = 12 + 8{,}75 = 20{,}75$ cm. b) $12 + 0{,}025m = 30 \Rightarrow m = 720$ g. c) Con 10 kg el muelle superaría su límite elástico (se deformaría o se rompería): el modelo solo vale para masas moderadas.
3. $y = 2x + 1$: m 2, n 1, crece, corte $-0{,}5$. $y = 2x - 3$: m 2, n −3, crece, corte 1,5. $y = -x + 4$: m −1, n 4, decrece, corte 4. $y = 0{,}5x$: m 0,5, n 0, crece, corte 0 (origen).
4. B se estira más por gramo (0,03 > 0,025 cm/g). Con 100 g: A mide 14,5 cm y B 12 cm: A es más largo. Con deslizadores: m cambia la inclinación; n sube o baja la recta sin cambiar su inclinación.

Ficha 3

1. La simetría respecto a $t = 1$ s hace que el vértice esté en $t = 1$: la altura sube y baja de la misma manera (la parábola es simétrica). $h(1) = 6{,}5$ m.
2. a) $t_v = -\frac{10}{2\cdot(-5)} = 1$ s; $h(1) = -5 + 10 + 1{,}5 = 6{,}5$ m. b) Ordenada: $h(0) = 1{,}5$ m, la altura desde la que se lanza. c) $-5t^2 + 10t + 1{,}5 = 0 \Rightarrow t = \frac{-10 \pm \sqrt{100+30}}{-10} = 1 \mp \frac{\sqrt{130}}{10}$: $t \approx 2{,}14$ s o $t \approx -0{,}14$ s (descartada). Toca el suelo a los 2,14 s.
3. $-5(t-1)^2 + 6{,}5 = -5t^2 + 10t - 5 + 6{,}5 = -5t^2 + 10t + 1{,}5$ ✔. La forma de vértice muestra el máximo $(1; 6{,}5)$; la forma desarrollada muestra la altura inicial 1,5 (el término independiente).
4. Gráfica con vértice (1; 6,5), ordenada (0; 1,5) y corte en $t \approx 2{,}14$.

Ficha 4

1. $P \cdot V$: 60 en todos los casos. $V = \frac{60}{P}$. $P = 0{,}5$: 120 mL; $P = 12$: 5 mL.
2. Razón siempre 2. $N(t) = 100 \cdot 2^t$. $N(5) = 3\,200$; $N(10) = 102\,400$.
3. Muelle: diferencias 2,5 constantes → lineal. Balón: diferencias 3,75; 1,25; −1,25; −3,75 y segundas −2,5 → cuadrática. Gas: producto 60 → inversa. Levadura: cociente 2 → exponencial.
4. A 0,5 atm sí es razonable matemáticamente, pero la jeringuilla tiene un volumen máximo físico y no se puede reducir a 5 mL de forma indefinida. La levadura no se duplica 10 horas: falta alimento y espacio; el modelo solo vale en las primeras horas.

Ficha 5

1. $[0, 200]$: $\frac{17-12}{200} = 0{,}025$. $[200, 400]$: $\frac{22-17}{200} = 0{,}025$. $[0, 400]$: $\frac{10}{400} = 0{,}025$ cm/g. Es constante porque la función es lineal: coincide con la pendiente.
2. $[0; 0{,}5]$: $\frac{5{,}25-1{,}5}{0{,}5} = 7{,}5$ m/s (sube). $[0{,}5; 1]$: $\frac{6{,}5-5{,}25}{0{,}5} = 2{,}5$ m/s. $[1; 1{,}5]$: $-2{,}5$ m/s (baja). $[1{,}5; 2]$: $-7{,}5$ m/s. El signo positivo indica que sube y el negativo que baja; la velocidad media disminuye en valor hasta el vértice.
3. $[0, 1]$: 100 células/h; $[1, 2]$: 200; $[2, 3]$: 400; $[3, 4]$: 800. No es constante: crece en cada intervalo (se duplica). Un lineal tendría tasa constante.
4. Muelle: tasa constante (lineal). Balón: tasa que cambia de signo (parábola, con máximo). Levadura: tasa creciente (exponencial).

Ficha 6

1. $12 + 0{,}025m = 9 + 0{,}03m \Rightarrow 3 = 0{,}005m \Rightarrow m = 600$ g; $L = 12 + 15 = 27$ cm (y $9 + 18 = 27$). Antes de 600 g, A es más largo (por ejemplo 100 g: 14,5 y 12); después de 600 g, B es más largo.
2. $1{,}5 + 10t - 5t^2 = 11{,}5 - 5t \Rightarrow 5t^2 - 15t + 10 = 0 \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-2) = 0$. $t = 1$ s: $h = d = 6{,}5$ m. $t = 2$ s: $h = d = 1{,}5$ m. Son los dos instantes en que balón y dron están a la misma altura (se cruzan una vez subiendo el balón y otra bajando).
3. $1{,}5 + 10t - 5t^2 = 11{,}5 - 4t \Rightarrow 5t^2 - 14t + 10 = 0$; $\Delta = 196 - 200 = -4 < 0$: no hay solución real, no se cruzan.

Ficha 7

1. Respuesta abierta. Ejemplo para el muelle: modelo lineal $L = 12 + 0{,}025m$, parámetros $m = 0{,}025$ y $n = 12$, pasa por todos los puntos, predicción $L(250) = 18{,}25$ cm. Ejemplo para el balón: $h = -5t^2 + 10t + 1{,}5$.
2. Respuesta abierta. Ejemplos: lineal, tarifa de taxi (bajada de bandera más precio por km); cuadrática, área de una parcela rectangular con perímetro fijo; inversa, tiempo de un viaje según velocidad; exponencial, crecimiento de seguidores o cultivos al principio.
3. Revisión cruzada: criterios en el Anexo 5.

Ficha 8

1. D1: diferencias 6 constantes → lineal, $V = 20 + 6x$. D2: productos $x \cdot y = 120$ → inversa, $y = \frac{120}{x}$. D3: diferencias −3, −1, 1, 3; segundas 2, 2, 2 → cuadrática con $a = 1$. Con $(0, 3)$: $c = 3$. Con $(1, 0)$: $1 + b + 3 = 0 \Rightarrow b = -4$. $y = x^2 - 4x + 3$ (comprobación: $x = 2$ da -1 ✔).
2. Pendiente 6 L/min (el depósito se llena a 6 litros por minuto); ordenada 20 L (volumen inicial). $20 + 6x = 110 \Rightarrow x = 15$ min.
3. $20 + 6x = 44 + 2x \Rightarrow 4x = 24 \Rightarrow x = 6$ min; $V = 56$ L (comprobación: $20 + 36 = 56$ y $44 + 12 = 56$).
4. $x_v = -\frac{-4}{2} = 2$; $y_v = -1$: vértice $(2, -1)$. $y(6) = 36 - 24 + 3 = 15$ m. TVM$[0, 2] = \frac{-1-3}{2} = -2$ m por m: el cable baja 2 m de nivel por cada metro recorrido en ese tramo.
5. $V(1\,440) = 20 + 6 \cdot 1\,440 = 8\,660$ L: un depósito de aula no llega a esa capacidad; el modelo solo vale mientras el depósito no se llena. Propuesta abierta: por ejemplo, cuota de una excursión (inversa) o altura de un salto (cuadrática).

Refuerzo

1. $y = 2x - 1$: −5, −3, −1, 1, 3, 5. $y = -x + 3$: 5, 4, 3, 2, 1, 0. $y = x^2 - 2x - 3$: 5, 0, −3, −4, −3, 0.
2. Vértice $x_v = 1, y_v = -4$: $(1, -4)$. Corte con y: $(0, -3)$. Cortes con x: $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ o $x = -1$.
3. $C(t) = 3 + 2t$. $C(4) = 11$ €. La pendiente 2 € por hora es lo que cuesta cada hora de alquiler.

Ampliación

1. Cuadrático: $t = 0$: 100; $t = 1$: 50+50+100=200; $t = 2$: 200+100+100=400 ✔. Exponencial: 100, 200, 400 ✔.
2. $t = 3$: cuadrático $450 + 150 + 100 = 700$; exponencial 800 (dato real 800). $t = 4$: cuadrático 1 100; exponencial 1 600 (dato real 1 600). $t = 10$: cuadrático 5 600; exponencial 102 400. El exponencial coincide con todos los datos.
3. Cuadrático: $[0, 1]$: 100; $[3, 4]$: 400 células/h (tasa creciente linealmente). Exponencial: $[0, 1]$: 100; $[3, 4]$: 800 (la tasa se duplica cada hora).
4. Un dato más (como $t = 3$) habría descartado el cuadrático. Con tres puntos no se puede estar seguro porque hay infinitas curvas que pasan por ellos.
5. Recomendación esperable: usar un modelo solo en el rango medido, contrastar con datos nuevos y no extrapolar lejos sin base física (en la levadura, el exponencial deja de valer al agotarse los nutrientes).

Errores frecuentes

- Calcular la pendiente restando en distinto orden en numerador y denominador (signo erróneo).
- Olvidar las unidades de la pendiente o de la TVM, o no interpretarlas en el contexto.
- Confundir el vértice con el punto de corte con el eje: usar $-b/a$ en lugar de $-b/(2a)$.
- Aceptar las dos soluciones de una ecuación cuadrática sin comprobar si tienen sentido en el contexto (por ejemplo, un tiempo negativo).
- Elegir un modelo solo por la forma de la gráfica, sin probarlo con un dato nuevo.
- Extrapolar sin pensar: dar por válido un modelo muy lejos de los datos medidos.

Criterios para valorar respuestas abiertas

- Se valora que cada parámetro se interprete con sus unidades y en el contexto, no solo el valor numérico.
- Las situaciones propuestas se aceptan si las variables y las unidades son coherentes con el tipo de modelo.
- La justificación del modelo debe usar una prueba (diferencias, producto o cociente) y una comprobación con un dato nuevo.
- Se puede usar GeoGebra, Desmos o la hoja de cálculo para comprobar, pero el cálculo de pendientes, vértices e intersecciones debe aparecer escrito.

06

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Geometría analítica de la recta

PREGUNTA GUÍA

¿Cómo describimos una trayectoria geométrica con coordenadas y ecuaciones?

CURSO 4.º ESO · Matemáticas B	SESIONES 8 sesiones · 2.º trimestre	SENTIDOS PRIORITARIOS C · Sentido espacial · D · Sentido algebraico
COMPETENCIAS ESPECÍFICAS CE1, CE3, CE5, CE7	PRODUCTO FINAL Mapa de trayectorias en el plano	CRITERIOS DE EVALUACIÓN 1.1, 1.2, 3.1, 5.2, 7.1

Contexto, reto y sentido

Vegaplana (ciudad ficticia) estrena un servicio municipal de **drones de reparto sanitario**: llevan medicamentos y material de primeros auxilios entre el hospital, el laboratorio, la residencia de mayores, el centro de salud y el polideportivo. Cada dron vuela en línea recta entre dos puntos del plano de la ciudad, a 12 m/s. Antes de dar permiso, el Ayuntamiento exige un **mapa analítico**: cada ruta con su ecuación, los puntos donde se cruzan, las rutas paralelas y una solución para los cruces peligrosos.

La situación une el sentido espacial y el algebraico: ubicar puntos con coordenadas, medir con vectores, interpretar la **pendiente**, escribir la recta de varias formas (punto-pendiente, explícita y general), decidir si dos rectas son paralelas, perpendiculares o secantes y resolver el sistema que da su intersección. Hay un matiz importante: dos *rectas* pueden cortarse sin que lo hagan los *segmentos* que recorren los drones. El producto final es un mapa que se defiende con cálculos, no con la regla.

Reto

Diseñar el mapa de trayectorias de un servicio de drones: escribir la ecuación de cada ruta, calcular cruces y paralelismos, comprobar las normas de seguridad y justificar cada decisión con coordenadas.

Producto final

Mapa de trayectorias en el plano.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE5** Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- **1.1** Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.
- **1.2** Analizar y seleccionar diferentes herramientas y estrategias elaboradas en la resolución de un mismo problema, valorando su eficiencia.
- **3.1** Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada.
- **5.2** Analizar y poner en práctica conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.
- **7.1** Representar matemáticamente la información más relevante de un problema, conceptos, procedimientos y resultados, visualizando ideas y estructurando procesos.

Saberes básicos prioritarios

C
Sentido espacial

- Coordenadas cartesianas en el plano: representación de puntos, vectores determinados por dos puntos, distancia entre puntos y punto medio.
- Vector director de una recta y relación con la pendiente.
- Posiciones relativas de dos rectas: paralelas, secantes y coincidentes; perpendicularidad por el producto de pendientes.
- Herramientas digitales (GeoGebra) para representar, conjeturar y comprobar propiedades de rectas.

D
Sentido algebraico

- Pendiente de una recta como tasa de cambio y su interpretación (sube, baja, es horizontal; porcentaje de pendiente).
- Ecuaciones de la recta: punto-pendiente, explícita y general; rectas horizontales y verticales; paso de una forma a otra.
- Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales para hallar la intersección de dos rectas e interpretar sistemas sin solución o con infinitas soluciones.

F
Sentido socioafectivo

- Búsqueda de contraejemplos y aceptación del error como parte de la investigación.
- Trabajo en equipo con roles y revisión cruzada de cálculos.

Objetivos didácticos

- Interpretar pendiente y ecuaciones de recta.
- Obtener una recta a partir de puntos o condiciones.
- Analizar paralelismo e intersecciones.
- Conectar representación geométrica y algebraica.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Puntos y trayectorias

Evidencia: Ficha 1: lectura de coordenadas en el plano, vector, longitud y punto medio de cada ruta, y plano esbozado a mano.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Pendiente entre dos puntos

Evidencia: Ficha 2: pendientes de las rutas, relación entre pares de puntos y pendientes, pendiente como porcentaje y verdadero/falso.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Ecuaciones equivalentes de la recta

Evidencia: Ficha 3: ecuación de cada ruta en tres formas, conversión entre formas y comprobación de si un punto pertenece a una recta.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Paralelas e intersecciones

Evidencia: Ficha 4: rutas paralelas y perpendiculares, intersección por sistema y posición relativa de rectas frente a segmentos.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Problemas de trayectorias

Evidencia: Ficha 5: conflicto de dos drones en un cruce, ruta alternativa que evita la zona de silencio y ruta hacia el punto de recarga.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

GeoGebra para conjeturas

Evidencia: Ficha 6: exploración con deslizadores en GeoGebra, tabla de perpendiculares y búsqueda de un contraejemplo.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Mapa analítico

Evidencia: Ficha 7: borrador del mapa del equipo con ecuaciones, cruces, comprobación de normas y revisión cruzada.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

8

SESIÓN 8

Reto individual

Evidencia: Ficha 8: reto individual con dos rutas nuevas: ecuaciones, intersección, perpendicular y riesgo de coincidencia.

Ficha: Anexo 3 · ficha 8

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Plano cartesiano · GeoGebra · tarjetas de puntos/rectas

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Pendientes enteras y ecuación $y=mx+n$.

Ampliación

Anexo 9

Investigar familias de rectas con parámetro y lugar de intersección.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Lectura del plano y de las normas de seguridad; traducción de cada ruta a puntos, vectores y datos (longitud, tiempo) en un esquema.	Ficha 1 / lista de cotejo
1.2	Elección razonada entre estrategias (punto-pendiente o sistema, igualación o reducción, cálculo o GeoGebra) para resolver el mismo problema de trayectorias.	Fichas 3, 4 y 5 / escala de valoración
3.1	Conjeturas sobre el efecto de m y n, sobre las pendientes de perpendiculares y sobre los puntos de corte, comprobadas con GeoGebra y con contraejemplos.	Ficha 6 / rúbrica
5.2	Conexión entre punto, vector, pendiente, ecuación y gráfica de una misma recta, y entre el sistema de ecuaciones y el punto de corte del plano.	Fichas 3, 4 y 8 / rúbrica
7.1	Mapa de trayectorias bien construido: ejes, escala, puntos rotulados, rutas dibujadas y tabla de ecuaciones coherente con el dibujo.	Mapa de trayectorias (Anexo 4) y Ficha 7 / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Mapa, ecuaciones, cálculos y explicación.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 6 · Geometría analítica de la recta

ALUMNADO

Vegaplana quiere que sus drones lleven medicinas del hospital al laboratorio, a la residencia y al centro de salud. Cada dron vuela en línea recta a 12 metros por segundo… y el primer plano de rutas que llega al Ayuntamiento tiene dos drones que salen a la vez y acaban en el mismo punto del aire. ¿Dónde se cruzan exactamente? ¿Qué rutas nunca se encontrarán? ¿Y si una ruta pasa justo encima del colegio en hora de examen? Vais a ser el equipo de cartografía analítica: con coordenadas, pendientes y ecuaciones decidiréis qué rutas se aprueban.

> *¿Cómo describimos una trayectoria geométrica con coordenadas y ecuaciones?*

Vuestro reto

Diseñar el mapa de trayectorias de un servicio de drones: escribir la ecuación de cada ruta, calcular cruces y paralelismos, comprobar las normas de seguridad y justificar cada decisión con coordenadas.

Lo que vais a producir

Mapa de trayectorias en el plano.

Hoja de ruta · 8 sesiones

1. Leemos el plano y calculamos vectores, longitudes y puntos medios de las rutas.
2. Medimos la inclinación de cada ruta con la pendiente.
3. Escribimos cada ruta como ecuación en tres formas distintas.
4. Estudiamos rutas paralelas y perpendiculares y hallamos intersecciones.
5. Resolvemos problemas de trayectorias: conflictos, desvíos y tiempos.
6. Conjeturamos con GeoGebra y buscamos contraejemplos.
7. Construimos el mapa analítico del equipo.
8. Resolvemos el reto individual con rutas nuevas.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Interpretar pendiente y ecuaciones de recta.
- ✓ Obtener una recta a partir de puntos o condiciones.
- ✓ Analizar paralelismo e intersecciones.
- ✓ Conectar representación geométrica y algebraica.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 6 · Geometría analítica de la recta

ALUMNADO

Plano de Vegaplana con tres rutas, tarjetas de puntos, esquema de la pendiente, cuadro de las ecuaciones de la recta, un ejemplo resuelto, normas de seguridad y un protocolo de GeoGebra. La ciudad y todos los datos son ficticios.

F1 El plan de drones de Vegaplana

ESTUDIO DE CASO

El Ayuntamiento de Vegaplana dibuja el plano de la ciudad sobre unos ejes: el origen $O(0, 0)$ es el Ayuntamiento, el eje x apunta al este y el eje y al norte. **Una unidad del plano equivale a 100 m.**

Hay tres rutas aprobadas provisionalmente:

- **Ruta 1:** del Hospital H al Laboratorio L.
- **Ruta 2:** del Almacén de farmacia Q a la Residencia R.
- **Ruta 3:** del Centro de salud W al Polideportivo Z.

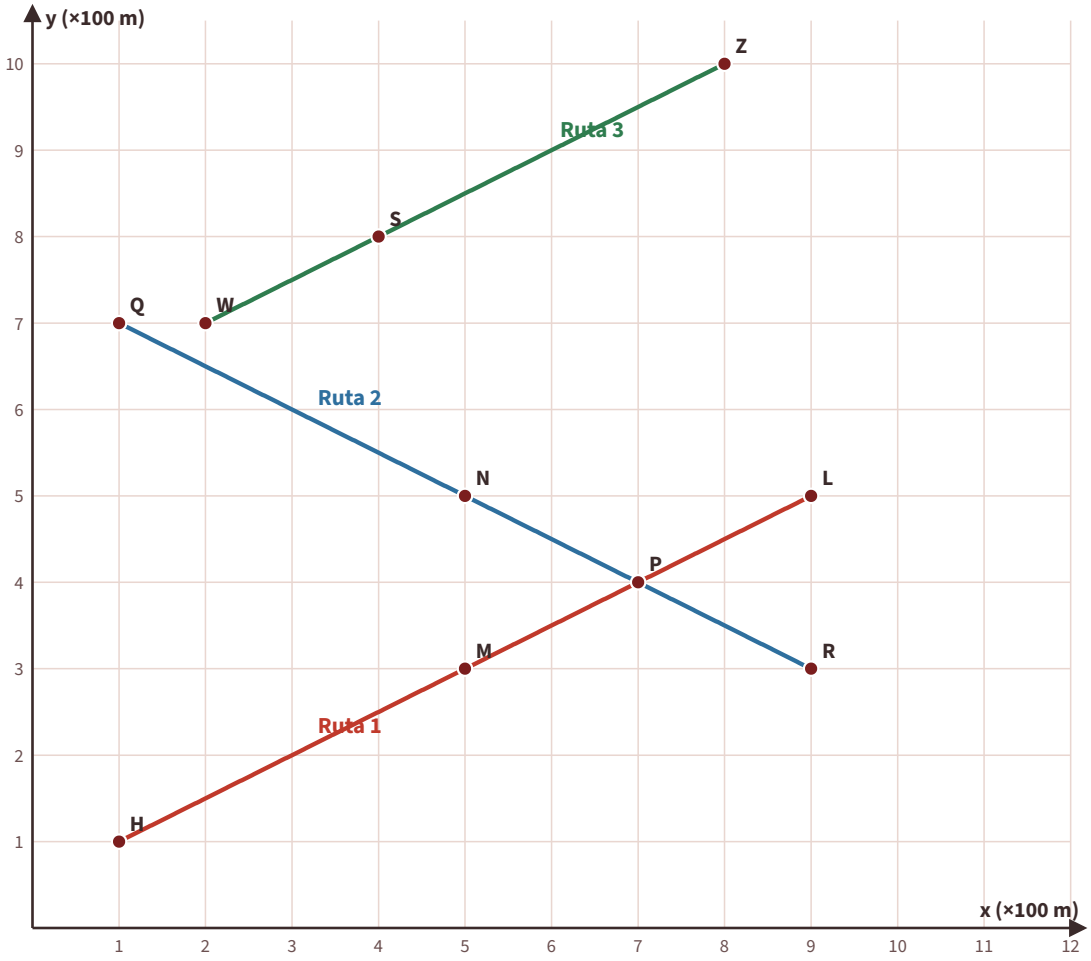
Los drones vuelan en línea recta a **12 m/s**. El técnico municipal teme que las rutas 1 y 2 se crucen y quiere saber si la ruta 3 molesta a alguna otra o al colegio.

Fuente: Situación y datos ficticios creados para el aula.

¿Qué datos del texto necesitas para calcular cuánto tarda un dron en completar una ruta? Anótalos antes de la ficha 1.

F2 Plano de Vegaplana (1 unidad = 100 m)

GRÁFICO



Fuente: Plano ficticio de elaboración propia.

Cada punto lleva la letra de su tarjeta (F3). ¿Dónde parece que se cruzan las rutas 1 y 2? ¿Y las rutas 1 y 3?

F3 Tarjetas de puntos

DATOS

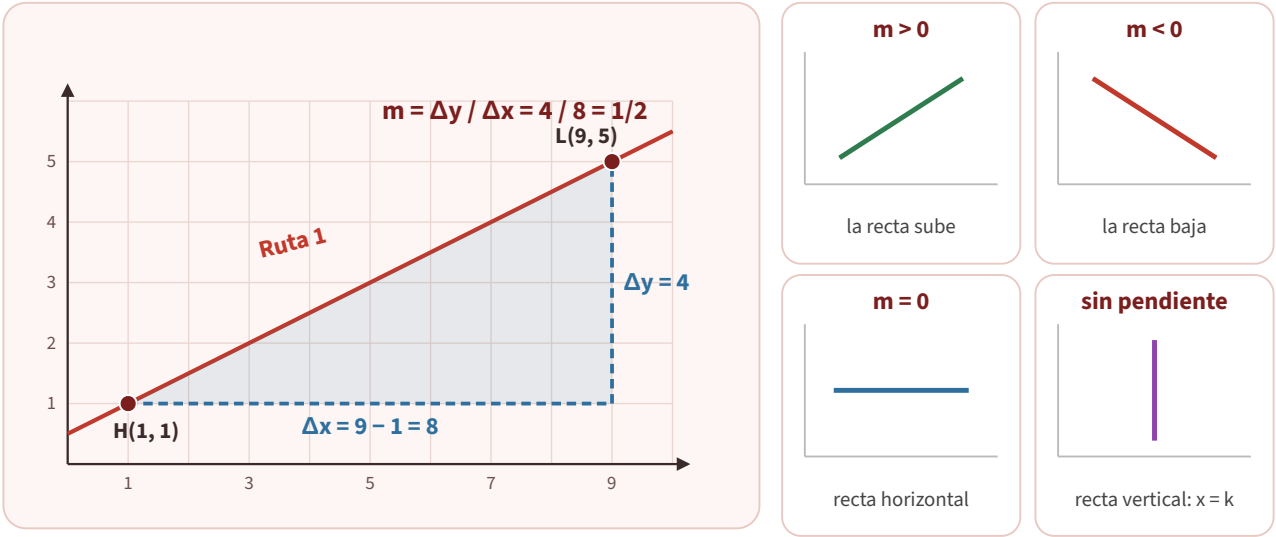
Punto	Lugar	Coordenadas	Observación
H	Hospital Comarcal	$(1, 1)$	Salida de la ruta 1
L	Laboratorio	$(9, 5)$	Llegada de la ruta 1
Q	Almacén de farmacia	$(1, 7)$	Salida de la ruta 2
R	Residencia de mayores	$(9, 3)$	Llegada de la ruta 2
W	Centro de salud	$(2, 7)$	Salida de la ruta 3
Z	Polideportivo	$(8, 10)$	Llegada de la ruta 3
S	Colegio (zona de silencio)	$(4, 8)$	Ninguna ruta debe pasar por aquí
M	Torre de control	$(5, 3)$	Punto medio de la ruta 1
N	Punto de recarga	$(5, 5)$	Punto medio de la ruta 2
P	Cruce de las rutas 1 y 2	$(7, 4)$	Punto de conflicto

Fuente: Datos ficticios creados para el aula.

Comprueba con la fórmula del punto medio que M y N están donde dice la tarjeta.

F4 La pendiente: cuánto sube la recta por cada unidad que avanza

ESQUEMA



Fuente: Esquema de elaboración propia.

La pendiente no depende de los puntos elegidos: dos puntos cualesquiera de la recta dan el mismo cociente.

F5 Cuadro de las ecuaciones de la recta

DATOS

Forma	Expresión	Qué se ve a simple vista	Ejemplo: ruta 1
Pendiente	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Inclinación de la recta (con dos puntos)	$m = \frac{5-1}{9-1} = \frac{1}{2}$
Punto-pendiente	$y - y_0 = m\,(x - x_0)$	Un punto de la recta y su pendiente	$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$
Explícita	$y = mx + n$	Pendiente m y ordenada en el origen n	$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
General	$Ax + By + C = 0$	Sin fracciones; la pendiente es $m = -\frac{A}{B}$	$x - 2y + 1 = 0$
Vertical	$x = k$	Todos los puntos tienen la misma x; no tiene pendiente	Avenida Central: $x = 5$
Horizontal	$y = k$	Pendiente $m = 0$	Ruta de enlace: $y = 9$

Fuente: Elaboración propia.

Todas las filas de una misma recta describen los mismos puntos. Para pasar de una forma a otra basta con despejar o multiplicar.

F6 Ejemplo resuelto y fórmulas clave

TEXTO

¿Dónde se cruzan la ruta 1 ($y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$) y la ruta 2 ($y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$)?

- **1.** Igualamos las dos expresiones de y: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$.
- **2.** Multiplicamos por 2: $x + 1 = -x + 15$, luego $2x = 14$ y $x = 7$.
- **3.** Sustituimos: $y = \frac{1}{2} \cdot 7 + \frac{1}{2} = 4$. El punto es $P(7, 4)$.
- **4.** Comprobamos en la otra ruta: $-\frac{1}{2} \cdot 7 + \frac{15}{2} = 4$. ✔
- **5.** ¿Es un cruce real? Ambos segmentos incluyen $x = 7$ (la ruta 1 va de $x = 1$ a $x = 9$, y la ruta 2 también). Sí.

Fórmulas clave. Vector $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$. Distancia $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Punto medio $\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$. Rectas **paralelas**: $m_1 = m_2$. Rectas **perpendiculares**: $m_1 \cdot m_2 = -1$. Un vector director (a, b) da la pendiente $m = \frac{b}{a}$.

Fuente: Elaboración propia.

Dos rectas con pendientes distintas siempre se cortan; dos segmentos, solo si el punto de corte está dentro de ambos.

F7 Normas de seguridad y requisitos del mapa

DATOS

Código	Condición
N1	Todos los puntos de salida y llegada tienen coordenadas enteras con $0 \leq x \leq 12$ y $0 \leq y \leq 10$.
N2	Cada ruta mide entre 400 m y 1 000 m.
N3	Si dos rutas se cortan en un punto que está en los dos segmentos, los drones deben pasar por él con al menos **10 s** de diferencia.
N4	Ninguna ruta puede pasar exactamente por el colegio $S(4, 8)$.
M1	El mapa tiene al menos 4 rutas, con su ecuación explícita y general.
M2	Hay una pareja de rutas paralelas y una ruta perpendicular a otra, justificadas con pendientes.
M3	Hay al menos un cruce real entre segmentos, con su punto calculado por sistema y su solución de seguridad (N3).
M4	Hay una ruta vertical u horizontal.

Fuente: Normas ficticias creadas para el aula.

Las normas N1-N4 las impone el Ayuntamiento; los requisitos M1-M4 son los de vuestro mapa.

F8 Protocolo de GeoGebra para rectas

PROTOCOLO

Abre GeoGebra (Clásico o Gráficas). Escribe en la **barra de entrada** y pulsa Intro:

- **Puntos:** «H=(1,1)» y «L=(9,5)».
- **Recta y su ecuación:** «r=Recta(H,L)». Botón derecho > Propiedades > Álgebra para elegir la forma de la ecuación.
- **Pendiente:** «Pendiente(r)». **Distancia:** «Distancia(H,L)». **Punto medio:** «PuntoMedio(H,L)».
- **Intersección:** «Interseca(r,s)» (da el punto de corte de dos rectas).
- **Paralela y perpendicular por un punto:** «Paralela(A,r)» y «Perpendicular(A,r)».
- **Deslizadores:** «m=1» y «n=0» (clic derecho > Mostrar objeto), y después «f(x)=m*x+n».

Registro. Anota cada conjetura **antes** de comprobarla y guarda una captura de pantalla de cada comprobación. GeoGebra comprueba, pero la explicación es vuestra.

Fuente: Elaboración propia.

Si una intersección sale con decimales, calcula también el valor exacto con el sistema.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 6 · Geometría analítica de la recta

ALUMNADO

FICHA 1 Puntos y trayectorias

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Lee F1, F2 y F3. Recuerda que una unidad del plano son 100 m.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

El punto $(-3, 2)$ está en el cuadrante…

☐ I ☐ II ☐ III

La distancia entre $(0, 0)$ y $(3, 4)$ es…

☐ 7 ☐ 5 ☐ $\sqrt{7}$

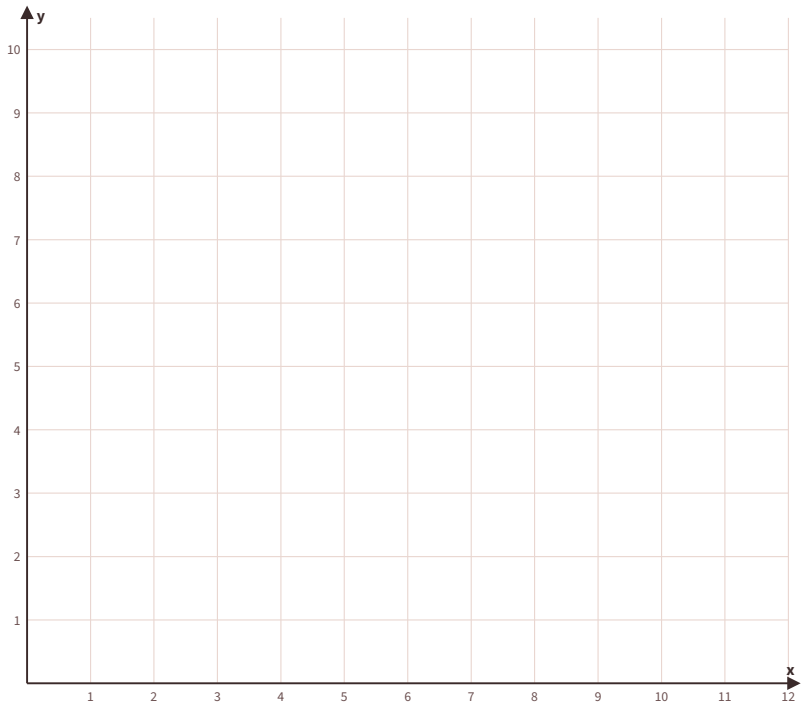
Si $f(x) = 3x - 1$, entonces $f(2)$ vale…

☐ 5 ☐ 7 ☐ 6

2 **Completa la tabla de las tres rutas con las tarjetas de F3: vector $\overrightarrow{AB}$, longitud (en unidades y en metros, con una cifra decimal en las unidades) y punto medio.**

Ruta	Vector $\overrightarrow{AB}$	Longitud (u)	Longitud (m)	Punto medio
1: $H \to L$				
2: $Q \to R$				
3: $W \to Z$				

3 **Sitúa en la cuadrícula los puntos H, L, Q y R, dibuja las rutas 1 y 2 y estima dónde se cruzan.**



4 **Un dron vuela a 12 m/s. ¿Cuánto tarda en recorrer la ruta 1? ¿Y la ruta 3? Redondea a décimas de segundo.**

FICHA 2 Pendiente entre dos puntos

Sesión 2

Usa F4. Escribe la pendiente como fracción irreducible.

1 **Calcula la pendiente de cada ruta y di si el dron sube o baja al avanzar hacia el este.**

Ruta	Δx	Δy	m	¿Sube o baja?
1: $H(1,1), L(9,5)$				
2: $Q(1,7), R(9,3)$				
3: $W(2,7), Z(8,10)$				

2 **Relaciona cada pendiente con la recta que pasa por los dos puntos.**

1 $m = \frac{2}{3}$ ●	● a Recta por $(0,5)$ y $(1,2)$
2 $m = -3$ ●	● b Recta por $(2,1)$ y $(2,6)$
3 $m = 0$ ●	● c Recta por $(1,2)$ y $(4,4)$
4 No tiene pendiente ●	● d Recta por $(-1,3)$ y $(4,3)$

3 **Una rampa sube 0,45 m en 6 m de recorrido horizontal. Calcula su pendiente como fracción, como decimal y como porcentaje. Compárala con la de la ruta 1 y calcula con la calculadora (en grados) el ángulo que forma la ruta 1 con la horizontal.**

4 **Marca verdadero o falso y corrige las falsas.**

	V	F
Dos puntos cualesquiera de una recta dan siempre la misma pendiente.	☐	☐
Una recta horizontal tiene pendiente 0.	☐	☐
Una recta vertical tiene pendiente 0.	☐	☐
Si $m < 0$, la recta sube al avanzar hacia la derecha.	☐	☐
Los puntos $A(0,1)$, $B(2,2)$ y $C(4,4)$ están alineados.	☐	☐

FICHA 3 Ecuaciones de la recta

Sesión 3

Usa F3 y el cuadro F5. Comprueba cada ecuación con un punto de la ruta.

1 **Escribe cada ruta en las tres formas. Para la ruta 1 conoces H y m; para la 2 y la 3 calcula antes la pendiente.**

Ruta	m	Punto-pendiente	Explícita	General
1: por $H(1,1)$, $m = \frac{1}{2}$				
2: por $Q(1,7)$ y $R(9,3)$				
3: por $W(2,7)$ y $Z(8,10)$				

2 **Pasa de una forma a otra.**

Ecuación dada	Pendiente	Explícita	General
$y = 3x - 2$			
$2x + 3y - 6 = 0$			
$y - 4 = -2(x + 1)$			

3 **Sustituye para decidir si cada punto pertenece a cada ruta. Marca ✔ o ✘.**

Punto	¿En ruta 1?	¿En ruta 2?	¿En ruta 3?
$P(7,4)$			
$M(5,3)$			
$N(5,5)$			
$Z(8,10)$			

4 La Avenida Central pasa por $M(5, 3)$ y $N(5, 5)$. Un dron de enlace vuela de $(2, 9)$ a $(10, 9)$. Halla la ecuación de cada recta y explica qué pasa con su pendiente.

FICHA 4 Paralelas, perpendiculares e intersecciones

Sesión 4

Usa F5 y el ejemplo resuelto de F6. Resuelve los sistemas por igualación o por reducción y comprueba.

1 Compara las rutas 1 y 3. ¿Son paralelas? Resuelve el sistema $x - 2y + 1 = 0, x - 2y + 12 = 0$ y explica qué significa el resultado para los drones.

2 Calcula el punto de corte de las rutas 1 y 2 y el de las **rectas** de las rutas 2 y 3. ¿Cortan los **segmentos** de las rutas 2 y 3? Recuerda que la ruta 3 va de $x = 2$ a $x = 8$.

3 Escribe la ecuación explícita y la general de: a) la ruta 4, paralela a la ruta 1 por $S_1(3, 1)$; b) la pista de emergencia, perpendicular a la ruta 1 por $M(5, 3)$.

4 Decide la posición relativa y halla la solución, si existe.

Sistema	Posición (se cortan, paralelas o coincidentes)	Solución
$y = 2x + 1\,; y = 2x - 3$		
$y = x + 1\,; 2x - 2y + 2 = 0$		
$y = -x + 4\,; y = 2x - 2$		
$3x + y = 7\,; x - y = 1$		

FICHA 5 Problemas de trayectorias

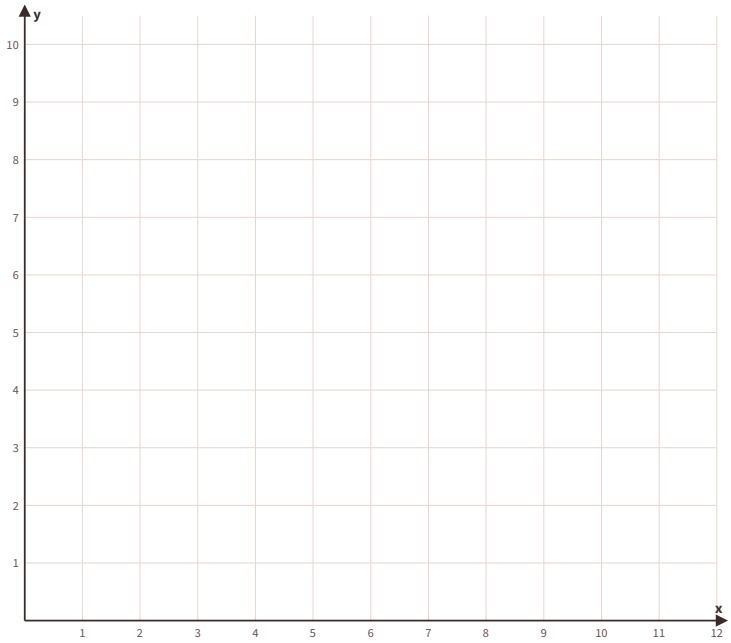
Sesión 5

Usa F2, F3 y las normas de F7. Los drones vuelan a 12 m/s y una unidad son 100 m.

1 Conflicto en $P(7, 4)$. Los drones de las rutas 1 y 2 salen a la vez de H y de Q. Calcula la distancia de cada uno a P y el tiempo que tardan. ¿Cuánto debe retrasarse como mínimo la salida de la ruta 2 para cumplir N3? Propón un retraso y comprueba.

2 La ruta 3 pasa por el colegio (N4). Comprueba que $S(4, 8)$ está en ella. Propón una ruta alternativa de W a Z que pase por $T(5, 7)$: halla la ecuación de cada tramo, comprueba que no pasa por S y calcula su longitud total (¿cumple N2?).

3 Dibuja la ruta alternativa de la tarea anterior y el colegio.



4 Un dron vuela en línea recta de $H(1, 1)$ al punto de recarga $N(5, 5)$. Halla su pendiente, su ecuación y su longitud en metros. ¿Dónde corta esa recta a la ruta 2?

FICHA 6 GeoGebra para conjeturar

Sesión 6

Sigue el protocolo F8. Escribe cada conjetura antes de comprobarla y guarda las capturas.

1 **Crea los deslizadores m y n y la recta $y = mx + n$. Anota qué ocurre y enuncia una conjetura sobre el papel de m y de n.**

Qué cambias	Qué observas en la gráfica	Conjetura
$m = 1$ y n de −3 a 3		
$n = 2$ y m de −3 a 3		
$m = 0$		
$m = 10$		

2 **Para cada m_1, dibuja una recta y usa «Perpendicular» para obtener otra. Lee su pendiente m_2 y completa. ¿Qué conjetura propones sobre $m_1 \cdot m_2$?**

m_1	m_2 de la perpendicular	$m_1 \cdot m_2$
2		
$\frac{1}{3}$		
−1		
$\frac{3}{4}$		

3 **Conjetura de Lucía: «dos rutas que se cortan siempre lo hacen en un punto de coordenadas enteras». Comprueba con las rectas de las rutas 1 y 2 y con las de las rutas 2 y 3 (F6). ¿Es cierta? ¿Qué es un contraejemplo?**

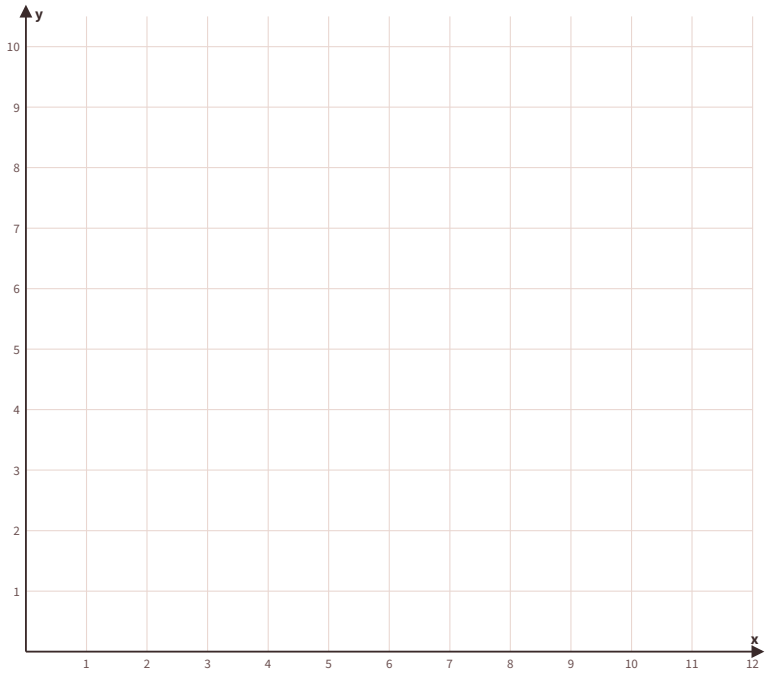
4 **Multiplica por 2 la ecuación general de la ruta 1 y represéntala. ¿Es la misma recta? ¿Y si cambias solo el término independiente?**

FICHA 7 Mapa analítico (borrador del equipo)

Sesión 7

Trabajad en equipo con las normas de F7. Roles: cartógrafo, calculista, comprobador y portavoz.

1 **Esbozad vuestro mapa: al menos 4 rutas, con puntos enteros dentro del plano.**



2 **Tabla de rutas del mapa.**

Ruta	Salida y llegada	Pendiente	Explícita	General	Longitud (m)

3 **Cruces y paralelismos del mapa.**

Pareja de rutas	¿Paralelas o secantes?	Punto de corte (sistema)	¿Está en los dos segmentos?	Solución de seguridad

4 **Revisión cruzada: otro equipo comprueba vuestras normas.**

- [ ] Se cumplen N1, N2 y N4 en todas las rutas
- [ ] Las ecuaciones coinciden con los puntos (se han sustituido)
- [ ] El punto de corte se ha calculado por sistema y se ha comprobado en las dos rectas
- [ ] Se ha escalonado el cruce real con N3
- [ ] Se cumplen M1-M4

FICHA 8 Reto individual

Sesión 8

Resuelve sin ayuda del equipo. Nuevas rutas: la ruta 4 va de $A(2, 9)$ a $B(10, 5)$ y la ruta 5, de $C(0, 1)$ a $E(9, 10)$. Los drones vuelan a 12 m/s y una unidad son 100 m.

1 **Halla la pendiente y las ecuaciones explícita y general de cada ruta.**

Ruta	Pendiente	Explícita	General
4: $A \to B$			
5: $C \to E$			

2 **Calcula el punto de corte de las rectas de las rutas 4 y 5 y comprueba si es un cruce real entre los segmentos.**

3 **Si los dos drones salen a la vez de A y de C, ¿llegan juntos al punto de corte? Calcula los tiempos y valora el riesgo según N3.**

4 **Halla la ecuación de la ruta 6, perpendicular a la ruta 4 por el punto de corte. Un compañero afirma que la recta $2x + 4y - 7 = 0$ cruza la ruta 4. ¿Tiene razón? Argumenta con pendientes.**

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 6 · Geometría analítica de la recta

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Mapa de trayectorias en el plano. Cada ruta con su ecuación; cada cruce, con su cálculo y su solución de seguridad.

Título y equipo

Datos y escala

Puntos, unidad (1 u = 100 m) y normas aplicadas.

Tabla de rutas

Ruta · pendiente · ecuaciones · longitud.

Plano con las rutas

Ejes, escala, puntos rotulados y rutas dibujadas.

Cruces y paralelismos

Sistemas, puntos de corte y pendientes.

Seguridad y comprobación

N1-N4 y comprobación con GeoGebra.

Conclusión y revisión

Qué rutas se aprueban y firma del equipo revisor.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 6 · Geometría analítica de la recta

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Mapa de trayectorias en el plano**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] Los puntos de salida y llegada tienen coordenadas enteras dentro del plano (N1).
- [ ] Cada ruta tiene la pendiente calculada con la fórmula y su signo está interpretado.
- [ ] Las ecuaciones explícita y general de cada ruta son coherentes y se han comprobado sustituyendo un punto.
- [ ] Hay una pareja de rutas paralelas justificada con pendientes iguales y ordenadas distintas.
- [ ] Hay una ruta perpendicular a otra justificada con $m_1 \cdot m_2 = -1$.
- [ ] El punto de corte de al menos dos rutas se ha calculado resolviendo un sistema y se ha comprobado en ambas ecuaciones.
- [ ] Se distingue entre cruce de rectas y cruce de segmentos y se escalona el cruce real (N3).
- [ ] Ninguna ruta pasa por el colegio (N4) y todas miden entre 400 m y 1 000 m (N2).
- [ ] El plano tiene ejes, escala y puntos rotulados, y coincide con la tabla de ecuaciones.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 6 · Geometría analítica de la recta

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Mapa de trayectorias en el plano**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 6 · Geometría analítica de la recta

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé escribir la ecuación de una recta a partir de dos puntos o de un punto y la pendiente, y pasar de una forma a otra.	○	○	○	○
Sé hallar la intersección de dos rectas con un sistema y decidir si es un cruce real de los segmentos.	○	○	○	○
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	○	○	○	○
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	○	○	○	○
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	○	○	○	○
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	○	○	○	○

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 6 · Geometría analítica de la recta

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Pendientes enteras y ecuación $y = mx + n$: ejemplos resueltos y actividades guiadas.

Ejemplo modelado

Recta por $A(1, 3)$ y $B(3, 7)$. **Pendiente:** $m = \frac{7-3}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$. **Ordenada:** en $y = 2x + n$ sustituimos A: $3 = 2 \cdot 1 + n$, luego $n = 1$. **Ecuación:** $y = 2x + 1$. **Comprobación con B:** $2 \cdot 3 + 1 = 7$. ✔

Símbolos y vocabulario

Pendiente m: lo que sube (o baja) y por cada unidad que avanza x. **Ordenada n:** valor de y cuando $x = 0$ (punto donde la recta corta al eje y). **Δx, Δy:** diferencias de coordenadas entre dos puntos. **Paralelas:** misma pendiente. **Punto de corte:** punto que cumple las dos ecuaciones.

1 **Calcula la pendiente que pasa por cada pareja de puntos.**

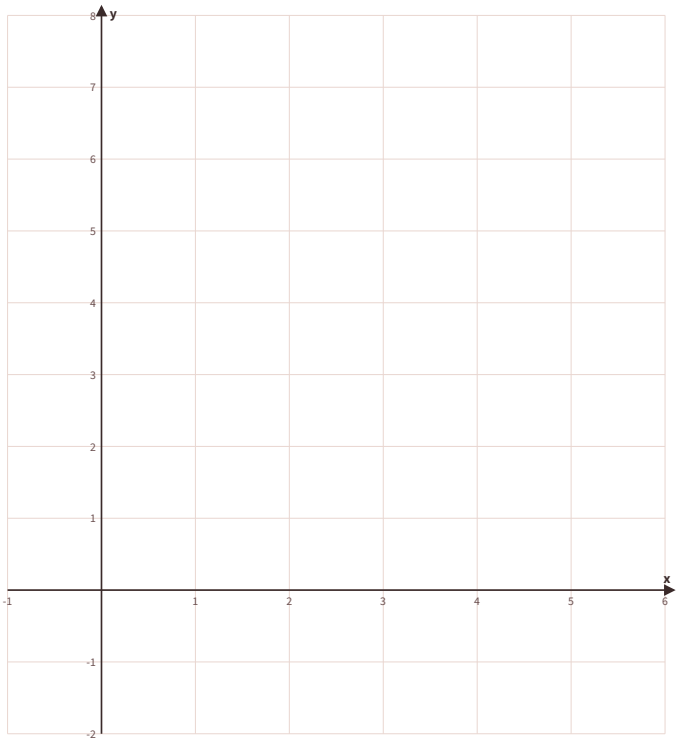
Puntos	Δx	Δy	m
$(0, 1)$ y $(2, 5)$			
$(1, 6)$ y $(3, 2)$			
$(-1, 0)$ y $(2, 3)$			
$(0, 4)$ y $(3, 4)$			

2 **Completa para escribir la ecuación $y = mx + n$.**

a) Recta por $(0, 2)$ con $m = 3$: $n =$ _____, luego $y =$ _____.

b) Recta por $(1, 5)$ con $m = 2$: $5 = 2 \cdot 1 + n$, luego $n =$ _____ y $y =$ _____.

3 **Dibuja las rectas $y = 2x - 1$ y $y = -x + 5$ con una tabla de valores y lee su punto de corte. Compruébalo sustituyendo.**



4 **Un dron vuela de $(0, 1)$ a $(4, 9)$. Halla su pendiente y su ecuación $y = mx + n$.**

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 6 · Geometría analítica de la recta

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Familias de rutas: ¿dónde se cruzan todas?

Una **familia de rectas** depende de un parámetro k. Dos flotas de drones siguen las rutas $A_k : y = kx$ y $B_k : y = 6 - kx$, para distintos valores de k positivos. Cada pareja (A_k, B_k) se cruza en un punto. ¿Hay algo que tengan en común todos esos puntos?

Pasos

1. Calcula el punto de corte de A_k y B_k para $k = 1, 2, 3$ y $\frac{1}{2}$ y representa los puntos.
2. Conjetura qué recta contiene a todos los puntos de corte y demuéstralo resolviendo el sistema con k general.
3. Generaliza: si $A_k : y = kx$ y $B_k : y = 2c - kx$, ¿dónde se cortan? ¿Cambia el resultado según c?
4. En la familia $r_k : y - 3 = k(x - 2)$, ¿qué punto tienen en común todas las rectas? ¿Qué valor de k da la recta que pasa por $(6, 11)$? ¿Qué recta por ese punto común no pertenece a la familia?

1 **Tabla de puntos de corte.**

k	A_k	B_k	Punto de corte
1			
2			
3			
$\frac{1}{2}$			

Entrega

Una página con la tabla, la demostración general del lugar de corte y la respuesta razonada a la última pregunta.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 6 · Geometría analítica de la recta

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: II (x negativa, y positiva); 5 ($\sqrt{3^2+4^2}$); 5 ($3\cdot 2-1$).
2. Ruta 1: $\overrightarrow{HL}=(8,4)$; $d=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{80}\approx 8{,}9$ u ≈ 894 m; punto medio $(5,3)$. Ruta 2: $\overrightarrow{QR}=(8,-4)$; $d=\sqrt{80}\approx 8{,}9$ u ≈ 894 m; punto medio $(5,5)$. Ruta 3: $\overrightarrow{WZ}=(6,3)$; $d=\sqrt{45}\approx 6{,}7$ u ≈ 671 m; punto medio $(5;8{,}5)$.
3. Puntos $H(1,1), L(9,5), Q(1,7), R(9,3)$. Las rutas parecen cruzarse hacia $(7,4)$ (se acepta una estimación entre 6,5 y 7,5 en x).
4. Ruta 1: $894{,}4:12\approx 74{,}5$ s. Ruta 3: $670{,}8:12\approx 55{,}9$ s.

Ficha 2

1. Ruta 1: $\Delta x=8, \Delta y=4, m=\frac{1}{2}$, sube. Ruta 2: $\Delta x=8, \Delta y=-4, m=-\frac{1}{2}$, baja. Ruta 3: $\Delta x=6, \Delta y=3$, $m=\frac{1}{2}$, sube.
2. $m=\frac{2}{3}\leftrightarrow (1,2)$ y $(4,4)$; $m=-3\leftrightarrow (0,5)$ y $(1,2)$; $m=0\leftrightarrow (-1,3)$ y $(4,3)$; sin pendiente $\leftrightarrow (2,1)$ y $(2,6)$ (recta vertical).
3. Rampa: $m=\frac{0{,}45}{6}=0{,}075=7{,}5\,\%$. La ruta 1 tiene $m=\frac{1}{2}=0{,}5=50\,\%$, mucho más inclinada. Ángulo: $\arctan 0{,}5\approx 26{,}6^\circ$ (calculadora en grados).
4. V, V, F (la recta vertical no tiene pendiente), F (si $m<0$ la recta baja), F ($m_{AB}=\frac{1}{2}$ y $m_{BC}=\frac{2}{2}=1$: no están alineados).

Ficha 3

1. Ruta 1: $m=\frac{1}{2}; y-1=\frac{1}{2}(x-1); y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}; x-2y+1=0$. Ruta 2: $m=\frac{3-7}{9-1}=-\frac{1}{2}; y-7=-\frac{1}{2}(x-1)$; $y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}; x+2y-15=0$. Ruta 3: $m=\frac{10-7}{8-2}=\frac{1}{2}; y-7=\frac{1}{2}(x-2); y=\frac{1}{2}x+6; x-2y+12=0$.
2. $y=3x-2$: $m=3$; explícita igual; general $3x-y-2=0$. $2x+3y-6=0$: $y=-\frac{2}{3}x+2; m=-\frac{2}{3}$. $y-4=-2(x+1)$: $y=-2x+2; m=-2$; general $2x+y-2=0$.
3. $P(7,4)$: ✔ ruta 1 ($\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=4$), ✔ ruta 2 ($-\frac{7}{2}+\frac{15}{2}=4$), ✘ ruta 3 ($\frac{7}{2}+6=9{,}5$). $M(5,3)$: ✔, ✘ (ruta 2 da 5), ✘ (ruta 3 da 8,5). $N(5,5)$: ✘ (ruta 1 da 3), ✔, ✘. $Z(8,10)$: ✘ (ruta 1 da 4,5), ✘ (ruta 2 da 3,5), ✔ (ruta 3 da 10).
4. Avenida Central: los dos puntos tienen $x=5$, luego $x=5$ y no tiene pendiente (el cociente tendría denominador 0). Dron de enlace: $y=9$, horizontal, $m=0$.

Ficha 4

1. Ambas tienen $m=\frac{1}{2}$ y ordenadas distintas ($\frac{1}{2}$ y 6): son paralelas. Restando las ecuaciones: $1-12=0$, absurdo; el sistema no tiene solución, luego las rutas nunca se cruzan.
2. Rutas 1 y 2: $P(7,4)$ (F6). Rectas de las rutas 2 y 3: $-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}=\frac{1}{2}x+6\Rightarrow x=\frac{3}{2}, y=\frac{27}{4}=6{,}75$. Como $x=1{,}5<2$, no está en el segmento de la ruta 3 (que va de $x=2$ a $x=8$), aunque sí en el de la ruta 2: las rectas se cortan pero los drones no.
3. a) $y-1=\frac{1}{2}(x-3)$: $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$; general $x-2y-1=0$. b) $m=-2$ (pues $\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1$): $y-3=-2(x-5)$: $y=-2x+13$; general $2x+y-13=0$.
4. a) Paralelas (misma $m=2$, distinta n): sin solución. b) Coincidentes: la segunda es $y=x+1$, infinitas soluciones. c) Se cortan: $-x+4=2x-2\Rightarrow x=2, y=2$; $(2,2)$. d) Sumando: $4x=8, x=2$ y $y=7-6=1$; se cortan en $(2,1)$.

Ficha 5

1. $d(H,P)=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}\approx 6{,}71$ u $=670{,}8$ m; $d(Q,P)=\sqrt{6^2+(-3)^2}=\sqrt{45}$, igual. Tiempo en ambos: $670{,}8:12\approx 55{,}9$ s: llegan a la vez. Para cumplir N3, la ruta 2 debe salir al menos 10 s más tarde. Con 15 s: pasa por P a los $70{,}9$ s y la ruta 1 a los $55{,}9$ s, diferencia de 15 s ≥ 10 s ✔.
2. Ruta 3: $y=\frac{1}{2}x+6$ en $x=4$ da 8: S está en ella. Alternativa: $W(2,7)\to T(5,7)$ es horizontal, $y=7$ (longitud 3 u); $T(5,7)\to Z(8,10)$: $m=\frac{3}{3}=1, y-7=x-5, y=x+2$ (comprobación con Z: $8+2=10$ ✔; longitud $\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}\approx 4{,}24$ u). En $S(4,8)$: $y=7\neq 8$ en el primer tramo y $4+2=6\neq 8$ en el segundo: no pasa. Longitud total $3+4{,}24=7{,}24$ u ≈ 724 m, entre 400 y 1 000 m: cumple N2.
3. Dibujo: tramo horizontal de $(2,7)$ a $(5,7)$ y tramo de pendiente 1 hasta $(8,10)$; el colegio $(4,8)$ queda por encima del primer tramo y de la ruta nueva.
4. $m=\frac{5-1}{5-1}=1; y-1=x-1\Rightarrow y=x$; longitud $\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}\approx 5{,}66$ u ≈ 566 m. Corte con la ruta 2: $x=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}\Rightarrow x=5, y=5$: justo en N.

Ficha 6

1. Respuestas esperables: al variar n la recta se desplaza hacia arriba o abajo sin cambiar de inclinación (n es el valor donde corta al eje y); al variar m gira en torno al punto $(0,n)$: $m>0$ sube, $m<0$ baja; $m=0$ da una recta horizontal; con $m=10$ es casi vertical, muy inclinada.
2. Perpendiculares: $m_2=-\frac{1}{2}, -3, 1, -\frac{4}{3}$, con productos $m_1m_2=-1$ en todos los casos. Conjetura: dos rectas son perpendiculares cuando $m_1\cdot m_2=-1$ (es decir, $m_2=-\frac{1}{m_1}$).
3. Rutas 1 y 2: $(7,4)$, entero. Rutas 2 y 3: $(1{,}5;\ 6{,}75)$, no entero. La conjetura es falsa: un **contraejemplo** es un caso concreto que cumple las condiciones y no cumple la afirmación; basta uno para refutar.
4. $2x-4y+2=0$ es la misma recta (multiplicar toda la ecuación por un número no nulo no cambia la recta). Si solo cambia el término independiente, p. ej. $x-2y+5=0$, se obtiene otra recta paralela.

Ficha 7

1. El mapa es libre. Comprobar: puntos enteros en el plano (N1); longitudes entre 4 y 10 u (N2); pendiente $=\frac{\Delta y}{\Delta x}$; ecuaciones que cumplen los dos puntos de la ruta; ninguna ruta pasa por $S(4,8)$ (sustituir); al menos una pareja con $m_1=m_2$ y $n_1\neq n_2$; una pareja con $m_1m_2=-1$; un cruce real con sistema, comprobación y retraso ≥ 10 s; una ruta $x=k$ o $y=k$.
2. Ejemplo de mapa válido: las rutas 1 y 2 de F2 (cruce en $P(7,4)$, retraso de 15 s en la ruta 2), la ruta alternativa $W\to T\to Z$ de la ficha 5 y la ruta 1 paralela $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ desde $(3,1)$, la pista perpendicular $y=-2x+13$ y la Avenida Central $x=5$.
3. Revisión: se valora que el equipo revisor sustituya al menos un punto en cada ecuación y repita un sistema.

Ficha 8

1. Ruta 4: $m = \frac{5-9}{10-2} = -\frac{1}{2}; y - 9 = -\frac{1}{2}(x-2); y = -\frac{1}{2}x + 10; x + 2y - 20 = 0$. Ruta 5: $m = \frac{10-1}{9-0} = 1; y = x + 1; x - y + 1 = 0$.
2. $-\frac{1}{2}x + 10 = x + 1 \Rightarrow 9 = \frac{3}{2}x \Rightarrow x = 6, y = 7$; punto $(6, 7)$. Comprobación: $-3 + 10 = 7$ ✔ y $6 + 1 = 7$ ✔. $x = 6$ está en $[2, 10]$ (ruta 4) y en $[0, 9]$ (ruta 5): es un cruce real.
3. Desde A: $d = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$ u $= 447{,}2$ m, tiempo $\approx 37{,}3$ s. Desde C: $d = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \approx 8{,}49$ u $= 848{,}5$ m, tiempo $\approx 70{,}7$ s. Diferencia de $33{,}4$ s > 10 s: no hay riesgo (N3 se cumple).
4. Perpendicular a la ruta 4: $m = 2; y - 7 = 2(x-6); y = 2x - 5; 2x - y - 5 = 0$. La recta $2x + 4y - 7 = 0$ da $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$: pendiente $-\frac{1}{2}$ igual que la ruta 4 y ordenada distinta ($\frac{7}{4} \neq 10$), luego es paralela y no la cruza. El compañero se equivoca.

Refuerzo

1. m: $\frac{4}{2} = 2$; $\frac{-4}{2} = -2$; $\frac{3}{3} = 1$; $\frac{0}{3} = 0$ (con $\Delta x = 2, 2, 3, 3$ y $\Delta y = 4, -4, 3, 0$).
2. a) $n = 2, y = 3x + 2$; b) $n = 3, y = 2x + 3$.
3. Punto de corte $(2, 3)$: $2 \cdot 2 - 1 = 3$ y $-2 + 5 = 3$ ✔.
4. $m = \frac{9-1}{4-0} = 2; n = 1; y = 2x + 1$.

Ampliación

1. $kx = 6 - kx \Rightarrow x = \frac{3}{k}, y = 3$. Puntos: $k = 1$: $(3, 3)$; $k = 2$: $(1{,}5;\ 3)$; $k = 3$: $(1, 3)$; $k = \frac{1}{2}$: $(6, 3)$.
2. Todos están en la recta $y = 3$ (horizontal). Demostración: al sumar las ecuaciones $y = kx$ e $y = 6 - kx$ se obtiene $2y = 6$, luego $y = 3$ para cualquier k.
3. Con $y = kx$ e $y = 2c - kx$: $2y = 2c, y = c$ y $x = \frac{c}{k}$: el lugar de corte es la recta horizontal $y = c$ (para $k \neq 0$).
4. Todas las rectas r_k pasan por $(2, 3)$. Por $(6, 11)$: $11 - 3 = k(6-2) \Rightarrow k = 2$. La recta vertical $x = 2$ pasa por $(2, 3)$ y no es de la familia (no tiene pendiente).

Errores frecuentes

- Calcular la pendiente como $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ o restar las coordenadas en distinto orden en numerador y denominador (error de signo).
- Decir que una recta vertical tiene pendiente 0 (es la horizontal la que tiene pendiente 0; la vertical no tiene pendiente).
- Pasar de la forma general a la explícita sin cambiar el signo de los términos al despejar (en $x - 2y + 1 = 0$ se obtiene $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$).
- Confundir el cruce de dos rectas con el cruce de dos segmentos: hay que comprobar que el punto está dentro de ambos recorridos.
- Usar la unidad del plano como si fuera el metro (olvidar que 1 u = 100 m) al calcular tiempos.
- Decir que rectas perpendiculares tienen pendientes opuestas ($m_2 = -m_1$) en lugar de inversas y opuestas ($m_2 = -\frac{1}{m_1}$).

Criterios para valorar respuestas abiertas

- En el mapa (Ficha 7 y Anexo 4) se valora que cada afirmación tenga su cálculo: pendiente con la fórmula, ecuación comprobada con un punto, corte resuelto con sistema.
- Los mapas de los equipos pueden ser muy distintos; lo importante es que cumplan N1-N4 y M1-M4 y que el cruce real esté bien escalonado.
- GeoGebra se acepta para comprobar y conjeturar, pero los valores exactos (fracciones) deben salir del cálculo; las capturas no sustituyen a la explicación.
- En la conjetura de la Ficha 6 se valora que el alumnado distinga comprobar ejemplos (no demuestra) de buscar un contraejemplo (sí refuta).

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

07 Trigonometría para medir lo inaccesible

PREGUNTA GUÍA

¿Cómo podemos calcular una altura sin subir hasta ella?

CURSO
4.º ESO · Matemáticas B

SESIONES
8 sesiones · 2.º-3.º trimestre

SENTIDOS PRIORITARIOS
B · Sentido de la medida · C · Sentido espacial

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE2, CE6, CE7, CE8

PRODUCTO FINAL
Informe trigonométrico de medida indirecta

CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 1.2, 2.1, 6.1, 7.1, 8.1

Contexto, reto y sentido

El instituto quiere conocer tres medidas que no se pueden hacer con una cinta métrica: la **altura del mástil** de la pista (hay que trepar), la **altura de la torre del reloj** de la plaza (su base está dentro de un recinto en obras) y la **anchura del canal de riego** que rodea el huerto escolar (no se puede cruzar). Todo lo que se necesita es una cinta, un clinómetro casero y una calculadora.

La situación movilizará la **semejanza de triángulos rectángulos** y su consecuencia: las razones seno, coseno y tangente dependen solo del ángulo. Se aprende a elegir la razón adecuada según los datos, a resolver triángulos, a medir con una o con dos posiciones y, sobre todo, a **valorar el error**: un grado de más en el clinómetro puede cambiar la altura en un metro. El informe final no solo da un número: dice cuánto se puede uno fiar de él. (Datos de las mediciones: ficticios, creados para el aula.)

Reto

Calcular tres medidas inaccesibles con trigonometría, comprobar que son plausibles y redactar un informe que indique el resultado, su método y su margen de error.

Producto final

Informe trigonométrico de medida indirecta.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- **1.1** Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.
- **1.2** Analizar y seleccionar diferentes herramientas y estrategias elaboradas en la resolución de un mismo problema, valorando su eficiencia.
- **2.1** Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.
- **6.1** Proponer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.
- **7.1** Representar matemáticamente la información más relevante de un problema, conceptos, procedimientos y resultados, visualizando ideas y estructurando procesos.
- **8.1** Comunicar ideas, conclusiones, conjeturas y razonamientos matemáticos utilizando diferentes medios, con coherencia, claridad y terminología apropiada.

Saberes básicos prioritarios

B
Sentido de la medida

- Medida indirecta de alturas y distancias mediante triángulos rectángulos; ángulos de elevación y de depresión.
- Error de medida: error absoluto y relativo, redondeo del ángulo y de la distancia, y efecto de un error de 1° en el resultado.
- Cifras significativas y expresión del resultado con su margen (por ejemplo, 30,5 ± 1 m).

C
Sentido espacial

- Semejanza de triángulos y proporcionalidad de sus lados; teorema de Pitágoras en triángulos rectángulos.
- Razones trigonométricas de ángulos agudos (seno, coseno y tangente); ángulos notables de 30°, 45° y 60°.
- Resolución de triángulos rectángulos: cálculo de lados y ángulos con la calculadora (razones directas e inversas, modo grados).
- Representación de la situación con un esquema a escala con datos rotulados.

F
Sentido socioafectivo

- Valoración del error y de la incertidumbre como parte del trabajo científico.
- Trabajo en equipo con reparto de roles en la toma de datos.

Objetivos didácticos

- ✓ Definir seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos.
- ✓ Elegir la razón adecuada según datos e incógnita.
- ✓ Resolver medidas indirectas y comprobar plausibilidad.
- ✓ Analizar error de medida.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Triángulos semejantes y razón

Evidencia: Ficha 1: altura del mástil por semejanza con la sombra de una vara y tabla de razones constantes en triángulos semejantes.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Seno, coseno y tangente

Evidencia: Ficha 2: seno, coseno y tangente de un triángulo 5-12-13, valores con calculadora y ángulo a partir de una razón.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Elegir razón según datos

Evidencia: Ficha 3: elección de la razón según los datos y la incógnita, y problema de la escalera apoyada.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Cálculo de lados y ángulos

Evidencia: Ficha 4: resolución completa de dos triángulos rectángulos, relación fundamental y trampa del modo RAD.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Altura por distancia y ángulo

Evidencia: Ficha 5: altura con una posición y la altura de los ojos, ángulo de depresión, torre con dos posiciones y anchura del canal.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Toma de datos real/simulada

Evidencia: Ficha 6: estimaciones de varios equipos con los datos de F8, media, error absoluto frente al valor de referencia y hoja propia de medidas.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Informe

Evidencia: Ficha 7: borrador del informe con esquema rotulado, cálculos, comprobación por otro camino y revisión cruzada.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

8

SESIÓN 8

Análisis de error

Evidencia: Ficha 8: reto individual del campanario con margen de error por el ángulo y por la distancia, y expresión del resultado.

Ficha: Anexo 3 · ficha 8

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Clinómetro sencillo · cinta métrica · calculadora científica · diagramas

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Triángulos dibujados y datos directos.

Ampliación

Anexo 9

Comparar dos posiciones de medida y estudiar cómo afecta un error de 1°.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1

Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2

Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3

Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Reformulación de cada medida inaccesible con un esquema de triángulos rectángulos que identifique datos, incógnita y ángulo.	Ficha 1 y esquemas de las Fichas 3 y 5 / lista de cotejo
1.2	Elección razonada de la razón trigonométrica y del método (una posición, dos posiciones, semejanza con la sombra) según los datos disponibles.	Fichas 3, 4 y 5 / escala de valoración
2.1	Comprobación de las alturas con otro camino (sombra, dibujo a escala, estimación) y detección de errores, incluido el modo RAD de la calculadora.	Fichas 4 y 6 / rúbrica
6.1	Modelización de situaciones reales (escalera, ángulo de depresión, canal, campanario) con triángulos rectángulos y propuesta de una medida propia.	Fichas 5 y 6 (hoja de medidas) / rúbrica
7.1	Esquema del informe a escala con ángulos, distancias y alturas rotuladas, y tablas de datos y resultados coherentes con el cálculo.	Informe trigonométrico (Anexo 4) y Ficha 7 / rúbrica

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
8.1	Redacción del informe con resultado, método, comprobación y margen de error con lenguaje matemático y unidades correctas.	Informe (Anexo 4) y Ficha 8 / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Informe, cálculos y análisis de precisión.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 7 · Trigonometría para medir lo inaccesible

ALUMNADO

Hay un mástil de unos nueve metros en la pista, una torre del reloj cuya base está tras una valla de obras y un canal que no se puede cruzar. Nadie va a trepar, nadie va a saltar la valla y nadie va a nadar. Y, sin embargo, hoy vais a conocer las tres medidas con una cinta métrica, un transportador con una pajita y un poco de trigonometría. Pero cuidado: un grado de error al apuntar puede cambiar la altura de la torre en tres metros. Vuestro informe tendrá que decir cuánto vale la medida y cuánto os podéis fiar de ella.

> *¿Cómo podemos calcular una altura sin subir hasta ella?*

Vuestro reto

Calcular tres medidas inaccesibles con trigonometría, comprobar que son plausibles y redactar un informe que indique el resultado, su método y su margen de error.

Lo que vais a producir

Informe trigonométrico de medida indirecta.

Hoja de ruta · 8 sesiones

1. Medimos con sombras y descubrimos que los triángulos semejantes guardan una razón constante.
2. Definimos seno, coseno y tangente y las calculamos.
3. Elegimos la razón adecuada según los datos y la incógnita.
4. Resolvemos triángulos rectángulos completos con la calculadora.
5. Calculamos alturas con un ángulo y una distancia, y con dos posiciones.
6. Tomamos datos (reales o simulados), calculamos y comparamos estimaciones.
7. Redactamos el informe de medida indirecta.
8. Analizamos el error y expresamos el resultado con su margen.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Definir seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos.
- ✓ Elegir la razón adecuada según datos e incógnita.
- ✓ Resolver medidas indirectas y comprobar plausibilidad.
- ✓ Analizar error de medida.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 7 · Trigonometría para medir lo inaccesible

ALUMNADO

Las tres medidas del instituto, esquemas de semejanza, razones y métodos de medida, tabla de ángulos notables, protocolo del clinómetro, datos simulados de los equipos y una guía para valorar el error. Todos los datos de medición son ficticios.

F1 Tres medidas que no se pueden tocar

ESTUDIO DE CASO

El instituto necesita tres medidas:

- **Mástil de la pista (A).** Cuesta subir y no hay escalera. Referencia medida un día con una cinta desde el tejado: **9,50 m**.
- **Torre del reloj de la plaza (B).** Su base está en un recinto en obras y no se puede llegar hasta ella con la cinta. Referencia obtenida de un plano del Ayuntamiento: **35,5 m**.
- **Canal de riego (C).** Se quiere saber su anchura sin cruzarlo. Referencia dada por el servicio de riego: **17,0 m**.

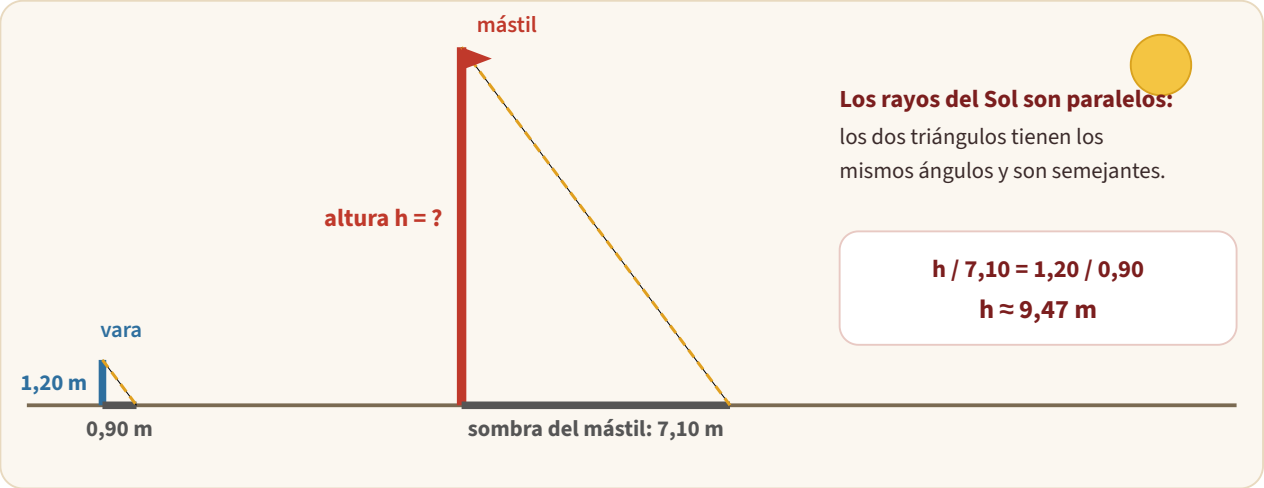
Material: cinta métrica, clinómetro casero (F7), calculadora científica. Los ojos de quien mide están a **1,50 m** del suelo.

Fuente: Situación y datos ficticios creados para el aula.

¿Qué datos necesitas conocer en cada caso para calcular una altura o una anchura? Anótalos antes de la ficha 1.

F2 Semejanza: la sombra de una vara y la del mástil

ESQUEMA

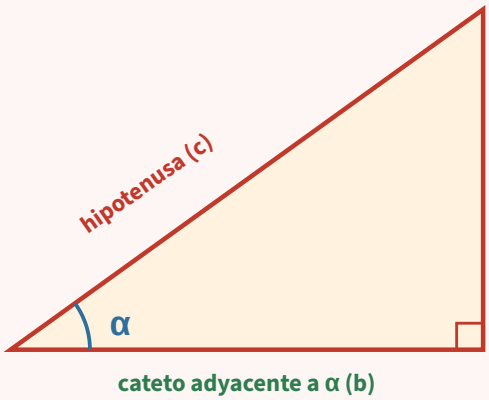


Fuente: Esquema de elaboración propia, a escala.

Los dos triángulos son rectángulos y comparten el ángulo del Sol: son semejantes, así que sus lados son proporcionales.

F3 Seno, coseno y tangente

ESQUEMA



seno
sen α = opuesto / hipotenusa

coseno
cos α = adyacente / hipotenusa

tangente
tan α = opuesto / adyacente

Ejemplo: catetos 3 y 4, hipotenusa 5
α opuesto al cateto 3:
sen α = 3/5 = 0,6 cos α = 4/5 = 0,8
tan α = 3/4 = 0,75 → α ≈ 36,9°

Fuente: Esquema de elaboración propia.

Las razones dependen solo del ángulo, no del tamaño del triángulo. El cateto opuesto y el adyacente se nombran respecto al ángulo α.

F4 Razones de algunos ángulos

DATOS

Ángulo	sen	cos	tan
30°	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\sqrt{3} \approx 1{,}7321$
20°	0,3420	0,9397	0,3640
35°	0,5736	0,8192	0,7002
50°	0,7660	0,6428	1,1918
70°	0,9397	0,3420	2,7475

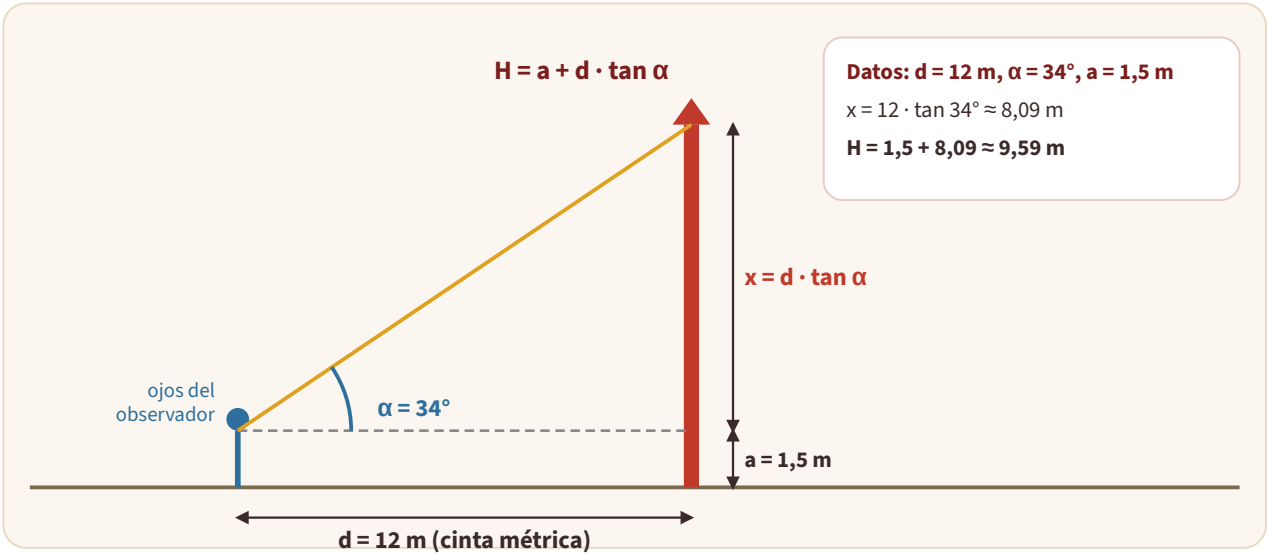
Calculadora: comprueba que está en modo **DEG** (grados). Para hallar el ángulo a partir de la razón usa las funciones inversas: $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$ (también llamadas arcsen, arccos y arctan).

Fuente: Valores calculados con calculadora científica en modo grados (4 decimales).

Observa que $\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$: el seno de un ángulo es el coseno de su complementario.

F5 Altura con una posición: ángulo de elevación y altura de los ojos

ESQUEMA

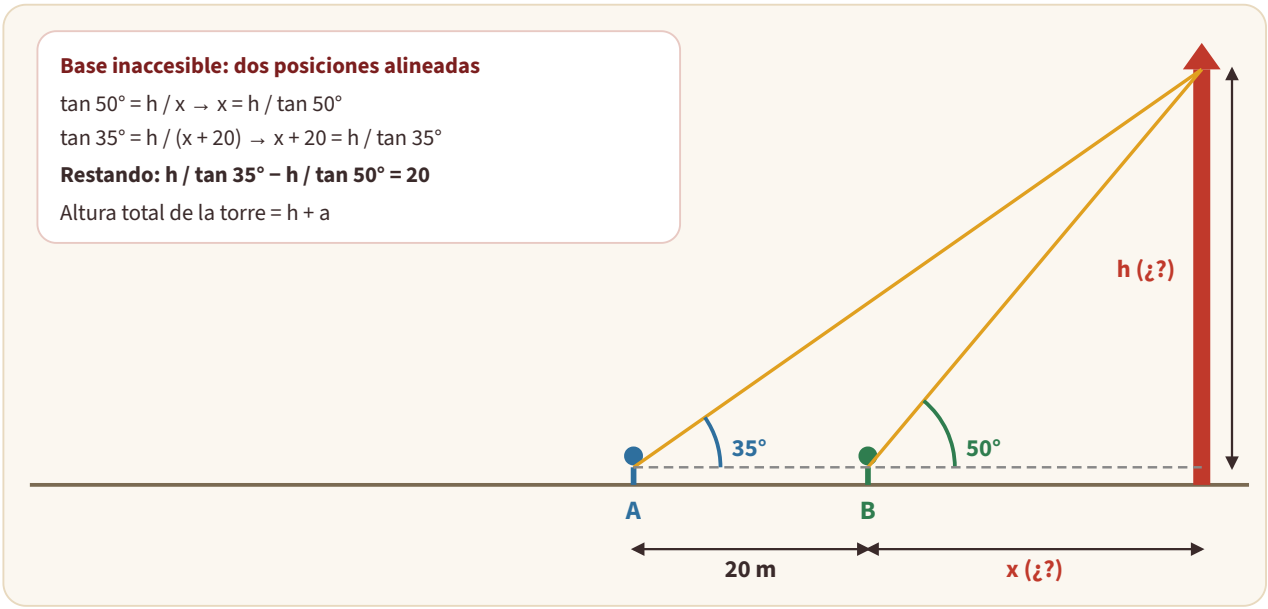


Fuente: Esquema de elaboración propia, a escala.

El clinómetro mide el ángulo desde los ojos; por eso hay que **sumar la altura de los ojos** a lo que se calcula.

F6 Base inaccesible: dos posiciones alineadas con la torre

ESQUEMA



Fuente: Esquema de elaboración propia, a escala.

Con dos ángulos y la distancia entre las posiciones A y B se calcula h sin conocer x. Resuelve: $h = \dfrac{20}{\frac{1}{\tan 35°} - \frac{1}{\tan 50°}}$.

F7 Clinómetro casero y toma de datos

PROTOCOLO

Materiales: transportador de 180°, pajita, cinta adhesiva, hilo de unos 20 cm y una pequeña pesa (arandela o clip).

- **1.** Pega la pajita a lo largo del lado recto del transportador. Ata el hilo con la pesa al centro del transportador.
- **2.** Con la pajita horizontal, el hilo cae sobre la marca de **90°**. Comprueba que lo hace.
- **3.** Mira por la pajita hacia la parte más alta del objeto. Sin mover el aparato, pide a una compañera o compañero que lea la marca donde queda el hilo.
- **4.** El ángulo de elevación es $\alpha = |90^\circ - \text{lectura}|$.
- **5.** Repite **tres veces** y calcula la media. Mide con la cinta la distancia d del observador al pie del objeto, a la altura del suelo.
- **6.** Anota la altura de los ojos a (del suelo a los ojos).

Roles: observador, lector del ángulo, medidor de distancias y secretario. Rotad los roles.

Fuente: Elaboración propia.

Un error de lectura de 1° es normal. En la ficha 8 veremos cuánto afecta.

F8 Datos de los equipos (simulados)

DATOS

Objeto	Equipo	Distancia(s)	Ángulo(s) de elevación	Altura de los ojos
Mástil (A)	E1	$d = 8$ m	45°	1,50 m
Mástil (A)	E2	$d = 10$ m	39°	1,50 m
Mástil (A)	E3	$d = 12$ m	34°	1,50 m
Mástil (A)	E4	$d = 16$ m	27°	1,50 m
Torre (B)	E5	A y B alineadas, 20 m entre ellas	35° desde A y 50° desde B	1,50 m
Torre (B)	E6	A y B alineadas, 15 m entre ellas	41° desde A y 55° desde B	1,50 m
Canal (C)	E7	Base de 20 m a lo largo de la orilla	40° en el extremo de la base	—

Fuente: Datos ficticios creados para el aula, redondeados como en una toma real (ángulos al grado y distancias al metro).

En el canal, el punto A está en la orilla justo enfrente de un árbol de la otra orilla; la base de 20 m va de A a B y en B se mide el ángulo entre la base y la visual al árbol.

F9 Cómo valorar el error

TEXTO

- **Error absoluto:** $|\text{valor medido} - \text{valor de referencia}|$, en la misma unidad que la medida.
- **Error relativo:** $\dfrac{\text{error absoluto}}{\text{valor de referencia}}$, a menudo en porcentaje.
- **Margen por el ángulo:** se repite el cálculo con $\alpha - 1^\circ$ y con $\alpha + 1^\circ$. La mitad de la diferencia entre ambos resultados es el margen.
- **Margen por la distancia:** se repite el cálculo con $d \pm 0{,}5$ m.
- **Cifras:** no tiene sentido dar $30{,}4707$ m si el error es de un metro. Se escribe, por ejemplo, $30{,}5 \pm 1$ m.
- **Plausibilidad:** ¿el resultado es razonable? Compáralo con un dibujo a escala o con otra estimación.

Fuente: Elaboración propia.

Un resultado sin su margen de error es solo la mitad de la información.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 7 · Trigonometría para medir lo inaccesible

ALUMNADO

FICHA 1 Triángulos semejantes y razón

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Lee F1 y F2. La clave de esta SdA: en triángulos semejantes, las razones entre lados no cambian.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

Si dos triángulos son semejantes, sus lados correspondientes son…

☐ iguales ☐ proporcionales ☐ paralelos

Si $\frac{3}{4} = \frac{x}{12}$, entonces x vale…

☐ 9 ☐ 16 ☐ 8

En un triángulo rectángulo de catetos 6 y 8, la hipotenusa mide…

☐ 14 ☐ 10 ☐ 12

2 **Con los datos de F2 (vara de 1,20 m con sombra de 0,90 m; sombra del mástil de 7,10 m) plantea una proporción y calcula la altura del mástil. ¿Por qué son semejantes los dos triángulos?**

3 **Una línea de visión de 35° con la horizontal forma triángulos rectángulos de distinto tamaño. Calcula las razones y redondea a 3 decimales. ¿Qué observas?**

Distancia d (adyacente)	Altura (opuesto)	Línea de visión (hipotenusa)	opuesto / hipotenusa	adyacente / hipotenusa	opuesto / adyacente
10 m	7,002 m	12,208 m			
20 m	14,004 m	24,415 m			
30 m	21,006 m	36,623 m			

4 **Explica con tus palabras por qué no basta con una cinta métrica para medir el mástil, la torre y el canal, y qué ventaja tiene medir un ángulo.**

FICHA 2 Seno, coseno y tangente

Sesión 2

Usa F3 y F4. Redondea a 3 decimales y escribe también las fracciones.

1 **Triángulo rectángulo de catetos 5 y 12. Calcula la hipotenusa y las razones de los dos ángulos agudos, α (opuesto al cateto 5) y β (opuesto al cateto 12).**

Razón	Fracción	Decimal
$\sin \alpha$		
$\cos \alpha$		
$\tan \alpha$		
$\sin \beta$		
$\cos \beta$		
$\tan \beta$		

2 **Calcula con la calculadora (modo DEG) y completa. Después compara $\sin 40^\circ$ con $\cos 50^\circ$ y explica qué pasa.**

Razón	Valor	Razón	Valor
$\sin 30^\circ$		$\sin 40^\circ$	
$\cos 60^\circ$		$\cos 40^\circ$	
$\tan 45^\circ$		$\tan 40^\circ$	

3 **Marca verdadero o falso.**

	V	F
El seno de un ángulo agudo nunca es mayor que 1.	☐	☐
La tangente de un ángulo agudo nunca es mayor que 1.	☐	☐
$\cos 60^\circ = 2 \cos 30^\circ$.	☐	☐
Si el ángulo agudo aumenta, su seno aumenta.	☐	☐
$\tan 45^\circ = 1$ porque en ese triángulo los catetos son iguales.	☐	☐

4 **Halla el ángulo agudo α con las funciones inversas: a) $\sin \alpha = 0{,}5$; b) $\cos \alpha = 0{,}8$; c) $\tan \alpha = 2$.**

FICHA 3 Elegir la razón

Sesión 3

Antes de calcular, dibuja el triángulo, rotula los lados respecto al ángulo y elige la razón que contiene el dato y la incógnita.

1 **Completa la tabla: razón elegida y ecuación. Resuelve la última columna.**

Situación	Datos	Incógnita	Razón y ecuación	Resultado
(a)	hipotenusa 10 m y $\alpha = 30^\circ$	cateto opuesto		
(b)	cateto adyacente 8 m y $\alpha = 40^\circ$	hipotenusa		
(c)	cateto opuesto 12 m y adyacente 5 m	ángulo α		
(d)	hipotenusa 13 m y cateto opuesto 5 m	ángulo α		

2 **Completa con «opuesto», «adyacente» o «hipotenusa».**

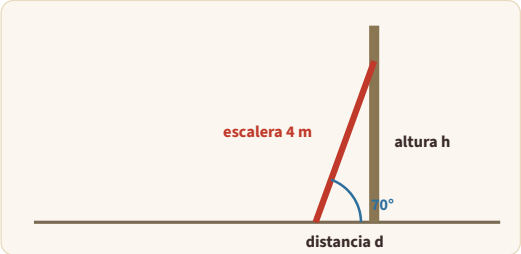
a) $\sin \alpha$ = _____ / hipotenusa

b) $\cos \alpha$ = adyacente / _____

c) $\tan \alpha$ = _____ / adyacente

d) Si conozco la hipotenusa y quiero el cateto opuesto, uso el _____ .

3 **Una escalera de 4 m está apoyada en una pared y forma 70° con el suelo. ¿A qué altura llega? ¿A qué distancia de la pared está su pie?**



4 **Un compañero dice: «Para hallar el cateto opuesto conociendo la hipotenusa uso la tangente». ¿Tiene razón? Corrígelo y pon un ejemplo.**

FICHA 4 Resolver triángulos rectángulos

Sesión 4

Resolver un triángulo es hallar todos sus lados y ángulos. Usa Pitágoras, razones y que los ángulos agudos suman 90°.

1 **Resuelve los dos triángulos (ángulo α opuesto al cateto a).**

Triángulo	Datos	a	b	c	α	β
1	$c = 15, \alpha = 28^\circ$					
2	$a = 7, b = 24$					

2 **Con $\alpha = 28^\circ$ comprueba que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ y que $\dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$. Usa 4 decimales.**

3 **Una rampa de 3 m de longitud forma 30° con el suelo. Usa F4 (valores exactos) para hallar su altura y su base. ¿Qué cumple el triángulo de 30°-60°-90°?**

4 **Calcula $\sin 30$ con la calculadora en modo RAD y en modo DEG. ¿Qué resultado es el correcto para un ángulo de 30°? ¿Qué pasaría en el informe si te equivocaras de modo?**

FICHA 5 Alturas por distancia y ángulo

Sesión 5

Usa F5 y F6. No olvides la altura de los ojos y rotula bien tu esquema.

1 **Con F5: $d = 12$ m, $\alpha = 34°$, $a = 1{,}5$ m. Calcula la altura H del mástil. Escribe cada paso.**

2 **Desde la ventana de un cuarto piso, a 15 m del suelo, se ve un banco con ángulo de depresión de $25°$. ¿A qué distancia horizontal de la fachada está el banco? Haz un dibujo.**

3 **Torre con dos posiciones (F6): A y B están a 20 m, con ángulos de 35° desde A y 50° desde B. Plantea las dos ecuaciones, resuelve h y calcula la altura de la torre.**

4 **Canal (F8, E7): base de 20 m y ángulo de $40°$ en B. Haz un dibujo, calcula la anchura y elige la razón.**

FICHA 6 Toma de datos y comparación

Sesión 6

Usa F7 y F8. Si tenéis clinómetro, tomad medidas reales del patio; si no, trabajad con los datos de F8.

1 **Calcula la altura del mástil con los datos de cada equipo, redondea a centímetros y compara con la referencia de F1 (9,50 m).**

Equipo	Cálculo $H = a + d\tan\alpha$	H (m)	Error absoluto (m)
E1			
E2			
E3			
E4			
Media			

2 **Calcula la altura de la torre con los datos de E5 y E6 (método de F6) y compara con la referencia de 35,5 m. ¿Qué equipo se acerca más? ¿Por qué crees que el otro se equivoca más?**

3 **Hoja propia de medidas (o simulada con los datos de E3).**

Objeto	a (m)	d (m)	Lecturas del hilo (3)	α media	H (m)

4 **En una frase, indica qué dato de los equipos influye más en el error y cómo reducirías la dispersión de las mediciones.**

FICHA 7 Borrador del informe

Sesión 7

En equipo: elegid una medida (mástil, torre o canal) y redactad el informe. Roles: calculista, dibujante, comprobador y portavoz.

1 **Esquema a escala del problema con datos y ángulos rotulados.**

Dibuja aquí el triángulo rectángulo y rotula d, α, a y H

2 **Tabla de datos y cálculo.**

Dato o incógnita	Valor	Unidad	Razón o fórmula usada

3 **Comprobación de plausibilidad por otro camino (dibujo a escala, sombra, estimación) y comentario.**

4 **Revisión cruzada: otro equipo comprueba vuestro informe.**

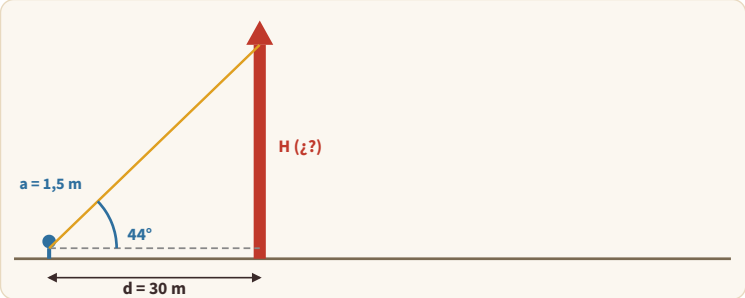
- ☐ El esquema tiene todos los datos y ángulos rotulados
- ☐ Se ha elegido la razón adecuada y la calculadora estaba en modo DEG
- ☐ Se ha sumado la altura de los ojos cuando era necesario
- ☐ Hay una comprobación por otro camino
- ☐ El resultado lleva unidades y un margen de error razonable

FICHA 8 Análisis de error (individual)

Sesión 8

Resuelve sin ayuda del equipo. Se mide la altura del campanario de la iglesia con el clinómetro: $d = 30$ m, $\alpha = 44°$, $a = 1{,}5$ m. El plano del Ayuntamiento da 30,0 m como referencia.

1 **Calcula la altura H del campanario con una cifra decimal.**



2 **Calcula H para $\alpha = 43°$ y $\alpha = 45°$ y el margen por el ángulo.**

3 **Calcula H para $d = 29{,}5$ m y $d = 30{,}5$ m y el margen por la distancia. ¿Qué error influye más?**

4 **Halla el error absoluto y el error relativo (en %) de H respecto a 30,0 m. Escribe el resultado final con su margen (por ejemplo $H = \ldots \pm \ldots$ m).**

5 **Un compañero escribe $H = 30{,}470663$ m. Explica por qué no es adecuado y qué cambiarías.**

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 7 · Trigonometría para medir lo inaccesible

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Informe trigonométrico de medida indirecta. Cada resultado va acompañado de su método, su comprobación y su margen de error.

Título y equipo

Objeto y datos

Qué se mide, instrumentos, a, d y ángulos.

Razón elegida

Qué razón y por qué.

Esquema a escala

Triángulo rectángulo con datos y ángulos rotulados.

Cálculo

Ecuación, resultado y unidades.

Comprobación

Por otro camino: sombra, dibujo o estimación.

Error y margen

Efecto de ±1° y de ±0,5 m.

Conclusión

Resultado con margen y firma del equipo revisor.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 7 · Trigonometría para medir lo inaccesible

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Informe trigonométrico de medida indirecta**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] El esquema identifica el triángulo rectángulo, el ángulo, los catetos y la hipotenusa con datos rotulados.
- [ ] La razón trigonométrica elegida contiene el dato conocido y la incógnita.
- [ ] La calculadora está en modo grados y los ángulos se leen bien.
- [ ] Se ha sumado la altura de los ojos cuando el ángulo se mide desde los ojos.
- [ ] El cálculo está escrito con la ecuación, la sustitución y el resultado con unidades.
- [ ] Hay una comprobación por otro camino (semejanza, dibujo a escala o estimación).
- [ ] Se estima el margen de error con $\alpha \pm 1^\circ$ y $d \pm 0{,}5$ m.
- [ ] El resultado final se escribe con las cifras adecuadas y su margen.
- [ ] El informe explica con claridad el método y las conclusiones.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 7 · Trigonometría para medir lo inaccesible

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Informe trigonométrico de medida indirecta**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 7 · Trigonometría para medir lo inaccesible

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé elegir entre seno, coseno y tangente según los datos y la incógnita, y resolver un triángulo rectángulo.	○	○	○	○
Sé estimar cuánto afecta un error de un grado al resultado y expresar la medida con su margen.	○	○	○	○
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	○	○	○	○
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	○	○	○	○
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	○	○	○	○
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	○	○	○	○

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 7 · Trigonometría para medir lo inaccesible

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Triángulos dibujados y datos directos: razones, lados y ángulos con ayudas.

Ejemplo modelado

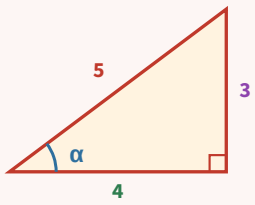
Triángulo 3-4-5 con α opuesto al cateto 3. **Razones:** $\sin\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$; $\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$; $\tan\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$. **Ángulo:** $\alpha = \tan^{-1}(0{,}75) \approx 36{,}9^\circ$. **Lado desconocido:** si $\alpha = 36{,}9^\circ$ y la hipotenusa mide 10, el cateto opuesto es $10 \cdot \sin 36{,}9^\circ \approx 6$.

Símbolos y vocabulario

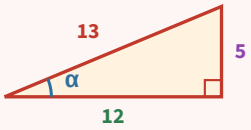
Hipotenusa: lado opuesto al ángulo recto (el mayor). **Cateto opuesto / adyacente:** el que está enfrente / al lado del ángulo α. **sen, cos, tan:** razones entre dos lados. $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$: dan el ángulo a partir de la razón. **Ángulo de elevación:** el que sube desde la horizontal hasta la visual.

1 **Calcula las razones del ángulo α de cada triángulo (opuesto al cateto de la derecha).**

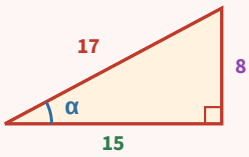
Triángulo A



Triángulo B



Triángulo C



Triángulo	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	α
A (3, 4, 5)				
B (5, 12, 13)				
C (8, 15, 17)				

2 **Completa con la calculadora en modo DEG.**

a) Hipotenusa 10 y $\alpha = 30^\circ$: cateto opuesto = $10 \cdot \sin 30^\circ$ = _____

b) Cateto adyacente 6 y $\alpha = 45^\circ$: cateto opuesto = $6 \cdot \tan 45^\circ$ = _____

c) Catetos 9 y 12: hipotenusa = _____ y $\tan\alpha = \frac{9}{12}$, luego $\alpha \approx$ _____ °

3 **Un árbol: a 10 m del tronco, con los ojos a 1,6 m del suelo, se ve la copa con 40°. Haz el dibujo y calcula su altura.**

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 7 · Trigonometría para medir lo inaccesible

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Dos posiciones y el error de 1°: ¿cuánto separar los puntos de medida?

Al medir la torre con dos posiciones, el resultado depende mucho de lo bien que se lean los ángulos. En todas las situaciones la torre mide $h = 33{,}95$ m sobre los ojos y la posición B está a 28,49 m. ¿Compensa alejar la posición A (más separación entre A y B)? Estudiad qué ocurre con la separación b entre A y B.

Pasos

1. Para $b = 10$ m, $b = 20$ m y $b = 40$ m calcula el ángulo desde A que corresponde (redondeado al grado) con B fija en 50°.
2. Para cada b, calcula h con el ángulo de A medido en 1° menos y 1° más.
3. Calcula el margen (media de la diferencia) y compáralo con la medida desde una sola posición a 28,5 m con $\alpha = 50^\circ$ y $\pm 1^\circ$.
4. Redacta una conclusión: ¿qué separación recomendarías y por qué? ¿Cuándo no se puede usar una sola posición?

1 **Tabla de resultados.**

Separación b	Ángulo desde A	h con $\alpha_A - 1^\circ$	h con α_A	h con $\alpha_A + 1^\circ$	Margen
10 m					
20 m					
40 m					

Entrega

Una tabla, la conclusión con la separación recomendada y una explicación de por qué un error de ángulo pesa más cuando A y B están muy juntos.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 7 · Trigonometría para medir lo inaccesible

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: proporcionales; $x = \frac{3 \cdot 12}{4} = 9$; $\sqrt{36 + 64} = 10$.
2. $\frac{h}{7{,}10} = \frac{1{,}20}{0{,}90} \Rightarrow h = \frac{7{,}10 \cdot 1{,}20}{0{,}90} \approx 9{,}47$ m. Son semejantes porque ambos son rectángulos y los rayos del Sol son paralelos, así que forman el mismo ángulo con el suelo.
3. Filas: 7,002 / 12,208 $\approx 0{,}574$; 14,004 / 24,415 $\approx 0{,}574$; 21,006 / 36,623 $\approx 0{,}574$. adyacente / hipotenusa: 10 / 12,208, 20 / 24,415 y 30 / 36,623, todas $\approx 0{,}819$. opuesto / adyacente: $0{,}700$ en las tres. Las razones no cambian con el tamaño: dependen solo del ángulo de 35°.
4. Respuesta abierta: no se llega a la cima ni a la otra orilla; un ángulo se mide desde el suelo y, con una distancia, permite calcular la altura por semejanza de triángulos.

Ficha 2

1. Hipotenusa $\sqrt{25 + 144} = 13$. $\sin\alpha = \frac{5}{13} \approx 0{,}385$; $\cos\alpha = \frac{12}{13} \approx 0{,}923$; $\tan\alpha = \frac{5}{12} \approx 0{,}417$; $\sin\beta = \frac{12}{13} \approx 0{,}923$; $\cos\beta = \frac{5}{13} \approx 0{,}385$; $\tan\beta = \frac{12}{5} = 2{,}4$.
2. $\sin 30° = 0{,}5$; $\cos 60° = 0{,}5$; $\tan 45° = 1$; $\sin 40° \approx 0{,}643$; $\cos 40° \approx 0{,}766$; $\tan 40° \approx 0{,}839$. $\sin 40° = \cos 50° \approx 0{,}643$: el seno de un ángulo es el coseno de su complementario.
3. V (el cateto no supera a la hipotenusa); F ($\tan 60° \approx 1{,}73$); F ($\cos 60° = 0{,}5$ y $2\cos 30° \approx 1{,}73$); V; V.
4. a) $30°$; b) $\cos^{-1} 0{,}8 \approx 36{,}87°$; c) $\tan^{-1} 2 \approx 63{,}43°$.

Ficha 3

1. (a) seno: $a = 10 \sin 30° = 5$ m. (b) coseno: $c = \frac{8}{\cos 40°} \approx 10{,}44$ m. (c) tangente: $\tan\alpha = \frac{12}{5} = 2{,}4$; $\alpha \approx 67{,}38°$. (d) seno: $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; $\alpha \approx 22{,}62°$.
2. a) opuesto; b) hipotenusa; c) opuesto; d) seno.
3. Altura: $4 \sin 70° \approx 3{,}76$ m. Distancia al pie: $4 \cos 70° \approx 1{,}37$ m.
4. No: con la hipotenusa y el opuesto se usa el seno ($a = c \sin\alpha$). La tangente relaciona los dos catetos. Ejemplo: hipotenusa 10 y $\alpha = 30°$ da $a = 5$.

Ficha 4

1. Triángulo 1: $a = 15 \sin 28° \approx 7{,}04$; $b = 15 \cos 28° \approx 13{,}24$; $\beta = 62°$. Triángulo 2: $c = \sqrt{49 + 576} = 25$; $\alpha = \tan^{-1} \frac{7}{24} \approx 16{,}26°$; $\beta \approx 73{,}74°$.
2. $\sin 28° \approx 0{,}4695$ y $\cos 28° \approx 0{,}8829$: $0{,}2204 + 0{,}7796 = 1{,}0000$; $\frac{0{,}4695}{0{,}8829} \approx 0{,}5318 \approx \tan 28° = 0{,}5317$ (diferencia por redondeo).
3. Altura $= 3 \sin 30° = 3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5$ m; base $= 3 \cos 30° = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}60$ m. El cateto opuesto a 30° mide la mitad de la hipotenusa.
4. RAD: $\sin 30 \approx -0{,}988$; DEG: $0{,}5$. Correcto: DEG. En RAD saldrían alturas absurdas (incluso negativas) y el informe sería erróneo.

Ficha 5

1. $x = 12\tan 34^\circ \approx 12 \cdot 0{,}6745 = 8{,}09$ m; $H = 1{,}5 + 8{,}09 \approx 9{,}59$ m.
2. Distancia $= \frac{15}{\tan 25^\circ} \approx \frac{15}{0{,}4663} \approx 32{,}2$ m. El ángulo de depresión desde la ventana es igual al de elevación desde el banco (ángulos alternos internos).
3. $\tan 50^\circ = \frac{h}{x}$ y $\tan 35^\circ = \frac{h}{x+20}$. Así, $x = \frac{h}{\tan 50^\circ}$, $x + 20 = \frac{h}{\tan 35^\circ}$, luego $\frac{h}{\tan 35^\circ} - \frac{h}{\tan 50^\circ} = 20$, $h\,(1{,}4281 - 0{,}8391) = 20$, $h \approx 33{,}95$ m. Torre $\approx 33{,}95 + 1{,}5 \approx 35{,}45$ m.
4. Tangente: $\tan 40^\circ = \frac{\text{anchura}}{20}$, anchura $= 20\tan 40^\circ \approx 16{,}8$ m.

Ficha 6

1. E1: $1{,}5 + 8\tan 45^\circ = 9{,}50$ (error 0,00). E2: $1{,}5 + 10\tan 39^\circ \approx 9{,}60$ (0,10). E3: $1{,}5 + 12\tan 34^\circ \approx 9{,}59$ (0,09). E4: $1{,}5 + 16\tan 27^\circ \approx 9{,}65$ (0,15). Media $\approx 9{,}59$ m; error absoluto de la media $\approx 0{,}09$ m.
2. E5: $\frac{20}{\frac{1}{\tan 35^\circ} - \frac{1}{\tan 50^\circ}} \approx 33{,}95$; torre $\approx 35{,}45$ m (error 0,05 m). E6: $\frac{15}{\frac{1}{\tan 41^\circ} - \frac{1}{\tan 55^\circ}} \approx 33{,}32$; torre $\approx 34{,}82$ m (error 0,68 m). E5 se acerca más. En E6 las posiciones están más juntas (15 m) y el redondeo del ángulo al grado altera más el resultado.
3. Hoja propia: respuesta abierta; se revisa que la media de las tres lecturas esté bien calculada y que se use $H = a + d\tan\alpha$.
4. Influye más el ángulo (el redondeo al grado) que la distancia. Para reducir la dispersión: repetir las lecturas, promediar, usar el clinómetro firme y, con dos posiciones, separar más A y B.

Ficha 7

1. Informe libre. Comprobar: esquema con triángulo rectángulo, ángulo y lados rotulados; tabla con a, d, α y H con unidades; razón elegida (tangente para d y α con la altura sobre los ojos; coseno o seno si interviene la visual); comprobación (por ejemplo con $\alpha = 45^\circ$ la altura sobre los ojos debe igualar d, o con la semejanza de F2); resultado con margen.
2. Revisión cruzada: se espera que el equipo revisor repita el cálculo con la calculadora en modo DEG y detecte si falta sumar la altura de los ojos.

Ficha 8

1. $H = 1{,}5 + 30\tan 44^\circ \approx 1{,}5 + 28{,}97 \approx 30{,}5$ m.
2. $\alpha = 43^\circ$: $1{,}5 + 30\tan 43^\circ \approx 29{,}5$ m. $\alpha = 45^\circ$: $1{,}5 + 30 = 31{,}5$ m. Margen $\approx \frac{31{,}5 - 29{,}5}{2} = 1{,}0$ m.
3. $d = 29{,}5$: $1{,}5 + 29{,}5\tan 44^\circ \approx 29{,}99$ m; $d = 30{,}5$: $\approx 30{,}95$ m. Margen $\approx 0{,}48$ m $\approx 0{,}5$ m. Influye más el error de ángulo (1 m) que el de distancia (0,5 m).
4. Error absoluto $|30{,}47 - 30{,}0| \approx 0{,}47$ m; relativo $\frac{0{,}47}{30{,}0} \approx 1{,}6\,\%$. Resultado: $H = 30{,}5 \pm 1$ m.
5. Dar 6 decimales no tiene sentido cuando el margen es de un metro; se escribe $30{,}5 \pm 1$ m (o 30 ± 1 m).

Refuerzo

1. A: $\sin\alpha = 0{,}6$, $\cos\alpha = 0{,}8$, $\tan\alpha = 0{,}75$, $\alpha \approx 36{,}9^\circ$. B: $\frac{5}{13} \approx 0{,}385$, $\frac{12}{13} \approx 0{,}923$, $\frac{5}{12} \approx 0{,}417$, $\alpha \approx 22{,}6^\circ$. C: $\frac{8}{17} \approx 0{,}471$, $\frac{15}{17} \approx 0{,}882$, $\frac{8}{15} \approx 0{,}533$, $\alpha \approx 28{,}1^\circ$.
2. a) 5; b) 6; c) hipotenusa 15 y $\alpha = \tan^{-1} 0{,}75 \approx 36{,}9^\circ$.
3. $H = 1{,}6 + 10\tan 40^\circ \approx 1{,}6 + 8{,}39 \approx 10{,}0$ m.

Ampliación

1. $b = 10$: ángulo $\approx 41^\circ$ ($41{,}4^\circ$); $\alpha_A = 40^\circ$: $h \approx 28{,}36$; 41°: $32{,}13$; 42°: $36{,}83$; margen $\approx 4{,}2$ m. $b = 20$: 35°; 34°: $31{,}08$; 35°: $33{,}95$; 36°: $37{,}22$; margen $\approx 3{,}1$ m. $b = 40$: 26° ($26{,}4^\circ$); 25°: $30{,}64$; 26°: $33{,}02$; 27°: $35{,}60$; margen $\approx 2{,}5$ m.
2. Una sola posición a 28,5 m con 50°: $28{,}5 \tan 50^\circ \approx 33{,}96$; con 49°: $32{,}79$; con 51°: $35{,}19$; margen $\approx 1{,}2$ m. Es más preciso, pero solo sirve si se puede llegar al pie.
3. Conclusión esperada: cuanto más separadas están A y B, menor es el margen (la diferencia entre las visuales es mayor y un grado pesa menos); se recomienda una separación grande (p. ej. 40 m), limitada por el espacio disponible. Cuando la base es inaccesible se necesitan dos posiciones.

Errores frecuentes

- Calculadora en modo RAD en lugar de DEG (resultados absurdos o negativos).
- Confundir cateto opuesto y adyacente respecto al ángulo, o usar la tangente cuando interviene la hipotenusa.
- Olvidar sumar la altura de los ojos a la altura calculada.
- Redondear demasiado pronto (por ejemplo, tan 34° ≈ 0,67) y arrastrar el error.
- Medir la distancia hasta la altura de los ojos o hasta un punto distinto del pie del objeto.
- Dar el resultado con demasiadas cifras o sin margen de error.

Criterios para valorar respuestas abiertas

- El informe se valora por el método (razón elegida y esquema), la comprobación y la expresión del margen; el número exacto es menos importante.
- Se aceptan resultados que difieran de la referencia dentro del margen estimado por ±1° y ±0,5 m.
- Para la medida real con clinómetro, es aceptable que los valores varíen entre equipos; lo valioso es que el equipo analice por qué.
- La calculadora se usa para los cálculos, pero cada paso debe estar escrito con la razón y la sustitución.

08

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Estadística de dos variables

PREGUNTA GUÍA

¿Cuándo una relación entre dos variables merece un modelo lineal y qué no podemos concluir de él?

CURSO 4.º ESO · Matemáticas B	SESIONES 8 sesiones · 3.º trimestre	SENTIDOS PRIORITARIOS E · Sentido estocástico
COMPETENCIAS ESPECÍFICAS CE1, CE2, CE3, CE6, CE7, CE8	PRODUCTO FINAL Estudio de relación entre variables	CRITERIOS DE EVALUACIÓN 1.1, 2.1, 3.1, 6.1, 7.1, 8.1

Contexto, reto y sentido

El consejo del alumnado del instituto (ficticio) abre un **observatorio de datos**. Quiere responder con números a preguntas que se oyen cada día en el patio: ¿los que más duermen sacan mejores notas?, ¿cuántas botellas de agua más se venden cuando sube la temperatura?, ¿quitar horas de pantalla da más horas de sueño? Cada pregunta se estudia con **dos variables** medidas sobre las mismas personas o los mismos días.

La situación recorre el camino completo de un estudio estadístico bivariante: recoger los pares de datos, ordenarlos en tablas, dibujar la **nube de puntos**, medir cuánto se parecen a una recta (coeficiente de correlación r), ajustar la **recta de regresión** con tecnología, predecir con prudencia (interpolar sí, extrapolar con cuidado) y, sobre todo, discutir qué **no** se puede concluir: que dos variables vayan juntas no prueba que una sea la causa de la otra. Todos los datos son ficticios, creados para el aula, salvo el estudio de las cigüeñas, que es real y se cita.

Reto

Realizar un estudio de relación entre dos variables con datos propios o dados: nube de puntos, correlación, recta de regresión, predicciones con límites y una crítica razonada de la causalidad.

Producto final

Estudio de relación entre variables.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- **1.1** Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.
- **2.1** Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.
- **3.1** Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada.
- **6.1** Proponer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.
- **7.1** Representar matemáticamente la información más relevante de un problema, conceptos, procedimientos y resultados, visualizando ideas y estructurando procesos.
- **8.1** Comunicar ideas, conclusiones, conjeturas y razonamientos matemáticos utilizando diferentes medios, con coherencia, claridad y terminología apropiada.

Saberes básicos prioritarios

E
Sentido estocástico

- Distribuciones bidimensionales: tabla de pares, tabla de doble entrada (frecuencias y porcentajes por filas) y nube de puntos.
- Relación entre dos variables cuantitativas: sentido (positiva o negativa) y fuerza de la correlación; coeficiente de correlación lineal r y coeficiente de determinación r^2.
- Recta de regresión de y sobre x: cálculo con tecnología, interpretación de pendiente y ordenada y cálculo a mano para pocos datos (punto medio, S_{xy} y S_{xx}).
- Interpolación y extrapolación: fiabilidad de una predicción y detección de resultados absurdos.
- Valores atípicos y relaciones no lineales: efecto sobre r y sobre la recta.
- Correlación no implica causalidad: variables ocultas, causa inversa y azar.

D
Sentido algebraico

- Ecuación de una recta $y = a + bx$ como modelo de datos y uso de la tecnología (hoja de cálculo, GeoGebra) para ajustarla.

F
Sentido socioafectivo

- Pensamiento crítico ante datos y titulares; humildad ante la incertidumbre.
- Trabajo en equipo con roles en el análisis de datos.

Objetivos didácticos

- ✓ Organizar datos bidimensionales.
- ✓ Representar nubes de puntos.
- ✓ Interpretar dirección e intensidad visual de la relación.
- ✓ Usar ajuste lineal tecnológico y distinguir correlación de causalidad.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Pregunta y variables

Evidencia: Ficha 1: variables de cuatro estudios, relación esperada, población y muestra de D1 y pregunta de investigación del equipo.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Tabla de pares

Evidencia: Ficha 2: medias y rangos de D1, tabla de doble entrada con porcentajes por filas y emparejamiento de los datos.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Nube de puntos

Evidencia: Ficha 3: nube de puntos de D1 a mano, descripción (forma, sentido, fuerza), punto medio y recta a ojo, y lectura de cuatro nubes.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Correlación visual y valores atípicos

Evidencia: Ficha 4: sentido y fuerza según r, efecto de un punto atípico y nube en U con r cercano a 0.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Ajuste lineal con tecnología

Evidencia: Ficha 5: recta de regresión a mano con cinco pares, ajuste de D1 y D2 con tecnología e interpretación de los parámetros.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Interpolación/extrapolación y límites

Evidencia: Ficha 6: predicciones con D1 y D2, distinción entre interpolación y extrapolación y fiabilidad según r^2.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Estudio final

Evidencia: Ficha 7: borrador del estudio del equipo con D3 (pantalla y sueño): nube, resultados, interpretación y límites.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

8

SESIÓN 8

Crítica de causalidad

Evidencia: Ficha 8: crítica individual de causalidad en tres casos, predicción con D3, límites de r con D4 y conclusiones redactadas.

Ficha: Anexo 3 · ficha 8

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Base de datos ficticia · hoja de cálculo/GeoGebra

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Datos con tendencia clara y pocos puntos.

Ampliación

Anexo 9

Comparar dos conjuntos con ajuste similar pero dispersión distinta.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Reformulación de cada pregunta como un par de variables con su unidad, población y muestra, y relación esperada antes de ver los datos.	Ficha 1 / lista de cotejo
2.1	Comprobación de los cálculos del ajuste por dos caminos (a mano con S_{xy} y S_{xx} y con tecnología) y detección de predicciones absurdas por extrapolación.	Fichas 5 y 6 / rúbrica
3.1	Conjeturas sobre el efecto de un valor atípico y de una nube curva en r y comprobación con los datos de F5 y F3 (D4).	Ficha 4 / escala de valoración
6.1	Formulación de preguntas reales que se estudian con dos variables y relación con situaciones del entorno (sueño, temperatura, pantallas, consumo energético).	Fichas 1 y 7 / rúbrica
7.1	Nube de puntos bien construida (ejes, escala, puntos) y tablas de pares y de doble entrada coherentes con los datos.	Fichas 2, 3 y 7 y estudio (Anexo 4) / rúbrica

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
8.1	Redacción de conclusiones prudentes con el lenguaje adecuado («se asocia», «tiende a») y justificación de por qué la correlación no prueba causalidad.	Ficha 8 y estudio (Anexo 4) / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Estudio, gráfica, ajuste y límites.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 8 · Estadística de dos variables

ALUMNADO

El consejo del alumnado lanza un titular: «Dormir una hora más sube la nota de Mates un punto». ¿Es verdad? ¿Lo han demostrado o solo lo han visto en doce alumnos? Otra noticia dice que donde hay más cigüeñas nacen más bebés. ¿Traen las cigüeñas a los bebés? Vais a convertiros en el equipo del observatorio de datos: pares de datos, nubes de puntos, rectas de regresión y una pregunta que no debéis olvidar nunca: ¿qué NO podemos concluir?

> *¿Cuándo una relación entre dos variables merece un modelo lineal y qué no podemos concluir de él?*

Vuestro reto

Realizar un estudio de relación entre dos variables con datos propios o dados: nube de puntos, correlación, recta de regresión, predicciones con límites y una crítica razonada de la causalidad.

Lo que vais a producir

Estudio de relación entre variables.

Hoja de ruta · 8 sesiones

1. Definimos las variables y la pregunta de investigación.
2. Ordenamos los pares de datos y los resumimos en tablas.
3. Dibujamos la nube de puntos y la describimos.
4. Interpretamos la correlación y los valores atípicos.
5. Ajustamos la recta de regresión con tecnología y a mano.
6. Predecimos y decidimos hasta dónde es fiable la predicción.
7. Redactamos el estudio del equipo.
8. Analizamos de forma crítica qué no se puede concluir.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Organizar datos bidimensionales.
- ✓ Representar nubes de puntos.
- ✓ Interpretar dirección e intensidad visual de la relación.
- ✓ Usar ajuste lineal tecnológico y distinguir correlación de causalidad.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 8 · Estadística de dos variables

ALUMNADO

Bases de datos ficticias (sueño y notas, temperatura y agua, pantalla y sueño, temperatura y consumo), gráficas de nubes de puntos, el efecto de un valor atípico, la extrapolación, un resumen de fórmulas con ejemplo resuelto, casos de causalidad espuria y un protocolo de tecnología.

F1 El observatorio de datos del instituto

ESTUDIO DE CASO

El consejo del alumnado quiere estudiar cuatro relaciones. En cada una hay dos variables cuantitativas medidas sobre los mismos individuos:

- **Estudio 1 (D1).** Horas de sueño por noche y nota de Matemáticas, en un cuestionario voluntario a 12 alumnos y alumnas de 4.º ESO.
- **Estudio 2 (D2).** Temperatura máxima del día y botellas de agua vendidas en la cantina, en 10 jornadas de junio.
- **Estudio 3 (D3).** Horas diarias de pantalla y horas de sueño, en 10 alumnos de 3.º ESO.
- **Estudio 4 (D4).** Temperatura exterior media del día y consumo de energía del instituto, en 8 días repartidos a lo largo del año.

Para decidir si una relación es útil hace falta mirarla, medirla y desconfiar de ella con método.

Fuente: Situación y datos ficticios creados para el aula.

¿Qué relación esperas en cada estudio: positiva, negativa o ninguna? Anota tu intuición antes de la ficha 1.

F2 D1. Horas de sueño y nota de Matemáticas

DATOS

Alumno/a	Horas de sueño por noche (h)	Nota de Matemáticas
A1	6,0	4,5
A2	6,5	5,8
A3	6,5	5,0
A4	7,0	6,2
A5	7,0	5,5
A6	7,5	7,0
A7	7,5	6,1
A8	8,0	7,4
A9	8,0	6,6
A10	8,5	7,9
A11	9,0	7,2
A12	9,0	8,4

Fuente: Datos ficticios creados para el aula.

Cada fila es un par (x, y) de la misma persona. Si ordenas una columna sin mover la otra, se destruye la información.

F3 D2, D3 y D4. Otras tres bases de datos

DATOS

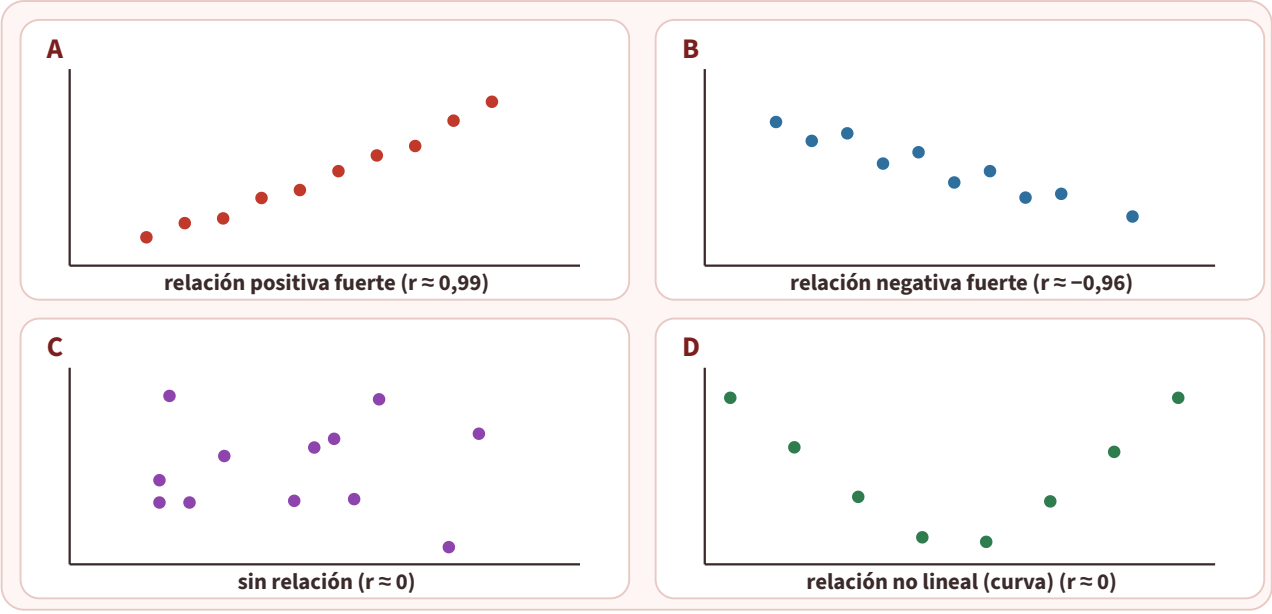
D2: temperatura máx. (°C)	D2: botellas vendidas	D3: pantalla (h/día)	D3: sueño (h)	D4: temp. exterior (°C)	D4: consumo (kWh/día)
14	38	1,0	8,8	0	520
16	47	1,5	8,3	5	410
18	50	2,0	8,5	10	300
20	63	2,5	7,7	15	210
22	68	3,0	8,0	20	200
24	80	3,5	7,2	25	290
26	90	4,0	7,5	30	400
28	96	4,5	6,8	35	520
30	112	5,0	6,9	—	—
32	124	6,0	6,3	—	—

Fuente: Datos ficticios creados para el aula.

Cada pareja de columnas es una base de datos distinta. D4 solo tiene 8 pares.

F4 Cuatro nubes de puntos

ESQUEMA

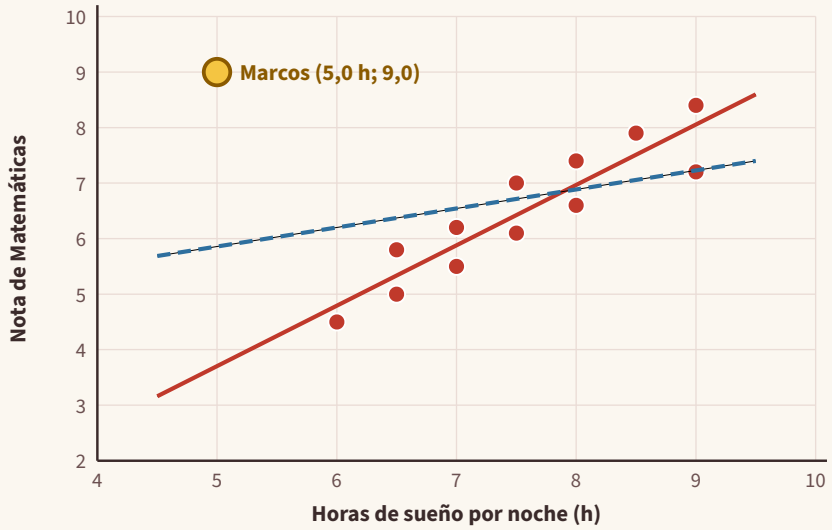


Fuente: Gráficas de elaboración propia con datos ficticios (A = D2, B = D3, D = D4).

El coeficiente r mide solo el parecido con una recta: la nube D tiene una relación clara y, sin embargo, r es casi 0.

F5 Un solo punto atípico cambia la recta

ESQUEMA



Sin Marcos (12 alumnos)
y = −1,73 + 1,09 x ; r = 0,92

Con Marcos (13)
y = 4,14 + 0,34 x ; r = 0,31

Un solo punto atípico baja r de 0,92 a 0,31 y cambia la recta.

Fuente: Gráfica de elaboración propia con los datos de D1 y un alumno añadido (ficticio).

Marcos duerme 5 horas y saca un 9. ¿Hay que borrarlo? Antes de decidir, hay que investigar si el dato está bien.

F6 Fórmulas clave y ejemplo resuelto a mano

TEXTO

Con n pares (x_i, y_i): medias $\bar{x}$ y $\bar{y}$; $S_{xx} = \sum(x_i - \bar{x})^2$; $S_{yy} = \sum(y_i - \bar{y})^2$; $S_{xy} = \sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$.

Recta de regresión de y sobre x: $y = a + bx$ con $b = \dfrac{S_{xy}}{S_{xx}}$ y $a = \bar{y} - b\,\bar{x}$. Siempre pasa por el **punto medio** $(\bar{x}, \bar{y})$.

Correlación: $r = \dfrac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}\,S_{yy}}}$, con $-1 \le r \le 1$. Signo = sentido; $|r|$ cerca de 1 = relación lineal fuerte; cerca de 0 = ninguna relación **lineal**. r^2 es la proporción de la variación de y que explica la recta.

Ejemplo. Horas de repaso la víspera (x) y nota (y) de 5 alumnos: $(1, 2), (2, 4), (3, 5), (4, 4), (5, 5)$.

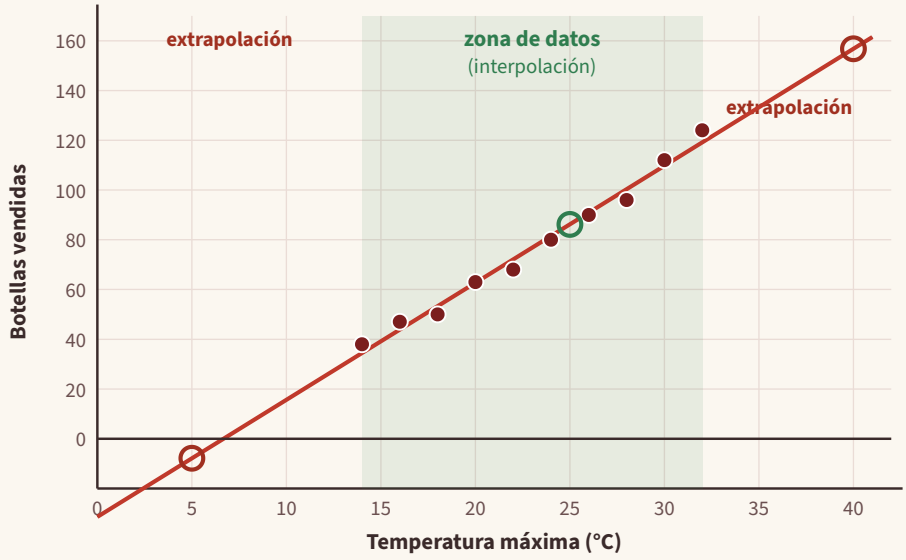
- $\bar{x} = 3$ y $\bar{y} = 4$. $S_{xx} = 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10$.
- $S_{xy} = (-2)(-2) + (-1)(0) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 6$; $S_{yy} = 4 + 0 + 1 + 0 + 1 = 6$.
- $b = \frac{6}{10} = 0{,}6$; $a = 4 - 0{,}6 \cdot 3 = 2{,}2$. Recta: $y = 2{,}2 + 0{,}6x$.
- $r = \frac{6}{\sqrt{10 \cdot 6}} \approx 0{,}77$ y $r^2 \approx 0{,}60$.

Fuente: Elaboración propia.

Lectura orientativa de $|r|$: menos de 0,3, débil; de 0,3 a 0,7, moderada; más de 0,7, fuerte. Es una guía, no una regla.

F7 Interpolar y extrapolar con D2

ESQUEMA



y = −31,37 + 4,70 x

r = 0,99

25 °C → 86 botellas

40 °C → 157 botellas

5 °C → −7,9 botellas

A 5 °C la recta da un valor negativo: absurdo.

Fuente: Gráfica de elaboración propia con los datos de D2 (ficticios).

Dentro de la zona de datos se interpola; fuera de ella se extrapola y la recta puede dar resultados absurdos.

F8 Correlación no es causalidad: tres casos

ESTUDIO DE CASO

- **Cigüeñas y bebés.** Matthews (2000) halló en 17 países europeos una correlación positiva entre el número de parejas de cigüeñas y el número de nacimientos. Los países grandes tienen más cigüeñas y también más nacimientos.
- **Helados y ahogamientos.** En las estadísticas de verano suben a la vez las ventas de helados y los accidentes en el agua (caso clásico de los manuales de estadística).
- **Sueño y notas (D1).** Duermen más quienes sacan mejor nota en la muestra de 12 alumnos. ¿Duermen más porque estudian mejor, estudian mejor porque duermen más, o hay un tercer factor, como tener horarios ordenados?

Una asociación entre dos variables puede deberse a: **causa directa**, **causa inversa**, una **variable oculta** que influye en ambas o el **azar**.

Fuente: Casos clásicos; el de las cigüeñas procede de R. Matthews, «Storks deliver babies (p = 0,008)», Teaching Statistics, 22 (2), 2000.

Para afirmar que x causa y hacen falta experimentos controlados, no solo una nube de puntos.

F9 Protocolo de tecnología para dos variables

PROTOCOLO

Hoja de cálculo (Calc, Excel, Hojas de cálculo de Google):

- Escribe x en la columna A y y en la columna B (una fila por par).
- Selecciona A y B y crea un **gráfico de dispersión**. Añade una **línea de tendencia lineal** y marca «mostrar ecuación» y «mostrar R^2».
- Funciones útiles: **PENDIENTE(B:B; A:A)**, **INTERSECCION.EJE(B:B; A:A)** y **COEF.DE.CORREL(A:A; B:B)**. (Los nombres pueden variar un poco entre programas.)

GeoGebra Clásico: abre la **Hoja de cálculo**, escribe los pares en dos columnas, selecciónalos y usa **Análisis de regresión de dos variables**. Elige el modelo lineal para ver la recta, r y R^2.

Registro: anota los resultados con 2 o 3 cifras decimales y la unidad de la pendiente («puntos por hora», «botellas por grado»).

Fuente: Elaboración propia.

La tecnología calcula, pero tú decides si el resultado tiene sentido.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 8 · Estadística de dos variables

ALUMNADO

FICHA 1 Pregunta y variables

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Lee F1 y F2. Antes de calcular nada, define bien qué se mide y sobre quién.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

Si al aumentar x tiende a aumentar y, la relación es…

☐ positiva ☐ negativa ☐ nula

La media de 4, 6 y 8 es…

☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

El número de botellas vendidas es una variable…

☐ cualitativa ☐ cuantitativa ☐ no es una variable

2 **Completa la tabla de los cuatro estudios de F1.**

Estudio	Variable x (unidad)	Variable y (unidad)	Relación que esperas y por qué
1: sueño y notas			
2: temperatura y agua			
3: pantalla y sueño			
4: temperatura y consumo			

3 **Los datos de D1 vienen de un cuestionario voluntario a 12 alumnos de 4.º ESO. ¿Cuál es la población? ¿Qué sesgos puede haber? ¿Se pueden generalizar los resultados a todo el instituto?**

4 **Escribe la pregunta de investigación de vuestro estudio, con las dos variables, sus unidades y cómo recogeríais los datos.**

FICHA 2 Tabla de pares y de doble entrada

Sesión 2

Usa F2 (D1). Trabaja con los pares de datos sin separarlos.

1 **Calcula la media, el mínimo, el máximo y el rango de cada variable de D1.**

Variable	Media	Mínimo	Máximo	Rango
Sueño (h)				
Nota				

2 **Cuenta los alumnos de D1 en cada casilla y completa los totales.**

Sueño \ Nota	Menos de 5	De 5 a 6,9	7 o más	Total
Menos de 7 h				
De 7 h a menos de 8 h				
8 h o más				
Total				

3 **Con la tabla anterior, calcula el porcentaje de alumnos con nota 7 o más entre los que duermen menos de 7 h y entre los que duermen 8 h o más. ¿Qué indican?**

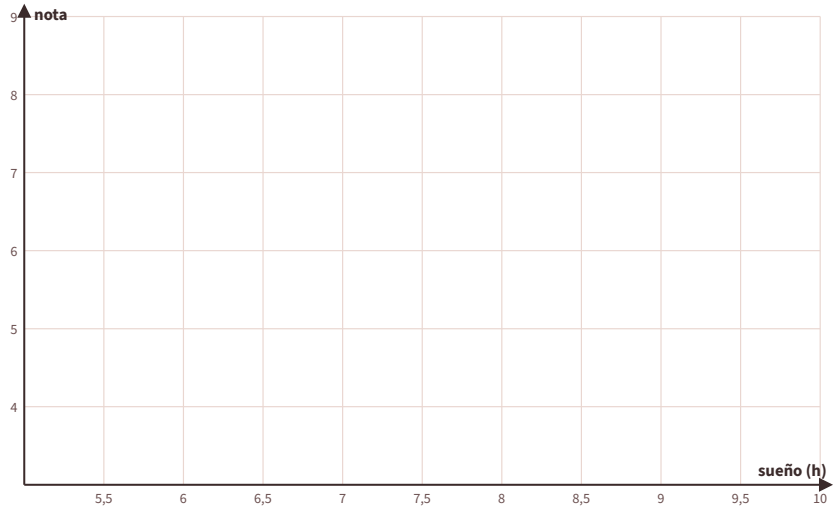
4 **Escribe los tres primeros pares de D1 y explica por qué se estropea el estudio si ordenas solo la columna de las horas de sueño de menor a mayor.**

FICHA 3 La nube de puntos

Sesión 3

Usa F2 y F4. Dibuja con regla y rotula los ejes.

1 **Dibuja la nube de puntos de D1 (horas en el eje horizontal, nota en el vertical).**



2 **Describe la nube: forma (recta, curva, sin forma), sentido (sube o baja) y fuerza (puntos pegados o dispersos).**

3 **Calcula el punto medio $(\bar{x}, \bar{y})$ de D1 y márcalo en la nube. Dibuja a ojo, con regla, una recta que pase por él y deje puntos por encima y por debajo. Escribe dos puntos de tu recta y su pendiente.**

4 **Relaciona cada nube de F4 con su descripción.**

1 Nube A	a Relación negativa fuerte
2 Nube B	b Relación en forma de curva (no lineal)
3 Nube C	c Relación positiva fuerte
4 Nube D	d Sin relación

FICHA 4 Correlación y valores atípicos

Sesión 4

Usa F4, F5 y F6. Recuerda que r solo mide relaciones lineales.

1 **Describe el sentido y la fuerza de cada correlación.**

r	Sentido	Fuerza (débil, moderada, fuerte)
0,92		
−0,35		
0,05		
−0,88		
0,60		

2 **En F5, al añadir a Marcos, r baja de 0,92 a 0,31 y la recta cambia mucho. Explica por qué un solo punto tiene tanto efecto y qué harías con ese dato antes de decidir si eliminarlo.**

3 **En D4 (nube D de F4) $r \approx 0$. ¿Significa que la temperatura no influye en el consumo? ¿Qué forma tiene la nube? Explícalo en cuatro líneas.**

4 **Marca verdadero o falso.**

	V	F
Si $r = 0{,}9$ la recta explica todo: no hay dispersión.	☐	☐
Un r negativo indica que al aumentar x tiende a disminuir y.	☐	☐
$r = -0{,}9$ es una correlación más débil que $r = 0{,}5$.	☐	☐
Una nube curva puede tener r cercano a 0 y una relación fuerte.	☐	☐
Un punto atípico puede cambiar mucho el valor de r.	☐	☐

FICHA 5 Ajuste lineal

Sesión 5

Usa F6 (ejemplo resuelto) y F9 (tecnología). Calcula a mano con pocos datos y con tecnología con muchos.

1 **A mano, con los pares $(1,2), (2,4), (3,5), (4,4), (5,5)$ (repite el ejemplo de F6 sin mirar la solución), completa la tabla y calcula b, a y r. Comprueba que la recta pasa por el punto medio.**

x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$
1	2				
2	4				
3	5				
4	4				
5	5				
Suma					

2 **Con tecnología (F9), ajusta D1 y completa. Escribe la recta con dos decimales.**

Dato	Valor
n	
$\bar{x}$ y $\bar{y}$	
Recta $y = a + bx$	
r	
r^2 (en %)	

3 **Interpreta la pendiente y la ordenada de la recta de D1 con sus unidades. ¿Tiene sentido la ordenada?**

4 **Ajusta D2 con la tecnología y escribe la recta y r. Interpreta la pendiente («botellas por grado»).**

FICHA 6 Predicción y límites

Sesión 6

Usa F7. Para cada predicción, decide primero si interpolas (dentro del rango de datos) o extrapolas.

1 **Con la recta de D1 ($y = -1{,}73 + 1{,}09x$, con la precisión de la tecnología), completa la tabla.**

Horas de sueño x	Nota predicha	¿Interpolación o extrapolación?	¿Tiene sentido?
7,25			
8,25			
10			
4			

2 **Con la recta de D2 ($y = -31{,}37 + 4{,}70x$) predice las botellas vendidas a 25 °C, 40 °C y 5 °C. Clasifica cada predicción y valora si es razonable.**

3 **D1 tiene $r^2 \approx 0{,}84$ y D2 tiene $r^2 \approx 0{,}99$. ¿Qué predicción es más fiable y por qué? Cita otro factor que influya (por ejemplo, el número de datos).**

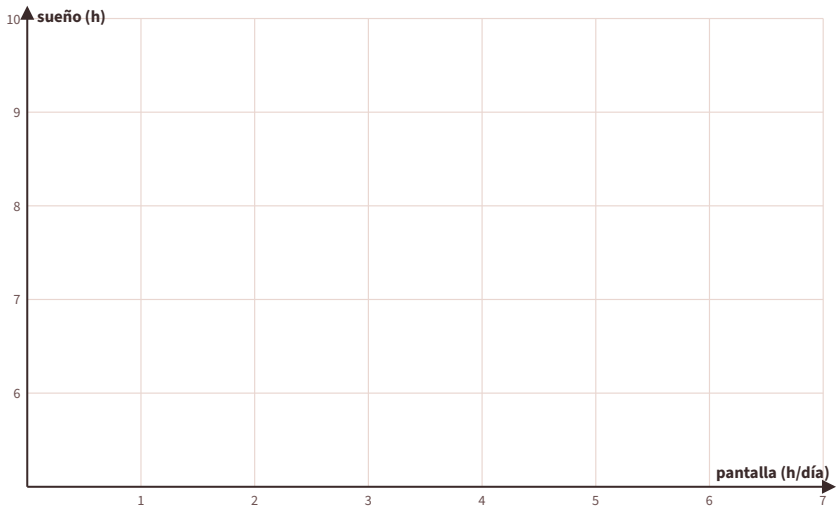
4 **Una compañera afirma: «Si duermo 7,25 horas sacaré exactamente un 6,15». Corrige la frase con un lenguaje adecuado.**

FICHA 7 Estudio del equipo (borrador)

Sesión 7

Estudiad D3 (pantalla y sueño, en F3), o los datos que hayáis recogido. Roles: analista de datos, dibujante, redactor y portavoz.

1 **Dibujad la nube de puntos de D3 (pantalla en el eje horizontal, sueño en el vertical).**



2 **Resultados con tecnología.**

Resultado	Valor y unidad	Interpretación
$\bar{x}$ y $\bar{y}$		
Recta $y = a + bx$		
r y r^2		
Predicción para 3,2 h de pantalla		

3 **Escribid los límites del estudio: tamaño de la muestra, rango de los datos, valores atípicos y qué no se puede concluir.**

4 **Revisión cruzada: otro equipo comprueba vuestro estudio.**

- ☐ Las variables y las unidades están bien definidas
- ☐ La nube tiene ejes rotulados y escala
- ☐ La recta y r se han obtenido con tecnología y se interpretan con unidades
- ☐ Las predicciones se clasifican como interpolación o extrapolación
- ☐ Se usa un lenguaje prudente sobre causalidad

FICHA 8 Crítica de causalidad (individual)

Sesión 8

Resuelve sin ayuda del equipo. Para D3 la recta de regresión es $y = 9{,}2 - 0{,}485x$ con $r \approx -0{,}96$ (x = horas de pantalla, y = horas de sueño).

1 **Analiza los tres casos de F8.**

Caso	¿Hay correlación?	Explicación más plausible (causa directa, causa inversa, variable oculta o azar) y por qué
Cigüeñas y bebés		
Helados y ahogamientos		
Sueño y notas (D1)		

2 **Con la recta de D3: interpreta la pendiente en minutos de sueño por hora de pantalla y predice el sueño para 2 h y para 10 h de pantalla. ¿Cuál de las dos predicciones es una extrapolación? ¿Es fiable?**

3 **Con D4 explica por qué un r cercano a 0 no prueba que no haya relación, y qué gráfica haría falta para verlo.**

4 **Redacta tres frases de conclusión para el consejo del alumnado sobre D3 y D1, usando expresiones como «se asocia» o «tiende a» y evitando «causa».**

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 8 · Estadística de dos variables

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Estudio de relación entre dos variables: de los datos a una conclusión prudente.

Título y equipo

Pregunta y variables

Variables, unidades, población y muestra.

Tabla de pares

Datos organizados (muestra de la tabla).

Nube de puntos

Ejes, escala y recta de regresión dibujada.

Resultados

Medias, recta, r y r^2 con tecnología.

Interpretación y predicción

Pendiente con unidades y una predicción.

Límites y causalidad

Qué no se puede concluir y por qué.

Conclusión y revisión

Frases prudentes y firma del equipo revisor.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 8 · Estadística de dos variables

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Estudio de relación entre variables**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] Las dos variables son cuantitativas y están definidas con sus unidades.
- [ ] Se indica la población, la muestra y su tamaño.
- [ ] La tabla de pares conserva el emparejamiento de los datos.
- [ ] La nube de puntos tiene ejes rotulados, escala adecuada y todos los puntos.
- [ ] Se describe la nube (forma, sentido y fuerza) antes de calcular.
- [ ] La recta de regresión y r se han obtenido con tecnología y están copiados con 2 o 3 decimales.
- [ ] La pendiente y la ordenada se interpretan con unidades; se valora si la ordenada tiene sentido.
- [ ] Las predicciones se clasifican como interpolación o extrapolación y se valora su fiabilidad.
- [ ] Se identifican valores atípicos y se razona qué hacer con ellos.
- [ ] Las conclusiones usan un lenguaje prudente y se discute la causalidad.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 8 · Estadística de dos variables

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Estudio de relación entre variables**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 8 · Estadística de dos variables

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé describir una nube de puntos y decir qué indica el signo y el valor de r.	○	○	○	○
Sé interpretar una recta de regresión, hacer una predicción y decir cuándo no me fío de ella.	○	○	○	○
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	○	○	○	○
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	○	○	○	○
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	○	○	○	○
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	○	○	○	○

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 8 · Estadística de dos variables

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Datos con tendencia clara y pocos puntos: construye la nube, traza una recta a ojo y predice con prudencia.

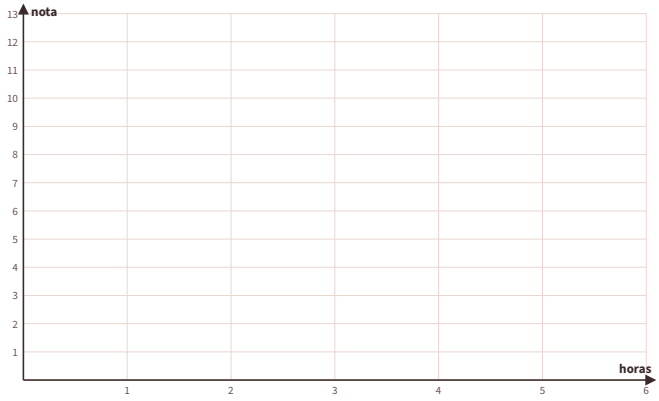
Ejemplo modelado

Datos: $(1,2), (2,3), (3,5), (4,6)$. **Nube:** los puntos suben y están cerca de una recta: relación positiva fuerte. **Recta a ojo:** pasa por $(1,2)$ y $(4,6)$ con pendiente $\frac{6-2}{4-1} \approx 1{,}33$. **Predicción** para $x = 3{,}5$: entre 3 y 4 caben valores entre 5 y 6, y la recta da $y = 2 + 1{,}33 \cdot 2{,}5 \approx 5{,}3$. Está dentro del rango de los datos: es una **interpolación**.

Símbolos y vocabulario

Nube de puntos: gráfica con un punto (x, y) por individuo. **Correlación positiva / negativa:** al subir x, y tiende a subir / bajar. **Recta de regresión:** recta que mejor resume la nube. **Interpolar:** predecir dentro del rango de datos. **Extrapolar:** predecir fuera de ese rango (más riesgo). r**:** número entre -1 y 1 que mide la relación lineal.

1 **Horas de estudio semanales (x) y nota (y) de 5 personas: $(1,3), (2,6), (3,7), (4,10), (5,12)$. Dibuja la nube.**



2 **Completa.**

a) La nube sube de izquierda a derecha: la relación es _____ (positiva / negativa).

b) Los puntos están pegados a una recta: la relación es _____ (fuerte / débil).

c) Recta a ojo por $(1,3)$ y $(5,12)$: pendiente $= \frac{12-3}{5-1}$ = _____ .

3 **Con la recta $y = 1 + 2{,}2x$ (ajustada con tecnología) predice la nota para 3,5 horas y para 10 horas. ¿Cuál es una extrapolación? ¿Te fías de las dos?**

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 8 · Estadística de dos variables

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Dos conjuntos con la misma recta y distinta dispersión

Dos grupos de ocho puntos tienen **exactamente la misma recta de regresión** $y = 2x + 1$, pero uno está muy pegado a la recta y el otro, muy disperso. Con $x = 1, 2, \ldots, 8$: el conjunto A tiene $y =$ $3{,}4;\ 4{,}6;\ 6{,}6;\ 9{,}4;\ 11{,}4;\ 12{,}6;\ 14{,}6;\ 17{,}4$ y el conjunto B, $y = 6;\ 2;\ 4;\ 12;\ 14;\ 10;\ 12;\ 20$.

Pasos

1. Dibuja las dos nubes con la misma escala y la recta $y = 2x + 1$ en cada una.
2. Con tecnología, calcula la recta, r y r^2 de cada conjunto y comprueba que la recta coincide.
3. Calcula para cada conjunto la diferencia entre el dato real y la recta para $x = 2$ y $x = 8$.
4. Predice y para $x = 10$ con ambos conjuntos y razona en cuál confiarías más, aunque la predicción numérica sea la misma.
5. Generaliza: ¿qué parte de la información de un estudio se pierde si solo se da la recta y no r?

1 Tabla de resultados.

Conjunto	Recta	r	r^2	Predicción para $x = 10$
A				
B				

Entrega

Una gráfica doble, la tabla de resultados y una explicación de por qué dos estudios con la misma recta pueden merecer distinta confianza.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 8 · Estadística de dos variables

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: positiva; 6; cuantitativa.
2. Estudio 1: x = sueño (h), y = nota (puntos); positiva (más sueño, mejor nota). Estudio 2: x = temperatura (°C), y = botellas; positiva. Estudio 3: x = pantalla (h/día), y = sueño (h); negativa. Estudio 4: x = temperatura (°C), y = consumo (kWh/día); respuesta esperable: «sube con frío y con calor», es decir, no lineal (se acepta «no sé» si lo justifican).
3. Población: alumnado de 4.º ESO del instituto. Sesgos: muestra voluntaria y pequeña (12), se apuntan quienes están más interesados, el sueño es declarado y no medido. No es adecuado generalizar a todo el instituto.
4. Respuesta abierta. Se valora una pregunta con dos variables cuantitativas, unidades y un modo de recogida realista (cuestionario anónimo, registro de la cantina…).

Ficha 2

1. Sueño: media $\frac{90{,}5}{12} \approx 7{,}54$ h; mínimo 6,0; máximo 9,0; rango 3,0. Nota: media $\frac{77{,}6}{12} \approx 6{,}47$; mínimo 4,5; máximo 8,4; rango 3,9.
2. Menos de 7 h: 1, 2, 0 (total 3). De 7 a menos de 8 h: 0, 3, 1 (total 4). 8 h o más: 0, 1, 4 (total 5). Totales de columna: 1, 6, 5 (total 12).
3. Menos de 7 h: $\frac{0}{3} = 0\,\%$ con nota 7 o más. 8 h o más: $\frac{4}{5} = 80\,\%$. Quien duerme más tiende a tener notas más altas (en esta muestra).
4. Los tres primeros pares: $(6{,}0;\, 4{,}5)$, $(6{,}5;\, 5{,}8)$ y $(6{,}5;\, 5{,}0)$. Si solo se ordena una columna, cada nota queda emparejada con unas horas de sueño de otra persona y la relación desaparece.

Ficha 3

1. Los 12 puntos de F2 en la cuadrícula:
$(6;\, 4{,}5)$, $(6{,}5;\, 5{,}8)$, $(6{,}5;\, 5)$, $(7;\, 6{,}2)$, $(7;\, 5{,}5)$, $(7{,}5;\, 7)$, $(7{,}5;\, 6{,}1)$, $(8;\, 7{,}4)$, $(8;\, 6{,}6)$, $(8{,}5;\, 7{,}9)$, $(9;\, 7{,}2)$, $(9;\, 8{,}4)$.
2. Forma aproximadamente lineal; sentido positivo (sube); fuerza alta: los puntos están bastante pegados a una recta imaginaria, con algo de dispersión.
3. Punto medio $(7{,}54;\ 6{,}47)$. Recta a ojo (varias válidas): por ejemplo, por $(6;\, 4{,}8)$ y $(9;\, 8{,}1)$, pendiente $\frac{8{,}1-4{,}8}{9-6} = 1{,}1$. Se acepta cualquier recta que pase cerca del punto medio con pendiente entre 0,9 y 1,3.
4. Nube A ↔ relación positiva fuerte (opción c); nube B ↔ relación negativa fuerte (opción a); nube C ↔ sin relación (opción d); nube D ↔ relación en forma de curva (opción b).

Ficha 4

1. 0,92: positivo, fuerte. −0,35: negativo, débil-moderada. 0,05: prácticamente nula. −0,88: negativo, fuerte. 0,60: positivo, moderada.
2. Marcos está muy alejado de la nube en la dirección de y y a un extremo de x, así que arrastra la recta (efecto de palanca). Antes de eliminarlo: comprobar si el dato es un error de anotación, preguntarle, analizar si es un caso real distinto (por ejemplo, tiene una dificultad particular) y, si se mantiene, informar de los resultados con y sin él.
3. No. La nube tiene forma de U: el consumo baja desde 0 °C hasta unos 15-20 °C y vuelve a subir con el calor (calefacción y aire acondicionado). La relación existe pero no es lineal; r solo mide relación lineal.
4. F (aunque r sea alto sigue habiendo dispersión); V; F ($|-0{,}9| > |0{,}5|$); V; V.

Ficha 5

1. Columnas: $x-\bar{x}$: $-2,-1,0,1,2$; $y-\bar{y}$: $-2,0,1,0,1$; producto: $4,0,0,0,2$ (suma 6); $(x-\bar{x})^2$: $4,1,0,1,4$ (suma 10). $b=\frac{6}{10}=0{,}6$; $a=4-0{,}6\cdot 3=2{,}2$; $y=2{,}2+0{,}6x$. $r=\frac{6}{\sqrt{10\cdot 6}}\approx 0{,}77$. Punto medio: $2{,}2+0{,}6\cdot 3=4$ ✔.
2. $n=12$; $\bar{x}\approx 7{,}54$ h; $\bar{y}\approx 6{,}47$; recta $y=-1{,}73+1{,}09x$; $r\approx 0{,}92$; $r^2\approx 0{,}84$ (84 %).
3. Pendiente 1,09: por cada hora más de sueño, la nota media predicha sube unos 1,09 puntos. Ordenada $-1{,}73$: nota predicha para 0 horas de sueño; no tiene sentido (fuera del rango de datos y negativa).
4. D2: $y\approx -31{,}37+4{,}70x$, $r\approx 0{,}99$. Por cada grado más de temperatura máxima se venden unas 4,7 botellas más.

Ficha 6

1. 7,25 h → 6,15 (interpolación, tiene sentido); 8,25 h → 7,24 (interpolación, tiene sentido); 10 h → 9,14 (extrapolación: se sale del rango 6-9 h y la nota máxima es 10; dudosa); 4 h → 2,62 (extrapolación, poco fiable).
2. 25 °C → 86 botellas (interpolación, razonable). 40 °C → 157 botellas (extrapolación: puede que no haya existencias o que el crecimiento no sea lineal). 5 °C → −7,9 botellas: absurdo, no hay ventas negativas; la recta no vale fuera del rango.
3. La de D2: su r^2 de 0,99 indica que la recta explica el 99 % de la variación, frente al 84 % de D1. También influye el número de datos (con pocos datos la recta es más inestable) y que la predicción sea una interpolación y no una extrapolación.
4. «Con 7,25 h de sueño, la nota esperada es de unos 6,2, con cierta dispersión (otros con las mismas horas sacan algo más o menos). No es seguro ni exacto».

Ficha 7

1. Nube de D3: los puntos bajan de izquierda a derecha:
   $(1;8{,}8),(1{,}5;8{,}3),(2;8{,}5),(2{,}5;7{,}7),(3;8),(3{,}5;7{,}2),(4;7{,}5),(4{,}5;6{,}8),(5;6{,}9),(6;6{,}3)$.
2. $\bar{x}=3{,}3$ h y $\bar{y}=7{,}6$ h; recta $y=9{,}2-0{,}485x$; $r\approx -0{,}96$ y $r^2\approx 0{,}92$. Pendiente: por cada hora más de pantalla, unos 0,485 h (29 min) menos de sueño. Predicción para 3,2 h: $9{,}2-0{,}485\cdot 3{,}2\approx 7{,}65$ h (interpolación).
3. Límites esperables: solo 10 alumnos de 3.º; rango de pantalla de 1 a 6 h; datos declarados; no se puede decir que la pantalla cause la falta de sueño (puede haber variables ocultas: horario familiar, estrés).
4. Revisión cruzada: se valora que el equipo revisor repita al menos la recta con la tecnología y verifique que las predicciones están dentro del rango.

Ficha 8

1. Cigüeñas: correlación positiva; variable oculta (tamaño del país o superficie rural). Helados: positiva; variable oculta (el calor del verano aumenta ambas). Sueño y notas: positiva fuerte en la muestra; puede haber causa directa parcial, pero también variable oculta (hábitos ordenados, motivación) y causa inversa (quienes van bien duermen más tranquilos); con 12 alumnos no se puede afirmar causalidad.
2. Pendiente $-0{,}485$ h $=-29$ min por cada hora de pantalla. $x=2$: $9{,}2-0{,}97=8{,}23$ h (interpolación, fiable). $x=10$: $9{,}2-4{,}85=4{,}35$ h (extrapolación: está fuera del rango 1-6 h; no es fiable).
3. D4 tiene forma de U (consumo mínimo hacia 20 °C); $r\approx -0{,}02$ porque la recta no describe la curva. Hace falta mirar la nube de puntos antes de interpretar r.
4. Ejemplos esperables: «En esta muestra, más horas de pantalla se asocian con menos horas de sueño ($r\approx -0{,}96$)»; «Quienes duermen más tienden a sacar mejores notas, pero con 12 alumnos no sabemos si es causa»; «Hacen falta más datos y otras variables para concluir».

Refuerzo

1. Nube con los puntos $(1, 3), (2, 6), (3, 7), (4, 10), (5, 12)$.
2. a) positiva; b) fuerte; c) $\frac{9}{4} = 2{,}25$.
3. 3,5 h: $1 + 2{,}2 \cdot 3{,}5 = 8{,}7$ (interpolación, razonable). 10 h: $1 + 22 = 23$ (extrapolación, imposible si la nota máxima es 10).

Ampliación

1. Conjunto A: recta $y = 2x + 1$; $r \approx 0{,}996$; $r^2 \approx 0{,}992$. Conjunto B: recta $y = 2x + 1$; $r \approx 0{,}837$; $r^2 = 0{,}70$. Predicción para $x = 10$: 21 en ambos.
2. Diferencias con la recta: en A, $x = 2$: $4{,}6 - 5 = -0{,}4$; $x = 8$: $17{,}4 - 17 = 0{,}4$. En B, $x = 2$: $2 - 5 = -3$; $x = 8$: $20 - 17 = 3$.
3. Se confía más en A: sus datos están a menos de 0,4 de la recta y $r^2 = 0{,}99$. En B la recta explica solo el 70 % y los datos reales se desvían hasta 3 unidades.
4. Generalización: la recta solo da la tendencia media; r (o r^2) mide cuánto se concentran los datos alrededor de ella y, por tanto, la fiabilidad de la predicción.

Errores frecuentes

- Ordenar una columna de la tabla sin mover la otra y perder el emparejamiento de los datos.
- Interpretar r como causalidad («como $r = 0{,}9$, dormir causa mejores notas»).
- Pensar que $r \approx 0$ significa que no hay ninguna relación (puede ser no lineal).
- Extrapolar sin comentar el límite (resultados negativos o imposibles) o interpretar la ordenada sin comprobar que $x = 0$ tiene sentido.
- Eliminar un valor atípico sin investigarlo, o no comentar que cambia la recta.
- Olvidar las unidades en la pendiente (por ejemplo, «puntos por hora»).

Criterios para valorar respuestas abiertas

- En las conclusiones se valora más el lenguaje prudente («se asocia», «tiende a», «en esta muestra») que el valor exacto de r.
- Los resultados de tecnología pueden diferir en el tercer decimal según el programa; se aceptan redondeos razonables.
- En las explicaciones de causalidad se acepta cualquier hipótesis razonable (variable oculta, causa inversa o azar) si está justificada.
- Los estudios propios del equipo no tienen por qué dar correlaciones fuertes: un resultado débil bien interpretado es una buena conclusión.

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

09 Probabilidad de experimentos compuestos

PREGUNTA GUÍA

¿Cómo contamos todos los casos posibles sin olvidar ni repetir ninguno?

CURSO	4.º ESO · Matemáticas B
SESIONES	8 sesiones · 3.º trimestre
SENTIDOS PRIORITARIOS	E · Sentido estocástico
COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CE1, CE2, CE3, CE4, CE7
PRODUCTO FINAL	Dossier de estrategias de recuento
CRITERIOS DE EVALUACIÓN	1.1, 1.2, 2.1, 3.1, 4.1, 7.1

Contexto, reto y sentido

El consejo del alumnado organiza una **tómbola solidaria** en la semana cultural del instituto (situación ficticia). Cada jugada cuesta 1 € y el beneficio va a una ONG. Hay cuatro juegos de azar: dos dados, dos urnas, una bolsa de bolas y tres monedas. Antes de abrir la tómbola, la dirección pide un **dossier** que diga, para cada juego, cuántos resultados posibles hay, qué probabilidad tiene el jugador de ganar y qué premio puede darse sin que el consejo pierda dinero.

El corazón de la situación es el **recuento**: contar todos los casos sin olvidar ni repetir ninguno. Se compararán varias estrategias (lista sistemática, principio multiplicativo, tabla de doble entrada y diagrama de árbol), se aplicará la regla de Laplace cuando los casos sean equiprobables, se distinguirá entre sacar con o sin devolución y se comprobarán los cálculos con **simulaciones**. Todos los juegos, premios y datos son ficticios, creados para el aula.

Reto

Elaborar el dossier de estrategias de recuento de una tómbola de cuatro juegos: calcular las probabilidades con la estrategia adecuada, comprobarlas con simulaciones y fijar premios razonables.

Producto final

Dossier de estrategias de recuento.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE4** Utilizar el pensamiento computacional: descomponer, reconocer patrones, generalizar y crear algoritmos.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- **1.1** Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.
- **1.2** Analizar y seleccionar diferentes herramientas y estrategias elaboradas en la resolución de un mismo problema, valorando su eficiencia.
- **2.1** Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.
- **3.1** Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada.
- **4.1** Generalizar patrones y proporcionar una representación computacional de situaciones problematizadas.
- **7.1** Representar matemáticamente la información más relevante de un problema, conceptos, procedimientos y resultados, visualizando ideas y estructurando procesos.

Saberes básicos prioritarios

E
Sentido estocástico

- Experimentos aleatorios compuestos de dos o tres etapas: espacio muestral y recuento sistemático (listas, principio multiplicativo).
- Tablas de doble entrada y diagramas de árbol como técnicas de recuento y de cálculo de probabilidades.
- Regla de Laplace para sucesos equiprobables; equiprobabilidad y su comprobación en cada experimento.
- Probabilidad de un suceso compuesto con árboles: producto a lo largo de las ramas y suma entre ramas; suceso contrario.
- Experimentos con y sin devolución: independencia y dependencia entre etapas.
- Frecuencia relativa y simulación; ley de los grandes números.

A
Sentido numérico

- Operaciones con fracciones y decimales para productos y sumas de probabilidades; comprobación de que la suma de probabilidades es 1.

F
Sentido socioafectivo

- Toma de decisiones con incertidumbre y rechazo de ideas erróneas sobre el azar.
- Trabajo en equipo con roles y revisión de las estrategias de otros.

Objetivos didácticos

- ✓ Construir espacios muestrales sistemáticos.
- ✓ Aplicar Laplace cuando procede.
- ✓ Usar árboles y tablas en experimentos compuestos.
- ✓ Comparar cálculo y simulación.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Recuento sistemático

Evidencia: Ficha 1: lista sistemática de las ocho posibilidades de tres monedas, principio multiplicativo y el error de los 21 resultados de dos dados.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Árboles de dos/tres etapas

Evidencia: Ficha 2: árbol de dos urnas, árbol incompleto de la bolsa sin devolución y árbol de tres monedas con suceso contrario.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Tablas de doble entrada

Evidencia: Ficha 3: tabla de doble entrada de ruleta y dado, probabilidades de sumas con la tabla de dos dados y elección de apuesta.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Laplace y equiprobabilidad

Evidencia: Ficha 4: equiprobabilidad (V/F), Laplace en una ruleta de ocho sectores y beneficio medio del premio del juego 1.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Con/sin reemplazamiento en casos sencillos

Evidencia: Ficha 5: comparación de la bolsa con y sin devolución, suma de dos fichas y clasificación de experimentos independientes o dependientes.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Simulación

Evidencia: Ficha 6: simulación con la tabla de dígitos aleatorios, algoritmo de simulación del juego 2 y lectura de frecuencias relativas.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Dossier de estrategias

Evidencia: Ficha 7: borrador del dossier con tabla resumen de los cuatro juegos, doble resolución del juego 2 y revisión cruzada.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

8

SESIÓN 8

Reto individual

Evidencia: Ficha 8: reto individual con dados y bolsa sin devolución, algoritmo de simulación y análisis de un razonamiento erróneo.

Ficha: Anexo 3 · ficha 8

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Dados/cartas/urnas ficticias · simulador · calculadora

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Dos etapas y espacios pequeños.

Ampliación

Anexo 9

Crear un problema cuyo árbol tenga ramas con probabilidades distintas y resolverlo.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1

Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2

Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3

Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Reformulación de cada juego con su experimento, sus etapas, el suceso «ganar» y los casos posibles, y representación inicial con listas o esquemas.	Ficha 1 / lista de cotejo
1.2	Elección razonada de la estrategia de recuento (lista, tabla, árbol o Laplace) en cada juego y comparación de dos estrategias para el mismo problema.	Fichas 3, 5 y 7 / escala de valoración
2.1	Comprobación de las probabilidades (suma 1, suceso contrario, comparación con simulaciones) y detección de errores como contar 21 resultados de dos dados.	Fichas 1, 6 y 8 / rúbrica
3.1	Conjeturas sobre la equiprobabilidad, sobre el efecto de devolver o no la bola y sobre el premio justo, comprobadas con cálculo y simulación.	Fichas 4, 5 y 6 / rúbrica
4.1	Algoritmo de simulación escrito por pasos y ejecutado con tecnología, y generalización del recuento a otras situaciones.	Fichas 6 y 8 / rúbrica

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
7.1	Árboles, tablas de doble entrada y listas bien construidos, con ramas y casillas rotuladas y coherentes con los cálculos.	Fichas 2, 3 y 7 y dossier (Anexo 4) / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Dossier, árboles, cálculos y simulación.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 9 · Probabilidad de experimentos compuestos

ALUMNADO

La tómbola solidaria abre el viernes y el consejo ya tiene cuatro juegos: dos dados, dos urnas, una bolsa con bolas rojas y blancas y tres monedas. Un compañero asegura que con dos dados «solo hay 21 resultados», otra dice que da igual devolver la bola o no, y alguien jura que el siete «sale siempre». Si el premio es demasiado alto, la tómbola pierde dinero; si es demasiado bajo, nadie juega. Vais a ser el equipo que cuenta todos los casos sin olvidar ninguno y decide con probabilidades.

¿Cómo contamos todos los casos posibles sin olvidar ni repetir ninguno?

Vuestro reto

Elaborar el dossier de estrategias de recuento de una tómbola de cuatro juegos: calcular las probabilidades con la estrategia adecuada, comprobarlas con simulaciones y fijar premios razonables.

Lo que vais a producir

Dossier de estrategias de recuento.

Hoja de ruta · 8 sesiones

1. Contamos de forma sistemática todos los resultados posibles de cada juego.
2. Representamos experimentos de dos y tres etapas con diagramas de árbol.
3. Usamos tablas de doble entrada para contar casos equiprobables.
4. Aplicamos la regla de Laplace y comprobamos la equiprobabilidad.
5. Comparamos extraer con y sin devolución.
6. Simulamos los juegos y comparamos frecuencias con probabilidades.
7. Montamos el dossier de estrategias de recuento.
8. Resolvemos el reto individual y analizamos errores de razonamiento.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Construir espacios muestrales sistemáticos.
- ✓ Aplicar Laplace cuando procede.
- ✓ Usar árboles y tablas en experimentos compuestos.
- ✓ Comparar cálculo y simulación.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 9 · Probabilidad de experimentos compuestos

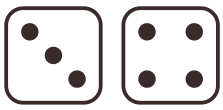
ALUMNADO

Cuatro juegos de la tómbola con sus reglas, la tabla de la suma de dos dados, un árbol completo y otro incompleto, un resumen de estrategias con ejemplo resuelto, una tabla de dígitos aleatorios, un protocolo de simulación con algoritmo y resultados de simulaciones. Todo es ficticio.

F1 La tómbola solidaria: cuatro juegos

ESQUEMA

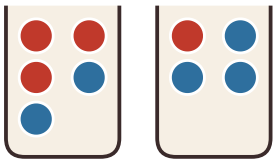
J1 · Doble dado



Gana si la suma
es 7

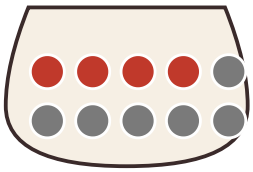
Se lanzan los dos dados

J2 · Dos urnas



Una bola de cada urna:
gana si las dos son rojas

J3 · La bolsa



4 rojas y 6 blancas

Se sacan 2 bolas
(con o sin devolver)

J4 · Tres monedas



Tres lanzamientos
Gana con
exactamente 2 caras

Fuente: Esquema de elaboración propia (situación ficticia).

R = bola roja, Az = azul, C = cara y X = cruz. Todos los dados, monedas y bolas son perfectamente equilibrados.

F2 Tarjetas de los juegos

DATOS

Juego	Qué se hace	El jugador gana si…	Precio	Premio propuesto
J1	Lanzar dos dados de 6 caras.	la suma de los dos dados es 7.	1 €	5 €
J2	Sacar una bola de cada urna. Urna A: 3 rojas y 2 azules. Urna B: 1 roja y 3 azules.	las dos bolas son rojas.	1 €	5 €
J3	Sacar 2 bolas seguidas de una bolsa con 4 rojas y 6 blancas, **sin devolver** la primera.	las dos bolas son rojas.	1 €	6 €
J4	Lanzar tres monedas.	salen exactamente 2 caras.	1 €	2 €

Fuente: Datos ficticios creados para el aula.

El consejo quiere saber en cuál de estos juegos y con qué premios se gana dinero a largo plazo.

F3 Suma de los dos dados: tabla de doble entrada

DATOS

1.º \ 2.º	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

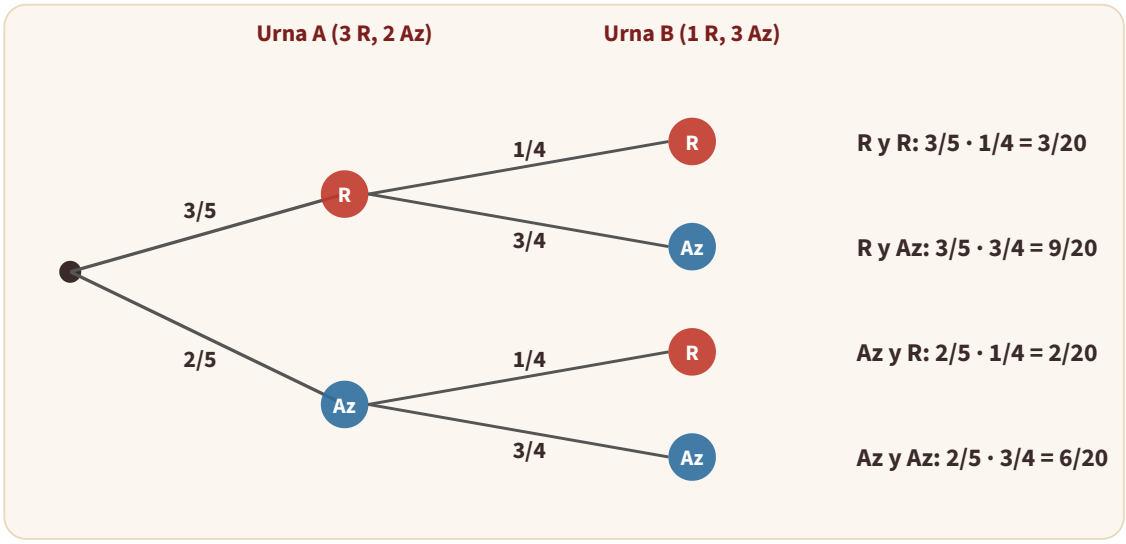
Cada casilla es un resultado distinto (36 en total) y todos son equiprobables: $(1, 2)$ y $(2, 1)$ son resultados diferentes.

Fuente: Elaboración propia.

Cuenta cuántas casillas tienen suma 7. ¿Hay alguna suma que salga más veces?

F4 Árbol del juego 2 (dos urnas)

ESQUEMA

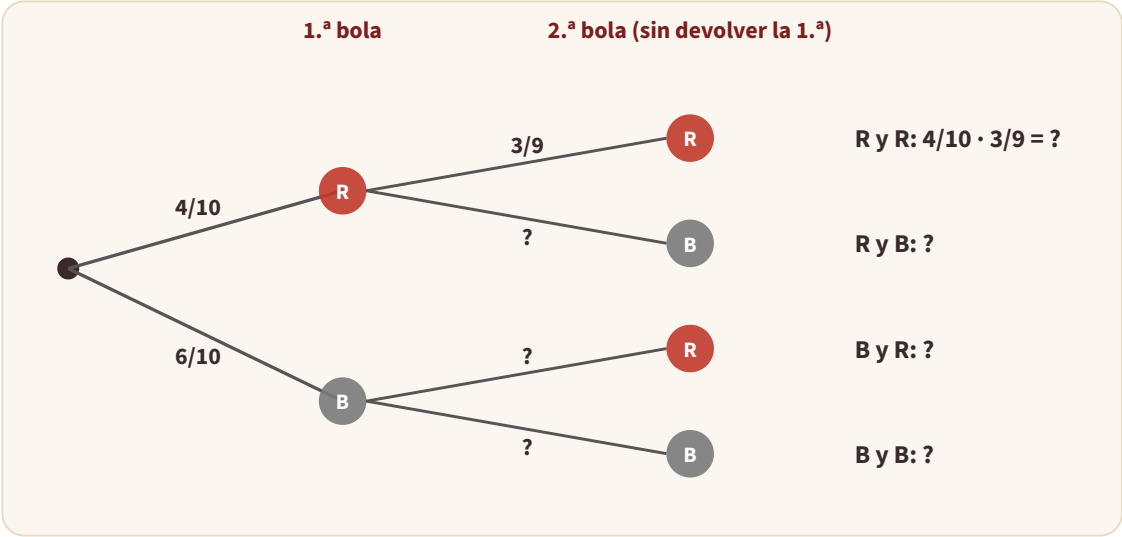


Fuente: Esquema de elaboración propia.

Las dos urnas son independientes: se multiplica a lo largo de cada rama. Las cuatro ramas suman $\frac{3}{20} + \frac{9}{20} + \frac{2}{20} + \frac{6}{20} = 1$.

F5 Árbol incompleto del juego 3 (bolsa sin devolución)

ESQUEMA



Fuente: Esquema de elaboración propia.

Al sacar la primera bola y no devolverla, quedan 9 bolas. Completa los «?» (las probabilidades de la segunda bola dependen de la primera).

F6 Estrategias de recuento y probabilidad

TEXTO

- **Lista sistemática.** Se escriben todos los resultados siguiendo un orden fijo (por ejemplo, de la primera etapa a la última). Evita olvidar y repetir.
- **Principio multiplicativo.** Si una etapa tiene m casos y la siguiente n, hay $m \cdot n$ resultados.
- **Tabla de doble entrada.** Para dos etapas: filas = casos de la primera; columnas = casos de la segunda. Cada casilla es un resultado.
- **Diagrama de árbol.** Para dos o más etapas con probabilidades iguales o distintas. Se **multiplica** a lo largo de la rama y se **suma** entre las ramas que dan el suceso.
- **Regla de Laplace** (solo con casos equiprobables): $P(A) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$.
- **Suceso contrario:** $P(A) = 1 - P(\text{no } A)$. Útil con «al menos uno».
- **Con devolución** las etapas son independientes; **sin devolución** cambia la composición y la segunda etapa depende de la primera.

Ejemplo (J2). Probabilidad de que las dos bolas tengan **colores distintos**: ramas «R y Az» y «Az y R» del árbol de F4: $\frac{9}{20} + \frac{2}{20} = \frac{11}{20} = 0{,}55$. Comprobación: $1 - \left(\frac{3}{20} + \frac{6}{20}\right) = \frac{11}{20}$ ✔.

Fuente: Elaboración propia.

Una probabilidad teórica es un valor ideal; en una simulación solo se obtienen frecuencias relativas que se parecen más a ella cuantas más repeticiones haya.

F7 Tabla de dígitos aleatorios (200 dígitos)

DATOS

Fila	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	6	5	8	0	7	7	6	6	2
2	9	4	1	9	6	0	8	3	7	8
3	6	5	3	8	8	8	6	2	3	6
4	4	1	3	7	7	8	8	9	4	5
5	1	9	9	4	7	5	2	3	5	7
6	8	3	3	1	4	5	0	2	2	3
7	3	3	3	0	8	9	1	0	2	1
8	1	0	0	8	7	7	9	7	6	0
9	0	9	7	5	4	3	6	6	6	0
10	6	5	3	4	5	6	4	4	8	6
11	0	1	7	5	6	7	5	5	1	9
12	4	7	5	7	6	7	5	7	2	0
13	1	0	4	0	4	7	9	7	2	8
14	3	9	2	6	7	8	6	5	5	5
15	0	5	0	8	7	1	1	1	5	9
16	3	6	8	4	4	0	4	6	4	2
17	3	4	9	5	3	7	8	9	1	9
18	3	6	9	1	4	2	1	6	1	9
19	8	9	3	1	4	2	4	3	5	6
20	7	0	4	9	2	6	0	0	4	2

Fuente: Generada por ordenador para el aula.

Cada dígito de 0 a 9 es un resultado equiprobable. Los 200 dígitos forman 100 pares consecutivos (leyendo cada fila de dos en dos).

F8 Cómo simular un experimento y escribir su algoritmo

PROTOCOLO

Pasos de una simulación

- **1.** Decide cómo representar el azar: dígitos (0-3 = rojas, 4-9 = blancas), números del 1 al 10 o monedas.
- **2.** Escribe el **algoritmo** de una repetición del experimento.
- **3.** Repítelo muchas veces y cuenta cuántas veces ocurre el suceso.
- **4.** Calcula la frecuencia relativa $= \dfrac{\text{veces que ocurre}}{\text{repeticiones}}$ y compárala con la probabilidad teórica.

Ejemplo de algoritmo (J3 con devolución, 4 rojas y 6 blancas)

- **a)** contador ← 0
- **b)** Repetir 1 000 veces: sacar bola1 ← número al azar entre 1 y 10; sacar bola2 ← número al azar entre 1 y 10.
- **c)** Si bola1 ≤ 4 **y** bola2 ≤ 4, entonces contador ← contador + 1.
- **d)** frecuencia ← contador / 1 000.

En hoja de cálculo: en A y B escribe **=ALEATORIO.ENTRE(1;10)**, en C **=SI(Y(A2<=4;B2<=4);1;0)** y copia 1 000 filas; la frecuencia es **=PROMEDIO(C2:C1001)**. En GeoGebra: **AleatorioEntre(1,10)**.

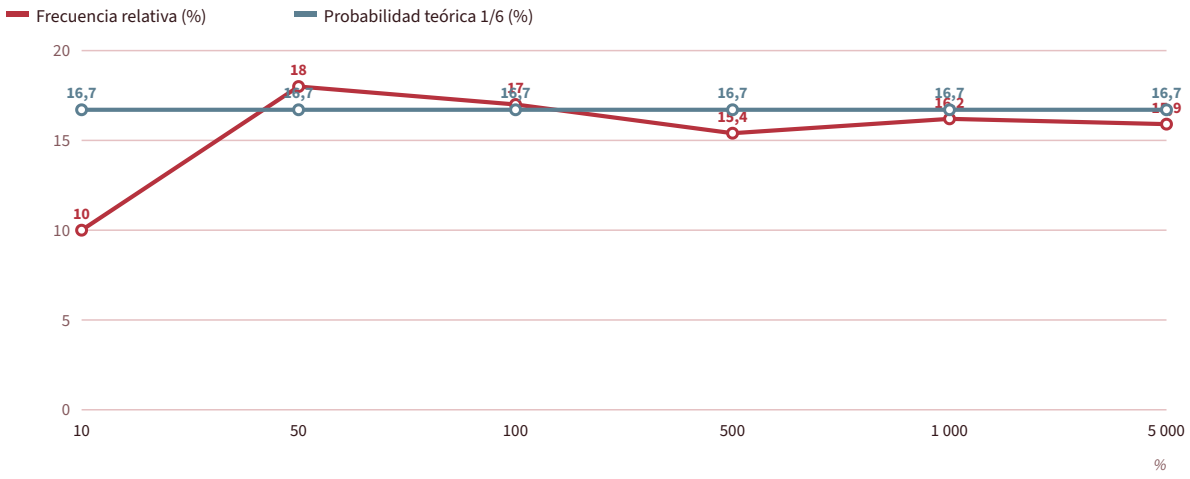
Sin devolución el segundo número no puede repetir la bola ya sacada: hay que numerar las bolas y elegir la segunda entre las 9 restantes.

Fuente: Elaboración propia.

Cada vez que recalculas la hoja, los números cambian: guarda una captura de tus resultados.

F9 Simulación de J1: lanzar dos dados y anotar «suma 7»

GRÁFICO



Fuente: Simulaciones de elaboración propia con ordenador (datos ficticios).

Las categorías del eje horizontal no están a escala. ¿Qué pasa con la frecuencia relativa cuando aumenta el número de lanzamientos?

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 9 · Probabilidad de experimentos compuestos

ALUMNADO

FICHA 1 Recuento sistemático

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Lee F1 y F2. Antes de calcular probabilidades hay que contar bien todos los casos.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

Con 3 camisetas y 2 pantalones, ¿cuántos conjuntos distintos se pueden formar?

☐ 5 ☐ 6 ☐ 8

Al lanzar un dado justo, la probabilidad de sacar un 5 es…

☐ $\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{1}{5}$ ☐ $\frac{5}{6}$

Al lanzar dos monedas distinguiendo el orden, ¿cuántos resultados distintos hay?

☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

2 **Juego 4: escribe en una lista ordenada todos los resultados de lanzar tres monedas (C = cara, X = cruz). ¿Cuántos hay? ¿Cuántos tienen exactamente dos caras?**

3 **Aplica el principio multiplicativo.**

Experimento	Etapas y casos de cada una	Número de resultados
Un dado y una moneda		
Una ruleta de 4 colores y un dado		
Dos bolas de una bolsa de 10 con devolución		
Dos bolas de una bolsa de 10 sin devolución		

4 **Un compañero dice: «Con dos dados solo hay 21 resultados, porque $(1, 2)$ y $(2, 1)$ son lo mismo. La suma 7 sale con $(1, 6)$, $(2, 5)$ y $(3, 4)$, así que $P = \frac{3}{21}$». ¿Qué error comete? Calcula la probabilidad correcta con F3.**

FICHA 2 Árboles de probabilidad

Sesión 2

Usa F4 y F5. Multiplica a lo largo de la rama y suma entre ramas.

1 **Con el árbol de F4 (J2), calcula y comprueba que la suma es 1.**

Suceso	Ramas favorables	Cálculo	Probabilidad
Dos rojas			
Dos azules			
Colores distintos			
Suma de los tres sucesos			

2 **Completa el árbol de F5 (J3, bolsa de 4 rojas y 6 blancas sin devolver) y escribe cada resultado y su probabilidad. Calcula P(exactamente una roja).**

Resultado	Cálculo	Probabilidad
R y R		
R y B		
B y R		
B y B		
Una roja (R y B o B y R)		

3 Dibuja el árbol del juego 4 (tres monedas) con las probabilidades en cada rama y calcula P(exactamente 2 caras) y P(al menos una cara) con el suceso contrario.

4 Explica por qué se multiplican las probabilidades a lo largo de una rama y se suman las de las ramas distintas.

FICHA 3 Tablas de doble entrada

Sesión 3

Usa F3. Una casilla = un resultado.

1 Una ruleta tiene 4 sectores iguales (rojo, azul, verde, amarillo) y se lanza también un dado. Gana quien saca rojo y número par. Completa la tabla escribiendo G en las casillas ganadoras. ¿Cuántas casillas hay y cuál es la probabilidad de ganar?

Ruleta \ Dado	1	2	3	4	5	6
Rojo						
Azul						
Verde						
Amarillo						

2 **Con la tabla de F3 completa.**

Suceso (dos dados)	Casos favorables	Probabilidad
Suma 7		
Suma 10 o más		
Suma par		
Suma 2 o 12		
Los dos dados iguales		

3 **Si tuvieras que apostar a una suma, ¿cuál elegirías y cuál evitarías? Justifícalo con la tabla.**

FICHA 4 Laplace y equiprobabilidad

Sesión 4

La regla de Laplace solo vale si todos los resultados son equiprobables. Comprueba siempre esa condición.

1 **Marca verdadero o falso.**

	V	F
En un dado justo, las seis caras son equiprobables.	☐	☐
En la suma de dos dados, los 11 valores posibles (2 a 12) son equiprobables.	☐	☐
En una urna con 3 bolas rojas y 2 azules, «sacar roja» y «sacar azul» son equiprobables.	☐	☐
En una ruleta de 8 sectores iguales, cada sector es equiprobable.	☐	☐
Al lanzar dos monedas, «0 caras», «1 cara» y «2 caras» son equiprobables.	☐	☐

2 **Una ruleta de 8 sectores iguales tiene 3 rojos, 2 azules, 2 verdes y 1 amarillo. Calcula con Laplace.**

Suceso	Casos favorables	Probabilidad
Rojo		
Azul		
Rojo o amarillo		
No verde		

3 **J1 cuesta 1 € y da 5 € al ganador. Calcula la probabilidad de ganar y el beneficio medio del consejo por jugada y en 120 jugadas. ¿Cuál es el premio máximo con el que el consejo no pierde a largo plazo?**

4 **Un compañero dice: «En J1 o ganas o pierdes, así que la probabilidad de ganar es del 50 %». Explica qué falla.**

FICHA 5 Con y sin devolución

Sesión 5

Compara J3 con devolución y sin devolución. Usa el árbol de F5 y el cuadro de F6.

1 **Completa la tabla de J3 con y sin devolución. Después compara con una simulación de 1 000 repeticiones: con devolución salieron 157 veces dos rojas y 497 una roja; sin devolución, 141 y 523. Calcula las frecuencias relativas y di si se parecen a tus probabilidades.**

Suceso	Con devolución (cálculo y valor)	Sin devolución (cálculo y valor)
Dos rojas		
Una roja y una blanca		
Dos blancas		
Suma		

2 **Explica por qué cambia la probabilidad de la segunda bola cuando no se devuelve la primera, y qué relación hay con la independencia.**

3 **Una caja tiene cinco fichas numeradas del 1 al 5. Se sacan dos fichas, anotando el orden. Calcula P(suma 6) con devolución y sin devolución. ¿Qué observas?**

4 **Marca verdadero o falso.**

	V	F
En J2 el resultado de la urna B no depende del de la urna A.	☐	☐
En J3 sin devolver, si la primera bola es roja, la probabilidad de que la segunda sea roja sigue siendo $\frac{4}{10}$.	☐	☐
Con devolución, la probabilidad de la segunda bola es la misma que la de la primera.	☐	☐
Sin devolución, la suma de las probabilidades de todos los resultados sigue siendo 1.	☐	☐

FICHA 6 Simulación

Sesión 6

Usa F7, F8 y F9. Simula, cuenta y compara con la probabilidad teórica.

1 **Simula J3 con devolución con la tabla F7: lee los 100 pares de dígitos consecutivos; el dígito 0-3 es bola roja y 4-9, blanca. Cuenta cuántos pares tienen dos rojas, una roja y ninguna.**

Resultado	Recuento en 100 pares	Frecuencia relativa	Probabilidad teórica
Dos rojas			
Una roja			
Ninguna roja			

2 **Escribe el algoritmo (como en F8) para simular J2 (dos urnas) y ejecútalo con hoja de cálculo o GeoGebra con 100 y con 1 000 repeticiones. Anota cuántas veces ganas.**

Repeticiones	Veces que se gana	Frecuencia relativa	Probabilidad teórica (F4)
100			
1 000			

3 **Con el gráfico de J1 de F9: ¿qué pasa con la frecuencia relativa al aumentar el número de lanzamientos? ¿Por qué no basta con 10 lanzamientos para fiarse?**

4 Un compañero simula J3 sin devolución sacando «dos números al azar entre 1 y 10». ¿Qué falla? Propón una corrección.

FICHA 7 Dossier de estrategias (borrador)

Sesión 7

En equipo: preparad el dossier. Roles: contador, dibujante de árboles, simulador y revisor.

1 Tabla resumen de los cuatro juegos.

Juego	Nº de casos posibles	Estrategia usada	P (ganar)	Premio justo $\frac{1}{P}$	Beneficio medio por jugada con el premio de F2
J1					
J2					
J3					
J4					

2 Resolved J2 por dos caminos: con el árbol y con una tabla de doble entrada de bolas numeradas (A1 a A5 y B1 a B4, donde A1-A3 y B1 son rojas). ¿Coinciden los resultados?

3 Simulación del juego que elijáis: algoritmo y resultados.

4 **Revisión cruzada: otro equipo comprueba vuestro dossier.**

- [ ] Se cuentan todos los casos sin repetir ni olvidar
- [ ] Cada árbol o tabla está rotulado y las probabilidades suman 1
- [ ] Se comprueba la equiprobabilidad antes de usar Laplace
- [ ] Se distingue entre con y sin devolución
- [ ] La simulación tiene algoritmo y se compara con la teoría

FICHA 8 Reto individual

Sesión 8

Resuelve sin ayuda del equipo.

1 **Dos dados. Calcula $P(\text{suma } 8)$ y $P(\text{el producto de los dos números es par})$. Pista: usa el suceso contrario para el segundo.**

2 **Una bolsa tiene 3 bolas rojas y 5 azules. Se sacan 2 bolas sin devolver. Dibuja el árbol y calcula P(las dos azules), P(mismo color) y P(colores distintos).**

3 Escribe un algoritmo para simular 1 000 veces el experimento anterior y estimar P(las dos azules). Indica cómo evitarías repetir la misma bola.

4 Tomás dice: «Con tres monedas hay 4 resultados (0, 1, 2 o 3 caras), así que $P(3 \text{ caras}) = \frac{1}{4}$». Explica el error y calcula la probabilidad correcta.

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 9 · Probabilidad de experimentos compuestos

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Dossier de estrategias de recuento de la tómbola solidaria. Cada juego se resuelve con una estrategia justificada y se comprueba con una simulación.

Título y equipo

Resumen de los cuatro juegos

Casos posibles, estrategia y P(ganar).

Estrategia 1: árbol o lista

Dibujo del árbol con ramas rotuladas.

Estrategia 2: tabla de doble entrada

Tabla rotulada y casos favorables marcados.

Simulación

Algoritmo, repeticiones y frecuencia relativa.

Teoría frente a simulación

Comparación y comentario.

Premios recomendados

Beneficio medio por jugada de cada juego.

Conclusión y revisión

Resumen y firma del equipo revisor.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 9 · Probabilidad de experimentos compuestos

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Dossier de estrategias de recuento**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] Cada juego tiene su experimento, sus etapas y el suceso «ganar» definidos.
- [ ] Se cuentan todos los casos posibles sin repetir ni olvidar ninguno.
- [ ] Se comprueba la equiprobabilidad antes de aplicar la regla de Laplace.
- [ ] Los árboles y las tablas tienen ramas y casillas rotuladas.
- [ ] Las probabilidades de todas las ramas de cada árbol suman 1.
- [ ] Se multiplica a lo largo de las ramas y se suma entre ramas favorables.
- [ ] Se distingue entre extraer con y sin devolución y se explica el efecto.
- [ ] Hay una simulación con su algoritmo y se compara la frecuencia relativa con la probabilidad.
- [ ] Se calcula el premio justo y el beneficio medio por jugada de cada juego.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 9 · Probabilidad de experimentos compuestos

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Dossier de estrategias de recuento**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 9 · Probabilidad de experimentos compuestos

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé elegir entre lista, tabla de doble entrada o árbol y calcular la probabilidad de un suceso compuesto.	○	○	○	○
Sé escribir un algoritmo de simulación y comparar su resultado con la teoría.	○	○	○	○
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	○	○	○	○
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	○	○	○	○
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	○	○	○	○
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	○	○	○	○

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 9 · Probabilidad de experimentos compuestos

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Dos etapas y espacios pequeños: listas, un árbol guiado y probabilidades con fracciones sencillas.

Ejemplo modelado

Moneda y dado. **Lista:** C1, C2, C3, C4, C5, C6, X1, X2, X3, X4, X5, X6: **12 resultados** ($2 \cdot 6$). Suceso «cara y múltiplo de 3»: C3 y C6, es decir, 2 casos. Como son equiprobables, $P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. **Con árbol:** $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$. ✔

Símbolos y vocabulario

Espacio muestral: conjunto de todos los resultados. **Suceso:** parte del espacio muestral que nos interesa. **Equiprobable:** todos los casos tienen la misma probabilidad. **Con devolución:** la bola vuelve a la urna. **Rama:** camino del árbol; se multiplica. $P(A) = \frac{\text{favorables}}{\text{posibles}}$ solo con casos equiprobables.

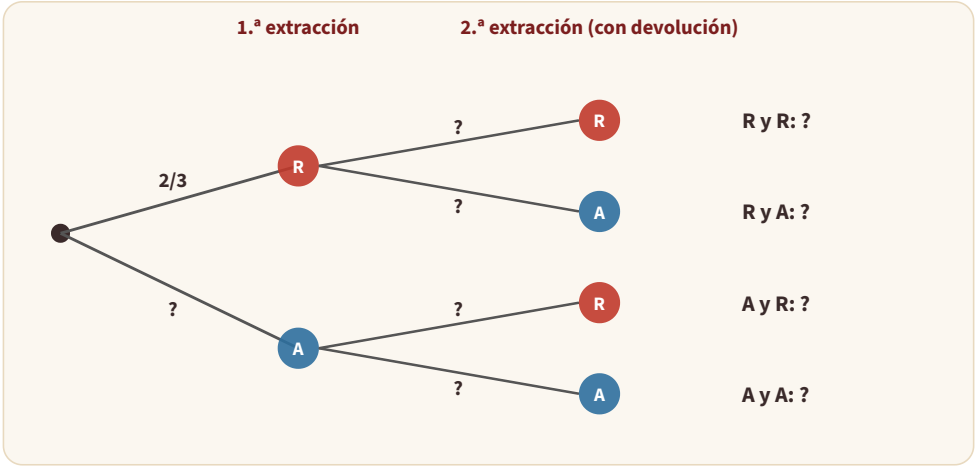
1 **Una ruleta tiene 3 sectores iguales (rojo, azul, verde) y se lanza una moneda. Completa la lista de resultados, cuéntalos y calcula $P(\text{azul y cara})$.**

Resultados: rojo-C, rojo-X, azul-C, _____, _____, _____.

Número de resultados: _____ · _____ = _____.

P(azul y cara) = _____ / _____

2 **Una urna tiene 2 bolas rojas y 1 azul. Se saca una bola, se devuelve y se saca otra. Completa el árbol y las probabilidades.**



Suceso	Cálculo	Probabilidad
Dos rojas		
Dos azules		
Colores distintos		

3 **Comprueba que las cuatro ramas del árbol suman 1.**

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 9 · Probabilidad de experimentos compuestos

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Ramas con probabilidades distintas: un problema de tiros

Un jugador acierta cada tiro libre con probabilidad $p = 0{,}7$ y falla con $0{,}3$. Lanza dos tiros independientes. El árbol tiene ramas con probabilidades distintas: $P(\text{2 aciertos}) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$; $P(\text{exactamente 1}) = 2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}42$; $P(\text{ninguno}) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$. Vuestra tarea: crear un problema propio de este tipo, resolverlo y generalizarlo.

Pasos

1. Dibuja el árbol de dos tiros con $p = 0{,}7$ y comprueba que las probabilidades suman 1.
2. Calcula las tres probabilidades para $p = 0{,}5$, $p = 0{,}7$ y $p = 0{,}9$.
3. Escribe las expresiones generales con p para dos tiros: $P(2)$, $P(1)$ y $P(0)$, y comprueba que suman 1 usando $(p + (1 - p))^2$.
4. ¿Para qué valor de p es máxima la probabilidad de «exactamente un acierto»? Argumenta con la tabla o con un razonamiento.
5. Crea y resuelve un problema propio con tres etapas (por ejemplo, tres semáforos o tres tiros) con probabilidades distintas por rama.

1 **Tabla de resultados.**

p	P(2 aciertos)	P(1 acierto)	P(0 aciertos)	Suma
0,5				
0,7				
0,9				

Entrega

El árbol, la tabla, las fórmulas generales y tu problema propio resuelto con su árbol, con una frase que justifique el resultado.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 9 · Probabilidad de experimentos compuestos

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: 6 ($3 \cdot 2$); $\frac{1}{6}$; 4 (CC, CX, XC, XX).
2. Lista de J4: CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX: 8 resultados ($2 \cdot 2 \cdot 2$). Con exactamente dos caras: CCX, CXC, XCC: 3.
3. Un dado y una moneda: $6 \cdot 2 = 12$. Ruleta de 4 colores y dado: $4 \cdot 6 = 24$. Dos bolas de 10 con devolución: $10 \cdot 10 = 100$. Sin devolución: $10 \cdot 9 = 90$.
4. Error: $(1, 2)$ y $(2, 1)$ son resultados distintos y los resultados «de dos números distintos» salen el doble de veces que los dobles; los 21 casos no son equiprobables. En la tabla de F3 hay 36 casillas y 6 con suma 7 ($(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$): $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Ficha 2

1. Dos rojas: R-R, $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20} = 0{,}15$. Dos azules: Az-Az, $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = 0{,}30$. Distintos: R-Az y Az-R, $\frac{9}{20} + \frac{2}{20} = \frac{11}{20} = 0{,}55$. Suma: $0{,}15 + 0{,}30 + 0{,}55 = 1$.
2. Completar el árbol de F5: tras R quedan 3 R y 6 B: $\frac{3}{9}$ y $\frac{6}{9}$; tras B quedan 4 R y 5 B: $\frac{4}{9}$ y $\frac{5}{9}$. R y R: $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$. R y B: $\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{24}{90}$. B y R: $\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{90}$. B y B: $\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$. Una roja: $\frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15} \approx 0{,}533$. Suma: $\frac{12+24+24+30}{90} = 1$.
3. Árbol de tres monedas: 8 ramas, cada una de probabilidad $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Exactamente 2 caras: CCX, CXC, XCC: $\frac{3}{8} = 0{,}375$. Al menos una cara: $1 - P(XXX) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875$.
4. Para que ocurra la rama se deben cumplir todas sus etapas a la vez: «y» se traduce en multiplicar. Las ramas distintas son formas incompatibles de lograr el suceso: «o» se traduce en sumar.

Ficha 3

1. Tabla 4×6 = 24 casillas. Ganadoras: rojo con 2, 4 y 6: 3 casillas. $P = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} = 0{,}125$.
2. Suma 7: 6 casos, $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Suma 10 o más (10: 3, 11: 2, 12: 1): 6 casos, $\frac{1}{6}$. Suma par: 18 casos, $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. Suma 2 o 12: 2 casos, $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Dobles: 6 casos, $\frac{1}{6}$.
3. Elegir la suma 7 (6 casillas de 36) y evitar 2 y 12 (1 casilla cada una, $\frac{1}{36}$).

Ficha 4

1. V; F (la suma 7 sale mucho más que la 2 o la 12); F (hay 3 bolas rojas y 2 azules: no son equiprobables los colores, aunque sí cada bola); V; F ($P(0) = \frac{1}{4}, P(1) = \frac{1}{2}, P(2) = \frac{1}{4}$).
2. Rojo: $\frac{3}{8}$; azul: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; rojo o amarillo: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; no verde: $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.
3. $P(\text{ganar}) = \frac{1}{6}$. Por jugada, ingreso 1 €; el premio esperado es $5 \cdot \frac{1}{6} \approx 0{,}83$ €; beneficio medio $\approx 0{,}17$ € por jugada. En 120 jugadas: se espera ganar 20 veces; ingresos 120 €, premios $20 \cdot 5 = 100$ €; beneficio ≈ 20 €. Premio máximo sin pérdida: 6 € (juego justo: $1 \cdot 6 = 6$, $\frac{1}{6} \cdot 6 = 1$ €).
4. Ganar y perder no son equiprobables: ganar solo en 6 de 36 casos, es decir, $\frac{1}{6}$. Dos resultados posibles no implica probabilidad $\frac{1}{2}$.

Ficha 5

1. Dos rojas: con devolución $\frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = 0{,}16$; sin devolución $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15} \approx 0{,}133$. Una roja y una blanca: con $2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$; sin $\frac{48}{90} = \frac{8}{15} \approx 0{,}533$. Dos blancas: con $0{,}36$; sin $\frac{30}{90} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$. Sumas: 1 en ambos casos. Frecuencias de la simulación: con devolución 0,157 (dos rojas) y 0,497 (una roja); sin devolución 0,141 y 0,523: se parecen a 0,16 y 0,48 / 0,133 y 0,533, aunque con diferencias de 1-3 puntos.
2. Al no devolver la bola cambia el contenido de la bolsa: la composición para la segunda extracción depende del resultado de la primera. Las etapas son **dependientes**; con devolución son **independientes** (la composición no cambia).
3. Con devolución: 25 pares ordenados; suma 6: $(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)$: 5 casos, $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$. Sin devolución: 20 pares (no hay dobles); suma 6: $(1,5), (2,4), (4,2), (5,1)$: 4 casos, $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$. Coinciden, aunque los espacios muestrales sean distintos; no siempre ocurre.
4. V; F (pasa a $\frac{3}{9}$); V; V.

Ficha 6

1. Con la tabla F7 (100 pares): dos rojas **15** $(0{,}15)$, una roja **42** $(0{,}42)$, ninguna roja **43** $(0{,}43)$. Probabilidades teóricas: $0{,}16$, $0{,}48$ y $0{,}36$. Los resultados se parecen, pero con 100 pares hay diferencias de varios puntos.
2. Algoritmo: contador ← 0; repetir n veces: bolaA ← azar entre 1 y 5 (1-3 rojas); bolaB ← azar entre 1 y 4 (1 roja); si bolaA ≤ 3 y bolaB = 1, contador ← contador + 1; frecuencia ← contador / n. Teórica: $0{,}15$. Referencia de una simulación de 1 000 repeticiones: 154 veces $(0{,}154)$. Con 100 repeticiones se esperan entre 8 y 22 victorias.
3. La frecuencia relativa se estabiliza hacia $\frac{1}{6} \approx 16{,}7\,\%$ al aumentar los lanzamientos (ley de los grandes números); con 10 lanzamientos el azar produce grandes oscilaciones (aquí, 10 %).
4. Dos números aleatorios independientes pueden repetir la misma bola, lo que equivale a devolverla. Corrección: numerar las bolas, elegir la primera entre 1 y 10 y la segunda entre las 9 restantes (o repetir el sorteo si coincide).

Ficha 7

1. J1: 36; tabla de doble entrada (Laplace); $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$; premio justo 6 €; beneficio medio $1 - 5 \cdot \frac{1}{6} \approx 0{,}17$ €. J2: 20 casos (bolas numeradas) o árbol; $\frac{3}{20} = 0{,}15$; premio justo $\approx 6{,}67$ €; beneficio $1 - 5 \cdot 0{,}15 = 0{,}25$ €. J3: 90 pares ordenados (sin devolución); árbol; $\frac{2}{15} \approx 0{,}133$; premio justo 7,5 €; beneficio $1 - 6 \cdot \frac{2}{15} = 0{,}20$ €. J4: 8; lista o árbol; $\frac{3}{8} = 0{,}375$; premio justo $\approx 2{,}67$ €; beneficio $1 - 2 \cdot \frac{3}{8} = 0{,}25$ €.
2. Tabla 5×4 = 20 casillas; las ganadoras son A1-B1, A2-B1 y A3-B1: 3 casos, $\frac{3}{20}$. Coincide con $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$.
3. La simulación se valora si hay algoritmo, número de repeticiones suficiente (1 000 o más) y comparación con la teoría.

Ficha 8

1. Suma 8: $(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)$: $\frac{5}{36}$. Producto par: contrario es que los dos sean impares: $\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36}$; $P = 1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$.
2. Árbol: primera azul $\frac{5}{8}$, segunda azul $\frac{4}{7}$; primera azul y segunda roja $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$; primera roja y segunda azul $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$; dos rojas $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$. Dos azules: $\frac{20}{56} = \frac{5}{14} \approx 0{,}357$. Mismo color: $\frac{20}{56} + \frac{6}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$. Distintos: $\frac{30}{56} = \frac{15}{28}$.
3. Algoritmo esperable: contador ← 0; repetir 1 000 veces: numerar las bolas del 1 al 8 (1-5 azules); primera ← azar entre 1 y 8; segunda ← azar entre las 7 restantes (repetir el sorteo si coincide con la primera); si primera ≤ 5 y segunda ≤ 5, contador ← contador + 1; frecuencia ← contador / 1 000. Debe aproximarse a $0{,}357$.
4. Error: los resultados 0, 1, 2 y 3 caras no son equiprobables (hay 1, 3, 3 y 1 maneras de obtenerlos); los 8 resultados ordenados (CCC, CCX, …) sí lo son. $P(\text{3 caras}) = \frac{1}{8}$.

Refuerzo

1. Resultados: rojo-C, rojo-X, azul-C, azul-X, verde-C, verde-X. $3 \cdot 2 = 6$ resultados. $P(\text{azul y cara}) = \frac{1}{6}$.
2. Árbol (con devolución): $P(R) = \frac{2}{3}$, $P(A) = \frac{1}{3}$ en las dos etapas. Hojas: R y R $\frac{4}{9}$; R y A $\frac{2}{9}$; A y R $\frac{2}{9}$; A y A $\frac{1}{9}$. Dos rojas $\frac{4}{9}$; dos azules $\frac{1}{9}$; distintos $\frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$.
3. $\frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1$.

Ampliación

1. $p = 0{,}5$: $0{,}25, 0{,}50, 0{,}25$. $p = 0{,}7$: $0{,}49, 0{,}42, 0{,}09$. $p = 0{,}9$: $0{,}81, 0{,}18, 0{,}01$. Todas suman 1.
2. $P(2) = p^2$; $P(1) = 2p(1-p)$; $P(0) = (1-p)^2$; $p^2 + 2p(1-p) + (1-p)^2 = (p + 1 - p)^2 = 1$.
3. $2p(1-p)$ es máxima para $p = 0{,}5$ (vale $0{,}5$): es una parábola con vértice en $p = 0{,}5$ ($2p - 2p^2$). La tabla lo confirma: $0{,}50 > 0{,}42 > 0{,}18$.
4. Problema propio: se valora un árbol de tres etapas con probabilidades distintas, ramas que suman 1 y un resultado interpretado.

Errores frecuentes

- Contar $(1, 2)$ y $(2, 1)$ como el mismo resultado y suponer equiprobables los 21 casos de dos dados.
- Aplicar Laplace cuando los casos no son equiprobables (por ejemplo, «0, 1 o 2 caras»).
- No cambiar las probabilidades de la segunda etapa al sacar sin devolución.
- Sumar a lo largo de una rama o multiplicar entre ramas (confundir «y» con «o»).
- Olvidar ramas favorables, por ejemplo, contar «una roja y una azul» solo en un orden.
- Creer que con pocas repeticiones la frecuencia relativa debe coincidir con la probabilidad.

Criterios para valorar respuestas abiertas

- Se valora que cada probabilidad llegue con su estrategia: lista o tabla (casos equiprobables) o árbol (etapas), y que se compruebe que suma 1.
- En las simulaciones, los valores del alumnado difieren de la teoría; se acepta si están dentro de lo esperable (unos 5 puntos con 100 repeticiones, 2 con 1 000) y se comentan.
- El algoritmo se valora por su claridad (variables, repetición, condición y cálculo de la frecuencia), no por la sintaxis de un lenguaje concreto.
- Los problemas inventados (ampliación) deben tener datos coherentes y solución comprobada.

10

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Investigar, modelizar y argumentar

PREGUNTA GUÍA

¿Qué hace que una solución matemática sea convincente además de tener una cuenta correcta?

CURSO
4.º ESO · Matemáticas B

SESIONES
9 sesiones · 3.º trimestre

SENTIDOS PRIORITARIOS
A-B-C-D-E-F · Integración de sentidos

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE2, CE3, CE5, CE6, CE7, CE8, CE10

PRODUCTO FINAL
Proyecto matemático de investigación

CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 1.2, 2.1, 3.1, 3.2, 5.2, 6.1, 7.1, 8.1, 10.1

Contexto, reto y sentido

El instituto ha recibido tres encargos que parecen sencillos y no lo son: el **huerto escolar** necesita una valla con 40 m de tela metálica y se quiere aprovechar la mejor superficie; la **entrada principal** tiene un desnivel y hay que diseñar una rampa que cumpla la normativa de accesibilidad; el **club de juegos** sospecha que su dado está trucado y quiere saber si hay pruebas. Cada equipo elige **uno de los tres retos** y lo investiga de principio a fin, como haría una persona que trabaja con matemáticas.

El eje de la situación no es calcular, sino **convencer**. Una solución matemática convincente tiene una pregunta clara, variables y supuestos explícitos, un modelo (tabla, ecuación, gráfica o simulación), una comprobación por otro camino, una conjetura puesta a prueba, un análisis de sus límites y una explicación que otra persona pueda seguir y criticar. Se integran todos los sentidos del curso: números y medida (rampa), álgebra y funciones (valla), geometría y trigonometría (pendiente y ángulo) y estadística y probabilidad con simulación (dado). Los datos son ficticios, salvo la normativa de rampas, que es un resumen real simplificado.

Reto

Investigar el reto elegido (valla, rampa o dado): modelizarlo, comprobar el modelo por otro camino, formular y poner a prueba una conjetura, analizar sus límites y defender un informe que convenza a un equipo revisor.

Producto final

Proyecto matemático de investigación.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE5** Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.
- **CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.
- **CE10** Trabajar en equipo con respeto, asumiendo roles y valorando la diversidad.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- **1.1** Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.
- **1.2** Analizar y seleccionar diferentes herramientas y estrategias elaboradas en la resolución de un mismo problema, valorando su eficiencia.
- **2.1** Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.
- **3.1** Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada.
- **3.2** Plantear variantes de un problema que lleven a una generalización.
- **5.2** Analizar y poner en práctica conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.
- **6.1** Proponer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.
- **7.1** Representar matemáticamente la información más relevante de un problema, conceptos, procedimientos y resultados, visualizando ideas y estructurando procesos.
- **8.1** Comunicar ideas, conclusiones, conjeturas y razonamientos matemáticos utilizando diferentes medios, con coherencia, claridad y terminología apropiada.

10.1 Colaborar activamente en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva y tomando decisiones informadas.

Saberes básicos prioritarios

A
Sentido numérico

- Estimación, orden de magnitud y comprobación de la razonabilidad de los resultados; porcentajes y razones como pendiente.

B
Sentido de la medida

- Magnitudes y unidades (m, m^2, %); pendiente de una rampa como cociente entre desnivel y recorrido horizontal.

C
Sentido espacial

- Representación a escala de situaciones geométricas (perfil de la rampa, esquemas de valla) y razones trigonométricas de un ángulo agudo.

D
Sentido algebraico

- Modelización con funciones lineales y cuadráticas: ecuación, tabla, gráfica, vértice y dominio; resolución de problemas de optimización.
- Generalización con parámetros: sustituir números por letras para comprobar una conjetura.

E
Sentido estocástico

- Frecuencia relativa, simulación y comparación de una muestra con la variabilidad esperada por azar; distinguir indicio de prueba.

F
Sentido socioafectivo

- Argumentación matemática, revisión del trabajo propio y ajeno y aprecio de la crítica constructiva.
- Reparto de roles, toma de decisiones compartida y responsabilidad individual en el trabajo en equipo.

Objetivos didácticos

- ✓ Formular una pregunta investigable matemáticamente.
- ✓ Seleccionar modelos y herramientas.
- ✓ Comprobar conjeturas y revisar procedimientos.
- ✓ Comunicar conclusiones y límites con rigor.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Elección entre tres retos propuestos

Evidencia: Ficha 1: diagnóstico, primera impresión de los tres retos con tanteos numéricos, elección razonada y reparto de roles.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Pregunta, variables y plan

Evidencia: Ficha 2: pregunta precisa, variables con unidades, supuestos y plan de trabajo del proyecto, con la formulación matemática de cada reto.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Desarrollo numérico/algebraico

Evidencia: Ficha 3: desarrollo numérico y algebraico de cada reto: tabla del área de la valla, tabla de la rampa según la normativa o frecuencias esperadas del dado.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Representación gráfica/geométrica

Evidencia: Ficha 4: representación gráfica de cada reto: parábola del área, recta de la pendiente a escala o diagrama de barras de las frecuencias.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Datos o simulación cuando proceda

Evidencia: Ficha 5: datos o simulación: restricción del muro, comprobación de rampas existentes o simulaciones del dado con tecnología.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Conjetura y comprobación

Evidencia: Ficha 6: conjetura y comprobación con ejemplos, contraejemplos y generalización algebraica o simulación.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Revisión por pares

Evidencia: Ficha 7: revisión por pares de un borrador ficticio, retroalimentación con dos fortalezas y una mejora y plan de cambios del propio proyecto.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

8

SESIÓN 8

Informe final

Evidencia: Ficha 8: esquema del informe, conclusión con límites y resumen para alguien que no ha visto el problema.

Ficha: Anexo 3 · ficha 8

9

SESIÓN 9

Defensa e individualización

Evidencia: Ficha 9: reto individual con una variante nueva de cada proyecto y reflexión sobre qué hace convincente una solución.

Ficha: Anexo 3 · ficha 9

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Dossier de retos · calculadora · hoja de cálculo · GeoGebra según necesidad

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Reto cerrado con datos y estructura de informe.

Ampliación

Anexo 9

Modificar una condición del proyecto y analizar qué resultados dejan de ser válidos.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Reformulación del reto elegido con pregunta precisa, variables, unidades, datos y condiciones, y un tanteo numérico inicial.	Fichas 1 y 2 / lista de cotejo
1.2	Comparación de varias estrategias (tabla de valores, álgebra, gráfica o simulación) y elección razonada de la más eficiente.	Fichas 3 y 5 / escala de valoración
2.1	Comprobación de la solución por otro camino, con restricciones reales (muro de 15 m, tramo máximo de 9 m, mismo suceso en otra muestra) y análisis de los límites del modelo.	Fichas 5, 6 y 9 / rúbrica
3.1	Conjetura enunciada antes de comprobarla y puesta a prueba con ejemplos, contraejemplos, generalización con letras o simulación.	Ficha 6 / rúbrica
3.2	Variantes del problema (otro perímetro, valla interior, otra altura de rampa, otro tamaño de muestra) que llevan a una generalización.	Ficha 6, Ficha 9 y ampliación / rúbrica
5.2	Conexión entre tabla, ecuación, gráfica y contexto de una misma situación, y entre pendiente, porcentaje y ángulo.	Fichas 3 y 4 / rúbrica
6.1	Modelización de la situación real (huerto, rampa o dado) con supuestos explícitos y justificación de por qué las matemáticas responden a la pregunta.	Ficha 2 y proyecto (Anexo 4) / rúbrica
7.1	Representaciones del proyecto: esquema o gráfica con ejes y escala, tabla de valores y expresión algebraica coherentes entre sí.	Ficha 4 y proyecto (Anexo 4) / rúbrica
8.1	Informe y defensa con lenguaje matemático correcto, unidades, resultado con su margen o límite y argumentación para un público que no vio el problema.	Fichas 8 y 9 y defensa / rúbrica
10.1	Reparto de roles registrado, aportación individual a cada fase y retroalimentación al equipo revisor con dos fortalezas y una mejora.	Fichas 1 y 7, autoevaluación y coevaluación (Anexo 7) / escala de valoración

☆ Evidencias clave de esta SdA

Informe, modelos, comprobaciones, revisión y defensa.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 **Avanzado**	NIVEL 3 **Adecuado**	NIVEL 2 **En proceso**	NIVEL 1 **Inicial**
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 10 · Investigar, modelizar y argumentar

ALUMNADO

El huerto escolar necesita valla, pero con 40 metros de tela metálica ¿qué medidas dan más tierra? La entrada tiene un escalón de 45 centímetros y hace falta una rampa que cumpla la ley, no solo que parezca una rampa. Y en el club de juegos hay un dado que saca demasiados seises: 70 en 300 tiradas. Tres retos, tres maneras de investigar. Pero hay una regla común: una cuenta correcta no basta. Vuestra solución tendrá que convencer a otro equipo que intentará encontrarle fallos. ¿Qué hace que una solución matemática sea convincente?

> *¿Qué hace que una solución matemática sea convincente además de tener una cuenta correcta?*

Vuestro reto

Investigar el reto elegido (valla, rampa o dado): modelizarlo, comprobar el modelo por otro camino, formular y poner a prueba una conjetura, analizar sus límites y defender un informe que convenza a un equipo revisor.

Lo que vais a producir

Proyecto matemático de investigación.

Hoja de ruta · 9 sesiones

1. Elegimos reto, hacemos un tanteo y nos repartimos los roles.
2. Concretamos la pregunta, las variables, los supuestos y el plan.
3. Desarrollamos el modelo con números y álgebra.
4. Representamos el problema con gráficas, esquemas o diagramas.
5. Incorporamos datos reales o simulaciones y las restricciones del problema.
6. Formulamos una conjetura y la comprobamos con ejemplos, contraejemplos y variantes.
7. Revisamos por pares el trabajo de otro equipo y mejoramos el nuestro.
8. Redactamos el informe final con sus límites.
9. Defendemos el proyecto y resolvemos el reto individual.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Formular una pregunta investigable matemáticamente.
- ✓ Seleccionar modelos y herramientas.
- ✓ Comprobar conjeturas y revisar procedimientos.
- ✓ Comunicar conclusiones y límites con rigor.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 10 · Investigar, modelizar y argumentar

ALUMNADO

Los tres retos con sus datos, esquemas del huerto y de la rampa, normativa resumida de rampas con rampas existentes, datos y simulaciones del dado, un esquema del ciclo de modelización, una guía de lo que hace convincente una solución con un ejemplo, y un borrador ficticio con errores para practicar la revisión por pares.

F1 Tres retos para elegir

ESTUDIO DE CASO

Reto A. La valla del huerto. El huerto escolar será un rectángulo. Hay **40 m** de tela metálica. Se quiere saber qué medidas dan la **mayor superficie** si: (1) la valla rodea el huerto por los cuatro lados; (2) se apoya en un muro y solo hay que cerrar tres lados; (3) además se pone una valla interior que lo divide en dos parcelas iguales.

Reto B. La rampa de la entrada. Hay que salvar un **desnivel de 0,45 m** con una rampa que cumpla la normativa de accesibilidad (F3). Se pregunta cuánto **espacio horizontal** hace falta, qué **pendiente** y qué **ángulo** tendrá y qué pasa con otros desniveles.

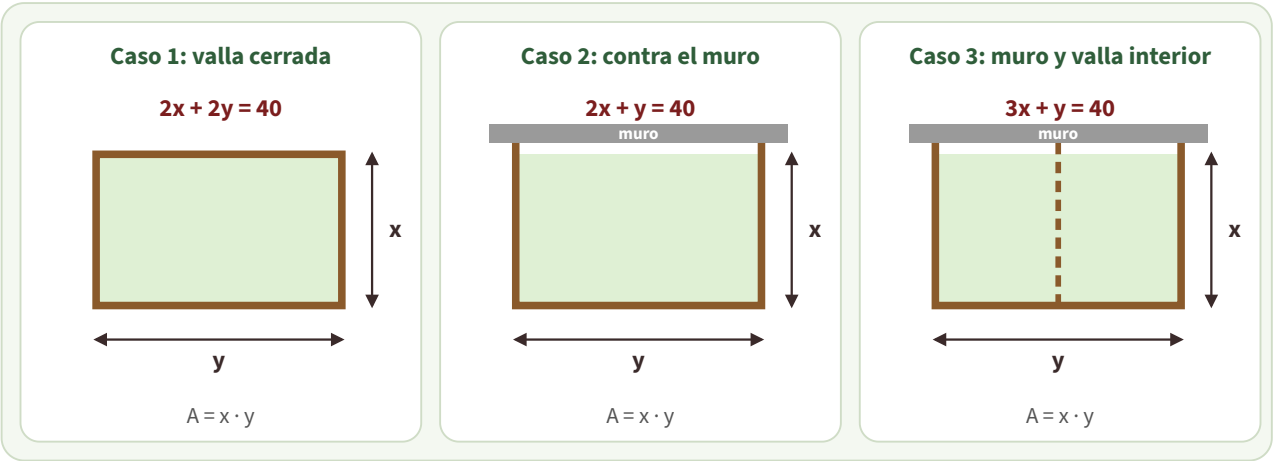
Reto C. El dado sospechoso. El club de juegos lanzó su dado **300 veces** y el 6 salió **70 veces** (F5). ¿Hay motivos para pensar que el dado está trucado, o puede ser cosa del azar? Se puede simular el lanzamiento de un dado justo (F6).

Fuente: Situaciones y datos ficticios creados para el aula (la normativa de la rampa se resume en F3).

¿Qué reto te atrae más y por qué? ¿Qué dificultad crees que tendrá? Anótalo antes de la ficha 1.

F2 Reto A: tres formas de poner la valla

ESQUEMA



Fuente: Esquema de elaboración propia.

En cada caso, la longitud de valla es 40 m: eso relaciona x e y. Después hay que escribir el área $A = x \cdot y$ con una sola variable.

F3 Reto B: normativa de rampas accesibles (resumen)

DATOS

Longitud L del tramo de rampa	Pendiente máxima	Observación
Menos de 3 m	10 %	Pendiente = desnivel / recorrido horizontal.
Menos de 6 m (y 3 m o más)	8 %	La longitud L es la de la rampa (hipotenusa).
6 m o más	6 %	Un tramo continuo no puede superar los 9 m.

Rampas existentes en el centro (ficticias): R1, desnivel 0,20 m y recorrido horizontal 2,40 m; R2, desnivel 0,30 m y recorrido horizontal 3,60 m; R3, desnivel 0,60 m y recorrido horizontal 10,50 m. Para desniveles mayores se dividen en varios tramos con descansillos intermedios.

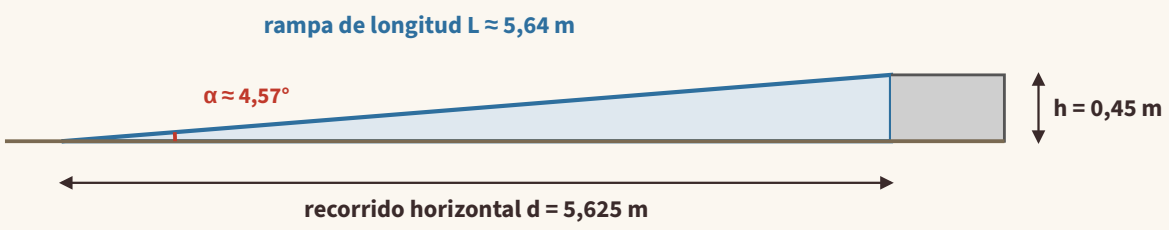
Fuente: Resumen simplificado para el aula del Código Técnico de la Edificación, DB SUA (Seguridad de utilización y accesibilidad), rampas accesibles; consulta el texto vigente en codigotecnico.org antes de aplicarlo a un caso real. Las rampas existentes son datos ficticios medidos en el centro.

Un 8 % significa que por cada 100 m de recorrido horizontal se sube 8 m (o por cada 100 cm, 8 cm).

F4 Reto B: pendiente, ángulo y recorrido de la rampa

ESQUEMA

Perfil a escala de la rampa para un desnivel de 0,45 m (pendiente del 8 %)



p = h / d
pendiente (en tanto por uno)
8 % → p = 0,08

tan α = p
el ángulo sale de la tangente
α = tan⁻¹(0,08) ≈ 4,57°

d = h / p
recorrido horizontal mínimo
0,45 / 0,08 = 5,625 m

Fuente: Esquema de elaboración propia, a escala.

En esta rampa casi horizontal, la longitud L y el recorrido d son casi iguales. ¿Cuánto difieren?

F5 Reto C: lanzamientos del dado del club

DATOS

Cara	Muestra 1: 300 tiradas	Muestra 2: 120 tiradas
1	41	17
2	46	19
3	48	20
4	44	18
5	51	15
6	70	31
Total	**300**	**120**

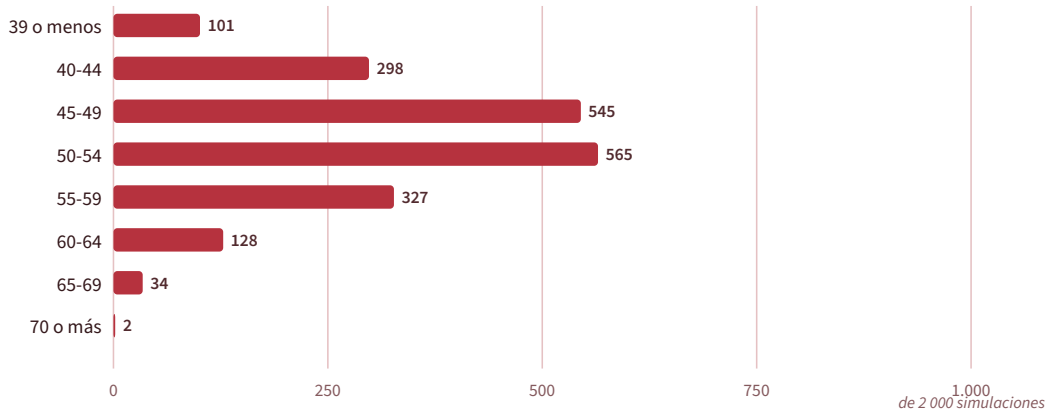
Con un dado justo se espera que cada cara salga alrededor de $\frac{300}{6} = 50$ veces en la muestra 1 y $\frac{120}{6} = 20$ veces en la muestra 2, pero el azar hace que las frecuencias oscilen.

Fuente: Datos ficticios creados para el aula.

La muestra 2 se tomó después, con el mismo dado y por otra persona.

F6 Reto C: 2 000 simulaciones de 300 tiradas de un dado justo

GRÁFICO

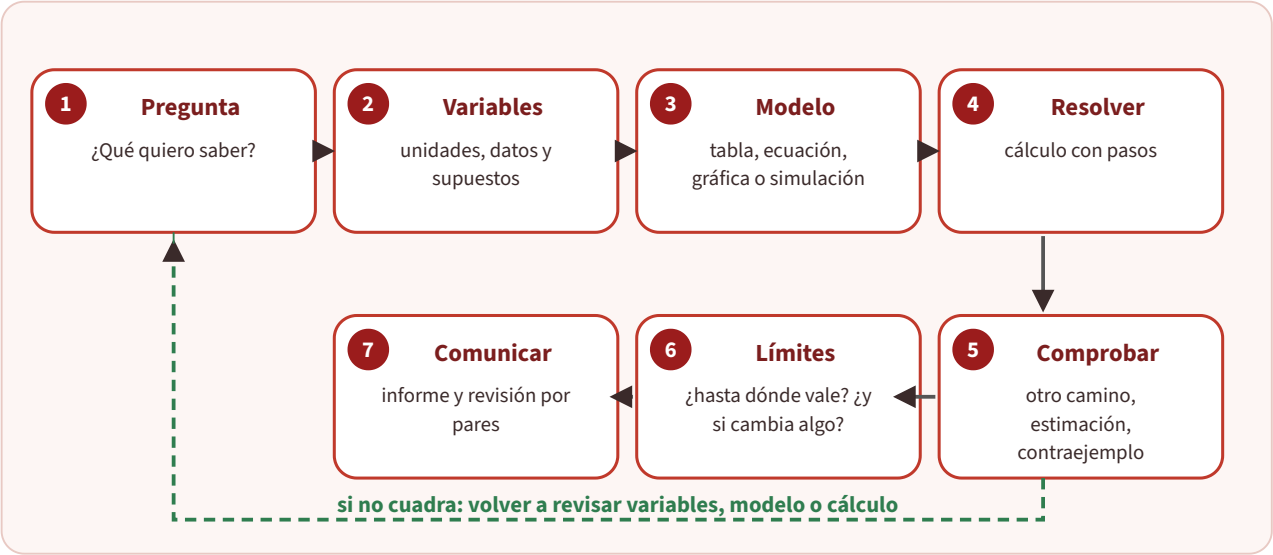


Fuente: Simulación de elaboración propia con ordenador (datos ficticios).

Solo en 2 de las 2 000 simulaciones el 6 salió 70 o más veces; en 26 de ellas, alguna cara salió 70 o más veces. Con 120 tiradas, el 6 salió 31 o más veces en 8 de 2 000 simulaciones (alguna cara: 76 de 2 000). Con 200 tiradas, el 6 salió 45 o más veces en 32 de 2 000 (alguna cara: 218).

F7 El ciclo de modelización

ESQUEMA



Fuente: Esquema de elaboración propia.

Un proyecto no se hace de una vez: cuando una comprobación no cuadra, se vuelve atrás. ¿En qué fase está ahora tu equipo?

F8 ¿Qué hace convincente una solución? Cinco preguntas y un ejemplo

TEXTO

Cinco preguntas del equipo revisor

- **1. ¿Se entiende la pregunta?** Variables con unidades y supuestos dichos en voz alta.
- **2. ¿El modelo representa la situación?** Tabla, ecuación, gráfica o simulación coherentes entre sí.
- **3. ¿Se ha comprobado por otro camino?** Estimación, otro método, caso particular o simulación.
- **4. ¿Se han probado variantes y contraejemplos?** Una afirmación general necesita más que unos ejemplos.
- **5. ¿Se dicen los límites?** Dominio, restricciones reales, tamaño de la muestra, qué no se puede concluir.

Ejemplo breve (otro problema). *¿Compensa un carnet de 24 € que reduce la entrada del cine de 8 € a 6 €?* Variables: n entradas. Sin carnet: $8n$. Con carnet: $24 + 6n$. Igualamos: $8n = 24 + 6n \Rightarrow n = 12$. Comprobación: con 11 entradas, 88 frente a 90 (sin carnet gana); con 13, 104 frente a 102 (gana el carnet). Límite: solo vale si los precios no cambian. **Conclusión:** a partir de 13 entradas compensa el carnet; con 12 cuesta lo mismo.

Fuente: Elaboración propia.

Una conclusión convincente dice qué se ha calculado, cómo se ha comprobado y hasta dónde vale.

F9 Borrador de otro equipo (ficticio) para revisar

ESTUDIO DE CASO

Equipo X. Reto A (huerto con 40 m de valla).

«Probamos varias medidas con la valla rodeando todo: $5 \times 15 = 75$, $8 \times 12 = 96$ y $10 \times 10 = 100$. Gana el cuadrado de 10×10 con 100 m². Si el huerto se apoya en el muro, hacemos otra vez 10×10 y nos sobran 20 m de valla. **Conclusión: para cualquier valla el cuadrado siempre da más área.**»

Fuente: Texto ficticio con errores intencionados, creado para practicar la revisión por pares.

Léelo con las cinco preguntas de F8 y apunta al menos tres fallos antes de la ficha 7.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 10 · Investigar, modelizar y argumentar

ALUMNADO

FICHA 1 Elegimos un reto

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Lee F1 y F2-F6 por encima. Tenéis que elegir un reto por equipo y justificarlo.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

La parábola $y = -x^2 + 4x$ tiene su máximo en $x =$…

☐ 2 ☐ 4 ☐ −2

Una pendiente del 8 % significa que por cada 100 m horizontales se sube…

☐ 8 m ☐ 0,8 m ☐ 80 m

Si lanzo un dado justo 60 veces, lo más razonable es esperar un 6 unas…

☐ 6 veces ☐ 10 veces ☐ 60 veces

2 **Primera impresión de los tres retos.**

Reto	¿Qué pregunta responde?	¿Qué datos hay y cuáles faltan?	¿Qué matemáticas crees que necesitas?
A. Valla			
B. Rampa			
C. Dado			

3 **Tanteo numérico. Haz el del reto que más te atraiga: A: con 40 m de valla cerrada, calcula el área de rectángulos de $5 \times 15, 8 \times 12, 10 \times 10$ y 12×8; B: ¿qué pendiente tendría una rampa que salva 0,45 m con 5 m de recorrido horizontal? ¿Cumple la normativa de F3?; C: calcula la frecuencia relativa del 6 en la muestra 1 y compárala con $\frac{1}{6}$.**

4 **Elección y organización del equipo.**

Reto elegido y por qué	Roles (coordinador, calculista, dibujante, redactor/revisor)	Acuerdos de trabajo

FICHA 2 Pregunta, variables y plan

Sesión 2

Usa F7. Antes de calcular, deja por escrito qué se pregunta, qué se supone y cómo se va a comprobar.

1 **Ficha de proyecto (común a los tres retos).**

Apartado	Respuesta del equipo
Pregunta precisa	
Variables y unidades	
Datos y condiciones conocidos	
Supuestos que hacemos	
Plan en cuatro pasos	
¿Qué comprobación nos convencería?	

2 **Reto A.** Con la valla contra el muro de F2 (caso 2): define x e y, escribe la relación entre ellas con los 40 m de valla, despeja y y escribe el área $A(x)$ con su dominio.

3 **Reto B.** Para el desnivel de 0,45 m define las variables (h, d, L, p), escribe la relación entre p, h y d, decide qué límite de F3 hay que aplicar y plantea la desigualdad para el recorrido d mínimo.

4 **Reto C.** Formula la hipótesis «el dado es justo» y di cuántos seises esperarías en 300 tiradas, qué resultados te harían dudar y cómo podrías ver cuánto oscila el azar.

FICHA 3 Desarrollo numérico y algebraico

Sesión 3

Escribe cada paso y las unidades. Estima el resultado antes de calcular.

1 **Común: escribe en dos pasos la estrategia de tu reto y una estimación del resultado antes de calcular.**

2 **Reto A.** Completa la tabla del área $A(x) = x(40 - 2x)$. ¿Dónde está el máximo? Justifícalo con la simetría y escribe x, y y el área máxima.

x (m)	0	5	8	10	12	15	20
$y = 40 - 2x$ (m)							
A (m²)							

3 **Reto B.** Para cada desnivel, busca la pendiente permitida y calcula el recorrido horizontal mínimo $d = h/p$ y la longitud $L = \sqrt{h^2 + d^2}$ (intenta primero el 10 %, después el 8 % y después el 6 %, comprobando la condición sobre L).

Desnivel h (m)	Pendiente permitida	d mínimo (m)	L (m)	¿Cabe en un tramo (L ≤ 9 m)?
0,15				
0,30				
0,45				
0,60				

4 **Reto C.** Completa la tabla de la muestra 1 (F5): frecuencia esperada, diferencia y frecuencia relativa (en %).

Cara	Frecuencia	Esperada (50)	Diferencia	Frec. relativa (%)
1	41			
2	46			
3	48			
4	44			
5	51			
6	70			

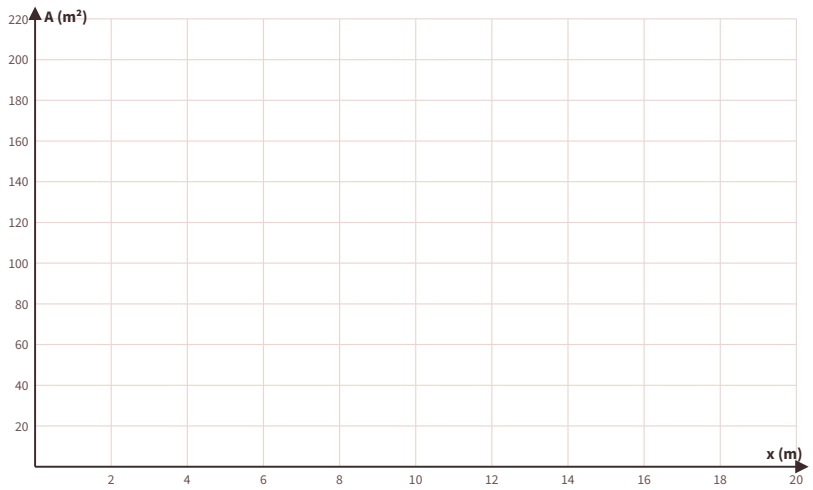
FICHA 4 Representamos el problema

Sesión 4

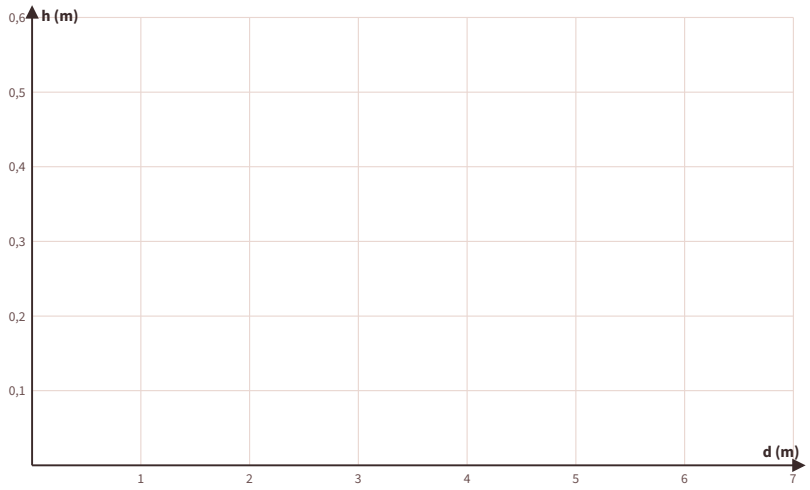
Una buena representación es parte de la solución: ejes con nombre y unidades, escala y puntos clave marcados.

1 **Común: ¿en qué fase del ciclo de F7 está tu equipo? ¿Qué os falta para pasar a la siguiente?**

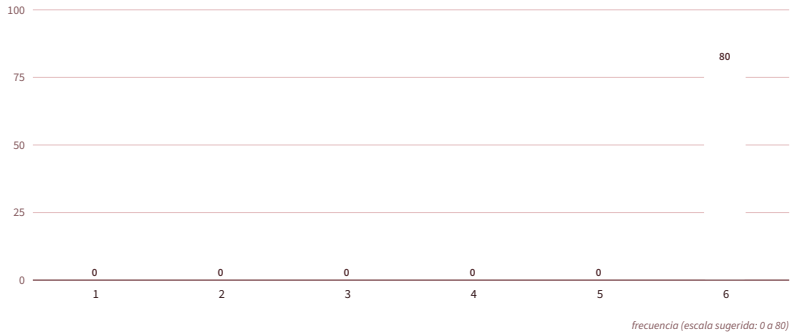
2 **Reto A.** Dibuja en la cuadrícula $A(x) = x(40 - 2x)$ para $x \in [0, 20]$ y, en el mismo gráfico, el caso 1 $A(x) = x(20 - x)$. Marca vértices y puntos de corte con el eje x. ¿Qué relación hay entre los dos máximos?



3 **Reto B.** Dibuja la recta $y = 0{,}08\,x$ (x = recorrido horizontal en m, y = altura en m) para $x \in [0, 7]$, marca el punto donde $y = 0{,}45$ y escribe sus coordenadas. Dibuja en la misma gráfica $y = 0{,}10\,x$ y explica qué diferencia hay.



4 **Reto C.** Dibuja las barras de la muestra 1 y una línea horizontal en 50. Marca de otro color las barras que se alejan más de 10 de la esperada. ¿Qué cara destaca?



FICHA 5 Datos, simulación y restricciones

Sesión 5

Lleva el modelo a la realidad: restricciones, medidas existentes o simulaciones. Usa hoja de cálculo o GeoGebra.

1 **Común: ¿qué datos o simulaciones necesita tu proyecto y cómo vais a asegurar que son fiables?**

2 **Reto A.** En el caso 2, el muro mide solo 15 m. Con tecnología, comprueba $A(x)$ y halla las nuevas medidas y el área máxima, teniendo en cuenta que $y \leq 15$. ¿Sigue sirviendo el vértice? Haz también $W = 10$ m y $W = 25$ m.

3 **Reto B.** Comprueba si las tres rampas existentes de F3 cumplen la normativa: calcula pendiente, longitud L, límite aplicable y tramo.

Rampa	Pendiente (%)	L (m)	Límite aplicable	¿Cumple? ¿Por qué?
R1				
R2				
R3				

4 **Reto C.** Con la hoja de cálculo simula 10 veces 300 lanzamientos de un dado justo y anota cuántos seises salen en cada serie (fórmula ALEATORIO.ENTRE(1;6)). ¿Cuál es el mayor? ¿Alguna vez llega a 70? Compáralo con el gráfico de F6.

Serie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de seises										

FICHA 6 Conjeturas y comprobación

Sesión 6

Una conjetura se enuncia antes de comprobarla. Un ejemplo no demuestra; un contraejemplo sí refuta.

1 Común: escribe tu conjetura (una afirmación general), cómo la pondrás a prueba y qué resultado la refutaría.

Conjetura	Cómo la pondremos a prueba	Qué la refutaría

2 **Reto A.** Conjetura: «contra el muro, el lado paralelo al muro mide el doble que el otro». Compruébala con otras longitudes de valla y demuéstrala con una longitud L cualquiera. Plantea la variante con una valla interior (caso 3).

Longitud de valla L	x óptimo	y óptimo	Área máxima
60			
80			
100			
L (general)			

3 **Reto B.** Conjetura 1: «la longitud de la rampa es casi igual al recorrido horizontal». Compruébala con $L/d = \sqrt{1+p^2}$ para $p = 0{,}06; 0{,}08$ y $0{,}10$. Conjetura 2: «cuanto menor es la pendiente permitida, más recorrido se necesita». Calcula d/h para los tres límites.

p	L/d	$d/h = 1/p$
0,06		
0,08		
0,10		

4 **Reto C.** En la muestra 2 el 6 salió 31 veces de 120. Compara con lo que se espera y con F6 (pie). ¿Qué conclusión sacas combinando las dos muestras? Calcula la frecuencia relativa del 6 en las 420 tiradas.

FICHA 7 Revisión por pares

Sesión 7

Lee F8 y F9. Criticar bien es ayudar: señala con precisión el fallo y propón una mejora.

1 **Revisa el borrador del equipo X (F9) con las cinco preguntas de F8.**

Pregunta de F8	¿Cumple? (sí, no o parcial)	Comentario concreto
1. Pregunta y variables		
2. Modelo		
3. Comprobación		
4. Variantes y contraejemplos		
5. Límites		

2 **Corrige el error del muro: ¿cuáles son las medidas óptimas y el área? Escribe la conclusión que sí sería correcta.**

3 **Retroalimentación para el equipo X: dos fortalezas y una mejora, con tono respetuoso.**

4 **Aplica las cinco preguntas a tu propio proyecto y decide dos cambios que harás.**

- ☐ La pregunta y las variables están claras (con unidades)
- ☐ El modelo es coherente con la situación
- ☐ Hay una comprobación por otro camino
- ☐ Se han probado variantes o contraejemplos
- ☐ Los límites del resultado están dichos
- ☐ Los dos cambios están anotados en el cuaderno

FICHA 8 Informe final

Sesión 8

Redactad el informe del proyecto: debe poder entenderlo alguien que no haya visto el problema.

1 **Esquema del informe.**

Sección	Qué contiene en nuestro proyecto	Hecho (✔)
Pregunta y variables		
Modelo y cálculos		
Representación		
Conjetura y comprobación		
Datos o simulación		
Límites y conclusión		

2 **Redacta la conclusión con su resultado, la comprobación que lo respalda y al menos dos límites.**

3 **Resume tu solución en cuatro líneas para alguien que no ha visto el problema.**

4 **Última comprobación del informe.**

- [ ] Las unidades aparecen en todos los resultados
- [ ] Hay gráfica o esquema con ejes, escala y rótulos
- [ ] Se ha comprobado el resultado por otro camino
- [ ] Se explican los límites y lo que no se puede concluir
- [ ] Se ha incorporado al menos una mejora de la revisión por pares

FICHA 9 Reto individual y defensa

Sesión 9

Resuelve sin ayuda del equipo la variante de tu reto y la reflexión final.

1 **Reto A.** **Valla de 60 m con una valla interior perpendicular al muro (dos parcelas iguales): $3x + y = 60$. Escribe $A(x)$, halla las medidas y el área máximas y comprueba si caben en un muro de 20 m. Si no caben, halla la mejor solución.**

2 **Reto B.** **Rampa para un desnivel de 0,36 m. Elige la pendiente máxima permitida (F3), calcula el recorrido horizontal mínimo, la longitud L y el ángulo. ¿Es posible con solo 4 m de espacio horizontal?**

3 **Reto C.** Un dado de otro club se lanzó 200 veces y el 6 salió 45 veces. Calcula la frecuencia relativa y compárala con $\frac{1}{6}$. Con F6 (pie): en 2 000 simulaciones de 200 tiradas, el 6 salió 45 o más veces en 32, y alguna cara salió 45 o más veces en 218. ¿Hay prueba de que el dado esté trucado? Razona la diferencia entre mirar el 6 desde el principio y mirar cualquier cara.

4 Común: ¿qué hace convincente tu solución además de tener una cuenta correcta? Da tres razones con ejemplos de tu proyecto y describe tu aportación al equipo.

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 10 · Investigar, modelizar y argumentar

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Proyecto matemático de investigación. Cada afirmación va acompañada de su cálculo, su comprobación y sus límites.

Título, reto y equipo

Reto elegido, roles y firmas.

Pregunta, variables y supuestos

Con unidades y datos de partida.

Modelo y cálculo

Tabla o ecuación y resolución con pasos.

Representación

Gráfica o esquema con ejes, escala y puntos clave.

Conjetura y comprobación

Enunciado, ejemplos y contraejemplos.

Datos o simulación

Restricciones, medidas o simulaciones.

Límites y revisión por pares

Qué no se puede concluir y mejoras tras la revisión.

Conclusión

Resultado, comprobación y recomendación.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 10 · Investigar, modelizar y argumentar

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Proyecto matemático de investigación**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] La pregunta del reto está formulada con precisión y las variables tienen unidades.
- [ ] Los supuestos y las condiciones del problema están escritos.
- [ ] El modelo (tabla, ecuación o simulación) es coherente con la situación y con las representaciones.
- [ ] La gráfica o el esquema tiene ejes rotulados, escala y puntos clave marcados.
- [ ] Los cálculos están escritos paso a paso y con unidades.
- [ ] El resultado se ha comprobado por otro camino (estimación, otro método o simulación).
- [ ] Hay una conjetura enunciada y puesta a prueba con ejemplos y contraejemplos.
- [ ] Se ha estudiado al menos una variante y se ha generalizado o explicado qué cambia.
- [ ] Se indican los límites del resultado y lo que no se puede concluir.
- [ ] Se incorporan las mejoras de la revisión por pares y la conclusión es clara.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 10 · Investigar, modelizar y argumentar

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Proyecto matemático de investigación**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 10 · Investigar, modelizar y argumentar

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé comprobar una solución por otro camino y decir hasta dónde vale.	○	○	○	○
Sé enunciar una conjetura y ponerla a prueba con ejemplos, contraejemplos o una generalización con letras.	○	○	○	○
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	○	○	○	○
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	○	○	○	○
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	○	○	○	○
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	○	○	○	○

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 10 · Investigar, modelizar y argumentar

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Reto cerrado con datos y estructura de informe: un corral rectangular con 24 m de valla y un esquema para redactar.

Ejemplo modelado

Con 24 m de valla cerrada, $2x + 2y = 24$, luego $y = 12 - x$ y $A(x) = x\,(12 - x)$. Para $x = 2$: $y = 10$ y $A = 20$ m². Para $x = 6$: $y = 6$ y $A = 36$ m². **Comprobación:** perímetro $2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 24$ ✔. **Límite:** x debe estar entre 0 y 12.

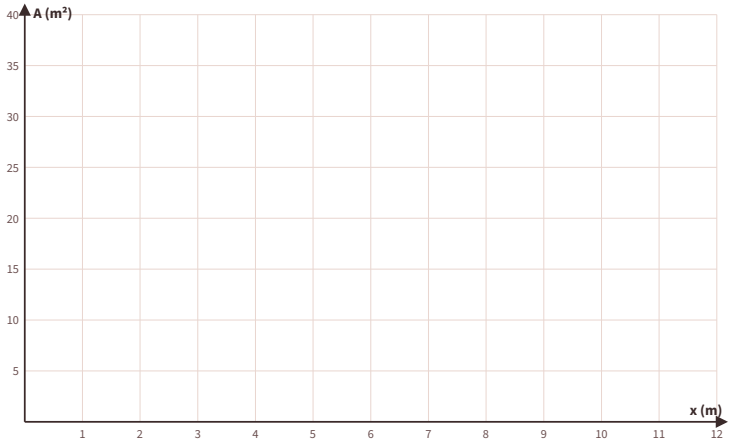
Estructura del informe y vocabulario

1. Pregunta. 2. Variables (con unidades). **3. Modelo** (tabla o fórmula). **4. Resultado. 5. Comprobación. 6. Límites. Conjetura:** afirmación que se pone a prueba. **Contraejemplo:** caso que la refuta. **Dominio:** valores con sentido. **Vértice:** punto máximo o mínimo de la parábola.

1 **Completa la tabla del área $A(x) = x(12 - x)$.**

x (m)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$y = 12 - x$ (m)											
A (m²)											

2 **Dibuja los puntos (x, A) y une los puntos con una curva suave. Marca el máximo.**



3 **Completa el informe.**

Pregunta: ¿qué medidas del corral de 24 m de valla dan más _____ ?

Resultado: el máximo es _____ m² cuando x = _____ m e y = _____ m (un cuadrado).

Comprobación: el perímetro es 2 · _____ + 2 · _____ = _____ m.

Límite: x solo tiene sentido entre _____ y _____ m.

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 10 · Investigar, modelizar y argumentar

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Cambiar una condición: ¿qué resultados dejan de valer?

Un resultado es válido bajo unas condiciones. Si cambia una condición del proyecto, ¿qué conclusiones se mantienen y cuáles dejan de ser ciertas? Elige la variante de tu reto, modifica **una** condición y analiza con ejemplos y con álgebra.

Pasos

1. Reto A: en el caso 2 (valla de 40 m contra el muro), supón que el muro mide solo W metros. Calcula el área máxima para $W = 10, 15, 20$ y 25 m y explica cuándo sigue valiendo la regla «$y = 2x$».
2. Reto B: cambia el límite de pendiente (por ejemplo, 6 % para todos los desniveles) y analiza qué pasa con el recorrido para $h = 0{,}15; 0{,}30; 0{,}45$ m. ¿Qué rampas dejan de caber en 6 m de recorrido horizontal?
3. Reto C: cambia el tamaño de la muestra: con 3 000 tiradas y $\frac{1}{4}$ de seises (frecuencia relativa 0,25), ¿qué esperarías para un dado justo? Explica por qué una frecuencia relativa igual necesita menos o más pruebas según el tamaño de la muestra.
4. Redacta una regla general que diga qué parte del resultado depende de la condición que has cambiado.

1 **Reto A: tabla de resultados según la longitud del muro.**

Muro W (m)	y óptimo (m)	x óptimo (m)	Área máxima (m²)	¿Se cumple $y = 2x$?
10				
15				
20				
25				

Entrega

Una tabla o gráfica de la variante, la explicación de qué resultados dejan de ser válidos y una regla general con una frase de límites.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 10 · Investigar, modelizar y argumentar

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: $x = 2$ (vértice $-\frac{4}{2\cdot(-1)} = 2$); 0,8 m; unas 10 veces.
2. Respuestas abiertas. Se valora que cada reto tenga su pregunta, que se identifiquen datos faltantes (por ejemplo, en el reto B, el límite de pendiente según la longitud) y que se prevean matemáticas pertinentes (funciones cuadráticas, pendiente y trigonometría, frecuencia y simulación).
3. A: $5 \times 15 = 75$ m², $8 \times 12 = 96$, $10 \times 10 = 100$, $12 \times 8 = 96$: el mayor es el cuadrado. B: $p = \frac{0{,}45}{5} = 0{,}09 = 9\,\%$; como $L \approx 5{,}02$ m (< 6 m), el límite es 8 %: no cumple. C: $\frac{70}{300} \approx 0{,}233$ (23,3 %) frente a $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$ (16,7 %): 20 seises más de los esperados.
4. Respuesta abierta. Se valora que los roles estén repartidos y que los acuerdos de trabajo sean concretos (reuniones, turnos de revisión).

Ficha 2

1. Respuesta abierta. Se valora que la pregunta sea precisa, que las variables tengan unidades y que se escriba una comprobación posible (otro método, estimación o simulación).
2. A: x = lado perpendicular al muro (m) e y = lado paralelo (m); $2x + y = 40$; $y = 40 - 2x$; $A(x) = x\,(40 - 2x)$ con dominio $0 < x < 20$ (para que $y > 0$).
3. B: h = desnivel (m), d = recorrido horizontal (m), $L = \sqrt{h^2 + d^2}$ longitud de la rampa (m), p = pendiente (tanto por uno). $p = \frac{h}{d}$. Con $h = 0{,}45$: con el 10 % haría falta $d = 4{,}5$ m y $L \approx 4{,}52$ m, que no es menor que 3 m, así que no se puede aplicar el 10 %. Con el 8 %, $d \geq \frac{0{,}45}{0{,}08} = 5{,}625$ m y $L \approx 5{,}64$ m < 6 m ✔. La desigualdad es $\frac{0{,}45}{d} \leq 0{,}08$, es decir, $d \geq 5{,}625$ m.
4. C: hipótesis de dado justo: $P(6) = \frac{1}{6}$; se esperan unos $300 \cdot \frac{1}{6} = 50$ seises. Dudaríamos con valores muy alejados (por ejemplo, más de 65). El azar oscila, y se puede medir cuánto simulando muchas series de 300 tiradas con un dado justo (F6): lo habitual está entre 40 y 64.

Ficha 3

1. Respuesta abierta (estimación esperable: A, un área de 150-250 m²; B, unos 5-6 m; C, unos 50 seises).
2. A: $y = 40, 30, 24, 20, 16, 10, 0$ para $x = 0, 5, 8, 10, 12, 15, 20$; $A = 0, 150, 192, 200, 192, 150, 0$. La parábola es simétrica y corta al eje x en 0 y 20, luego el máximo está en $x = 10$: $y = 20$ y $A = 200$ m².
3. B: 0,15 m: 10 % ($d = 1{,}5$ m, $L \approx 1{,}51$ m < 3 m ✔); $L \approx 1{,}51$ m; cabe. 0,30 m: con el 10 %, $d = 3$ m y $L \approx 3{,}02$ m (≥ 3 m ✘); con el 8 %, $d = 3{,}75$ m y $L \approx 3{,}76$ m (< 6 m ✔): $d = 3{,}75$ m. 0,45 m: 8 %, $d = 5{,}625$ m y $L \approx 5{,}64$ m. 0,60 m: con el 8 %, $d = 7{,}5$ m y $L \approx 7{,}52$ m (≥ 6 m ✘); con el 6 %, $d = 10$ m y $L \approx 10{,}02$ m > 9 m: no cabe en un solo tramo, hay que dividirla con un descansillo.
4. C: diferencias $-9, -4, -2, -6, +1, +20$; frecuencias relativas: $13{,}7\,\%, 15{,}3\,\%, 16{,}0\,\%, 14{,}7\,\%, 17{,}0\,\%, 23{,}3\,\%$ (suman 100 %). La cara 6 destaca con +20.

Ficha 4

1. Respuesta abierta: se valora que el equipo identifique su fase y la tarea pendiente.
2. A: caso 2, vértice $(10, 200)$, cortes en 0 y 20; caso 1, $A(x) = 20x - x^2$, vértice $(10, 100)$, cortes en 0 y 20. El máximo del caso 2 es el doble del del caso 1 (200 frente a 100): al apoyar un lado en el muro, el mismo perímetro de valla encierra el doble de área.
3. B: la recta pasa por $(0, 0)$ y $(5{,}625;\ 0{,}45)$ para el 8 %. La del 10 % es más inclinada: llega a 0,45 m en $x = 4{,}5$ m. Con menos pendiente hace falta más recorrido.
4. C: barras 41, 46, 48, 44, 51 y 70 con línea en 50; destaca la cara 6 (se aleja más de 10 de la esperada; las demás están a menos de 10).

Ficha 5

1. Respuesta abierta. Se valora que se nombren los datos necesarios y los posibles sesgos (por ejemplo, un dado, una persona o una superficie irregular).
2. A: con $y \leq 15$ el vértice ($y = 20$) ya no es posible. La parábola crece hasta $x = 10$ y decrece después; con $y = 15$ se tiene $x = 12{,}5$ y $A = 12{,}5 \cdot 15 = 187{,}5$ m². Para $W = 10$: $y = 10, x = 15, A = 150$ m². Para $W = 25$: sigue valiendo el vértice ($y = 20 \leq 25$): $x = 10, A = 200$ m².
3. R1: $p = \frac{0{,}20}{2{,}40} \approx 8{,}3\,\%$; $L \approx 2{,}41$ m < 3 m; límite 10 %: cumple. R2: $p \approx 8{,}3\,\%$; $L \approx 3{,}61$ m; límite 8 %: no cumple (excede por poco). R3: $p = \frac{0{,}60}{10{,}50} \approx 5{,}7\,\%$; $L \approx 10{,}52$ m; límite 6 %, la pendiente cumple, pero el tramo supera los 9 m: no cumple, hay que dividirla.
4. Resultados aleatorios: los valores típicos están entre 40 y 60 y llegar a 70 es rarísimo (aprox. 0,1 %). Se acepta cualquier serie coherente.

Ficha 6

1. Respuesta abierta. Se valora que la conjetura sea una afirmación general y que se indique qué ejemplo la refutaría.
2. A: $L = 60$: $x = 15, y = 30, A = 450$. $L = 80$: $x = 20, y = 40, A = 800$. $L = 100$: $x = 25, y = 50, A = 1\,250$. General: $2x + y = L, y = L - 2x, A(x) = x(L - 2x) = -2x^2 + Lx$; el vértice está en $x = \frac{L}{4}, y = \frac{L}{2}$ y $A = \frac{L^2}{8}$: el lado paralelo al muro es el doble ✔ (conjetura demostrada). Variante (caso 3): $3x + y = L, A = x(L - 3x)$, $x = \frac{L}{6}, y = \frac{L}{2}$ y $A = \frac{L^2}{12}$: sigue valiendo que $y = \frac{L}{2}$, pero ahora $y = 3x$.
3. B: $L/d = \sqrt{1 + p^2}$: $1{,}0018$ ($p = 0{,}06$), $1{,}0032$ ($0{,}08$), $1{,}0050$ ($0{,}10$): la longitud supera al recorrido menos del 0,5 %: conjetura 1 cierta para pendientes pequeñas. $d/h = \frac{1}{p}$: $16{,}7$, $12{,}5$ y 10: conjetura 2 cierta (menor pendiente, más recorrido).
4. C: se esperaban 20 seises y salieron 31 ($25{,}8\,\%$); en 2 000 simulaciones de 120 tiradas solo 8 llegaron a 31 o más ($0{,}4\,\%$). Combinadas: $\frac{70+31}{300+120} = \frac{101}{420} \approx 0{,}240$ (24,0 %) frente a $16{,}7\,\%$. Dos muestras independientes con el mismo exceso son una evidencia fuerte de que el dado favorece el 6, aunque la simulación nunca «demuestra» con certeza absoluta.

Ficha 7

1. Fallos esperados del borrador: 1) variables sin unidades y sin ecuación; 2) modelo incorrecto en el caso del muro (con un muro, el lado paralelo no necesita valla, así que con 40 m se puede hacer 10×20); 3) comprobación insuficiente (tres ejemplos no prueban nada); 4) conclusión demasiado general y falsa; 5) no se dicen límites ni se prueba un contraejemplo.
2. Con muro: $2x + y = 40$; $x = 10, y = 20$, $A = 200$ m². Una conclusión correcta: «Con la valla cerrada, el cuadrado de 10×10 (100 m²) es lo mejor; con un muro, el huerto de 10×20 (200 m²) es mejor que el cuadrado; la mejor forma depende de las condiciones».
3. Retroalimentación esperable: fortalezas (por ejemplo, empiezan por ejemplos numéricos y hacen la tabla); mejora: probar una variante con álgebra y decir los límites.
4. Se valora que los dos cambios sean concretos y realizables.

Ficha 8

1. Respuesta abierta. Se valora que cada sección tenga contenido real del proyecto y no una frase genérica.
2. Ejemplos de conclusión: A) «Con 40 m de valla y un muro, el huerto de 10×20 da 200 m², el doble que cerrando los cuatro lados; si el muro mide menos de 20 m, el máximo baja». B) «Para 0,45 m se necesitan al menos 5,63 m de recorrido a un 8 % (4,57°); en 4 m no cabe en un solo tramo». C) «Dos muestras con 24 % de seises, frente a 16,7 % esperado, y una simulación que casi nunca da tanto, indican que el dado probablemente está trucado; no es una prueba definitiva».
3. Resumen: se valora que sea comprensible para alguien que no vio el problema y que contenga pregunta, método, resultado y límite.

Ficha 9

1. A: $A(x) = x(60 - 3x) = -3x^2 + 60x$; vértice en $x = 10$: $y = 30$ y $A = 300$ m². No cabe en un muro de 20 m ($y = 30 > 20$). Con $y \leq 20$: $y = 20$, $x = \frac{60-20}{3} \approx 13{,}33$ m y $A \approx 266{,}7$ m² (la parábola decrece para $x > 10$, así que el mejor valor permitido es el de menor x posible).
2. B: con el 10 %, $d = 3{,}6$ m y $L \approx 3{,}62$ m (≥ 3 m ✘). Con el 8 %: $d = 4{,}5$ m y $L \approx 4{,}51$ m < 6 m ✔. Recorrido mínimo $4{,}5$ m; ángulo $\tan^{-1}(0{,}08) \approx 4{,}57°$. Con 4 m la pendiente sería $\frac{0{,}36}{4} = 9\,\% > 8\,\%$: no es posible en un solo tramo; habría que ampliar el espacio o diseñar otra solución (por ejemplo, un tramo en forma de L).
3. C: $\frac{45}{200} = 22{,}5\,\%$ frente a $16{,}7\,\%$ (esperados 33 o 34 seises). Si se sospechaba del 6 desde el principio, solo 32 de 2 000 ($1{,}6\,\%$) simulaciones llegan a 45 o más: es un indicio. Pero si se mira cualquier cara, 218 de 2 000 ($10{,}9\,\%$) simulaciones tienen alguna cara con 45 o más: no es raro. Conclusión prudente: indicio, no prueba; hacen falta más tiradas (y una hipótesis fijada antes de mirar).
4. Respuesta abierta. Razones esperables: comprobación por otro camino, límites dichos, variantes y contraejemplos, representaciones coherentes, lenguaje claro y reparto del trabajo.

Refuerzo

1. $y = 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$ y $A = 11, 20, 27, 32, 35, 36, 35, 32, 27, 20, 11$ para $x = 1, \ldots, 11$.
2. Curva simétrica con máximo en $(6, 36)$.
3. Área; 36 m²; $x = 6$ m e $y = 6$ m; $2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 24$ m; entre 0 y 12 m.

Ampliación

1. A: $W = 10$: $y = 10$, $x = 15$, $A = 150$ m² ($y = 2x$ no se cumple: $10 \neq 30$). $W = 15$: $y = 15$, $x = 12{,}5$, $A = 187{,}5$ m² (no se cumple). $W = 20$: $y = 20$, $x = 10$, $A = 200$ m² (sí se cumple). $W = 25$: $y = 20$, $x = 10$, $A = 200$ m² (sí). La regla $y = 2x$ vale solo si el muro mide 20 m o más; si el muro es más corto, se usa todo el muro ($y = W$) y $x = \frac{40 - W}{2}$.
2. B: con el 6 % siempre: $d = \frac{h}{0{,}06}$: 2,5 m, 5 m y 7,5 m. Con el 6 % todas caben en 6 m salvo $h = 0{,}45$ m (7,5 m); el recorrido crece con el desnivel y la pendiente permitida decide si cabe.
3. C: para un dado justo con 3 000 tiradas se esperan 500 seises ($16{,}7\ \%$); la variabilidad relativa disminuye al aumentar la muestra (la frecuencia relativa oscila menos), así que $25\ \%$ con 3 000 tiradas es una prueba mucho más fuerte que con 300.
4. Regla general esperable: una conclusión depende de las condiciones del problema (longitud del muro, normativa, tamaño de muestra); al cambiarlas hay que volver a comprobar los resultados.

Errores frecuentes

- Modelar mal una condición del problema (por ejemplo, vallar el lado del muro) y no comprobar con un dibujo o un caso particular.
- Aceptar una conjetura porque se cumple en dos o tres ejemplos, sin buscar contraejemplos ni generalizar con letras.
- Confundir pendiente en porcentaje con ángulo en grados (un 8 % no son 8°: son unos 4,57°).
- Aplicar un límite de pendiente sin comprobar la condición sobre la longitud de la rampa (10 %, 8 % o 6 % según L).
- Concluir que el dado está trucado (o que no lo está) con una sola muestra, sin comparar con la variabilidad del azar.
- Dar el resultado sin unidades ni límites, o con precisión excesiva.

Criterios para valorar respuestas abiertas

- El valor del proyecto está en el proceso: se valora más una comprobación por otro camino y una conclusión con límites que un resultado perfecto.
- En el reto C se acepta cualquier decisión (hay indicio, no hay prueba) si se justifica con las simulaciones y se distingue indicio de prueba.
- En la revisión por pares se valora que la crítica sea precisa, respetuosa y accionable (dónde está el fallo y cómo mejorarlo).
- El uso de GeoGebra u hoja de cálculo es legítimo para comprobar; el informe debe explicar con palabras qué muestra la herramienta.

Créditos, fuentes y condiciones de uso

Edición revisada: octubre de 2026

Situaciones de aprendizaje · Matemáticas · 4.º ESO · Matemáticas B. Material elaborado y editado por **recursoseso.com**.

Normativa de referencia

- Ley Orgánica 2/2006, de Educación, modificada por la Ley Orgánica 3/2020 (LOMLOE).
- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la ESO.
- Currículos autonómicos correspondientes, a los que debe adaptarse esta propuesta.

Gráficos, esquemas y fórmulas

Gráficas, diagramas, planos y esquemas de elaboración propia. Fórmulas compuestas con **KaTeX** (licencia MIT). Los mapas, cuando aparecen, se elaboran con datos de **Natural Earth** (dominio público).

Datos y contextos

Los problemas usan datos reales cuando se indica su fuente (INE, Eurostat, Banco de España, AEMET, organismos oficiales y similares), redondeados con fines didácticos. Los catálogos de precios, tarifas, empresas, personajes y conjuntos de datos señalados como ficticios han sido creados para el aula. Las cifras económicas y tarifas deben actualizarse cuando se trabajen problemas del presente.

Herramientas digitales

Las referencias a calculadora, hoja de cálculo o geometría dinámica (por ejemplo, GeoGebra) son orientativas: todas las actividades pueden resolverse también con lápiz, papel y los datos del dossier.

Condiciones de uso

© 2026 recursoseso.com. Todos los derechos reservados. Se autoriza la reproducción de las páginas de este cuaderno para su uso en el aula por parte del docente o del centro educativo que lo ha adquirido u obtenido legítimamente. No está permitida su redistribución, venta, publicación en otras webs o plataformas ni su modificación para uso comercial sin autorización expresa de recursoseso.com.

Si detectas algún error o quieres proponer una mejora, puedes comunicarlo a través de **recursoseso.com**. Este material se revisa y actualiza periódicamente.