SITUACIONES DE APRENDIZAJE

Matemáticas

4.º ESO

Matemáticas A

10 situaciones de aprendizaje completas

Con secuencia didáctica, evaluación, rúbricas y anexos listos para usar

Índice

Presentación del cuaderno 3

Plan general 5

SdA 01 ¿Qué tarifa nos conviene? 6

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 13

SdA 02 Finanzas para la vida cotidiana 34

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 41

SdA 03 Álgebra para resolver problemas reales 63

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 70

SdA 04 Planificamos un pequeño proyecto 94

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 101

SdA 05 ¿Cómo cambia una variable? 123

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 129

SdA 06 Gráficas que pueden engañar 152

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 159

SdA 07 Diseñamos y medimos espacios 184

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 191

SdA 08 Estadísticas que pueden engañar 214

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 221

SdA 09 ¿Qué riesgo estamos dispuestos a asumir? 246

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 253

SdA 10 Matemáticas para tomar una decisión 275

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 283

Créditos, fuentes y condiciones de uso 310

PRESENTACIÓN

Un cuaderno para pensar con las matemáticas

Este cuaderno reúne **10 situaciones de aprendizaje** completas de Matemáticas para 4.º ESO · Matemáticas A, con un total de **78 sesiones**. Cada situación parte de un reto con sentido y culmina en un producto final en el que el alumnado interpreta, modeliza, resuelve, comprueba y comunica.

Sobre este volumen

En 4.º ESO el RD 217/2022 diferencia Matemáticas A y Matemáticas B. Matemáticas A se desarrolla preferentemente mediante resolución de problemas, investigación y análisis matemático de situaciones de la vida cotidiana. Este cuaderno prioriza contextos de consumo, finanzas, datos, planificación y toma de decisiones.

Criterio de uso curricular. La concreción y secuenciación propuestas son orientativas. Deben adaptarse al currículo de la comunidad autónoma, a la programación del departamento, al número real de sesiones y al punto de partida del alumnado.

Criterios metodológicos comunes

- ✓ Resolución de problemas como eje de aprendizaje, evitando reducir las situaciones a una sucesión de ejercicios rutinarios.
- ✓ Conexión entre representaciones numéricas, algebraicas, gráficas, geométricas y verbales.
- ✓ Uso razonado de calculadora, hoja de cálculo, geometría dinámica u otras herramientas cuando mejoran la comprensión o la comprobación.
- ✓ Evaluación continua y formativa mediante producciones de proceso, producto final y evidencia individual.
- ✓ Trabajo explícito del sentido socioafectivo: perseverancia, revisión del error, comunicación, cooperación e inclusión.

Cómo está organizada cada situación

Contexto y reto
Pregunta guía, reto y producto final.

Currículo
Competencias, criterios, saberes y objetivos.

Sesiones
Secuencia con una evidencia por sesión.

DUA
Medidas de inclusión, refuerzo y ampliación.

Evaluación
Instrumentos, rúbrica y variantes.

Los diez anexos de cada situación

Cada situación incluye anexos listos para imprimir o proyectar: dossier con datos, tablas, gráficas y esquemas, fichas de trabajo, plantillas, instrumentos de evaluación y una guía docente con todas las soluciones. Los del alumnado llevan cabecera para nombre, grupo y fecha.

1. Ficha de lanzamiento del reto
2. Dossier de fuentes y materiales base
3. Fichas de actividades del alumnado
4. Plantilla del producto final
5. Lista de cotejo para el proceso y la entrega
6. Rúbrica imprimible
7. Autoevaluación y coevaluación
8. Material de apoyo y refuerzo
9. Actividad de ampliación
10. Guía docente de respuestas y orientaciones

Claves de lectura: competencias y sentidos

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICAS (SÍNTESIS)

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE4** Utilizar el pensamiento computacional: descomponer, reconocer patrones, generalizar y crear algoritmos.
- **CE5** Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.
- **CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.
- **CE9** Gestionar emociones, aceptar el error y perseverar en el aprendizaje de las matemáticas.
- **CE10** Trabajar en equipo con respeto, asumiendo roles y valorando la diversidad.

SENTIDOS DE LOS SABERES BÁSICOS

- **A** Sentido numérico
- **B** Sentido de la medida
- **C** Sentido espacial
- **D** Sentido algebraico
- **E** Sentido estocástico
- **F** Sentido socioafectivo

Base normativa: LOMLOE y Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo. La secuenciación es orientativa y debe adaptarse al currículo autonómico. En cada situación, los criterios de evaluación se presentan en síntesis operativa; su formulación literal figura en el anexo II del real decreto.

Plan general · 4.º ESO · Matemáticas A

1.º trimestre	1.º-2.º trimestre	2.º trimestre	2.º-3.º trimestre	3.º trimestre
3 situaciones · 23 sesiones	1 situación · 8 sesiones	2 situaciones · 14 sesiones	1 situación · 8 sesiones	3 situaciones · 25 sesiones

1 ¿Qué tarifa nos conviene?

7 sesiones · 1.º trimestre

Comparador de tarifas con recomendación

2 Finanzas para la vida cotidiana

8 sesiones · 1.º trimestre

Guía de decisiones financieras básicas

3 Álgebra para resolver problemas reales

8 sesiones · 1.º trimestre

Banco comentado de modelos algebraicos

4 Planificamos un pequeño proyecto

8 sesiones · 1.º-2.º trimestre

Plan matemático de viabilidad ficticio

5 ¿Cómo cambia una variable?

7 sesiones · 2.º trimestre

Atlas de cambios y funciones cotidianas

6 Gráficas que pueden engañar

7 sesiones · 2.º trimestre

Auditoría matemática de gráficos públicos ficticios

7 Diseñamos y medimos espacios

8 sesiones · 2.º-3.º trimestre

Proyecto geométrico de reforma ficticia

8 Estadísticas que pueden engañar

8 sesiones · 3.º trimestre

Informe de investigación estadística

9 ¿Qué riesgo estamos dispuestos a asumir?

8 sesiones · 3.º trimestre

Informe de probabilidad para una decisión

10 Matemáticas para tomar una decisión

9 sesiones · 3.º trimestre

Informe integrador de decisión multicriterio

01

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

¿Qué tarifa nos conviene?

PREGUNTA GUÍA

¿Qué plan es más barato y a partir de qué consumo cambia la respuesta?

CURSO
4.º ESO · Matemáticas A

SESIONES
7 sesiones · 1.º trimestre

SENTIDOS PRIORITARIOS
A · Sentido numérico · D · Sentido algebraico

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE2, CE6, CE7, CE8

PRODUCTO FINAL
Comparador de tarifas con recomendación

CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 1.2, 2.2, 6.1, 7.1, 8.1

Contexto, reto y sentido

Tres planes de datos móviles de una compañía ficticia anuncian precios muy distintos: uno «sin cuota», otro «el equilibrado» y otro «el más barato por gigabyte». Cuatro personas con hábitos muy diferentes quieren contratar uno y cada plan parece ser «el mejor» según quién lo mire. Antes de firmar, hace falta saber cuánto pagaría cada persona con cada plan y **a partir de qué consumo cambia la respuesta**.

La situación moviliza el sentido algebraico y el numérico: cada tarifa es una relación *coste = cuota fija + precio por unidad · consumo*, es decir, una función afín (lineal cuando la cuota fija es 0). El alumnado la representa con tablas, gráficas y expresiones, plantea ecuaciones para hallar los puntos de corte entre planes, interpreta cada solución dentro del contexto (¿qué significa 10 GB?) y comunica una recomendación con sus supuestos. El comparador final debe ser claro para alguien que no ha visto el proceso.

Reto

Construir un comparador de tres tarifas de datos móviles con tabla, gráfica, ecuaciones de los puntos de corte y una recomendación razonada para cuatro perfiles de consumo, indicando los supuestos.

Producto final

Comparador de tarifas con recomendación.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

1.1 Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.

1.2 Seleccionar herramientas y estrategias elaboradas valorando su eficacia e idoneidad en la resolución de problemas.

2.2 Seleccionar las soluciones óptimas de un problema valorando tanto la corrección matemática como sus implicaciones desde diferentes perspectivas.

6.1 Proponer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.

7.1 Representar matemáticamente la información más relevante de un problema, conceptos, procedimientos y resultados, visualizando ideas y estructurando procesos.

8.1 Comunicar ideas, conclusiones, conjeturas y razonamientos matemáticos utilizando diferentes medios, con coherencia, claridad y terminología apropiada.

Saberes básicos prioritarios

A
Sentido numérico

- Números reales (decimales exactos) y operaciones en contextos de precios y consumos; redondeo y estimación del coste.
- Proporcionalidad directa: coste variable proporcional al consumo; diferencia entre cantidad fija y cantidad proporcional.
- Uso razonado de la calculadora y de la hoja de cálculo para comprobar resultados.

D
Sentido algebraico

- Expresión algebraica de una tarifa $C = a + b\,x$ y significado de los coeficientes (coste fijo, precio por unidad).
- Función lineal y afín: tabla de valores, gráfica, pendiente y ordenada en el origen en contexto.
- Ecuaciones lineales con la incógnita en los dos miembros para hallar el punto de corte; comprobación de la solución.
- Inecuaciones lineales sencillas e intervalos para describir qué plan conviene en cada tramo de consumo.

F
Sentido socioafectivo

- Toma de decisiones con información incompleta y revisión del error (de cálculo o de planteamiento).
- Roles de equipo (calculista, graficador, revisor, portavoz) y comunicación respetuosa de la recomendación.

Objetivos didácticos

- ✓ Reformular tarifas mediante tablas, gráficas y expresiones.
- ✓ Resolver puntos de corte entre planes.
- ✓ Valorar soluciones según perfiles de consumo.
- ✓ Comunicar una recomendación con supuestos explícitos.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos
El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas
Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples
Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito
Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente
Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Lectura crítica de tarifas ficticias

Evidencia: Ficha 1: diagnóstico y lectura crítica de las tarifas: coste de cada plan con 10 GB y análisis de eslóganes publicitarios.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Coste fijo + coste variable

Evidencia: Ficha 2: expresiones $C(x)$ de cada plan y tabla de costes de los cuatro perfiles.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Tabla y gráfica de cada plan

Evidencia: Ficha 3: tabla de valores y gráfica de las tres tarifas, con pendiente y ordenada interpretadas.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Ecuación del punto de equilibrio

Evidencia: Ficha 4: ecuaciones de los puntos de corte, comprobación y significado de cada solución.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Perfiles de consumo y decisión

Evidencia: Ficha 5: intervalos de consumo, recomendaciones por perfil y coste anual de un perfil variable.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Comparador digital o en papel

Evidencia: Ficha 6: comparador en hoja de cálculo (fórmulas, tabla de ganadores y detección de errores).

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Defensa y caso individual

Evidencia: Ficha 7: caso individual (patinetes compartidos): modelo, punto de corte, recomendación y comprobación.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Tarifas ficticias · hoja de cálculo/GeoGebra · calculadora

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo — Anexo 8

Dos tarifas lineales con números sencillos y tabla iniciada.

Ampliación — Anexo 9

Añadir una tarifa por tramos y estudiar cuándo deja de ser lineal.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Lectura de las tres tarifas y de los perfiles, separando cuota fija, precio por GB y consumo, y reformulando cada eslogan con una tabla o un cálculo.	Ficha 1 y Ficha 2 / lista de cotejo
1.2	Elección razonada entre tabla, gráfica, ecuación y hoja de cálculo según la pregunta, y valoración de cuál es más eficaz para hallar el punto de corte.	Fichas 3, 4 y 6 / escala de valoración
2.2	Selección del plan óptimo de cada perfil considerando no solo el coste mensual sino la variabilidad del consumo y el coste anual.	Ficha 5 y recomendación del comparador (Anexo 4) / rúbrica
6.1	Traducción de las tarifas y del caso de patinetes a modelos $C = a + b\,x$ y uso de las soluciones para decidir en el contexto real.	Ficha 7 (caso individual) y Anexo 4 / rúbrica
7.1	Representación de cada plan mediante tabla, gráfica con ejes rotulados y expresión, y marcado de los puntos de corte sobre la gráfica.	Ficha 3 y Anexo 4 / rúbrica
8.1	Redacción de la recomendación con lenguaje matemático (ecuación, intervalo, supuestos) y defensa oral ante el grupo.	Defensa y Anexo 4 / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Comparador, gráfica, ecuaciones y recomendación.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 1 · ¿Qué tarifa nos conviene?

ALUMNADO

Lucía casi no gasta datos, Marcos va y viene con el móvil, Aisha ve series en el autobús y Hugo está justo en medio. La compañía Nexa ofrece tres planes: Libre (sin cuota, 1,50 € por GB), Equilibrio (9 € al mes más 0,60 € por GB) y Premium (21 € al mes más 0,30 € por GB). El anuncio de cada uno dice «¡el más barato!». ¿Quién tiene razón? Vais a convertiros en el equipo de asesoría de tarifas: traducir cada oferta a una fórmula, dibujarla, encontrar el consumo en el que dos planes cuestan lo mismo y recomendar con datos. Ojo: lo que es barato para una persona puede ser caro para otra.

> *¿Qué plan es más barato y a partir de qué consumo cambia la respuesta?*

Vuestro reto

Construir un comparador de tres tarifas de datos móviles con tabla, gráfica, ecuaciones de los puntos de corte y una recomendación razonada para cuatro perfiles de consumo, indicando los supuestos.

Lo que vais a producir

Comparador de tarifas con recomendación.

Hoja de ruta · 7 sesiones

1. Leemos las tarifas con ojo crítico: ¿qué significan realmente los eslóganes?
2. Separamos el coste fijo y el coste variable y escribimos la fórmula de cada plan.
3. Hacemos la tabla y la gráfica de los tres planes.
4. Planteamos y resolvemos las ecuaciones de los puntos de corte.
5. Decidimos qué plan conviene a cada perfil de consumo.
6. Construimos el comparador en papel o en hoja de cálculo.
7. Defendemos la recomendación y resolvemos un caso nuevo de forma individual.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Reformular tarifas mediante tablas, gráficas y expresiones.
- ✓ Resolver puntos de corte entre planes.
- ✓ Valorar soluciones según perfiles de consumo.
- ✓ Comunicar una recomendación con supuestos explícitos.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 1 · ¿Qué tarifa nos conviene?

ALUMNADO

Tarifas ficticias de la compañía Nexa, perfiles de consumo, esquemas del coste fijo y variable, un ejemplo resuelto de punto de corte, una gráfica comparativa y la plantilla de la hoja de cálculo. Todos los datos son inventados para el aula.

F1 Tarifas de datos móviles de Nexa

DATOS

Plan	Cuota fija mensual	Precio por GB consumido	Eslogan del anuncio
Libre	0 €	1,50 €	«Sin cuotas, sin ataduras»
Equilibrio	9 €	0,60 €	«El plan más equilibrado»
Premium	21 €	0,30 €	«¡Solo 0,30 € por GB! El más barato»

Fuente: Datos ficticios creados para el aula. Precios mensuales con IVA incluido.

Se paga la cuota fija aunque no se gaste ningún dato. Los GB se cobran por unidad consumida (se admiten decimales, p. ej. 2,5 GB).

F2 Perfiles de consumo

DATOS

Perfil	Consumo medio al mes	Cómo usa el móvil
Lucía	4 GB	Mensajes, redes con wifi en casa y en el centro.
Marcos	15 GB	Música en streaming y mapas; algún vídeo fuera de casa.
Aisha	45 GB	Series y vídeos en el transporte, mucho tiempo fuera de casa.
Hugo	9 GB	Uso moderado; depende de los meses de exámenes.

Consumo de Marcos durante un año (GB): 8, 10, 12, 15, 18, 20, 22, 15, 12, 10, 14, 12. Suma: 168 GB.

Fuente: Datos ficticios creados para el aula.

El consumo medio no basta: a veces el consumo varía mucho de un mes a otro.

F3 Coste fijo + coste variable: la fórmula de una tarifa

TEXTO

Una tarifa de este tipo tiene dos partes:

- **Coste fijo** a (cuota): se paga siempre, consuma lo que consuma.
- **Coste variable** $b\,x$: depende del consumo x (en GB). El número b es el precio de cada GB.

$$C(x) = a + b\,x$$

Cómo se lee en una gráfica: a es la **ordenada en el origen** (donde la recta corta el eje vertical) y b es la **pendiente** (cuántos euros más pagas por cada GB más).

Punto de corte de dos planes. Es el consumo x para el que cuestan lo mismo: se igualan las dos fórmulas $C_1(x) = C_2(x)$ y se despeja x. Después se calcula el coste común sustituyendo.

¡Cuidado! No es lo mismo el *precio por GB* (b) que el *coste total* (C).

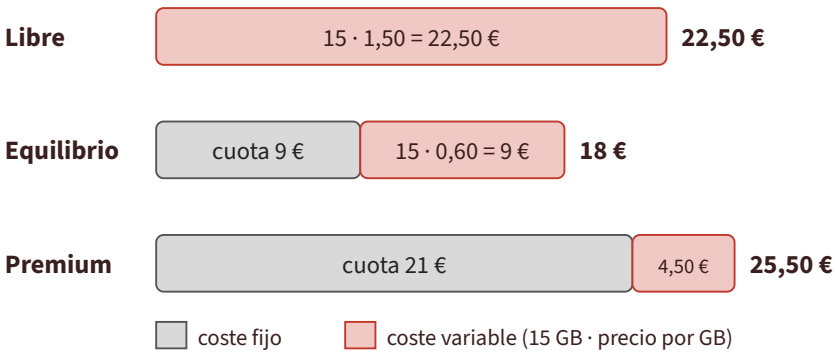
Fuente: Elaboración propia.

Una recta con $a = 0$ pasa por el origen: el coste es directamente proporcional al consumo.

F4 ¿Qué parte del coste es fija y cuál variable? Consumo de 15 GB

ESQUEMA

Coste mensual con 15 GB (barras dibujadas a escala)



Fuente: Esquema de elaboración propia con las tarifas de F1.

Con 15 GB el plan «más barato por GB» (Premium) es en realidad el más caro de los tres. ¿Por qué?

F5 Ejemplo modelado: el plan Libre (tabla y gráfica)

GRÁFICO

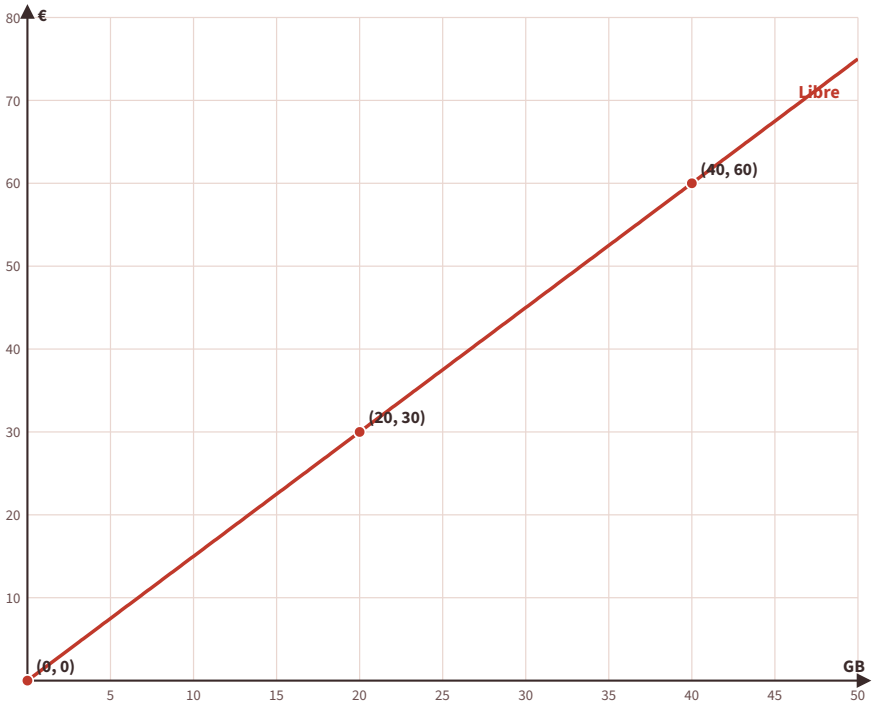


Tabla de valores: con 0 GB → 0 €; con 20 GB → $1{,}5 \cdot 20 = 30$ €; con 40 GB → $1{,}5 \cdot 40 = 60$ €. Fórmula: $C(x) = 1{,}5\,x$. Pasa por el origen y su pendiente es $1{,}5$ €/GB.

Fuente: Elaboración propia con los datos de F1.

Para dibujar una recta bastan dos puntos; un tercero sirve de comprobación.

F6 Ejemplo resuelto: ¿cuándo cuestan lo mismo Libre y Equilibrio?

ESTUDIO DE CASO

1. Fórmulas. $C_L(x) = 1{,}5\,x$ y $C_E(x) = 9 + 0{,}6\,x$.

2. Igualamos (mismo coste): $1{,}5\,x = 9 + 0{,}6\,x$.

3. Despejamos. $1{,}5\,x - 0{,}6\,x = 9 \Rightarrow 0{,}9\,x = 9 \Rightarrow x = 9 : 0{,}9 = 10$ GB.

4. Coste común. $C_L(10) = 1{,}5 \cdot 10 = 15$ € y $C_E(10) = 9 + 0{,}6 \cdot 10 = 15$ €. ✔

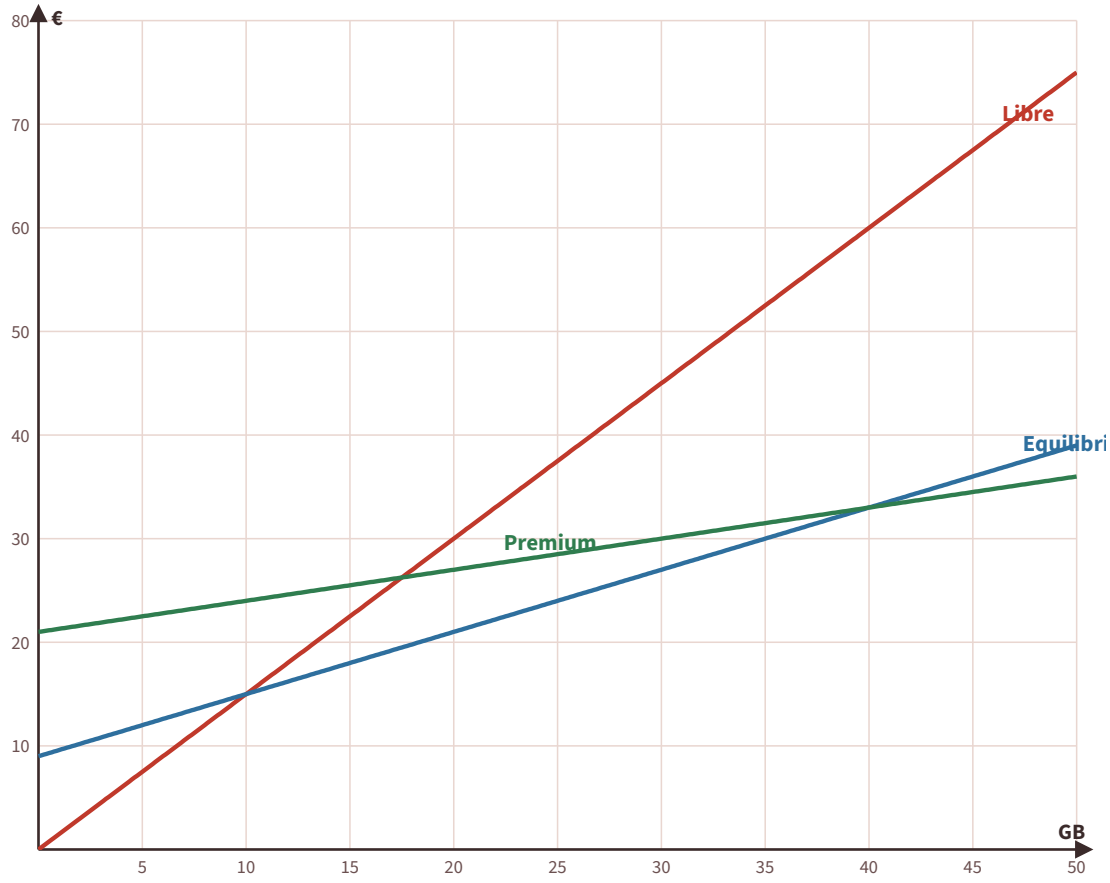
5. Interpretación. Con 10 GB al mes pagas 15 € con cualquiera de los dos. Con menos de 10 GB sale más barato Libre; con más de 10 GB, Equilibrio. Para ver cuál es mejor en cada lado basta probar un valor, p. ej. con 4 GB: Libre 6 € frente a Equilibrio 11,40 €.

Fuente: Elaboración propia.

Este es el procedimiento que repetirás con otros pares de planes: fórmulas, igualar, despejar, comprobar e interpretar.

F7 Los tres planes en una misma gráfica

GRÁFICO



Fuente: Elaboración propia con los datos de F1.

Mira cuál de las tres rectas está más abajo en cada tramo del eje horizontal. ¿En qué puntos se cruzan?

F8 Plantilla del comparador en hoja de cálculo

DATOS

	A	B	C	D	E
1	GB al mes	Libre	Equilibrio	Premium	Plan más barato
2	5	=1,5*A2	=9+0,6*A2	=21+0,3*A2	=SI(MIN(B2:D2)=B2;«Libre»;SI(MIN(B2:D2)=C2;«Equilibrio»;«Premium»))
3	25	=1,5*A3	=9+0,6*A3	=21+0,3*A3	(copiar la fórmula de E2)

Fuente: Elaboración propia. Los datos de la columna A son de ejemplo.

En hoja de cálculo se escribe la coma decimal según la configuración (en algunas versiones, punto). Al copiar la fórmula hacia abajo, A2 cambia a A3, A4…

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 1 · ¿Qué tarifa nos conviene?

ALUMNADO

FICHA 1 Lectura crítica de las tarifas

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Lee F1 y F2. No hace falta ninguna fórmula todavía: calcula con operaciones simples.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

Un plan cuesta 5 € de cuota más 2 € por cada GB. Con 6 GB se paga…

☐ 17 € ☐ 12 € ☐ 42 €

La solución de $3x + 4 = x + 10$ es…

☐ x = 3 ☐ x = 7 ☐ x = 1,5

La recta $y = 2x + 3$ corta al eje vertical en el punto…

☐ (0, 3) ☐ (0, 2) ☐ (3, 0)

2 **Con F1, calcula cuánto se paga con un consumo de 10 GB en cada plan. Escribe la operación.**

Plan	Operación	Coste con 10 GB
Libre		
Equilibrio		
Premium		

3 **El anuncio de Premium dice «¡Solo 0,30 € por GB! El más barato». ¿Es cierto con 10 GB? ¿Y con 50 GB? Calcula y explica en qué sentido es verdad el eslogan y en cuál engaña.**

4 **Clasifica cada dato de F1 y F2: marca si es coste fijo, coste variable o consumo.**

1. 9 € de cuota ●
2. 0,60 € por GB ●
3. 15 GB al mes ●
4. 0 € de cuota ●

● a Coste fijo

● b Coste variable (precio por unidad)

● c Consumo

FICHA 2 Coste fijo + coste variable

Sesión 2

Usa F3 y F4. Escribe la fórmula $C(x)$ de cada plan, siendo x los GB consumidos.

1 **Completa las fórmulas de los tres planes.**

Plan	Coste fijo a	Precio por GB b	Fórmula $C(x)$
Libre			
Equilibrio			
Premium			

2 **Calcula el coste mensual de cada perfil de F2 con cada plan. Redondea a céntimos y marca el plan más barato de cada persona.**

Perfil (GB)	Libre	Equilibrio	Premium	Más barato
Lucía (4)				
Marcos (15)				
Aisha (45)				
Hugo (9)				

3 **Con F4, explica con tus palabras por qué Premium resulta caro con poco consumo aunque su precio por GB sea el menor.**

4 **Si una persona paga 27 € con Equilibrio, ¿cuántos GB ha consumido? Plantea la ecuación y resuélvela.**

FICHA 3 Tabla y gráfica de cada plan

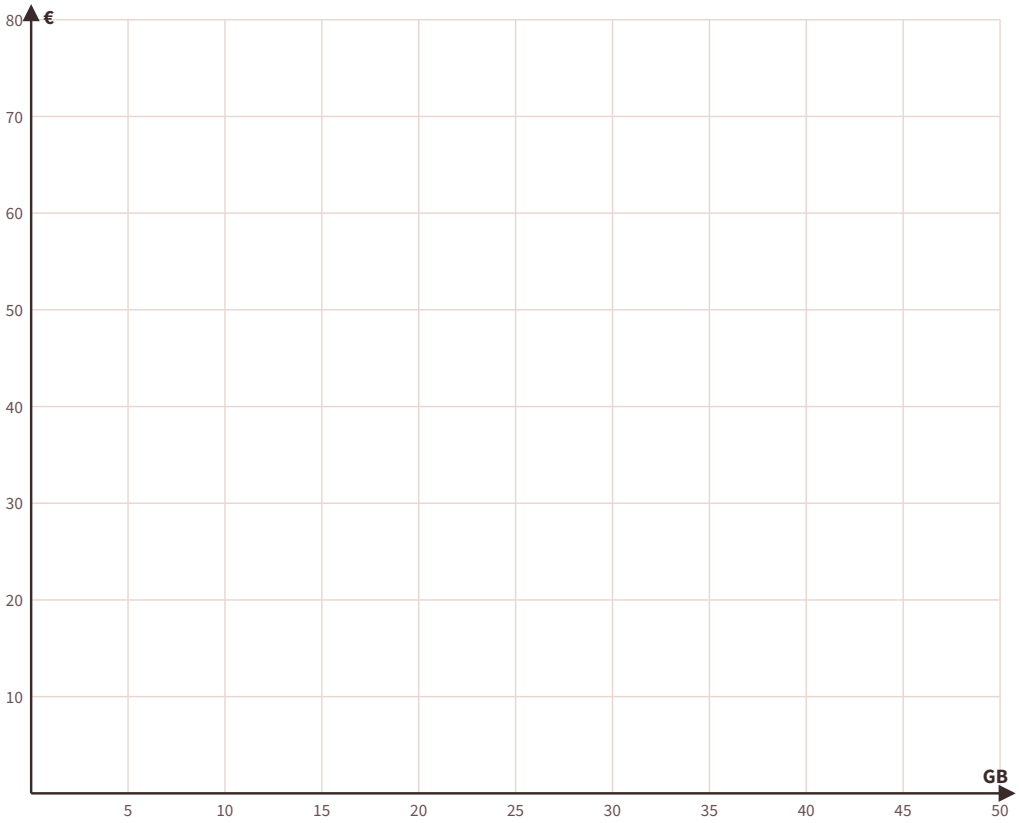
Sesión 3

Mira el ejemplo modelado de F5 y haz lo mismo con Equilibrio y Premium.

1 **Completa la tabla de valores.**

GB	0	10	20	30	40	50
Libre						
Equilibrio						
Premium						

2 **Dibuja las tres rectas en la cuadrícula con colores distintos y rotula cada una.**



3 **Interpreta en el contexto: ¿qué significa que la recta de Premium corte al eje vertical en 21? ¿Y que la de Libre pase por el origen?**

4 **La pendiente de cada recta es su precio por GB. Ordena los tres planes de la recta más inclinada a la menos inclinada. ¿La más inclinada es la más cara siempre?**

FICHA 4 El punto de equilibrio

Sesión 4

Sigue el procedimiento de F6: fórmulas, igualar, despejar, comprobar e interpretar.

1 **Halla el consumo en el que cuestan lo mismo Equilibrio y Premium. Comprueba el resultado y calcula el coste común.**

2 **Halla el consumo en el que cuestan lo mismo Libre y Premium. Comprueba el resultado y calcula el coste común.**

3 **Sitúa los tres puntos de corte sobre la gráfica de F7 y completa.**

Libre y Equilibrio coinciden en _____ GB (coste _____ €).

Equilibrio y Premium coinciden en _____ GB (coste _____ €).

Libre y Premium coinciden en _____ GB (coste _____ €).

4 **El punto de corte entre Libre y Premium no sirve para decidir entre planes. Mira F7 y explica por qué.**

FICHA 5 Perfiles de consumo y decisión

Sesión 5

Con los puntos de corte de la ficha anterior y la gráfica de F7 decide qué conviene a cada persona.

1 **Completa la tabla de decisión con intervalos de consumo (en GB al mes).**

Intervalo de consumo	Plan más barato	Cómo lo sabes
Menos de 10 GB		
Entre 10 GB y 40 GB		
Más de 40 GB		
Exactamente 10 GB y 40 GB		

2 **Recomienda un plan a cada perfil de F2. Aisha piensa bajar a 38 GB al mes: ¿sigue convenciéndole su plan? Calcula la diferencia.**

Perfil	Plan recomendado	Ahorro frente al segundo mejor
Lucía (4)		
Marcos (15)		
Aisha (45)		
Hugo (9)		
Aisha con 38		

3 **Con los 12 consumos mensuales de Marcos (F2), calcula el coste anual con cada plan (recuerda que la cuota se paga 12 veces). ¿Qué plan le conviene?**

Plan	Cálculo anual	Coste anual
Libre		
Equilibrio		
Premium		

4 **Verdadero o falso. Justifica las falsas con un cálculo.**

	V	F
Equilibrio es siempre más barato que Libre.	☐	☐
Con 40 GB, Equilibrio y Premium cuestan igual.	☐	☐
Para una persona que consume 100 GB, Premium es el más barato.	☐	☐

FICHA 6 El comparador

Sesión 6

Trabaja en equipo con los roles: calculista, graficador, revisor y portavoz. Usa F8 como plantilla de la hoja de cálculo.

1 **Calcula a mano (o con la hoja) el coste con cada plan y marca el más barato.**

GB al mes	Libre	Equilibrio	Premium	Plan más barato
5				
12				
25				
35				
45				
60				

2 **Un compañero escribió en la celda C2 la fórmula =9+0,6+A2. ¿Qué error ha cometido? Escribe la fórmula correcta y calcula qué resultado daría su fórmula con A2 = 20.**

3 **Revisión cruzada: otro equipo comprueba vuestro comparador con esta lista.**

- [ ] Las tres fórmulas coinciden con F1
- [ ] Hay valores de prueba a ambos lados de cada punto de corte
- [ ] La gráfica tiene ejes rotulados y escala
- [ ] Los puntos de corte están marcados y comprobados
- [ ] Se indica qué plan gana en cada intervalo

FICHA 7 Caso individual: patinetes compartidos

Sesión 7

Ficha individual. Una empresa ficticia de patinetes eléctricos ofrece dos opciones: ***Pago por uso*** *(0,18 € por minuto, sin cuota) y* ***Bono mensual*** *(6 € al mes más 0,12 € por minuto).*

1 **Escribe la fórmula del coste mensual $C(x)$ de cada opción, siendo x los minutos de uso al mes.**

2 Halla los minutos al mes para los que ambas opciones cuestan lo mismo. Comprueba la solución.

3 Carla hace 20 viajes al mes de 8 minutos cada uno y Álvaro solo 70 minutos al mes. ¿Qué opción recomiendas a cada uno? Calcula el ahorro mensual.

4 Comprueba una de tus conclusiones por otro camino (tabla de valores o gráfica) y redacta en dos frases la recomendación de la empresa para quien duda entre las dos opciones.

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 1 · ¿Qué tarifa nos conviene?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Comparador de tarifas de datos móviles de Nexa con recomendación para los cuatro perfiles de F2.

Título y equipo

Nombres y roles.

Fórmulas de los planes

$C(x) = a + b\,x$ *para Libre, Equilibrio y Premium.*

Tabla de valores

Al menos 6 consumos, con el plan más barato.

Gráfica de las tres tarifas

Ejes rotulados, escala y puntos de corte marcados.

Puntos de corte

Ecuación, resolución y comprobación de cada par.

Supuestos y límites

Qué hemos supuesto (consumo medio, precios, sin otros costes).

Recomendación por perfil

Intervalos de consumo y plan elegido para Lucía, Marcos, Aisha y Hugo.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 1 · ¿Qué tarifa nos conviene?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Comparador de tarifas con recomendación**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] Cada plan tiene su fórmula $C(x)$ con coste fijo y precio por GB correctos.
- [ ] La tabla de valores tiene al menos seis consumos y los cálculos son correctos.
- [ ] La gráfica tiene ejes rotulados con unidades (GB, €), escala uniforme y las tres rectas distinguibles.
- [ ] Los tres puntos de corte se han obtenido con una ecuación y están comprobados.
- [ ] Se explica por qué un punto de corte (Libre y Premium) no decide la elección.
- [ ] Los intervalos de consumo indican correctamente qué plan gana en cada tramo.
- [ ] La recomendación para cada perfil se apoya en un cálculo y menciona la variabilidad del consumo.
- [ ] Los supuestos y los límites del modelo están escritos.
- [ ] Los resultados llevan unidades (€, GB) y los redondeos están indicados.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 1 · ¿Qué tarifa nos conviene?

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Comparador de tarifas con recomendación**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 1 · ¿Qué tarifa nos conviene?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé escribir la fórmula de una tarifa y decir qué significan sus coeficientes.	◯	◯	◯	◯
Sé hallar el punto de corte de dos planes y decir qué plan conviene antes y después.	◯	◯	◯	◯
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	◯	◯	◯	◯
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	◯	◯	◯	◯
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	◯	◯	◯	◯
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	◯	◯	◯	◯

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 1 · ¿Qué tarifa nos conviene?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Dos tarifas lineales con números sencillos: Plan Básico (5 € al mes más 1 € por GB) y Plan Plus (10 € al mes más 0,50 € por GB). Completa paso a paso.

Ejemplo modelado

Plan Básico con 4 GB: coste fijo 5 € + coste variable $4 \cdot 1 = 4$ €. Total: $5 + 4 = 9$ €. Fórmula: $C(x) = 5 + 1\,x$.

Glosario y símbolos

Coste fijo a: lo que pagas aunque no consumas. **Precio por GB** b: lo que cuesta cada GB. x: GB consumidos. $C(x)$: coste total. **Punto de corte**: consumo con el mismo coste en dos planes (se halla igualando).

1 **Completa la tabla de costes.**

GB (x)	0	5	10	15	20
Básico: $5 + x$	5	10			
Plus: $10 + 0{,}5\,x$	10	12,50			

2 **Completa la ecuación para hallar cuándo cuestan lo mismo y resuélvela.**

5 + x = 10 + _____ x

x − _____ x = 10 − _____

_____ x = _____

x = _____ GB

3 **Sitúa en la tabla de arriba el consumo que has obtenido. ¿Cuánto cuestan ambos planes? ¿Qué plan es más barato con 4 GB? ¿Y con 18 GB?**

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 1 · ¿Qué tarifa nos conviene?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Una tarifa por tramos: cuándo deja de ser lineal

Nexa lanza el plan **Tramos**: 12 € al mes incluyen los primeros 8 GB; cada GB adicional por encima de 8 GB cuesta 1,20 €. Su coste es 12 € si $x \leq 8$ y $12 + 1{,}20\,(x - 8)$ € si $x > 8$. Esta función no es una recta única: tiene dos trozos.

Pasos

1. Calcula el coste de Tramos con 0, 5, 8, 9, 10, 11 y 20 GB y representa la función a trozos sobre la gráfica de las tres tarifas.
2. Simplifica la fórmula del segundo trozo y halla los consumos en los que Tramos cuesta lo mismo que Libre, que Equilibrio y que Premium.
3. Determina para qué consumos es Tramos el plan más barato de los cuatro.
4. Explica por qué la gráfica de Tramos cambia de pendiente y qué significa ese cambio en el contexto. Generaliza: ¿cómo se reconoce en una tabla que una tarifa no es lineal?

1 Tabla de valores de Tramos.

GB	0	5	8	9	10	11	20
Coste Tramos							
Coste Libre							
Coste Equilibrio							

Entrega

Una hoja con la tabla, la gráfica de los cuatro planes, las ecuaciones resueltas y un párrafo que explique con un intervalo cuándo compensa Tramos y por qué deja de ser lineal.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 1 · ¿Qué tarifa nos conviene?

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: $5 + 2 \cdot 6 = 17$ €; $3x + 4 = x + 10 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$; la recta corta al eje vertical en $(0, 3)$.
2. Con 10 GB: Libre $1{,}5 \cdot 10 = 15$ €; Equilibrio $9 + 0{,}6 \cdot 10 = 15$ €; Premium $21 + 0{,}3 \cdot 10 = 24$ €.
3. El eslogan es cierto solo en el precio por GB (0,30 € es el menor). Con 10 GB Premium cuesta 24 € (el más caro). Con 50 GB: Libre 75 €, Equilibrio 39 €, Premium 36 €: aquí sí es el más barato. Engaña porque oculta la cuota de 21 €.
4. 9 € de cuota → coste fijo; 0,60 € por GB → coste variable; 15 GB → consumo; 0 € de cuota → coste fijo.

Ficha 2

1. Libre: $a = 0, b = 1{,}5, C(x) = 1{,}5\,x$. Equilibrio: $a = 9, b = 0{,}6, C(x) = 9 + 0{,}6\,x$. Premium: $a = 21, b = 0{,}3, C(x) = 21 + 0{,}3\,x$.
2. Lucía (4 GB): 6 €; 11,40 €; 22,20 € → Libre. Marcos (15 GB): 22,50 €; 18 €; 25,50 € → Equilibrio. Aisha (45 GB): 67,50 €; 36 €; 34,50 € → Premium. Hugo (9 GB): 13,50 €; 14,40 €; 23,70 € → Libre.
3. Con poco consumo se paga casi solo la cuota (21 €) y el ahorro por GB apenas se nota; hay que consumir bastante para «amortizar» una cuota alta (ver F4: la parte gris es la mayor).
4. $9 + 0{,}6\,x = 27 \Rightarrow 0{,}6\,x = 18 \Rightarrow x = 30$ GB. Comprobación: $9 + 0{,}6 \cdot 30 = 27$. ✔

Ficha 3

1. Libre: 0, 15, 30, 45, 60, 75. Equilibrio: 9, 15, 21, 27, 33, 39. Premium: 21, 24, 27, 30, 33, 36.
2. Las rectas deben coincidir con F7: tres rectas que parten de (0, 0), (0, 9) y (0, 21) con pendientes 1,5; 0,6 y 0,3.
3. La ordenada 21 es la cuota que se paga aunque no se consuma nada; Libre pasa por el origen porque no hay cuota: gastar 0 GB cuesta 0 €.
4. Pendientes: Libre (1,5) > Equilibrio (0,6) > Premium (0,3). No: la más inclinada (Libre) es la más barata con poco consumo; la inclinación solo indica cuánto crece el coste por GB.

Ficha 4

1. Equilibrio = Premium: $9 + 0{,}6x = 21 + 0{,}3x \Rightarrow 0{,}3x = 12 \Rightarrow x = 40$ GB. Comprobación: $9 + 24 = 33$ y $21 + 12 = 33$. Coste común: 33 €.
2. Libre = Premium: $1{,}5x = 21 + 0{,}3x \Rightarrow 1{,}2x = 21 \Rightarrow x = 17{,}5$ GB. Comprobación: $1{,}5 \cdot 17{,}5 = 26{,}25$ y $21 + 0{,}3 \cdot 17{,}5 = 26{,}25$. Coste común: 26,25 €.
3. 10 GB, 15 €; 40 GB, 33 €; 17,5 GB, 26,25 €.
4. En 17,5 GB hay un tercer plan, Equilibrio, que cuesta $9 + 0{,}6 \cdot 17{,}5 = 19{,}50$ € y es más barato que los otros dos. El corte entre Libre y Premium ocurre «por encima» de la recta de Equilibrio, por lo que no decide el mínimo.

Ficha 5

1. Menos de 10 GB: Libre (p. ej. 4 GB: 6 € frente a 11,40 € y 22,20 €). Entre 10 y 40 GB: Equilibrio (p. ej. 20 GB: 30 €; 21 €; 27 €). Más de 40 GB: Premium (p. ej. 50 GB: 75 €; 39 €; 36 €). En 10 GB empatan Libre y Equilibrio (15 €); en 40 GB empatan Equilibrio y Premium (33 €).
2. Lucía: Libre; ahorro 11,40 − 6 = 5,40 €. Marcos: Equilibrio; 22,50 − 18 = 4,50 €. Aisha (45): Premium; 36 − 34,50 = 1,50 €. Hugo: Libre; 14,40 − 13,50 = 0,90 €. Aisha con 38 GB: Equilibrio 31,80 € frente a Premium 32,40 €: pasa a convenir Equilibrio (0,60 € menos).
3. Marcos (168 GB al año): Libre $1{,}5 \cdot 168 = 252$ €; Equilibrio $12 \cdot 9 + 0{,}6 \cdot 168 = 108 + 100{,}8 = 208{,}80$ €; Premium $12 \cdot 21 + 0{,}3 \cdot 168 = 252 + 50{,}4 = 302{,}40$ €. Le conviene Equilibrio (ahorra 43,20 € respecto a Libre).
4. Respuestas: F, V, V. Falsa 1: con 4 GB, Libre cuesta 6 € y Equilibrio 11,40 €. Verdadera 2: con 40 GB ambos cuestan 33 €. Verdadera 3: con 100 GB Premium cuesta 51 €, Equilibrio 69 € y Libre 150 €.

Ficha 6

1. 5 GB: 7,50; 12; 22,50 → Libre. 12 GB: 18; 16,20; 24,60 → Equilibrio. 25 GB: 37,50; 24; 28,50 → Equilibrio. 35 GB: 52,50; 30; 31,50 → Equilibrio. 45 GB: 67,50; 36; 34,50 → Premium. 60 GB: 90; 45; 39 → Premium.
2. Error: =9+0,6+A2 suma 0,6 en lugar de multiplicar por A2. Correcta: =9+0,6*A2. Con A2 = 20: su fórmula da 9,6 € (en vez de 21 €).
3. Revisión cruzada: todos los puntos de la lista deben poder comprobarse en el comparador; se valora más la corrección de los errores detectados que el resultado.

Ficha 7

1. Pago por uso: $C_1(x) = 0{,}18\,x$. Bono: $C_2(x) = 6 + 0{,}12\,x$.
2. $0{,}18x = 6 + 0{,}12x \Rightarrow 0{,}06x = 6 \Rightarrow x = 100$ minutos. Comprobación: $0{,}18 \cdot 100 = 18$ € y $6 + 0{,}12 \cdot 100 = 18$ €.
3. Carla: $20 \cdot 8 = 160$ min; Pago por uso 28,80 €, Bono 25,20 €: Bono, ahorra 3,60 €. Álvaro: 70 min; Pago por uso 12,60 €, Bono 14,40 €: Pago por uso, ahorra 1,80 €.
4. Comprobación con tabla: con 50 min, 9 € y 12 €; con 150 min, 27 € y 24 €. Recomendación: «Si usas el patinete menos de 100 minutos al mes conviene pagar por uso; con más de 100 minutos conviene el bono; con exactamente 100 minutos cuestan lo mismo (18 €)».

Refuerzo

1. Básico: 5, 10, 15, 20, 25. Plus: 10, 12,50, 15, 17,50, 20.
2. $5 + x = 10 + 0{,}5x \Rightarrow x - 0{,}5x = 10 - 5 \Rightarrow 0{,}5x = 5 \Rightarrow x = 10$ GB.
3. Con 10 GB ambos cuestan 15 €. Con 4 GB: Básico 9 € y Plus 12 €: Básico. Con 18 GB: Básico 23 € y Plus 19 €: Plus.

Ampliación

1. Tramos: 0 GB → 12; 5 → 12; 8 → 12; 9 → 13,20; 10 → 14,40; 11 → 15,60; 20 → 26,40. Libre: 0; 7,50; 12; 13,50; 15; 16,50; 30. Equilibrio: 9; 12; 13,80; 14,40; 15; 15,60; 21.
2. Segundo trozo: $12 + 1{,}2(x - 8) = 2{,}4 + 1{,}2x$ para $x > 8$. Con Libre: $2{,}4 + 1{,}2x = 1{,}5x \Rightarrow x = 8$ (el empate Libre–Tramos ocurre justo donde empieza el segundo trozo, 12 €). Con Equilibrio: $2{,}4 + 1{,}2x = 9 + 0{,}6x \Rightarrow 0{,}6x = 6{,}6 \Rightarrow x = 11$ (coste 15,60 €). Con Premium: $2{,}4 + 1{,}2x = 21 + 0{,}3x \Rightarrow 0{,}9x = 18{,}6 \Rightarrow x \approx 20{,}67$ GB (no relevante: ahí Premium no es el mínimo).
3. Tramos es el más barato de los cuatro solo para $8 < x < 11$ GB (p. ej. 9 GB: Tramos 13,20 € frente a Libre 13,50 € y Equilibrio 14,40 €). En 8 GB empata con Libre (12 €) y en 11 GB con Equilibrio (15,60 €). Solo con las tres tarifas lineales, Hugo (9 GB) pagaba 13,50 €; con Tramos paga 13,20 €.
4. La pendiente pasa de 0 (cuota que incluye 8 GB) a 1,20 €/GB cuando se superan los 8 GB incluidos. En una tabla se nota porque el incremento de coste por cada GB de más no es constante.

Errores frecuentes

- Confundir el precio por GB (b) con el coste total, o creer que el plan con menor precio por GB es siempre el más barato.
- Olvidar la cuota fija, o sumarla al precio por GB antes de multiplicar: $(9 + 0{,}6)\,x$.
- Al despejar, pasar términos de un miembro a otro sin cambiar el signo o restar mal con decimales (0,9x = 9 → x = 10, no x = 0,1).
- Dar la solución de la ecuación sin comprobarla ni interpretarla (¿qué significan 10 GB?).
- Pensar que hay que usar cada punto de corte aunque otro plan sea más barato en ese consumo (caso Libre–Premium).
- Dibujar la gráfica sin escala uniforme o unir puntos que no están en la misma recta.

Criterios para valorar respuestas abiertas

- En la recomendación se valora que el intervalo de consumo y el plan estén bien relacionados y que cada afirmación vaya con un cálculo.
- Se acepta cualquier razonamiento sobre el coste anual o la variabilidad del consumo si se apoya en datos y se explicita el supuesto.
- En las explicaciones de los eslóganes, la respuesta debe distinguir precio por GB y coste total.
- La calculadora y la hoja de cálculo son válidas para comprobar, pero las ecuaciones deben aparecer desarrolladas a mano.

02

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Finanzas para la vida cotidiana

PREGUNTA GUÍA

¿Cómo cambia el coste real cuando aparecen intereses, comisiones y porcentajes?

CURSO
4.º ESO · Matemáticas A

SESIONES
8 sesiones · 1.º trimestre

SENTIDOS PRIORITARIOS
A · Sentido numérico

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE2, CE5, CE6, CE8

PRODUCTO FINAL
Guía de decisiones financieras básicas

CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 1.2, 2.2, 5.2, 6.1, 8.1

Contexto, reto y sentido

Rebajas «del 70 %», préstamos «al 2 % al mes», cuentas «sin comisiones», depósitos que «te dan un 3 %»… La publicidad financiera está llena de porcentajes y casi nunca dice lo que realmente pagas o ganas. Cuando un cambio del 20 % se sigue de otro del 20 % en sentido contrario no volvemos al punto de partida, y cuando una cuota parece pequeña puede esconder un coste total enorme.

La situación moviliza el sentido numérico: porcentajes como índices de variación, aumentos y disminuciones sucesivos, interés simple, tasas, comisiones y coste total. Se trabaja con datos reales (IPC del INE, IVA) y con ofertas ficticias. El alumnado aprende a hacer la pregunta que importa («¿cuánto pagaré en total y por qué?»), a calcular con rigor y a comunicar una guía de decisiones financieras básicas para personas de su edad.

Reto

Elaborar una guía de decisiones financieras básicas con tres casos calculados (porcentajes sucesivos, interés y coste total, comisiones y publicidad) y una lista de señales de alerta, justificando cada recomendación con cálculos.

Producto final

Guía de decisiones financieras básicas.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE5** Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.
- **CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- **1.1** Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.
- **1.2** Seleccionar herramientas y estrategias elaboradas valorando su eficacia e idoneidad en la resolución de problemas.
- **2.2** Seleccionar las soluciones óptimas de un problema valorando tanto la corrección matemática como sus implicaciones desde diferentes perspectivas.
- **5.2** Analizar y poner en práctica conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.
- **6.1** Proponer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.
- **8.1** Comunicar ideas, conclusiones, conjeturas y razonamientos matemáticos utilizando diferentes medios, con coherencia, claridad y terminología apropiada.

Saberes básicos prioritarios

A
Sentido numérico

- Porcentajes como razón y como índice de variación: aumentos y disminuciones porcentuales y tasa de variación.
- Cambios porcentuales sucesivos: composición de índices y diferencia entre sumar y componer porcentajes.
- Interés simple $I = C \cdot r \cdot t$, capital final y coste total de una financiación.
- Tasas e indicadores económicos (IPC, TIN, TAE) y comisiones: lectura e interpretación en contexto.
- Estimación, redondeo y comprobación del resultado con calculadora u hoja de cálculo.

F
Sentido socioafectivo

- Consumo responsable y actitud crítica ante la publicidad; toma de decisiones con información incompleta.
- Revisión del error y comunicación respetuosa de la propia argumentación.

Objetivos didácticos

- ✓ Calcular cambios porcentuales e intereses sencillos.
- ✓ Interpretar tasas y comisiones en casos ficticios.
- ✓ Comparar opciones con distintos costes.
- ✓ Detectar presentaciones numéricas engañosas.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos
El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas
Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples
Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito
Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente
Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Porcentaje y tasa

Evidencia: Ficha 1: diagnóstico, índices de variación, IVA y lectura de una tasa (IPC) en euros.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Cambios sucesivos

Evidencia: Ficha 2: cambios sucesivos (zapatillas, mochila, IPC acumulado 2022-2025) y poder adquisitivo.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Interés simple y coste total

Evidencia: Ficha 3: tabla de interés simple, capital final, tasa y tiempo en depósitos y préstamos.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Comisiones y descuentos

Evidencia: Ficha 4: coste anual de tres cuentas con comisiones, nómina bruto-neto y comparación de descuentos.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Comparación de dos opciones de financiación ficticia

Evidencia: Ficha 5: comparación de contado, financiación de la tienda y préstamo con comisión (coste total, sobrecoste y cuota).

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Publicidad financiera: qué falta por decir

Evidencia: Ficha 6: análisis de cinco anuncios: qué falta por decir, cálculo del coste real y anuncio rescrito.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Guía de decisiones

Evidencia: Ficha 7: borrador de la guía de decisiones: tres casos, reglas de oro y señales de alerta.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

8

SESIÓN 8

Evidencia individual

Evidencia: Ficha 8: evidencia individual con un móvil financiado, descuentos sucesivos y poder adquisitivo.

Ficha: Anexo 3 · ficha 8

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

- Contratos y anuncios ficticios
- calculadora/hoja de cálculo

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Casos con una sola tasa y tabla paso a paso.

Ampliación

Anexo 9

Construir dos ofertas con cuotas similares y coste total distinto.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial
Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa
Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final
Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Reformulación de cada situación (rebaja, préstamo, cuenta) en una tabla o esquema que separa precio inicial, cambios porcentuales y coste final.	Fichas 1 y 2 / lista de cotejo
1.2	Elección entre multiplicar por el índice de variación, aplicar interés simple o comparar costes totales según el problema.	Fichas 2, 3 y 4 / escala de valoración
2.2	Elección de la opción de financiación o de cuenta más conveniente valorando coste total, cuota mensual y condiciones, no solo el porcentaje anunciado.	Ficha 5 y Ficha 8 / rúbrica
5.2	Conexión entre porcentaje, índice de variación, interés simple y coste total, y entre sus representaciones (tabla, esquema, expresión).	Fichas 3 y 5 y Anexo 4 / rúbrica
6.1	Traducción de anuncios, nóminas y ofertas reales o ficticias a cálculos con porcentajes e interés para decidir.	Ficha 6 y Anexo 4 / rúbrica
8.1	Redacción de las recomendaciones de la guía y de un anuncio honesto con lenguaje matemático (tasa, plazo, coste total).	Anexo 4 y Ficha 8 / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Guía, cálculos y análisis crítico.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 2 · Finanzas para la vida cotidiana

ALUMNADO

Una tienda anuncia «¡Hasta el 45 % de descuento!» en unas zapatillas de 80 €: primero el 25 % y luego otro 20 % en caja. Una app te presta 600 € «a solo un 2 % al mes». Una cuenta joven promete «cero comisiones». ¿Cuánto pagarás de verdad en cada caso? Vais a ser el equipo de educación financiera del centro: calcular el coste real de cada oferta, destapar lo que los anuncios no dicen y publicar una guía de decisiones para que el alumnado de vuestro curso no pague de más.

> *¿Cómo cambia el coste real cuando aparecen intereses, comisiones y porcentajes?*

Vuestro reto

Elaborar una guía de decisiones financieras básicas con tres casos calculados (porcentajes sucesivos, interés y coste total, comisiones y publicidad) y una lista de señales de alerta, justificando cada recomendación con cálculos.

Lo que vais a producir

Guía de decisiones financieras básicas.

Hoja de ruta · 8 sesiones

1. Repasamos porcentajes, IVA e IPC como índices de variación.
2. Calculamos cambios sucesivos y descubrimos por qué +20 % y −20 % no se anulan.
3. Calculamos interés simple y coste total de depósitos y préstamos.
4. Comparamos comisiones y descuentos para elegir cuenta y oferta.
5. Comparamos dos opciones de financiación de una compra.
6. Analizamos anuncios financieros: qué falta por decir.
7. Redactamos la guía de decisiones financieras básicas.
8. Resolvemos un caso nuevo de forma individual.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Calcular cambios porcentuales e intereses sencillos.
- ✓ Interpretar tasas y comisiones en casos ficticios.
- ✓ Comparar opciones con distintos costes.
- ✓ Detectar presentaciones numéricas engañosas.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 2 · Finanzas para la vida cotidiana

ALUMNADO

Cuadro de porcentajes e índices, datos reales del IPC (INE), esquema de cambios sucesivos, ofertas de rebajas, interés simple, cuentas con comisiones, dos ofertas de financiación, cinco anuncios y un glosario. Los datos del IPC y el IVA son reales; las ofertas son ficticias.

F1 Porcentajes e índices de variación

TEXTO

Un porcentaje es una razón con denominador 100: el $15\,\%$ de una cantidad es $\frac{15}{100}$ de ella.

Índice de variación. Es el número por el que se multiplica la cantidad inicial para obtener la final.

- **Aumento** del $r\,\%$: índice $1 + \frac{r}{100}$. Ejemplo: aumento del $8\,\% \to 1{,}08$.
- **Disminución** del $r\,\%$: índice $1 - \frac{r}{100}$. Ejemplo: descuento del $15\,\% \to 0{,}85$.

Tasa de variación porcentual: $\frac{\text{cantidad final} - \text{cantidad inicial}}{\text{cantidad inicial}} \cdot 100$.

IVA 21 %. Precio con IVA = precio sin IVA $\cdot\ 1{,}21$. Para quitarlo: precio con IVA $:\ 1{,}21$.

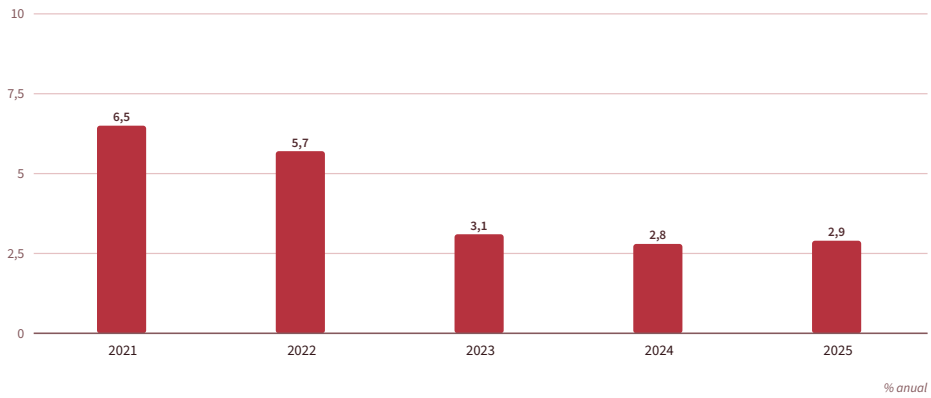
¡Cuidado! Quitar el $21\,\%$ no es restar el $21\,\%$ del precio con IVA.

Fuente: Elaboración propia. El IVA general en España es del 21 % (Ley 37/1992).

El 21 % se calcula sobre el precio SIN IVA, por eso no se deshace restando el 21 %.

F2 Inflación en España (IPC, diciembre sobre diciembre)

GRÁFICO



El IPC mide cuánto sube la cesta media de la compra de un año a otro. Una subida del 2,9 % significa que lo que costaba 100 € cuesta 102,90 €. Los datos pueden consultarse y actualizarse en ine.es.

Fuente: Datos reales: INE, Índice de Precios de Consumo, tasa de variación anual en diciembre (2021: 6,5 %; 2022: 5,7 %; 2023: 3,1 %; 2024: 2,8 %; 2025: 2,9 %).

Cada tasa se aplica sobre el precio del año anterior, no sobre el de 2021.

F3 Cambios sucesivos: +20 % y después −20 %

ESQUEMA



Índice total: 1,20 · 0,80 = 0,96 → variación total: −4 % (no 0 %)

Fuente: Esquema de elaboración propia.

El segundo 20 % se calcula sobre 120 €, que es una cantidad mayor que 100 €.

F4 Rebajas de «Sportaluz»

DATOS

Artículo	Precio inicial	Cambios de precio	Lo que dice el cartel
Zapatillas	80 €	Descuento del 25 % y, en caja, otro 20 % sobre el precio rebajado	«¡Hasta 45 % menos!»
Chaqueta	120 €	Descuento del 30 %	«−30 %»
Mochila	40 €	En noviembre subió un 25 %; en rebajas se aplica un descuento del 20 %	«¡Ahora un 20 % menos!»

Fuente: Ofertas ficticias creadas para el aula.

Calcula el precio final de cada artículo antes de la ficha 2.

F5 Interés simple y coste total

TEXTO

Cuando se deposita o se pide prestado un **capital** C a un **tipo de interés** anual r (en tanto por uno) durante t años, el **interés simple** es:

$$I = C \cdot r \cdot t$$

El interés se calcula siempre sobre el capital inicial. El **capital final** (o **coste total** de un préstamo) es $C_f = C + I$.

Ejemplo. Un préstamo de 500 € al $8\,\%$ anual durante 3 años: $r = 0{,}08$; $I = 500 \cdot 0{,}08 \cdot 3 = 120$ €; total que se devuelve: $500 + 120 = 620$ €.

Meses. Si el tiempo está en meses, se divide entre 12: $t = \frac{6}{12} = 0{,}5$ años.

Comisión. Es un pago aparte, normalmente un porcentaje del capital (comisión de apertura de un préstamo): se suma al coste total.

Fuente: Elaboración propia.

Con interés simple, el capital final crece linealmente con el tiempo (como una tarifa: cuota fija + coste que depende del tiempo).

F6 Tres cuentas bancarias y sus comisiones

DATOS

Cuenta	Mantenimiento	Tarjeta	Transferencia	Cajero de otra entidad
Clásica	3 € al mes	24 € al año	0,50 €	2 % de lo retirado (mínimo 1,50 €)
Nómina	0 € si se domicilia una nómina; si no, 4 € al mes	gratis	gratis	2 % de lo retirado (mínimo 1,50 €)
Online	0 €	gratis	gratis	2 % de lo retirado (mínimo 1,50 €)

Fuente: Productos ficticios inspirados en cuentas reales. Las comisiones de las cuentas reales las fija cada entidad y deben consultarse en su folleto.

El «mínimo 1,50 €» significa que cada retirada paga el mayor entre el 2 % y 1,50 €.

F7 Una bicicleta eléctrica: tres formas de pagarla

DATOS

Opción	Condiciones	Lo que anuncian
Contado	Precio de lista 1 200 € con un 10 % de descuento por pagar al contado.	«¡Ahorra pagando ya!»
A. Financiación de la tienda	12 cuotas mensuales de 100 € (se paga el precio de lista).	«Sin intereses ni comisiones»
B. Préstamo del banco	Se presta el precio de contado a un TIN del 5 % anual (interés simple sobre el capital inicial), 2 años y comisión de apertura del 2 % del capital. Se devuelve en 24 cuotas iguales.	«Cuotas muy bajas»

Fuente: Ofertas ficticias creadas para el aula.

Calcula primero el precio de contado. ¿Quién paga más en total?

F8 Cinco anuncios para analizar

DATOS

N.º	Anuncio	Letra pequeña
A1	«Depósito Estrella: ¡te damos un 3 %!»	TIN anual; plazo 12 meses; capital máximo 5 000 €.
A2	«Préstamo exprés: solo un 2 % al mes»	Se devuelve todo al final del plazo; sin otros gastos.
A3	«Rebajas de hasta el −70 %»	El −70 % solo se aplica a tres artículos.
A4	«Te devolvemos el 10 % de tus compras»	Máximo 5 € al mes.
A5	«Cuenta sin comisiones durante 6 meses»	Después, 4 € al mes.

Fuente: Anuncios ficticios creados para el aula.

¿Qué datos necesitas conocer para decidir en cada caso?

F9 Vocabulario financiero

GLOSARIO

Capital	Dinero que se deposita o se pide prestado.
TIN (tipo de interés nominal)	Porcentaje anual de interés, sin contar comisiones.
TAE	Tasa Anual Equivalente: incluye intereses, comisiones y periodicidad de pago, para poder comparar productos.
Interés simple	Interés calculado siempre sobre el capital inicial.
Comisión	Pago por un servicio (mantener una cuenta, abrir un préstamo, sacar dinero en otro cajero…).
IPC	Índice de Precios de Consumo: mide la variación media de precios (INE).
Poder adquisitivo	Lo que se puede comprar con una cantidad de dinero.
Retención de IRPF	Parte de la nómina que se adelanta a Hacienda; su porcentaje depende de la situación de cada persona.

Fuente: Elaboración propia.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 2 · Finanzas para la vida cotidiana

ALUMNADO

FICHA 1 Porcentaje, índice y tasa

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Repasa F1 y F2. Escribe las operaciones.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

El 15 % de 240 es…

☐ 36 ☐ 360 ☐ 16

Un precio pasa de 80 € a 92 €. La subida es del…

☐ 12 % ☐ 15 % ☐ 92 %

Multiplicar una cantidad por 0,85 equivale a…

☐ aumentarla un 85 % ☐ disminuirla un 15 % ☐ disminuirla un 85 %

2 **Completa la tabla de índices de variación.**

Variación	Cálculo	Índice
Aumento del 8 %		
Descuento del 15 %		
IVA del 21 %		
Descuento del 40 %		
Aumento del 100 %		

3 **Unos auriculares cuestan 62 € sin IVA. ¿Cuánto cuestan con el 21 % de IVA? Otro artículo cuesta 90,75 € con IVA: ¿cuál es su precio sin IVA?**

4 **Con F2: el recibo de una familia era de 80 € en diciembre de 2022 y subió justo lo que marca el IPC de 2023. ¿Cuánto es ahora? Calcula también la tasa de variación de un precio que baja de 160 € a 148 €.**

FICHA 2 Cambios sucesivos

Sesión 2

Usa F3, F4 y F2. Multiplica índices; no sumes porcentajes.

1 **Calcula el precio final de las zapatillas y de la mochila de F4. ¿Es cierto el cartel de las zapatillas («hasta 45 % menos»)? ¿Y el de la mochila?**

Artículo	Índices	Precio final	Variación total
Zapatillas			
Mochila			

2 **Completa el esquema de F3 con otros valores: un precio de 250 € sube un 10 % y después baja un 10 %.**

250 € · _____ = _____ €

_____ € · _____ = _____ €

Índice total: _____ → variación total: _____ %

3 **Con F2, calcula la inflación acumulada de diciembre de 2021 a diciembre de 2025 (2022, 2023, 2024 y 2025). ¿Cuántos euros de 2025 equivalen a 100 € de 2021?**

4 **Un sueldo sube un 10 % en total entre 2021 y 2025. ¿Ha ganado o perdido poder adquisitivo? Explícalo con un cálculo.**

FICHA 3 Interés simple y coste total

Sesión 3

Usa F5. Escribe la fórmula antes de sustituir y pon unidades.

1 **Depositas 2 000 € al 3 % anual (interés simple). Completa.**

Años	1	2	3	5
Interés I				
Capital final C_f				

2 Un préstamo de 500 € al 8 % anual durante 3 años. ¿Cuánto se devuelve en total? Si se paga en 36 cuotas mensuales iguales, ¿cuánto es cada cuota (redondea a céntimos)?

3 Un depósito de 800 € produce 40 € de interés en 2 años. ¿Qué tipo de interés anual tiene? Y con 1 000 € al 4 % anual, ¿cuánto tiempo hace falta para ganar 100 €?

4 Con 2 000 € al 3 %, escribe la fórmula del capital final en función de los años t. ¿Qué tipo de función es y cuánto vale su pendiente? Relaciónalo con las tarifas de «cuota fija + coste variable».

FICHA 4 Comisiones y descuentos

Sesión 4

Usa F6 para las cuentas. Calcula el coste de un año completo.

1 Ana es estudiante y no tiene nómina. En un año retira 4 veces 100 € en cajeros de otra entidad y hace 6 transferencias. Calcula el coste anual con cada cuenta y elige la mejor.

Cuenta	Mantenimiento	Tarjeta	Transferencias	Cajeros	Total anual
Clásica					
Nómina					
Online					

2 ¿Cuánto cuesta retirar 50 € en un cajero de otra entidad? ¿Y 200 €? Explica por qué no es siempre el 2 %.

3 **Nómina ficticia: sueldo bruto de 1 500 € al mes, con una cotización a la Seguridad Social del 6,5 % y una retención de IRPF del 12 %, ambas sobre el bruto. Calcula el sueldo neto. Un compañero multiplica $1\,500 \cdot 0{,}935 \cdot 0{,}88$: ¿qué error comete?**

4 **Una chaqueta de 120 €. Oferta A: 30 % de descuento y después un cupón de 10 €. Oferta B: 20 % de descuento y después otro 15 %. ¿Cuál sale más barata y cuánto?**

FICHA 5 Financiar una compra

Sesión 5

Usa F7. Compara el coste total, el sobrecoste y la cuota mensual.

1 **Completa la tabla.**

Opción	Cálculo del total	Total pagado	Sobrecoste frente al contado	Sobrecoste en %	Cuota mensual
Contado					
A. Tienda					
B. Banco					

2 **Si solo puedes pagar 60 € al mes, ¿qué opción eliges? Si puedes pagar 100 € al mes, ¿cuál es más barata? Justifícalo con cifras.**

3 **El anuncio A dice «sin intereses». Con tus datos, ¿es verdad? ¿Qué se está pagando realmente?**

4 **Tienes 1 080 € ahorrados en un depósito al 3 % anual (interés simple, 1 año). ¿Te compensa financiar la compra con la opción A y dejar el dinero en el depósito? Calcula.**

FICHA 6 Qué falta por decir

Sesión 6

Analiza los cinco anuncios de F8. Trabajad en parejas: uno actúa de anunciante y otro de inspector.

1 **Para cada anuncio, escribe qué datos faltan para decidir.**

Anuncio	¿Qué falta por decir?
A1	
A2	
A3	
A4	
A5	

2 **A2: pides 600 € y los devuelves al cabo de 12 meses con un 2 % mensual (interés simple). Calcula el interés, el total y el tipo anual equivalente. Con una calculadora, calcula $1{,}02^{12}$ y explica qué indica.**

3 **A4: calcula lo que te devuelven si compras en un mes por 30 €, 50 € y 80 €. ¿Qué porcentaje real obtienes en cada caso?**

Compra	Devolución	% real
30 €		
50 €		
80 €		

4 **A5: ¿cuánto pagas en comisiones durante el primer año? ¿Cuánto es la comisión media mensual? Reescribe el anuncio A5 de forma honesta.**

FICHA 7 Nuestra guía de decisiones

Sesión 7

Borrador de la guía (Anexo 4). Elegid tres casos de las fichas anteriores y convertidlos en reglas útiles.

1 **Completa la tabla con tres decisiones.**

Decisión	Cálculo clave	Regla que aprendemos	Señal de alerta
Comprar con descuentos			
Pedir o ahorrar dinero			
Elegir una cuenta u oferta			

2 **Redacta una «regla de oro» sobre cambios sucesivos y otra sobre coste total, con un ejemplo numérico de las fichas.**

3 **Revisión cruzada de la guía de otro equipo.**

- [ ] Los cálculos están bien hechos y comprobados
- [ ] Cada regla tiene un ejemplo con números
- [ ] Se explica la diferencia entre sumar y componer porcentajes
- [ ] Se habla de coste total, no solo de la cuota
- [ ] El lenguaje es claro para alguien de 4.º ESO

FICHA 8 Evidencia individual

Sesión 8

Resuelve sin ayuda del equipo. Muestra los cálculos y escribe las unidades.

1 **Un móvil cuesta 400 € al contado. La tienda lo financia en 24 cuotas de 18 €. El banco presta los 400 € al 4 % anual (interés simple) durante 2 años con una comisión de apertura del 1 %. Calcula el total que se paga en cada opción y decide.**

2 **Otra tienda ofrece el mismo móvil con «−15 % y después −10 % extra» y una tercera con «−25 %». ¿Cuál es más barata y cuánto? ¿Por qué 15 % y 10 % no son 25 %?**

3 **Un sueldo de 1 200 € sube un 2 % y la inflación del año es del 2,9 %. ¿Cuánto vale el nuevo sueldo en poder adquisitivo del año anterior? ¿Mejora o empeora?**

4 **En tres frases, da un consejo financiero a una persona de tu edad apoyado en uno de los cálculos anteriores.**

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 2 · Finanzas para la vida cotidiana

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Guía de decisiones financieras básicas para el alumnado de 4.º ESO. Cada regla debe ir con un ejemplo calculado.

Título y equipo

Nombre de la guía y roles.

Regla 1: cambios porcentuales sucesivos

Ejemplo calculado con índices de variación.

Regla 2: interés y coste total

Fórmula, ejemplo y comparación de dos opciones.

Regla 3: comisiones y condiciones

Coste anual de una cuenta o producto.

Regla 4: inflación y poder adquisitivo

Ejemplo con datos reales del INE.

Señales de alerta en la publicidad

Al menos cinco preguntas que hay que hacer antes de contratar.

Caso práctico resuelto

Cálculos, comprobación y decisión argumentada.

Conclusión y límites

Qué no sabemos (TAE, impuestos, imprevistos).

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 2 · Finanzas para la vida cotidiana

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Guía de decisiones financieras básicas**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] Los índices de variación están bien escritos (1,08; 0,85; 1,21…) y se multiplican en los cambios sucesivos.
- [ ] Se distingue claramente entre sumar y componer porcentajes con un ejemplo.
- [ ] El interés simple se calcula con $I = C \cdot r \cdot t$ con el tiempo en años.
- [ ] El coste total incluye intereses y comisiones, no solo la cuota.
- [ ] Se comparan al menos dos opciones con la misma base (mismo capital y mismo producto).
- [ ] Se usan los datos reales del IPC con fuente y año.
- [ ] Cada recomendación va acompañada de un cálculo comprobado por otro camino.
- [ ] Las señales de alerta son concretas (qué se pregunta y por qué).
- [ ] Los resultados tienen unidades y los redondeos son razonables.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 2 · Finanzas para la vida cotidiana

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Guía de decisiones financieras básicas**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 2 · Finanzas para la vida cotidiana

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé calcular cambios porcentuales sucesivos y explicar por qué no se suman.	◯	◯	◯	◯
Sé calcular el coste total de una financiación y comparar dos ofertas.	◯	◯	◯	◯
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	◯	◯	◯	◯
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	◯	◯	◯	◯
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	◯	◯	◯	◯
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	◯	◯	◯	◯

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 2 · Finanzas para la vida cotidiana

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Casos con una sola tasa, calculados paso a paso.

Ejemplo modelado

Un jersey de 60 € con un 20 % de descuento. Índice: $1 - 0{,}20 = 0{,}80$. Precio final: $60 \cdot 0{,}80 = 48$ €. Interés: 300 € al 2 % durante 2 años: $I = 300 \cdot 0{,}02 \cdot 2 = 12$ €; total $300 + 12 = 312$ €.

Glosario y símbolos

Índice de variación: número por el que se multiplica. C: capital. r: tipo de interés en tanto por uno (3 % = 0,03). t: tiempo en años. I: interés. **Coste total**: lo que se paga en total (capital + intereses + comisiones).

1 **Completa la tabla de descuentos (un solo cambio).**

Precio inicial	Cambio	Índice	Precio final
60 €	−20 %	0,80	48 €
40 €	−25 %		
50 €	+10 %		
90 €	−10 %		

2 **Completa la tabla de interés simple.**

Capital	Tipo anual	Años	Interés	Total
300 €	2 %	2	12 €	312 €
500 €	4 %	1		
1 000 €	3 %	2		
200 €	5 %	3		

3 **Un patinete cuesta 150 €. Lo pagas en 5 cuotas de 33 €. ¿Cuánto pagas en total? ¿Cuánto más que 150 €? Escribe las operaciones.**

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 2 · Finanzas para la vida cotidiana

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Dos ofertas con cuotas parecidas y coste muy distinto

Una cuota baja no significa una oferta barata. Se quiere comprar un portátil de 900 € al contado.

Pasos

1. Diseña dos ofertas de financiación del portátil con cuotas mensuales casi iguales (diferencia de 3 € o menos) pero con un coste total que difiera en al menos 80 €. Indica número de cuotas y valor de la cuota.
2. Calcula para cada oferta el total, el sobrecoste y el sobrecoste en porcentaje.
3. Demuestra con una expresión algebraica por qué dos cuotas parecidas pueden dar costes totales muy distintos: si la oferta 1 tiene n_1 cuotas de c_1 y la 2 tiene n_2 cuotas de c_2, escribe la diferencia de costes.
4. Generaliza: ¿qué dato debes mirar siempre antes que la cuota? Redacta una advertencia para la guía.

1 Tabla de tus dos ofertas.

Oferta	N.º de cuotas	Cuota	Total	Sobrecoste	Sobrecoste en %
Oferta 1					
Oferta 2					

Entrega

Una página con las dos ofertas, los cálculos del coste total y la advertencia redactada con una expresión que justifique la diferencia.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 2 · Finanzas para la vida cotidiana

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: $0{,}15 \cdot 240 = 36$; $\frac{92-80}{80} = 0{,}15 \Rightarrow$ 15 %; multiplicar por 0,85 es disminuir un 15 %.
2. Índices: $1 + 0{,}08 = 1{,}08$; $1 - 0{,}15 = 0{,}85$; $1 + 0{,}21 = 1{,}21$; $1 - 0{,}40 = 0{,}60$; $1 + 1 = 2$.
3. Con IVA: $62 \cdot 1{,}21 = 75{,}02$ €. Sin IVA: $90{,}75 : 1{,}21 = 75$ €. (Restar el 21 % de 90,75 daría 71,69 €, incorrecto.)
4. IPC 2023: 3,1 %; $80 \cdot 1{,}031 = 82{,}48$ €. Tasa de variación: $\frac{148-160}{160} = -0{,}075$, es decir, −7,5 %.

Ficha 2

1. Zapatillas: $80 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}80 = 48$ €; variación total: $\frac{48-80}{80} = -40\,\%$. El cartel no es cierto: 25 % + 20 % = 45 % sería sumar; el descuento real es del 40 %. Mochila: $40 \cdot 1{,}25 \cdot 0{,}80 = 40$ €; variación total 0 %: el «20 % menos» no es un ahorro real.
2. $250 \cdot 1{,}10 = 275$ €; $275 \cdot 0{,}90 = 247{,}50$ €. Índice total: $1{,}10 \cdot 0{,}90 = 0{,}99$ → variación total: −1 %.
3. Inflación acumulada: $1{,}057 \cdot 1{,}031 \cdot 1{,}028 \cdot 1{,}029 \approx 1{,}1528$ → 15,3 %. 100 € de 2021 equivalen a unos 115,28 € de 2025.
4. $\frac{110}{1{,}1528} \approx 95{,}4$: el sueldo equivale a 95,4 € de 2021 por cada 100: pierde ≈ 4,6 % de poder adquisitivo (sube un 10 % pero los precios un 15,3 %).

Ficha 3

1. $I = 2\,000 \cdot 0{,}03 \cdot t = 60t$: años 1, 2, 3, 5 → 60, 120, 180, 300 €. Capital final: 2 060, 2 120, 2 180, 2 300 €.
2. $I = 500 \cdot 0{,}08 \cdot 3 = 120$ €; total 620 €; cuota $620 : 36 \approx 17{,}22$ €.
3. $r = \frac{40}{800 \cdot 2} = 0{,}025$ → 2,5 %. $t = \frac{100}{1\,000 \cdot 0{,}04} = 2{,}5$ años (2 años y 6 meses).
4. $C_f(t) = 2\,000 + 60t$: función afín (lineal), pendiente 60 €/año; es el mismo modelo que «cuota fija (capital) + coste variable» de SdA 1.

Ficha 4

1. Clásica: mantenimiento $3 \cdot 12 = 36$; tarjeta 24; transferencias $6 \cdot 0{,}50 = 3$; cajeros: cada retirada de 100 € paga el mayor de 2 € y 1,50 € → 2 €, $4 \cdot 2 = 8$; total 71 €. Nómina (sin nómina): $4 \cdot 12 = 48$; tarjeta y transferencias 0; cajeros 8; total 56 €. Online: 0 + 0 + 0 + 8 = 8 €. Mejor: Online (8 €).
2. Retirar 50 € → 2 % = 1 €, pero se aplica el mínimo: 1,50 €. Retirar 200 € → 4 €. El mínimo hace que las retiradas pequeñas salgan proporcionalmente más caras (con 50 €, el 3 %).
3. SS: $1\,500 \cdot 0{,}065 = 97{,}50$ €; IRPF: $1\,500 \cdot 0{,}12 = 180$ €; neto $= 1\,500 - 97{,}50 - 180 = 1\,222{,}50$ € (índice 0,815). El compañero obtiene 1 234,20 € porque aplica el segundo porcentaje al neto ya reducido; ambos se calculan sobre el bruto.
4. A: $120 \cdot 0{,}70 = 84$; $84 - 10 = 74$ €. B: $120 \cdot 0{,}80 \cdot 0{,}85 = 81{,}60$ €. A es 7,60 € más barata.

Ficha 5

1. Contado: $1\,200 \cdot 0{,}90 = 1\,080$ €. A: $12 \cdot 100 = 1\,200$ €; sobrecoste 120 € ($\frac{120}{1\,080} \approx 11{,}1\,\%$); cuota 100 €. B: $I = 1\,080 \cdot 0{,}05 \cdot 2 = 108$ €; comisión $1\,080 \cdot 0{,}02 = 21{,}60$ €; total $1\,080 + 108 + 21{,}60 = 1\,209{,}60$ €; sobrecoste 129,60 € (12 %); cuota $1\,209{,}60 : 24 = 50{,}40$ €.
2. Con 60 €/mes solo vale B (50,40 €). Con 100 €/mes, A es más barata en total (1 200 € frente a 1 209,60 €, 9,60 € menos).
3. No es cierto: aunque no haya intereses, se pierde el 10 % de descuento del contado; esos 120 € son el coste de financiar.
4. Depósito: $1\,080 \cdot 0{,}03 \cdot 1 = 32{,}40$ € de intereses; financiar con A cuesta 120 € más. No compensa: se pierden 120 € para ganar 32,40 €.

Ficha 6

1. A1: TIN o TAE, plazo, si hay penalización por retirar antes, capital máximo. A2: tipo anual equivalente, plazo, TAE, otros gastos, qué ocurre si no se paga a tiempo. A3: cuántos artículos y cuántos con ese descuento, precio anterior real. A4: tope de 5 € al mes y sobre qué compras, condiciones. A5: la comisión posterior (4 €/mes), plazo mínimo, condiciones de baja.
2. $I = 600 \cdot 0{,}02 \cdot 12 = 144$ € (24 % anual simple); total 744 €. $1{,}02^{12} \approx 1{,}2682$: si los intereses se acumulan mes a mes (interés compuesto) el coste real sube a ≈ 26,8 % (la TAE aproximada).
3. 30 € → 3 € (10 %); 50 € → 5 € (10 %); 80 € → tope 5 € (6,25 %): $\frac{5}{80} = 0{,}0625$.
4. Comisión primer año: $6 \cdot 4 = 24$ €; media $24 : 12 = 2$ €/mes. Anuncio honesto (ejemplo): «Sin comisiones 6 meses; después 4 € al mes: 24 € el primer año».

Ficha 7

1. Respuestas abiertas. Ejemplo: Comprar con descuentos → multiplicar índices (0,75 · 0,80 = 0,60) → los porcentajes no se suman → desconfiar del «hasta». Pedir o ahorrar → $I = C \cdot r \cdot t$ + comisión → mirar el coste total → desconfiar de «solo un 2 % al mes». Elegir cuenta u oferta → coste anual → cuota baja no es oferta barata.
2. Reglas de oro (ejemplos): «Los cambios porcentuales se multiplican: +20 % y −20 % dejan 96 de 100.» «Compara siempre el coste total (capital + intereses + comisiones), no la cuota.»
3. Revisión cruzada: se valora que cada punto de la lista se compruebe y que los fallos se anoten con una propuesta de mejora.

Ficha 8

1. Tienda: $24 \cdot 18 = 432$ € (sobrecoste 32 €, 8 %). Banco: $I = 400 \cdot 0{,}04 \cdot 2 = 32$ €; comisión $400 \cdot 0{,}01 = 4$ €; total 436 €. La tienda es 4 € más barata (432 € frente a 436 €); ambas cuestan más que 400 € al contado.
2. Dos descuentos: $400 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}90 = 306$ €; −25 %: $400 \cdot 0{,}75 = 300$ €. La de −25 % es 6 € más barata. Porque el 10 % se aplica a 340 € (no a 400 €): $0{,}85 \cdot 0{,}90 = 0{,}765$, es decir, un descuento total del 23,5 %.
3. $1\,200 \cdot 1{,}02 = 1\,224$ €; $1\,224 : 1{,}029 \approx 1\,189{,}50$ €: empeora (pierde unos 10,50 €, ≈ 0,9 %).
4. Respuesta abierta: se valora un consejo concreto con cifras (por ejemplo, comparar el coste total y no la cuota).

Refuerzo

1. Descuentos: 40 · 0,75 = 30 €; 50 · 1,10 = 55 €; 90 · 0,90 = 81 €. Índices: 0,75; 1,10; 0,90.
2. Interés: 500 · 0,04 · 1 = 20 € → 520 €; 1 000 · 0,03 · 2 = 60 € → 1 060 €; 200 · 0,05 · 3 = 30 € → 230 €.
3. Patinete: $5 \cdot 33 = 165$ €; son 15 € más que 150 € (un 10 % más).

Ampliación

1. Ejemplo posible: Oferta 1: 24 cuotas de 40 € = 960 € (sobrecoste 60 €, 6,7 %). Oferta 2: 30 cuotas de 39 € = 1 170 € (sobrecoste 270 €, 30 %). Las cuotas difieren 1 € y los totales 210 €. Se aceptan otras parejas que cumplan las condiciones.
2. Diferencia de costes: $n_2c_2 - n_1c_1$. Aunque $c_2 < c_1$, si n_2 es suficientemente mayor que n_1 la diferencia es positiva: $n_2c_2 - n_1c_1 = 30 \cdot 39 - 24 \cdot 40 = 210$.
3. Advertencia: comparar siempre el coste total (cuota × número de cuotas) y el sobrecoste respecto al precio al contado, antes que la cuota.

Errores frecuentes

- Sumar porcentajes sucesivos (25 % + 20 % = 45 %) en lugar de multiplicar los índices de variación.
- Restar el porcentaje del IVA al precio final para quitar el IVA (hay que dividir entre 1,21).
- Olvidar pasar los meses a años en el interés simple ($t = \frac{6}{12}$) o usar el tipo en % en lugar de en tanto por uno.
- Comparar solo la cuota mensual y no el coste total (capital + intereses + comisiones).
- Calcular un 2 % mensual como un 2 % anual.
- Aplicar un segundo porcentaje sobre la cantidad inicial en lugar de sobre la cantidad ya cambiada (o al revés: calcular sobre el neto lo que se calcula sobre el bruto).

Criterios para valorar respuestas abiertas

- En las respuestas abiertas (ficha 6, 7 y 8) se valora que cada afirmación vaya acompañada de un cálculo o un dato concreto.
- Los datos del IPC son reales (INE): conviene actualizarlos a la fecha de uso en ine.es. El resto de ofertas y las comisiones son ficticias; no son recomendaciones de ningún producto real.
- La TAE solo se presenta de forma aproximada (1,02^12); el interés compuesto no es obligatorio en esta SdA.
- La calculadora o la hoja de cálculo son válidas para comprobar, pero los índices y fórmulas deben aparecer escritos.

03

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Álgebra para resolver problemas reales

PREGUNTA GUÍA

¿Cómo elegimos entre ecuación, sistema o inecuación para describir una situación?

CURSO 4.º ESO · Matemáticas A	**SESIONES** 8 sesiones · 1.º trimestre	**SENTIDOS PRIORITARIOS** D · Sentido algebraico
COMPETENCIAS ESPECÍFICAS CE1, CE2, CE4, CE6, CE8	**PRODUCTO FINAL** Banco comentado de modelos algebraicos	**CRITERIOS DE EVALUACIÓN** 1.1, 1.2, 2.1, 4.2, 6.1, 8.1

Contexto, reto y sentido

El instituto organiza un **mercadillo solidario** en una carpa con aforo limitado. Hay que repartir entradas de dos precios, mezclar frutos secos para vender, cubrir los gastos de la carpa y asegurarse de que sobra dinero para la ONG. Cada decisión puede escribirse con matemáticas, pero no todas las situaciones se escriben igual: unas piden una ecuación, otras un sistema de dos ecuaciones y otras una inecuación.

La situación moviliza el sentido algebraico: modelizar con expresiones y ecuaciones lineales y cuadráticas, resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, resolver inecuaciones lineales y expresar las soluciones con intervalos. Lo decisivo no es solo resolver, sino **elegir el modelo adecuado**, comprobar que la solución tiene sentido en el contexto (¿puede haber −8 sillas?) y explicar por qué se ha elegido ese camino. El producto final es un banco de problemas modelizados, resueltos y comentados que otros equipos puedan consultar.

Reto

Construir un banco comentado de modelos algebraicos con cuatro problemas del mercadillo (ecuación, sistema, inecuación y uno libre) en el que cada uno tenga enunciado, incógnitas, modelo, resolución, comprobación y justificación de la elección del modelo.

Producto final

Banco comentado de modelos algebraicos.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE4** Utilizar el pensamiento computacional: descomponer, reconocer patrones, generalizar y crear algoritmos.
- **CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- **1.1** Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.
- **1.2** Seleccionar herramientas y estrategias elaboradas valorando su eficacia e idoneidad en la resolución de problemas.
- **2.1** Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.
- **4.2** Modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz interpretando, modificando y creando algoritmos sencillos.
- **6.1** Proponer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.
- **8.1** Comunicar ideas, conclusiones, conjeturas y razonamientos matemáticos utilizando diferentes medios, con coherencia, claridad y terminología apropiada.

Saberes básicos prioritarios

D
Sentido algebraico

- Modelización de situaciones reales mediante ecuaciones, sistemas e inecuaciones: elección de la incógnita y traducción del enunciado.
- Resolución de ecuaciones de primer grado y de segundo grado (fórmula general, factor común, diferencia de cuadrados) e interpretación del discriminante.
- Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por sustitución, igualación y reducción; interpretación gráfica y clasificación (compatible determinado, indeterminado, incompatible).
- Resolución de inecuaciones lineales con una incógnita, representación en la recta y expresión de las soluciones con intervalos.
- Comprobación de soluciones y selección de las válidas en el contexto; uso de GeoGebra o calculadora para verificar.

A
Sentido numérico

- Operaciones con números reales (decimales y raíces) y estimación del resultado como control de razonabilidad.

F
Sentido socioafectivo

- Gestión del error: localizar y corregir errores propios y ajenos en una resolución.
- Comunicación y argumentación de la elección de un modelo en equipo.

Objetivos didácticos

- ✓ Modelizar restricciones con expresiones algebraicas.
- ✓ Resolver ecuaciones, sistemas e inecuaciones adecuadas al contexto.
- ✓ Comprobar y seleccionar soluciones válidas.
- ✓ Explicar el método elegido.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Clasificación de situaciones por modelo

Evidencia: Ficha 1: diagnóstico y clasificación de ocho situaciones del mercadillo según el modelo que requieren (ecuación, sistema, inecuación).

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Ecuaciones lineales y cuadráticas sencillas

Evidencia: Ficha 2: resolución y comprobación de ecuaciones lineales y cuadráticas, con un problema del huerto y selección de soluciones válidas.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Sistemas 2×2

Evidencia: Ficha 3: sistemas 2×2 por sustitución, igualación y reducción, con interpretación gráfica y clasificación.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Inecuaciones y intervalos

Evidencia: Ficha 4: inecuaciones lineales, intervalos y representación en la recta; casos de beneficio mínimo y de aforo.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Problemas de mezcla/coste/aforo ficticios

Evidencia: Ficha 5: modelización de problemas de mezcla, reparto y coste con aforo, eligiendo y justificando el modelo.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Uso tecnológico para comprobar

Evidencia: Ficha 6: uso de tecnología para comprobar y detección de cuatro errores en resoluciones ajenas.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Banco comentado

Evidencia: Ficha 7: borrador del banco comentado: cuatro problemas con modelo, resolución, comprobación y comentario.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

8

SESIÓN 8

Reto individual

Evidencia: Ficha 8: reto individual con tres problemas nuevos (huerto, cafetería, abono) y elección del modelo.

Ficha: Anexo 3 · ficha 8

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Banco de casos · calculadora/GeoGebra · recta numérica

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Modelo indicado y coeficientes pequeños.

Ampliación

Anexo 9

Crear una misma situación que pueda resolverse de dos maneras y comparar eficiencia.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Reformulación de cada enunciado en lenguaje algebraico: elección de incógnitas, datos y relaciones, y distinción del tipo de modelo.	Ficha 1 y borrador del Anexo 4 / lista de cotejo
1.2	Elección razonada de un método (sustitución, igualación, reducción, fórmula general, factor común) y valoración de su eficacia en cada problema.	Fichas 2, 3 y 5 / escala de valoración
2.1	Comprobación de las soluciones por sustitución y con tecnología, y descarte de las que no tienen sentido en el contexto.	Ficha 6 y comprobación de cada problema del banco / rúbrica
4.2	Descomposición de cada problema en un procedimiento de pasos (leer, nombrar, plantear, resolver, comprobar) y creación de un problema propio con ese procedimiento.	Fichas 5 y 7 / rúbrica
6.1	Traducción de situaciones del mercadillo (entradas, mezclas, aforo, beneficios) a ecuaciones, sistemas e inecuaciones y vuelta al contexto.	Anexo 4 y Ficha 8 / rúbrica

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
8.1	Comentario escrito de cada problema del banco y explicación de por qué se ha elegido ese modelo y no otro.	Anexo 4 y defensa oral / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Banco, soluciones verificadas y justificación.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 3 · Álgebra para resolver problemas reales

ALUMNADO

El mercadillo solidario del instituto ya tiene fecha, pero la organización es un lío: han vendido 120 entradas, unas de 8 € y otras de 5 €, y la caja marca 750 €. ¿Cuántas de cada? En la carpa solo caben 120 personas y ya hay 87 dentro: ¿cuántas pueden entrar todavía? Hay que mezclar frutos secos para que cada kilo salga a 6 €, y el alquiler de la carpa cuesta 150 €. ¿A partir de cuántos asistentes sobra dinero para la ONG? Todo se puede escribir con álgebra, pero no siempre con la misma herramienta. Vuestro reto: decidir cuándo usar una ecuación, un sistema o una inecuación, resolverlo y defenderlo.

> *¿Cómo elegimos entre ecuación, sistema o inecuación para describir una situación?*

Vuestro reto

Construir un banco comentado de modelos algebraicos con cuatro problemas del mercadillo (ecuación, sistema, inecuación y uno libre) en el que cada uno tenga enunciado, incógnitas, modelo, resolución, comprobación y justificación de la elección del modelo.

Lo que vais a producir

Banco comentado de modelos algebraicos.

Hoja de ruta · 8 sesiones

1. Clasificamos ocho situaciones: ¿ecuación, sistema o inecuación?
2. Resolvemos y comprobamos ecuaciones lineales y cuadráticas.
3. Resolvemos sistemas 2×2 y los interpretamos con gráficas.
4. Resolvemos inecuaciones y las expresamos con intervalos.
5. Modelizamos mezclas, repartos, costes y aforos.
6. Comprobamos con tecnología y cazamos errores.
7. Montamos el banco comentado de modelos.
8. Resolvemos tres retos nuevos de forma individual.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Modelizar restricciones con expresiones algebraicas.
- ✓ Resolver ecuaciones, sistemas e inecuaciones adecuadas al contexto.
- ✓ Comprobar y seleccionar soluciones válidas.
- ✓ Explicar el método elegido.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 3 · Álgebra para resolver problemas reales

ALUMNADO

Ocho situaciones del mercadillo para clasificar, una guía para elegir el modelo, tres ejemplos resueltos (ecuación, sistema e inecuación), una gráfica del sistema, una recta con intervalos, los datos del mercadillo y un protocolo de comprobación con tecnología. Los datos son ficticios.

F1 Ocho situaciones del mercadillo

DATOS

N.º	Situación
S1	Si a un número le sumamos 7 y el resultado lo multiplicamos por 3, obtenemos 36.
S2	Se han vendido 120 entradas, unas de adulto a 8 € y otras de joven a 5 €, y se han recaudado 750 €.
S3	Un huerto escolar rectangular tiene el largo 2 m mayor que el ancho y una superficie de 48 m^2.
S4	La carpa cuesta 150 € y cada asistente genera 2 € de gasto. La entrada cuesta 8 €. Se quiere ganar al menos 300 €.
S5	Se mezclan nueces (10 €/kg) y cacahuetes (4 €/kg) para obtener 30 kg de mezcla a 6 €/kg de media.
S6	En la carpa caben 120 personas como máximo y ya hay 87 dentro.
S7	El cuadrado de un número menos cinco veces ese número es 14.
S8	Tres camisetas y dos sudaderas cuestan 76 €; dos camisetas y tres sudaderas cuestan 84 €.

Fuente: Situaciones ficticias creadas para el aula.

Subraya las palabras y los datos que te dicen qué modelo necesitas («al menos», «como máximo», «en total», «cuadrado»…).

F2 ¿Ecuación, sistema o inecuación? Pasos y fórmulas clave

TEXTO

Cómo elegir el modelo

- **Ecuación:** una incógnita y una igualdad. Pistas: «es igual a», «sale», «obtenemos».
- **Sistema de 2 ecuaciones:** dos incógnitas y dos relaciones independientes (por ejemplo, un total de unidades y un total de dinero).
- **Inecuación:** una condición de «al menos» ($\geq$), «como máximo» ($\leq$), «más de» ($>$), «menos de» ($<$). La solución es un conjunto de valores, no uno solo.

Pasos para resolver un problema: 1. Leer y subrayar datos. 2. Nombrar la(s) incógnita(s) con su unidad. 3. Plantear. 4. Resolver. 5. Comprobar en el enunciado. 6. Responder con una frase completa.

Fórmulas clave

Ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. El **discriminante** $\Delta = b^2 - 4ac$ indica: si $\Delta > 0$, dos soluciones; si $\Delta = 0$, una; si $\Delta < 0$, ninguna real.

Sistemas: sustitución (despejo una incógnita y la sustituyo), igualación (despejo la misma en las dos) y reducción (sumo o resto para eliminar una incógnita).

Inecuaciones: se resuelven como una ecuación, pero **si multiplicas o divides por un número negativo, el sentido de la desigualdad se invierte**.

Fuente: Elaboración propia.

Una solución solo es respuesta del problema si tiene sentido en el contexto.

F3 Ejemplo resuelto 1: el huerto (ecuación de segundo grado)

ESTUDIO DE CASO

Enunciado. Un huerto rectangular tiene el largo 2 m mayor que el ancho y una superficie de 48 m². ¿Cuáles son sus dimensiones?

1. Incógnita. x = ancho en metros; largo = $x + 2$.

2. Ecuación. Área = ancho · largo: $x\,(x + 2) = 48 \Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0$.

3. Resolución. $a = 1, b = 2, c = -48$; $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 196$; $\sqrt{196} = 14$.

$x = \frac{-2 \pm 14}{2}$: $x_1 = 6$ y $x_2 = -8$.

4. Selección. Un ancho no puede ser negativo: se descarta $x = -8$. Ancho: 6 m; largo: 8 m.

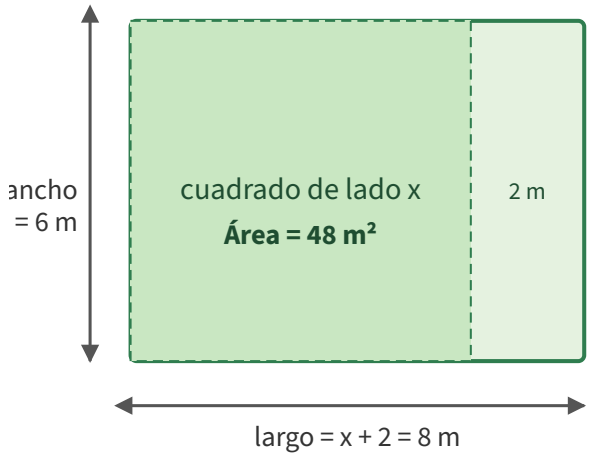
5. Comprobación. $6 \cdot 8 = 48$ m². ✔ Perímetro: $2 \cdot (6 + 8) = 28$ m.

Fuente: Elaboración propia a partir de la situación S3.

Las dos soluciones de la ecuación son correctas como ecuación, pero solo una lo es como respuesta del problema.

F4 El huerto a escala

ESQUEMA



x = 6 → largo 8 m ✔

x = −8 → ancho negativo ✘

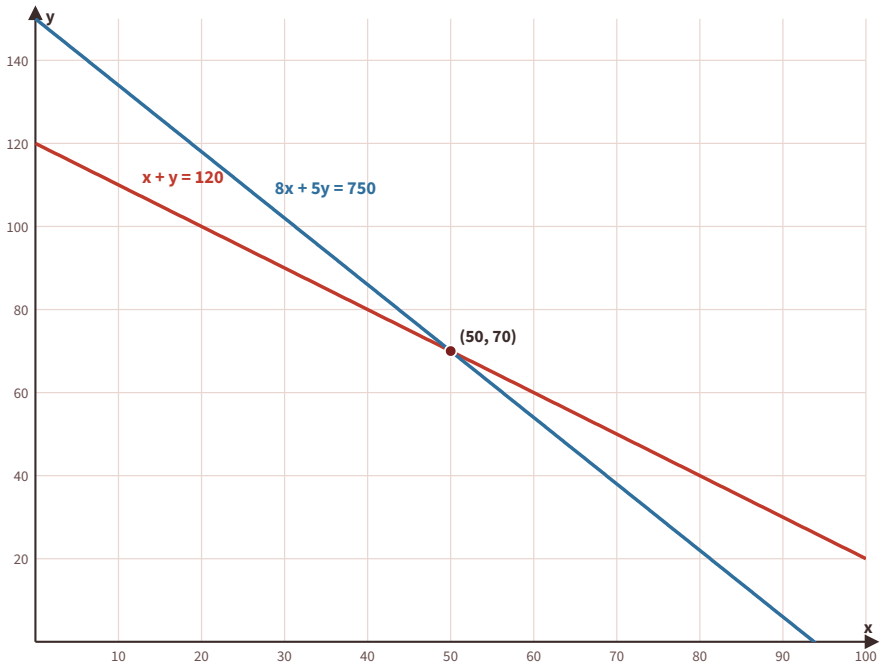
La parte oscura es $x \cdot x = 36$ m²; la franja de 2 m es $2 \cdot 6 = 12$ m². Suma: 36 + 12 = 48 m². ✔

Fuente: Esquema de elaboración propia (1 m = 28 px).

Dibujar la situación ayuda a plantear la ecuación y a ver qué solución tiene sentido.

F5 Ejemplo resuelto 2: las entradas (sistema de dos ecuaciones)

GRÁFICO



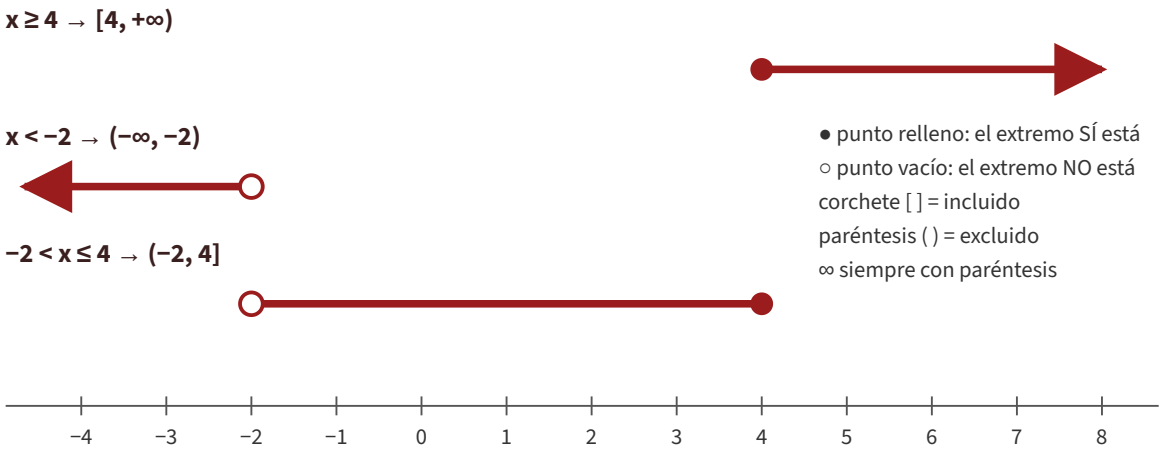
Incógnitas: x = entradas de adulto, y = entradas de joven. **Sistema:** $x + y = 120$ y $8x + 5y = 750$. **Sustitución:** $y = 120 - x \Rightarrow 8x + 5(120 - x) = 750 \Rightarrow 3x + 600 = 750 \Rightarrow x = 50; y = 70$. **Comprobación:** $50 + 70 = 120$ y $8 \cdot 50 + 5 \cdot 70 = 400 + 350 = 750$ ✔. En la gráfica, cada ecuación es una recta y la solución del sistema es su punto de corte.

Fuente: Elaboración propia a partir de la situación S2.

Resolver un sistema equivale a encontrar el punto donde se cortan dos rectas.

F6 Inecuaciones: soluciones en la recta numérica

ESQUEMA



Fuente: Esquema de elaboración propia.

En las inecuaciones la solución es un intervalo: contiene infinitos números.

F7 Ejemplo resuelto 3: el beneficio mínimo (inecuación)

ESTUDIO DE CASO

Enunciado. La carpa cuesta 150 €. Cada asistente cuesta 2 € de merienda y paga una entrada de 8 €. ¿Cuántos asistentes hacen falta para ganar **al menos** 300 €?

1. Incógnita. x = número de asistentes.

2. Plantear. Ingresos − gastos ≥ 300: $8x - (150 + 2x) \geq 300$.

3. Resolver. $8x - 150 - 2x \geq 300 \Rightarrow 6x \geq 450 \Rightarrow x \geq 75$. Solución: $[75, +\infty)$.

4. Contexto. Como en la carpa caben como máximo 120 personas, $x \leq 120$. Solución válida: $75 \leq x \leq 120$, es decir, el intervalo $[75, 120]$ con números enteros.

5. Comprobación. Con $x = 75$: $8 \cdot 75 - (150 + 150) = 600 - 300 = 300$ ✔. Con $x = 74$: $592 - 298 = 294 < 300$.

Fuente: Elaboración propia a partir de la situación S4.

En una inecuación se comprueba el extremo y un valor de dentro y otro de fuera del intervalo.

F8 Datos del mercadillo solidario

DATOS

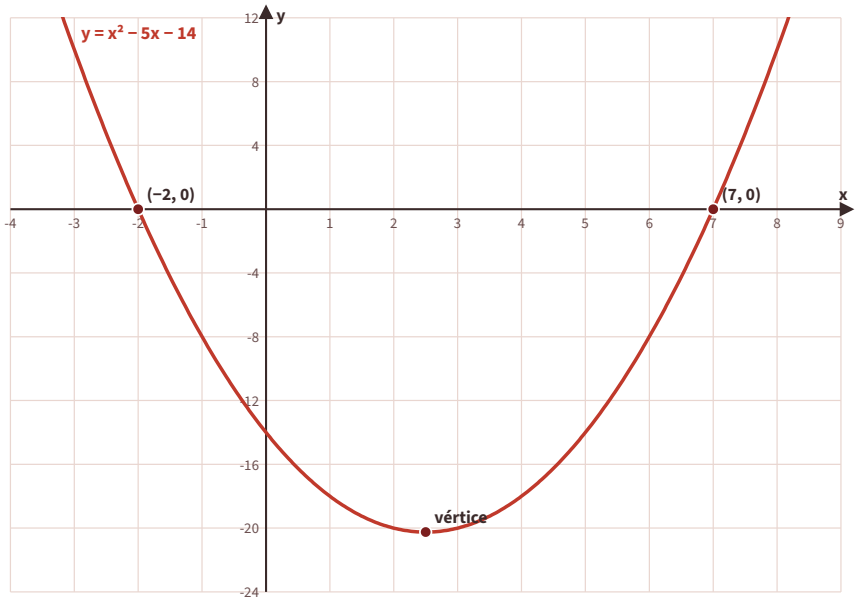
Concepto	Dato
Entradas	Adulto: 8 €. Joven: 5 €.
Aforo máximo de la carpa	120 personas.
Alquiler de la carpa	150 € (gasto fijo).
Merienda	2 € por asistente (gasto variable).
Frutos secos	Nueces: 10 €/kg. Cacahuetes: 4 €/kg. Mezcla de 30 kg a 6 €/kg.
Reparto del beneficio de 240 €	4.º A recibirá 30 € más que el doble de lo que reciba 4.º B.
Camisetas y sudaderas	3 camisetas + 2 sudaderas = 76 €; 2 camisetas + 3 sudaderas = 84 €.

Fuente: Datos ficticios creados para el aula.

Usa esta tabla para buscar los datos de las fichas 4, 5 y 7.

F9 Comprobar con tecnología: las raíces de una parábola

GRÁFICO



Protocolo. 1. En GeoGebra escribe «f(x)=x^2-5x-14» y pulsa Intro. 2. Escribe «Raíz(f)» para ver los cortes con el eje horizontal. 3. Para un sistema, escribe las dos ecuaciones («x+y=120», «8x+5y=750») y usa «Intersección(a,b)». 4. Para una inecuación, escribe «x>=75» y observa la zona sombreada. 5. Compara siempre el resultado con el obtenido a mano y anota si coinciden.

Calculadora científica: el modo «ecuación» resuelve sistemas 2×2 y ecuaciones de segundo grado; úsalo para comprobar, no para sustituir la resolución escrita.

Fuente: Elaboración propia con GeoGebra o calculadora gráfica.

Las raíces de la parábola son las soluciones de $x^2 - 5x - 14 = 0$: -2 y 7 (situación S7).

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 3 · Álgebra para resolver problemas reales

ALUMNADO

FICHA 1 ¿Ecuación, sistema o inecuación?

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Lee las ocho situaciones de F1 y los criterios de F2.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

La solución de $x + 3 = 10$ es…

☐ $x = 7$ ☐ $x = 13$ ☐ $x = -7$

Las soluciones de $2x \leq 8$ son…

☐ $x \leq 4$ ☐ $x \geq 4$ ☐ $x \leq 16$

El sistema $x + y = 5$, $x - y = 1$ tiene como solución…

☐ $(3, 2)$ ☐ $(2, 3)$ ☐ $(4, 1)$

2 **Clasifica las ocho situaciones: escribe el modelo (ecuación de 1.er grado, ecuación de 2.º grado, sistema o inecuación) y la palabra o dato que te lo indica.**

Situación	Modelo	Pista del enunciado
S1		
S2		
S3		
S4		
S5		
S6		
S7		
S8		

3 **Elige tres situaciones y escribe, sin resolver, las incógnitas con su unidad y la expresión algebraica que las relaciona.**

FICHA 2 Ecuaciones lineales y cuadráticas

Sesión 2

Resuelve y comprueba cada solución sustituyendo. Para las de segundo grado usa F2 y el ejemplo F3.

1 **Resuelve y comprueba.**

Ecuación	Pasos	Solución	Comprobación
$3(x+7)=36$			
$5x-8=2x+13$			
$\frac{x}{3}+2=7$			
$2(x-3)=3x+1$			

2 **Resuelve las ecuaciones de segundo grado e indica qué método usas (fórmula, factor común o diferencia de cuadrados).**

Ecuación	Método	Solución o soluciones
$x^2-5x-14=0$		
$2x^2-8x=0$		
$x^2-9=0$		
$x^2+4x+5=0$		

3 **S3. Un huerto rectangular tiene el largo 3 m mayor que el ancho y una superficie de 70 m². Plantea la ecuación, resuélvela, descarta la solución que no sirva y comprueba.**

4 **Verdadero o falso. Justifica las falsas.**

	V	F
Toda ecuación de segundo grado tiene dos soluciones reales distintas.	☐	☐
Si el discriminante vale 0, la ecuación tiene una única solución.	☐	☐
Si una solución de la ecuación es negativa, siempre es respuesta válida del problema.	☐	☐

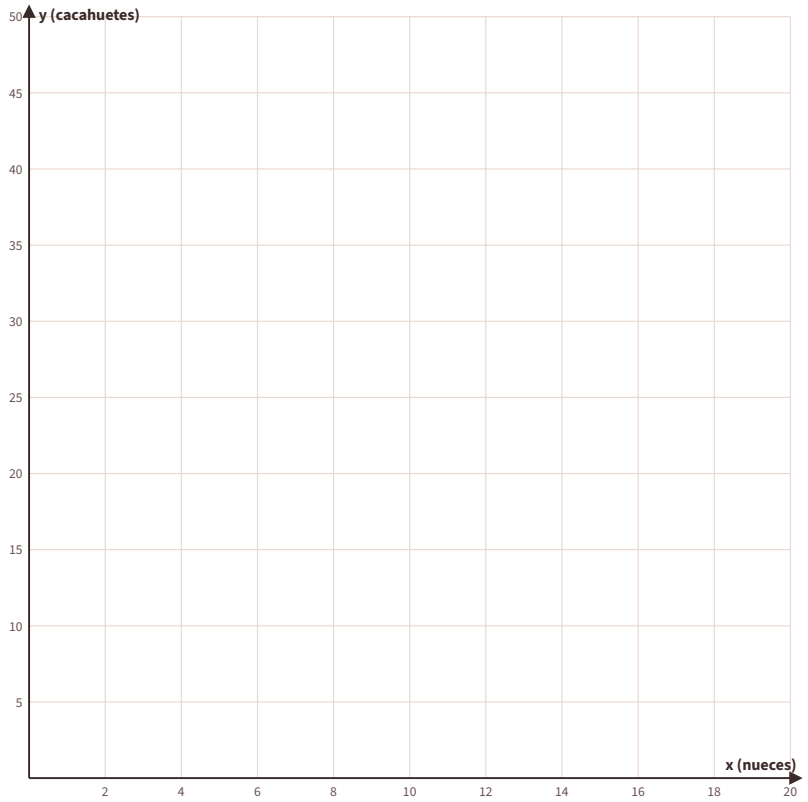
FICHA 3 Sistemas de dos ecuaciones

Sesión 3

Resuelve algebraicamente y comprueba. Usa F5 como modelo.

1 **S5. Se mezclan nueces (10 €/kg) y cacahuetes (4 €/kg) para obtener 30 kg a 6 €/kg de media. Plantea el sistema y resuélvelo por sustitución. ¿Cuántos kilos de cada?**

2 **Dibuja las dos rectas del sistema de S5 en la cuadrícula ($y = 30 - x$ y $4y = 180 - 10x$) y marca el punto de corte.**



3 **S8. Tres camisetas y dos sudaderas cuestan 76 €; dos camisetas y tres sudaderas cuestan 84 €. Resuélvelo por reducción. ¿Cuánto cuesta cada prenda?**

4 **¿Cuántas soluciones tiene cada sistema? Relaciónalo con su gráfica (rectas que se cortan, paralelas o coincidentes).**

Sistema	¿Cuántas soluciones?	Por qué
$x + y = 5$ y $2x + 2y = 10$		
$x + y = 5$ y $x + y = 7$		
$2x - y = 1$ y $x + y = 5$		

FICHA 4 Inecuaciones e intervalos

Sesión 4

Recuerda: si multiplicas o divides por un número negativo, el sentido de la desigualdad cambia. Usa F6 para los intervalos.

1 **Resuelve y expresa la solución con un intervalo.**

Inecuación	Pasos	Intervalo	Representación en la recta
$3x - 5 \geq 7$			
$-2x + 6 < 10$			
$5 - x \leq 2x + 8$			
$-3 < 2x + 1 \leq 9$			

2 **Relaciona cada desigualdad con su intervalo.**

1 $x \geq 4$ ●	● a $[4, +\infty)$
2 $x < -2$ ●	● b $(-\infty, -2)$
3 $-2 < x \leq 4$ ●	● c $(-2, 4]$

3 **S4 y S6 con F7 y F8. S4: ¿cuántos asistentes hacen falta para ganar al menos 300 €, si la carpa admite hasta 120 personas? S6: en la carpa caben 120 personas y ya hay 87; ¿cuántas más pueden entrar?**

4 **En $-2x + 6 < 10$ prueba con $x = 0$ y con $x = -5$. ¿Qué te dice sobre el sentido de la desigualdad? Explícalo.**

FICHA 5 Mezclas, repartos y aforos

Sesión 5

Usa F8. En cada problema nombra la incógnita, elige el modelo y comprueba.

1 **Reparto. El beneficio de 240 € se reparte entre 4.º A y 4.º B: 4.º A recibe 30 € más que el doble de lo que recibe 4.º B. ¿Cuánto recibe cada clase? Elige el modelo y resuélvelo.**

2 **Coste.** Un taller de cerámica cuesta 90 € de alquiler y 3 € de material por persona. Se cobra una entrada de 9 €. ¿Cuántas personas hacen falta para ganar como mínimo 150 €? Si caben 60 personas, ¿cuál es el beneficio máximo?

3 **Elección del modelo.** Completa la tabla comparando los dos problemas anteriores y S5.

Problema	Incógnitas	Modelo elegido	¿Por qué ese modelo?
Reparto			
Taller			
S5 mezcla			

4 Convierte este procedimiento en tus propios pasos escritos: «Leer – nombrar – plantear – resolver – comprobar – responder». Aplícalo a un problema nuevo que inventes del mercadillo.

FICHA 6 Comprobar con tecnología y cazar errores

Sesión 6

Usa el protocolo de F9 y verifica tus resultados con GeoGebra o una calculadora.

1 Con F9, lee en la gráfica las soluciones de $x^2 - 5x - 14 = 0$. Comprueba con la fórmula y con la sustitución. ¿Qué significan geométricamente?

2 En cada resolución hay un error. Encuéntralo, explica cuál es y corrige.

Resolución con error	Error cometido	Resolución correcta
$3x - 5 \geq 7 \Rightarrow 3x \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$		
$-2x + 6 < 10 \Rightarrow -2x < 4 \Rightarrow x < -2$		
$x^2 - 5x - 14 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm 9}{2}$		
$y = 120 - x \Rightarrow 8x + 5 \cdot 120 - x = 750 \Rightarrow 7x = 150$		

3 Comprueba por sustitución la solución $(50, 70)$ de S2 en las dos ecuaciones y comprueba que $x = 75$ cumple la inecuación de S4. ¿Qué herramienta te ha parecido más cómoda para comprobar y por qué?

FICHA 7 Borrador del banco comentado

Sesión 7

Elegid cuatro problemas (uno de ecuación, uno de sistema, uno de inecuación y uno libre) y redactadlos para el banco (Anexo 4).

1 Completad la tabla de planificación del banco.

Problema	Modelo	Incógnitas	Resolución	Solución válida
1 (ecuación)				
2 (sistema)				
3 (inecuación)				
4 (libre)				

2 **Inventad un problema propio del mercadillo que pida un sistema y resolvedlo.**

3 **Revisión cruzada del banco de otro equipo.**

- [ ] El modelo elegido es adecuado al enunciado
- [ ] Se nombran las incógnitas con su unidad
- [ ] La resolución es correcta y está comprobada
- [ ] Se descartan las soluciones sin sentido
- [ ] El comentario explica por qué ese modelo

FICHA 8 Reto individual

Sesión 8

Resuelve sin ayuda del equipo. Nombra incógnitas, elige modelo, comprueba y responde con una frase.

1 **Un huerto rectangular tiene 20 m de perímetro y 24 m^2 de superficie. Plantea una ecuación con una incógnita y resuélvela. ¿Por qué las dos soluciones dan el mismo huerto?**

2 En la cafetería, 2 bocadillos y 3 refrescos cuestan 9,10 €, y 3 bocadillos y 2 refrescos cuestan 10,40 €. ¿Cuánto cuesta cada cosa?

3 Un abono de 30 € permite entrar al mercadillo a 1,50 € por entrada. Sin abono, cada entrada cuesta 4 €. ¿A partir de cuántas entradas compensa el abono? Escribe la solución como intervalo.

4 Explica con tus palabras cuándo usarías una ecuación, un sistema o una inecuación y pon un ejemplo de cada uno.

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 3 · Álgebra para resolver problemas reales

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Banco comentado de modelos algebraicos del mercadillo solidario. Cada problema ocupa un recuadro.

Título del banco y equipo

Nombres y roles.

Problema 1 · Ecuación

Enunciado · incógnita · ecuación · resolución · comprobación · respuesta.

Problema 2 · Sistema

Enunciado · incógnitas · sistema · método · comprobación · respuesta.

Problema 3 · Inecuación

Enunciado · inecuación · intervalo en la recta · comprobación.

Problema 4 · Libre (propio)

Problema inventado por el equipo con su resolución.

Cómo elegimos el modelo

Pistas del enunciado que nos dicen ecuación, sistema o inecuación.

Errores que hemos corregido

Un error propio y cómo lo detectamos.

Comprobación con tecnología

Captura o descripción de la comprobación con GeoGebra o calculadora.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 3 · Álgebra para resolver problemas reales

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Banco comentado de modelos algebraicos**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] Cada problema nombra las incógnitas con su unidad.
- [ ] El modelo (ecuación, sistema o inecuación) es adecuado al enunciado y está justificado.
- [ ] Las ecuaciones de segundo grado se resuelven con un método adecuado y se discuten las soluciones.
- [ ] Los sistemas se resuelven por un método claro y la solución se interpreta.
- [ ] Las inecuaciones se resuelven bien (con inversión del sentido cuando procede) y se expresan con intervalo y en la recta.
- [ ] Todas las soluciones se comprueban por sustitución y se descartan las que no tienen sentido en el contexto.
- [ ] Hay al menos una comprobación con tecnología (GeoGebra o calculadora).
- [ ] Cada problema termina con una respuesta en una frase completa con unidades.
- [ ] Se incluye un problema inventado por el equipo y un comentario sobre un error corregido.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 3 · Álgebra para resolver problemas reales

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Banco comentado de modelos algebraicos**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 3 · Álgebra para resolver problemas reales

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé decidir si un problema se resuelve con una ecuación, un sistema o una inecuación y explicar por qué.	◯	◯	◯	◯
Sé comprobar una solución y descartarla si no tiene sentido en el contexto.	◯	◯	◯	◯
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	◯	◯	◯	◯
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	◯	◯	◯	◯
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	◯	◯	◯	◯
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	◯	◯	◯	◯

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 3 · Álgebra para resolver problemas reales

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Modelo ya indicado y coeficientes pequeños: solo hay que resolver y comprobar.

Ejemplo modelado

Ecuación: «El triple de un número más 2 es 14». $3x + 2 = 14 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$. Comprobación: $3 \cdot 4 + 2 = 14$. ✔ Sistema: «Suma 10 y diferencia 2»: $x + y = 10, x - y = 2$; sumo: $2x = 12 \Rightarrow x = 6, y = 4$.

Glosario y símbolos

Incógnita: lo que buscamos (x, y). **Ecuación**: igualdad con incógnita. **Sistema**: dos ecuaciones con dos incógnitas. **Inecuación**: desigualdad con incógnita ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$). **Intervalo**: conjunto de números entre dos extremos, $[a, b]$ cerrado, (a, b) abierto. **Comprobar**: sustituir en el enunciado.

1 **Resuelve las ecuaciones (modelo indicado) y completa la comprobación.**

Ecuación	Solución	Comprobación
$x + 5 = 12$		
$2x + 3 = 11$		
$3x - 4 = x + 6$		

2 **Sistema indicado: dos números suman 15 y su diferencia es 3, es decir, $x + y = 15$ y $x - y = 3$. Completa.**

Sumo las ecuaciones: _____ x = _____ → x = _____. Después y = 15 − _____ = _____.

3 **Inecuación indicada: «una entrada cuesta 4 € y se quiere gastar como máximo 20 €». Completa: $4x \leq$ ___ → $x \leq$ ___. ¿Cuál es el número máximo de entradas?**

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 3 · Álgebra para resolver problemas reales

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Una misma situación, dos caminos: ¿cuál es más eficaz?

Muchos problemas con dos incógnitas pueden resolverse con un sistema o con una sola ecuación si se expresa una incógnita en función de la otra. Crea una situación que admita ambos caminos y compáralos.

Pasos

1. Escribe un problema del mercadillo (por ejemplo, entradas de dos precios con un total de entradas y una recaudación) con datos tuyos y solución entera.
2. Resuélvelo como sistema de dos ecuaciones (reducción o igualación) y, aparte, con una sola ecuación de una incógnita (nombrando x y expresando la otra como $T - x$).
3. Compara: número de pasos, riesgo de error, facilidad de comprobar y qué información extra da cada método.
4. Generaliza: si hay T entradas en total, de precios p y q, y una recaudación R, escribe una fórmula para el número de entradas de precio p.

1 **Tabla de comparación de los dos métodos.**

Criterio	Sistema	Una ecuación
Número de pasos		
Posibles errores		
Facilidad de comprobar		
Cuándo lo prefiero		

Entrega

Tu problema, las dos resoluciones completas, la tabla de comparación y la fórmula general justificada.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 3 · Álgebra para resolver problemas reales

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: $x = 7$; $2x \leq 8 \Rightarrow x \leq 4$; el sistema $x + y = 5, x - y = 1$ tiene solución (3, 2) porque $3 + 2 = 5$ y $3 - 2 = 1$.
2. S1: ecuación de 1.er grado ($3(x + 7) = 36$; «obtenemos»). S2: sistema (dos incógnitas, total de entradas y total de dinero). S3: ecuación de 2.º grado (área = $x(x + 2)$). S4: inecuación («al menos»). S5: sistema (total de kilos y precio medio). S6: inecuación («como máximo»). S7: ecuación de 2.º grado (cuadrado de un número). S8: sistema (dos precios, dos compras).
3. Respuestas abiertas: por ejemplo, S2 → x = entradas de adulto, y = entradas de joven: $x + y = 120, 8x + 5y = 750$. S4 → x = asistentes: $8x - (150 + 2x) \geq 300$. S6 → x = personas que pueden entrar: $87 + x \leq 120$.

Ficha 2

1. $3(x + 7) = 36 \Rightarrow x + 7 = 12 \Rightarrow x = 5$ (✔: $3 \cdot 12 = 36$). $5x - 8 = 2x + 13 \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7$ (✔: $27 = 27$). $\frac{x}{3} + 2 = 7 \Rightarrow \frac{x}{3} = 5 \Rightarrow x = 15$. $2x - 6 = 3x + 1 \Rightarrow -x = 7 \Rightarrow x = -7$ (✔: $2 \cdot (-10) = -20$ y $3 \cdot (-7) + 1 = -20$).
2. $x^2 - 5x - 14 = 0$: fórmula, $\Delta = 25 + 56 = 81$, $x = \frac{5 \pm 9}{2}$ → 7 y −2. $2x^2 - 8x = 0$: factor común, $2x(x - 4) = 0$ → 0 y 4. $x^2 - 9 = 0$: diferencia de cuadrados, $x = \pm 3$. $x^2 + 4x + 5 = 0$: $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$ → sin solución real.
3. Ancho x, largo $x + 3$: $x(x + 3) = 70 \Rightarrow x^2 + 3x - 70 = 0$; $\Delta = 9 + 280 = 289$, $\sqrt{289} = 17$; $x = \frac{-3 \pm 17}{2}$ → 7 y −10. Se descarta −10. Ancho 7 m, largo 10 m. Comprobación: $7 \cdot 10 = 70$ m².
4. F (puede tener 2, 1 o ninguna). V ($\Delta = 0$ → una solución). F (en un problema geométrico, una longitud negativa no es válida; en S7, «un número» sí admite −2).

Ficha 3

1. S5: x = kg de nueces, y = kg de cacahuetes: $x + y = 30$; $10x + 4y = 6 \cdot 30 = 180$. Sustitución: $y = 30 - x \Rightarrow 10x + 4(30 - x) = 180 \Rightarrow 6x + 120 = 180 \Rightarrow x = 10$; $y = 20$. Comprobación: $10 + 20 = 30$; $100 + 80 = 180$ ✔.
2. Las rectas $y = 30 - x$ (pasa por (0, 30) y (30, 0)) e $y = 45 - 2{,}5x$ (pasa por (0, 45) y (18, 0)) se cortan en (10, 20).
3. S8: c = camiseta, s = sudadera: $3c + 2s = 76$; $2c + 3s = 84$. Multiplico la primera por 3 y la segunda por 2: $9c + 6s = 228$; $4c + 6s = 168$. Resto: $5c = 60 \Rightarrow c = 12$ €; $s = \frac{76 - 36}{2} = 20$ €. Comprobación: $2 \cdot 12 + 3 \cdot 20 = 84$ ✔.
4. Primero: infinitas soluciones (mismas rectas, la segunda es el doble de la primera). Segundo: ninguna (rectas paralelas, $x + y$ no puede ser 5 y 7 a la vez). Tercero: una solución, $x = 2, y = 3$ (sumando: $3x = 6$).

Ficha 4

1. $3x \geq 12 \Rightarrow x \geq 4$: $[4, +\infty)$. $-2x < 4 \Rightarrow x > -2$ (se invierte el sentido): $(-2, +\infty)$. $5 - x \leq 2x + 8 \Rightarrow -3x \leq 3 \Rightarrow x \geq -1$: $[-1, +\infty)$. $-3 < 2x + 1 \leq 9 \Rightarrow -4 < 2x \leq 8 \Rightarrow -2 < x \leq 4$: $(-2, 4]$. Representación: punto relleno en los extremos incluidos y vacío en los excluidos (F6).
2. Relaciones: $x \geq 4 \leftrightarrow [4, +\infty)$; $x < -2 \leftrightarrow (-\infty, -2)$; $-2 < x \leq 4 \leftrightarrow (-2, 4]$.
3. S4: $x \geq 75$ y $x \leq 120$ → $[75, 120]$: entre 75 y 120 asistentes. S6: $87 + x \leq 120 \Rightarrow x \leq 33$: pueden entrar como máximo 33 personas más (x entero entre 0 y 33).
4. Con $x = 0$: $6 < 10$ ✔ (y $0 > -2$). Con $x = -5$: $16 < 10$ es falso (y $-5 < -2$). Por tanto la solución es $x > -2$: al dividir entre −2 el sentido cambia.

Ficha 5

1. Reparto: x = lo de 4.º A, y = lo de 4.º B: $x + y = 240; x = 2y + 30$. Sustituyo: $2y + 30 + y = 240 \Rightarrow 3y = 210 \Rightarrow y = 70; x = 170$. Comprobación: $170 + 70 = 240; 2 \cdot 70 + 30 = 170$ ✔. Modelo: sistema (dos incógnitas, dos relaciones) o ecuación de una incógnita ($y + 2y + 30 = 240$).
2. Taller: x = personas; $9x - (90 + 3x) \geq 150 \Rightarrow 6x \geq 240 \Rightarrow x \geq 40$. Con 60 personas: $9 \cdot 60 - (90 + 180) = 540 - 270 = 270$ € de beneficio máximo.
3. Reparto: incógnitas dinero de cada clase; sistema (o ecuación); «30 € más que el doble». Taller: incógnita número de personas; inecuación; «como mínimo». S5: kg de cada fruto seco; sistema; total de kilos y total de dinero.
4. Procedimiento abierto: se valora que incluya los seis pasos y los aplique a un problema bien resuelto y comprobado.

Ficha 6

1. Las soluciones son −2 y 7 (cortes de la parábola con el eje horizontal); con la fórmula: $x = \frac{5 \pm 9}{2}$; sustitución: $49 - 35 - 14 = 0$ y $4 + 10 - 14 = 0$. Son los valores de x para los que $y = 0$.
2. 1) Pasó el −5 al otro miembro con el mismo signo: $3x \geq 7 + 5 = 12 \Rightarrow x \geq 4$. 2) No invirtió el sentido al dividir por −2: $x > -2$. 3) Usó $-b = -5$ en vez de 5: $x = \frac{5 \pm 9}{2}$ → 7 y −2. 4) Olvidó el paréntesis al sustituir: $8x + 5(120 - x) = 750 \Rightarrow 3x + 600 = 750 \Rightarrow x = 50$.
3. Sustitución: $50 + 70 = 120$ y $400 + 350 = 750$ ✔. S4: $8 \cdot 75 - (150 + 150) = 300$ ✔. Respuesta abierta sobre la herramienta (se valora la justificación).

Ficha 7

1. Respuestas abiertas. Se valora que cada problema tenga: incógnita con unidad, modelo adecuado, resolución correcta, comprobación y respuesta en una frase. Ejemplo de problema propio (sistema): 140 entradas, adulto 6 € y joven 4 €, recaudación 700 €: $x + y = 140; 6x + 4y = 700 \Rightarrow 2x = 140 \Rightarrow x = 70, y = 70$.
2. La revisión cruzada debe señalar al menos un acierto y una mejora; se valora que la corrección sea concreta («falta el paréntesis en la línea 2»).

Ficha 8

1. Lado x y $10 - x$ (semiperímetro 10): $x(10 - x) = 24 \Rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0; \Delta = 100 - 96 = 4; x = \frac{10 \pm 2}{2}$ → 6 y 4. Las dos soluciones dan el mismo huerto: 4 m × 6 m (el ancho y el largo se intercambian). Comprobación: $2(4 + 6) = 20; 4 \cdot 6 = 24$ ✔.
2. b = bocadillo, r = refresco: $2b + 3r = 9{,}10; 3b + 2r = 10{,}40$. Multiplico por 3 y por 2: $6b + 9r = 27{,}30; 6b + 4r = 20{,}80$. Resto: $5r = 6{,}50 \Rightarrow r = 1{,}30$ €; $b = \frac{9{,}10 - 3{,}90}{2} = 2{,}60$ €. Comprobación: $3 \cdot 2{,}60 + 2 \cdot 1{,}30 = 7{,}80 + 2{,}60 = 10{,}40$ ✔.
3. $30 + 1{,}5x < 4x \Rightarrow 30 < 2{,}5x \Rightarrow x > 12$: compensa a partir de 13 entradas (con 12 cuestan igual: 48 €). Intervalo: $(12, +\infty)$ o, con enteros, $x \geq 13$.
4. Respuesta abierta: ecuación = una incógnita y una igualdad; sistema = dos incógnitas y dos relaciones; inecuación = «al menos/como máximo». Se valora un ejemplo propio coherente.

Refuerzo

1. $x + 5 = 12 \Rightarrow x = 7; 2x + 3 = 11 \Rightarrow x = 4; 3x - 4 = x + 6 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$.
2. Sistema: $2x = 18 \Rightarrow x = 9; y = 15 - 9 = 6$. Comprobación: $9 + 6 = 15$ y $9 - 6 = 3$.
3. $4x \leq 20 \Rightarrow x \leq 5$: como máximo 5 entradas.

Ampliación

1. Ejemplo: 100 entradas, adulto 7 € y joven 4 €, recaudación 520 €. Sistema: $x + y = 100; 7x + 4y = 520$ → reducción: $7x + 4y - 4(x + y) = 520 - 400 \Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = 40, y = 60$. Una ecuación: $7x + 4(100 - x) = 520 \Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = 40$.
2. Comparación: la ecuación con una incógnita tiene menos pasos y es más rápida; el sistema es más fácil de plantear cuando el enunciado da dos relaciones sin pensar en despejar, y las gráficas ayudan a visualizar. Ambos se comprueban sustituyendo en el enunciado.
3. General: $p\,x + q\,(T - x) = R \Rightarrow x = \frac{R - q\,T}{p - q}$ (si $p \neq q$). Con el ejemplo: $x = \frac{520 - 400}{3} = 40$.

Errores frecuentes

- Pasar un término al otro miembro sin cambiar el signo (−5 → −5 en lugar de +5).
- No invertir el sentido de la desigualdad al multiplicar o dividir por un número negativo.
- En la fórmula de segundo grado, usar $-b$ con el signo de b o olvidar dividir todo el numerador entre $2a$.
- Olvidar paréntesis al sustituir una expresión: $5 \cdot 120 - x$ en lugar de $5(120 - x)$.
- Dar como respuesta una solución sin sentido en el contexto (longitudes negativas, personas fraccionarias) sin discutirla.
- Confundir ecuación e inecuación: dar un solo valor cuando la solución es un intervalo.

Criterios para valorar respuestas abiertas

- En las respuestas abiertas se valora que el modelo elegido esté justificado con las pistas del enunciado y que se compruebe la solución en el contexto.
- Se aceptan resoluciones por cualquier método válido (sustitución, igualación o reducción) siempre que los pasos estén escritos.
- El uso de GeoGebra o calculadora debe servir para comprobar, no para sustituir la resolución escrita; conviene pedir al alumnado que anote qué ha comprobado.
- En los problemas inventados se valora que tengan solución con los datos dados y sentido en el contexto.

04

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Planificamos un pequeño proyecto

PREGUNTA GUÍA

¿Cómo podemos convertir restricciones, costes y objetivos en un modelo útil para decidir?

CURSO
4.º ESO · Matemáticas A

SESIONES
8 sesiones · 1.º-2.º trimestre

SENTIDOS PRIORITARIOS
A · Sentido numérico · D · Sentido algebraico · E · Sentido estocástico

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE2, CE4, CE6, CE7

PRODUCTO FINAL
Plan matemático de viabilidad ficticio

CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 1.2, 2.2, 4.1, 6.1, 7.1

Contexto, reto y sentido

Un equipo de 4.º ESO quiere montar una miniempresa para la feria del centro: **«Cuadernos Reciclados»**, cuadernos de tapa personalizada hechos con papel reciclado. Antes de comprar materiales y alquilar el puesto necesitan responder a una pregunta muy concreta: *¿nos saldrá a cuenta o perderemos dinero?* Para decidirlo tienen costes que no dependen de cuántos cuadernos vendan, costes que sí dependen, un precio posible y datos de ventas de puestos parecidos en ferias anteriores.

La situación moviliza el sentido numérico, algebraico y estocástico: elegir variables y supuestos, escribir las funciones de coste, ingresos y beneficio, calcular el punto de equilibrio, construir escenarios a partir de datos (mínimo, mediana, máximo), analizar la sensibilidad del resultado a cambios de precio y de costes y, sobre todo, **no confundir el modelo con la realidad**: el plan de viabilidad es una herramienta para decidir, no una garantía. El producto final es un plan de viabilidad ficticio que otro equipo pueda revisar.

Reto

Elaborar un plan matemático de viabilidad de la miniempresa «Cuadernos Reciclados» con variables y supuestos, funciones de coste, ingresos y beneficio, punto de equilibrio, tres escenarios de demanda, análisis de sensibilidad y una decisión razonada, indicando los límites del modelo.

Producto final

Plan matemático de viabilidad ficticio.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE4** Utilizar el pensamiento computacional: descomponer, reconocer patrones, generalizar y crear algoritmos.
- **CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- **1.1** Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.
- **1.2** Seleccionar herramientas y estrategias elaboradas valorando su eficacia e idoneidad en la resolución de problemas.
- **2.2** Seleccionar las soluciones óptimas de un problema valorando tanto la corrección matemática como sus implicaciones desde diferentes perspectivas.
- **4.1** Reconocer e investigar patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación y tratamiento computacional.
- **6.1** Proponer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.
- **7.1** Representar matemáticamente la información más relevante de un problema, conceptos, procedimientos y resultados, visualizando ideas y estructurando procesos.

Saberes básicos prioritarios

A
Sentido numérico

- Porcentajes y variaciones porcentuales en precios, costes y beneficios; redondeo y estimación.
- Proporcionalidad y razón: coste medio por unidad y margen por unidad.

D
Sentido algebraico

- Modelización con funciones lineales: coste $C(x) = F + v\,x$, ingresos $I(x) = p\,x$ y beneficio $B(x) = I(x) - C(x)$.
- Punto de equilibrio mediante una ecuación lineal e interpretación gráfica del punto de corte.
- Inecuaciones lineales para expresar restricciones de capital y capacidad.

E
Sentido estocástico

- Organización de datos y medidas de centralización y rango (media, mediana, mínimo, máximo) para construir escenarios.
- Frecuencia relativa para estimar la probabilidad de alcanzar un objetivo; incertidumbre y límites de un modelo.

F

Sentido socioafectivo

- Toma de decisiones en equipo con roles, aceptación de la incertidumbre y revisión crítica de los supuestos.

Objetivos didácticos

- ✓ Seleccionar variables relevantes.
- ✓ Construir un modelo sencillo de costes e ingresos.
- ✓ Analizar escenarios y restricciones.
- ✓ Justificar una decisión sin confundir modelo y realidad.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Caso ficticio y datos disponibles

Evidencia: Ficha 1: diagnóstico, clasificación de datos disponibles, ausentes y sobrantes y estimación previa del beneficio.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Variables, supuestos y restricciones

Evidencia: Ficha 2: tabla de variables, valoración de supuestos y restricciones de capital y capacidad escritas como inecuaciones.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Coste fijo/variable y función de coste

Evidencia: Ficha 3: función de coste $C(x)$, tabla de valores, coste medio e interpretación de la pendiente y la ordenada.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Ingresos y punto de equilibrio sencillo

Evidencia: Ficha 4: ingresos, beneficio, punto de equilibrio por ecuación y gráfica del beneficio.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Escenarios de demanda con datos

Evidencia: Ficha 5: estadísticos de las ventas históricas, tres escenarios (pesimista, realista y optimista) y frecuencia de alcanzar un beneficio objetivo.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Sensibilidad: qué cambia si cambia un dato

Evidencia: Ficha 6: tabla de sensibilidad: cambios de precio, coste variable y coste fijo, con variaciones porcentuales y umbrales.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Plan de viabilidad

Evidencia: Ficha 7: decisión del precio con la prueba de precios, veredicto de viabilidad y revisión cruzada.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

8

SESIÓN 8

Presentación y límites del modelo

Evidencia: Ficha 8: evidencia individual con otro proyecto (camisetas solidarias): modelo, escenarios, sensibilidad y límites.

Ficha: Anexo 3 · ficha 8

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Dossier ficticio · hoja de cálculo · calculadora

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Modelo con dos variables predefinidas y fórmulas iniciadas.

Ampliación

Anexo 9

Modificar un parámetro y estudiar cómo cambia el punto de equilibrio.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial
Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa
Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final
Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Reformulación del caso: identificación de variables, datos disponibles, datos que faltan, supuestos y preguntas que debe responder el plan.	Fichas 1 y 2 / lista de cotejo
1.2	Elección razonada de tabla, ecuación, gráfica u hoja de cálculo para calcular el punto de equilibrio y los escenarios, y valoración de su eficacia.	Fichas 3, 4 y 5 / escala de valoración
2.2	Selección del precio y del veredicto de viabilidad valorando el resultado matemático y sus implicaciones (riesgo, capacidad, capital).	Ficha 7 y apartado de decisión del Anexo 4 / rúbrica
4.1	Descomposición del problema en costes, ingresos y demanda; organización de datos en tablas y reconocimiento del patrón lineal.	Fichas 2, 3 y 5 y hoja de escenarios / rúbrica
6.1	Traducción del proyecto ficticio a las funciones C, I y B y uso de las soluciones para decidir; aplicación a un proyecto nuevo.	Ficha 8 y Anexo 4 / rúbrica
7.1	Representación del modelo mediante tabla, gráfica de coste-ingresos-beneficio y gráfico de barras de los escenarios, con ejes rotulados.	Fichas 4 y 5 y Anexo 4 / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Plan, hoja de cálculo, escenarios y reflexión.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 4 · Planificamos un pequeño proyecto

ALUMNADO

La feria del centro es dentro de tres semanas y tenéis una idea: vender cuadernos de papel reciclado con la tapa personalizada. El stand cuesta dinero aunque no vendáis nada, cada cuaderno gasta materiales y un puesto parecido vendió entre 52 y 80 cuadernos en las últimas ferias. ¿A cuántos cuadernos hay que llegar para no perder? ¿Qué pasa si el papel sube de precio? ¿Y si vendéis menos de lo esperado? Vais a construir un plan de viabilidad con números, gráficas y escenarios, y a decidir con datos. Ojo: un modelo ayuda a decidir, pero la realidad siempre puede ser distinta.

> *¿Cómo podemos convertir restricciones, costes y objetivos en un modelo útil para decidir?*

Vuestro reto

Elaborar un plan matemático de viabilidad de la miniempresa «Cuadernos Reciclados» con variables y supuestos, funciones de coste, ingresos y beneficio, punto de equilibrio, tres escenarios de demanda, análisis de sensibilidad y una decisión razonada, indicando los límites del modelo.

Lo que vais a producir

Plan matemático de viabilidad ficticio.

Hoja de ruta · 8 sesiones

1. Leemos el caso y separamos los datos que tenemos y los que faltan.
2. Definimos variables, supuestos y restricciones.
3. Escribimos la función de coste: parte fija y parte variable.
4. Añadimos los ingresos y calculamos el punto de equilibrio.
5. Construimos tres escenarios de demanda con datos.
6. Estudiamos qué cambia si cambia un dato (sensibilidad).
7. Montamos el plan de viabilidad y decidimos el precio.
8. Presentamos el plan, señalamos sus límites y resolvemos un caso nuevo.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Seleccionar variables relevantes.
- ✓ Construir un modelo sencillo de costes e ingresos.
- ✓ Analizar escenarios y restricciones.
- ✓ Justificar una decisión sin confundir modelo y realidad.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 4 · Planificamos un pequeño proyecto

ALUMNADO

Descripción del proyecto ficticio, costes y precios, el modelo matemático, una gráfica de costes e ingresos, las ventas de ferias anteriores, una prueba de precios, el ciclo de modelización, una plantilla de hoja de cálculo y un glosario. Todos los datos son ficticios.

F1 El proyecto: «Cuadernos Reciclados»

ESTUDIO DE CASO

Un equipo de 4.º ESO quiere fabricar cuadernos con **papel reciclado** y tapa personalizada para venderlos en la feria del centro. Se hará una tirada de cuadernos que se venderán en un puesto durante una mañana.

- El equipo dispone de un **capital inicial de 300 €** para pagar los costes antes de empezar a vender.
- Por tiempo y material, solo se pueden fabricar **100 cuadernos como máximo**.
- Se piensa vender cada cuaderno a **5 €**.
- Los cuadernos que no se vendan se regalan a una biblioteca (no se recupera su coste).

Fuente: Situación y datos ficticios creados para el aula.

🔍 El equipo necesita saber si el proyecto es viable y qué precio conviene.

F2 Costes y precio

DATOS

Concepto	Tipo	Importe
Alquiler del puesto	Coste fijo	60 €
Herramienta de encuadernación (alquiler)	Coste fijo	40 €
Carteles y rotulación	Coste fijo	20 €
Papel reciclado por cuaderno	Coste variable	0,80 €
Tapa personalizada por cuaderno	Coste variable	0,70 €
Anillas y goma por cuaderno	Coste variable	0,50 €
Precio de venta por cuaderno	Ingreso	5 €

Fuente: Datos ficticios creados para el aula.

🔍 Calcula el coste fijo total y el coste variable por cuaderno antes de la ficha 3.

F3 El modelo matemático de un proyecto

TEXTO

Sea x el número de unidades fabricadas y vendidas.

- **Coste total:** $C(x) = F + v\,x$, donde F es el coste fijo y v el coste variable por unidad.
- **Ingresos:** $I(x) = p\,x$, donde p es el precio de venta.
- **Beneficio:** $B(x) = I(x) - C(x) = (p - v)\,x - F$.
- **Margen unitario:** $p - v$ (lo que «sobra» de cada unidad después de pagar su coste variable).
- **Punto de equilibrio:** el valor de x con $B(x) = 0$, es decir, $I(x) = C(x)$, que es $x^* = \frac{F}{p-v}$.
- **Coste medio:** $\frac{C(x)}{x}$, el coste de cada unidad incluyendo la parte del coste fijo.

Restricciones. Se escriben con inecuaciones: capital $F + v\,x \leq$ capital disponible; capacidad $x \leq$ máximo posible.

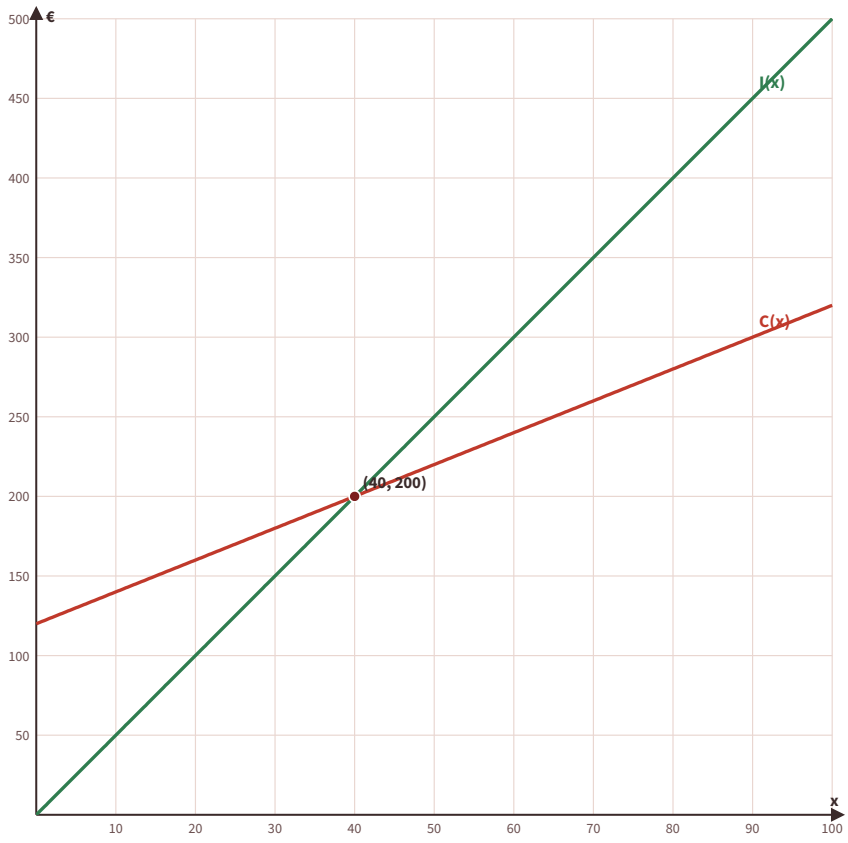
Escenario. Es una hipótesis de ventas (pesimista, realista, optimista). **Sensibilidad:** estudiar cuánto cambia el resultado si cambia un dato.

Fuente: Elaboración propia.

Por encima del punto de equilibrio hay beneficio; por debajo, pérdidas.

F4 Costes e ingresos del proyecto

GRÁFICO



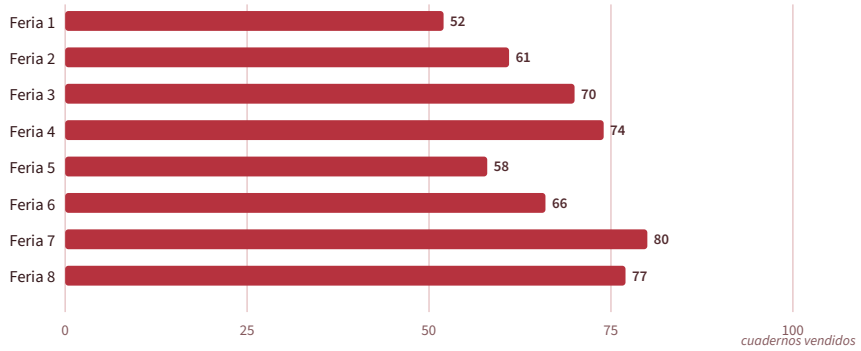
La recta de ingresos $I(x) = 5x$ parte del origen; la de costes $C(x) = 120 + 2x$ parte de 120 € (el coste fijo). Se cortan en $(40, 200)$: con 40 cuadernos los ingresos y los costes coinciden.

Fuente: Elaboración propia con los datos de F2.

A la derecha del punto de corte, la recta de ingresos está por encima de la de costes: hay beneficio.

F5 Ventas de un puesto parecido en las últimas 8 ferias

GRÁFICO



Datos: 52, 61, 70, 74, 58, 66, 80 y 77 cuadernos. Suma: 538.

Fuente: Datos ficticios creados para el aula (puesto de cuadernos a 5 €).

Calcula la media, la mediana, el mínimo y el máximo para construir los escenarios.

F6 Prueba de precios en una feria anterior

DATOS

Precio (€)	Cuadernos vendidos
4	90
5	70
6	50
7	30

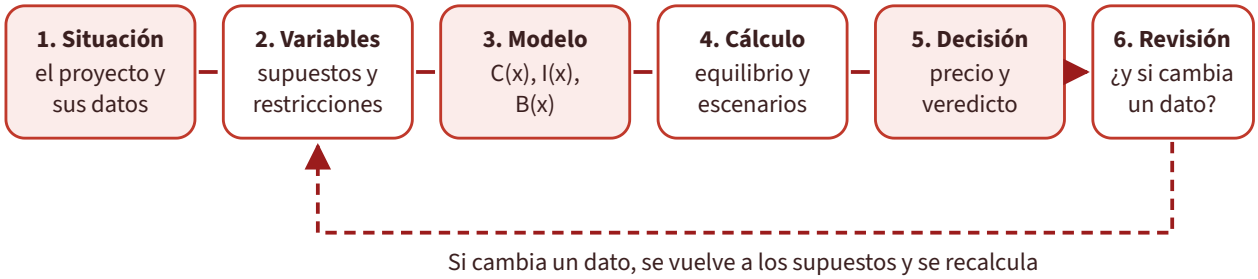
Se observa que cada euro más de precio reduce las ventas en 20 cuadernos: es un patrón lineal. A 5 € se venden unos 70 cuadernos, en línea con la mediana de las ferias anteriores.

Fuente: Datos ficticios creados para el aula. Cuadernos que se vendieron según el precio.

Subir el precio aumenta el ingreso por cuaderno, pero se vende menos: hay que calcularlo.

F7 El ciclo de modelización de un plan de viabilidad

ESQUEMA



El modelo no es la realidad:
simplifica y puede equivocarse; por eso hay que señalar sus límites.

Fuente: Esquema de elaboración propia.

El plan de viabilidad recorre este ciclo varias veces: no se hace de una sola vez.

F8 Plantilla de hoja de cálculo para los escenarios

DATOS

	A	B	C	D	E	F
1	Escenario	Ventas x	Ingresos	Costes	Beneficio	¿Viable?
2	Pesimista	52	=5*B2	=120+2*B2	=C2-D2	=SI(E2>=0;«Sí»;«No»)
3	Realista	68	(copiar fórmulas)			
4	Optimista	80	(copiar fórmulas)			
5	(para la sensibilidad)	guarda el precio, el coste fijo y el coste variable en celdas aparte				

Fuente: Elaboración propia con los datos del caso base (precio 5 €, coste fijo 120 €, coste variable 2 €).

Si guardas los parámetros en celdas aparte, fija su referencia con el símbolo del dólar (tecla F4) para que no cambie al copiar la fórmula hacia abajo. Cambiando un parámetro se obtiene la sensibilidad.

F9 Vocabulario del plan de viabilidad

GLOSARIO

Coste fijo	Coste que se paga se venda lo que se venda (alquiler, carteles…).
Coste variable	Coste que depende de las unidades fabricadas (materiales).
Ingreso	Dinero que entra por las ventas: precio por unidades vendidas.
Beneficio	Ingresos menos costes. Si es negativo, hay pérdidas.
Punto de equilibrio	Número de unidades para el que ingresos y costes coinciden (beneficio 0).
Margen unitario	Precio menos coste variable por unidad.
Escenario	Hipótesis de ventas: pesimista, realista u optimista.
Sensibilidad	Estudio de cuánto cambia el resultado si cambia un dato.
Viabilidad	Que el proyecto pueda llevarse a cabo y dé el resultado esperado, con unas condiciones razonables.

Fuente: Elaboración propia.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 4 · Planificamos un pequeño proyecto

ALUMNADO

FICHA 1 El caso y los datos

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Lee F1 y F2. Todavía no hace falta modelo: se trata de entender el problema.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

Vender 30 unidades a 5 € cada una produce unos ingresos de…

☐ 150 € ☐ 35 € ☐ 6 €

La media de 4, 6, 8 y 10 es…

☐ 7 ☐ 8 ☐ 6

La solución de $3x - 120 = 0$ es…

☐ $x = 40$ ☐ $x = 360$ ☐ $x = 0{,}025$

2 **Clasifica los datos que aparecen en F1 y F2 y los que habría que conseguir para decidir.**

Datos que tengo	Datos que me faltan	Datos que no necesito

3 **Estimación previa: si vendéis 50 cuadernos a 5 €, ¿creéis que ganaréis o perderéis dinero? Primero decídelo «a ojo» y después calcula con F2 los ingresos, los costes y el beneficio.**

4 **Escribe tres preguntas matemáticas a las que debería responder el plan de viabilidad.**

FICHA 2 Variables, supuestos y restricciones

Sesión 2

Define el modelo antes de calcular. Usa F1, F2 y F3.

1 **Completa la tabla de variables y parámetros.**

Magnitud	Símbolo	Unidad	Tipo (decisión, dato o resultado)
Cuadernos fabricados y vendidos			
Precio de venta por cuaderno			
Coste fijo total			
Coste variable por cuaderno			
Beneficio			

2 **Valora estos supuestos: di si son razonables y cómo podrían fallar.**

Supuesto	¿Razonable?	¿Cómo podría fallar?
Se vende todo lo que se fabrica.		
El precio de los materiales no cambia.		
Todos los cuadernos se venden al mismo precio.		
La venta de la feria es igual que la de ferias anteriores.		

3 **Restricciones. Con el capital de 300 € (F1), escribe una inecuación para el número de cuadernos x que se pueden fabricar y resuélvela. Escribe también la restricción de capacidad y el intervalo final.**

FICHA 3 La función de coste

Sesión 3

Usa F2 para hallar F y v y escribir $C(x)$.

1 **Calcula el coste fijo total F y el coste variable por cuaderno v con F2 y escribe la fórmula de $C(x)$.**

2 Completa la tabla de costes y coste medio.

Cuadernos x	0	30	60	90
Coste total $C(x)$				
Coste medio $C(x) : x$				

3 Interpreta: ¿qué significa la ordenada en el origen de $C(x)$? ¿Y la pendiente? ¿Cuánto cuesta fabricar el cuaderno número 61 (pasar de 60 a 61)? Si el coste total ha sido 260 €, ¿cuántos cuadernos se han fabricado?

4 ¿Por qué baja el coste medio cuando se fabrican más cuadernos? Relaciónalo con la tarifa «cuota fija + coste variable» de la SdA 1.

FICHA 4 Ingresos, beneficio y equilibrio

Sesión 4

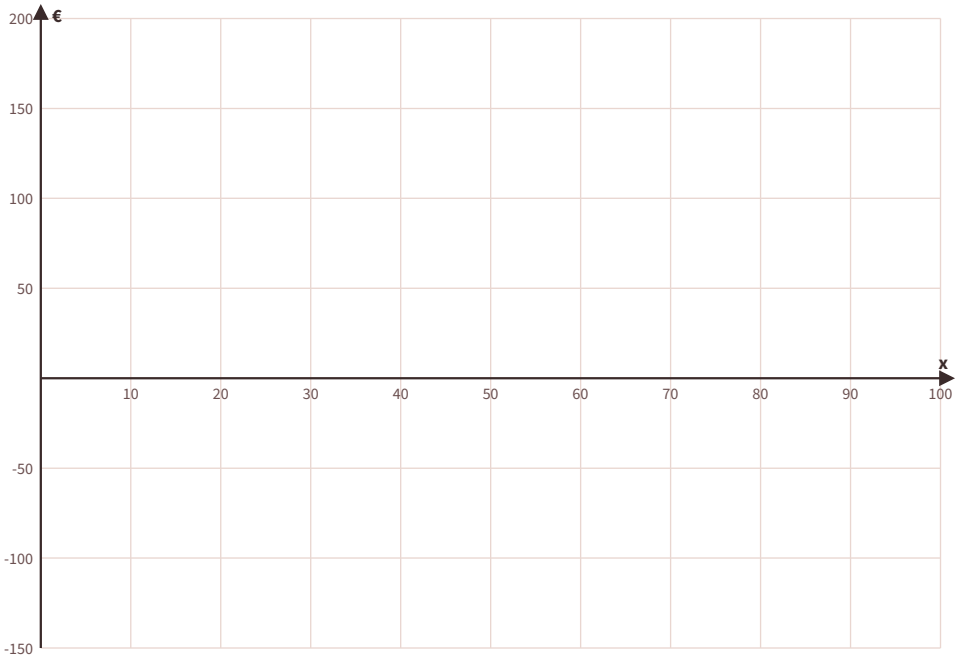
Usa F3 y F4. Escribe las funciones y comprueba el resultado.

1 Escribe $I(x)$ y $B(x) = I(x) - C(x)$ y completa la tabla.

Cuadernos x	0	20	40	60	80
Ingresos $I(x)$					
Costes $C(x)$					
Beneficio $B(x)$					

2 Calcula el punto de equilibrio resolviendo $I(x) = C(x)$ y compruébalo. Lee el mismo valor en la gráfica de F4.

3 Dibuja la recta del beneficio $B(x)$ en la cuadrícula y marca el punto donde corta al eje horizontal.



4 El margen unitario es $p - v$. Calcula el punto de equilibrio si el precio fuera 4 € y si fuera 6 €. ¿Qué observas?

FICHA 5 Escenarios de demanda

Sesión 5

Usa F5 para construir los escenarios con datos reales del puesto parecido (ficticios).

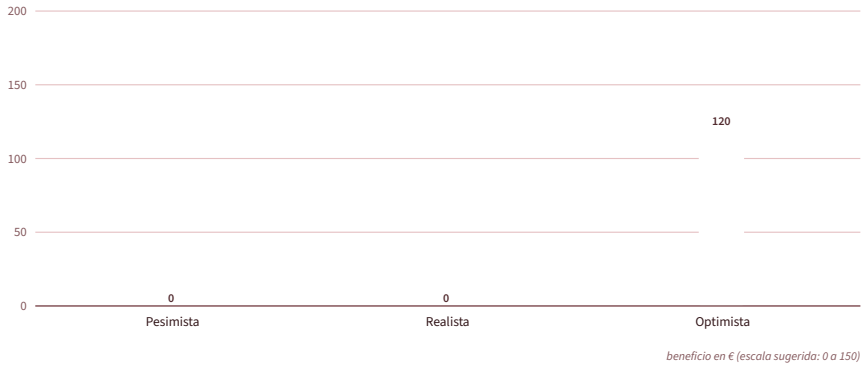
1 Calcula con los datos de F5 la media, la mediana, el mínimo, el máximo y el rango.

Media	Mediana	Mínimo	Máximo	Rango

2 Define tres escenarios: pesimista (mínimo), realista (mediana) y optimista (máximo). Calcula ingresos, costes y beneficio de cada uno con $p = 5$, $v = 2$ y $F = 120$.

Escenario	Ventas	Ingresos	Costes	Beneficio
Pesimista				
Realista				
Optimista				

3 **Representa los tres beneficios en un diagrama de barras.**



beneficio en € (escala sugerida: 0 a 150)

4 **El equipo quiere un beneficio de al menos 60 €. ¿Cuántos cuadernos hay que vender como mínimo? ¿En cuántas de las 8 ferias se habría conseguido? Expresa la proporción como fracción y como porcentaje.**

FICHA 6 ¿Qué pasa si cambia un dato?

Sesión 6

Análisis de sensibilidad. Cambia un solo dato cada vez (los demás quedan como en el caso base).

1 **Completa la tabla de sensibilidad. Redondea el punto de equilibrio al cuaderno entero hacia arriba.**

Caso	Punto de equilibrio	Beneficio pesimista (52)	Beneficio realista (68)
Base: $p = 5, v = 2, F = 120$			
Coste variable +20 % ($v = 2{,}40$)			
Coste variable +50 % ($v = 3$)			
Precio −10 % ($p = 4{,}50$)			
Coste fijo +25 % ($F = 150$)			

2 Calcula la variación porcentual del beneficio realista en cada caso respecto al caso base. ¿Qué dato hace perder más beneficio y por qué un 20 % de aumento de coste produce una bajada mayor del beneficio?

3 Umbral: ¿hasta qué coste variable v no se pierde dinero en el escenario pesimista? Plantea la inecuación y expresa el resultado también como porcentaje de aumento sobre 2 €.

FICHA 7 El plan de viabilidad

Sesión 7

Con F6 decide el precio más conveniente y redacta el veredicto.

1 Con la prueba de precios de F6 (ventas según el precio) completa la tabla con $v = 2$ y $F = 120$. ¿Qué precio da el mayor beneficio?

Precio p	Ventas x	Ingresos	Costes	Beneficio
4 €				
5 €				
6 €				
7 €				

2 Redacta el veredicto: ¿es viable el proyecto, es viable con condiciones o no es viable? Apóyate en el escenario pesimista, el realista, el punto de equilibrio y el umbral de coste variable. Indica una condición de seguimiento.

3 **Revisión cruzada del plan de otro equipo.**

- [ ] Las funciones C, I y B están bien escritas con sus unidades
- [ ] El punto de equilibrio está calculado y comprobado
- [ ] Hay tres escenarios construidos con datos
- [ ] La sensibilidad cambia un dato cada vez
- [ ] El veredicto se apoya en cálculos y señala límites

FICHA 8 Evidencia individual: camisetas solidarias

Sesión 8

Ficha individual. Un grupo quiere vender camisetas solidarias a 12 € cada una. Coste fijo (diseño y stand): 150 €. Coste variable (camiseta y estampado): 7 € por unidad. Ventas en las 5 últimas ocasiones: 25, 31, 36, 29 y 40.

1 **Escribe $C(x)$, $I(x)$ y $B(x)$ y calcula el punto de equilibrio.**

2 **Construye los escenarios pesimista (mínimo), realista (mediana) y optimista (máximo) y calcula el beneficio en cada uno. ¿Es viable el proyecto?**

3 **Propón un cambio (de precio o de coste fijo) que haga que no haya pérdidas ni en el escenario pesimista. Calcula el nuevo punto de equilibrio y comprueba.**

4 **Señala dos límites del modelo para este proyecto y explica cómo podrían afectar a la decisión.**

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 4 · Planificamos un pequeño proyecto

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Plan matemático de viabilidad de «Cuadernos Reciclados» (proyecto ficticio). Todos los cálculos con sus unidades.

Título y equipo

Nombre de la miniempresa, miembros y roles.

Variables, supuestos y restricciones

Magnitudes, supuestos razonables y desigualdades de capital y capacidad.

Modelo matemático

$C(x)$, $I(x)$, $B(x)$ *y punto de equilibrio comprobado.*

Gráfica de costes, ingresos y beneficio

Ejes rotulados, escala y punto de equilibrio marcado.

Escenarios de demanda

Tabla con pesimista, realista y optimista (con datos).

Sensibilidad

Qué cambia si cambia el precio o un coste.

Decisión y veredicto

Precio elegido, viabilidad y condiciones.

Límites del modelo

Qué no recoge el modelo y cómo podría equivocarse.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 4 · Planificamos un pequeño proyecto

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Plan matemático de viabilidad ficticio**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] Las variables, los parámetros y sus unidades están definidos.
- [ ] Los supuestos están escritos y se señala cuáles son discutibles.
- [ ] Las restricciones de capital y capacidad están escritas como inecuaciones y resueltas.
- [ ] Las funciones $C(x)$, $I(x)$ y $B(x)$ están bien planteadas con los datos del dossier.
- [ ] El punto de equilibrio se ha obtenido con una ecuación y se ha comprobado.
- [ ] La gráfica tiene ejes rotulados, escala uniforme y el punto de equilibrio señalado.
- [ ] Los tres escenarios se han construido con los datos de F5 (mínimo, mediana y máximo).
- [ ] La sensibilidad cambia un solo dato cada vez e incluye variaciones porcentuales.
- [ ] El veredicto se apoya en cálculos y menciona condiciones de seguimiento.
- [ ] Se explican al menos dos límites del modelo.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 4 · Planificamos un pequeño proyecto

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Plan matemático de viabilidad ficticio**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 4 · Planificamos un pequeño proyecto

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé construir las funciones de coste, ingresos y beneficio de un proyecto y calcular su punto de equilibrio.	○	○	○	○
Sé construir escenarios con datos y explicar los límites de un modelo.	○	○	○	○
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	○	○	○	○
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	○	○	○	○
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	○	○	○	○
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	○	○	○	○

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 4 · Planificamos un pequeño proyecto

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Modelo con dos variables ya definidas y fórmulas iniciadas: venta de pulseras en la feria. Coste fijo 30 €, coste variable 1 € por pulsera y precio de venta 3 €.

Ejemplo modelado

Con 10 pulseras: ingresos $3 \cdot 10 = 30$ €; costes $30 + 1 \cdot 10 = 40$ €; beneficio $30 - 40 = -10$ € (pérdida). Fórmulas: $C(x) = 30 + 1\,x$, $I(x) = 3\,x$, $B(x) = 2\,x - 30$.

Glosario y símbolos

x: pulseras vendidas. $C(x)$: coste total (fijo + variable). $I(x)$: ingresos. $B(x)$: beneficio $= I - C$. **Punto de equilibrio**: x con $B(x) = 0$. **Margen unitario**: precio − coste variable ($3 - 1 = 2$ €).

1 **Completa la tabla (con las fórmulas iniciadas).**

x	$C(x) = 30 + 1x$	$I(x) = 3x$	$B(x) = I - C$
0	30		
10	40	30	
15			
20			
30			

2 **Resuelve la ecuación del punto de equilibrio: $3x = 30 + 1x$. Completa: $3x - x =$ ___; $2x =$ ___; $x =$ ___ pulseras.**

3 **Si venden 25 pulseras, ¿ganan o pierden? ¿Cuánto? Escribe la operación.**

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 4 · Planificamos un pequeño proyecto

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Qué pasa con el punto de equilibrio si cambia un parámetro

El punto de equilibrio es $x^* = \frac{F}{p-v}$. Si cambia el precio p, el coste variable v o el coste fijo F, cambia x^* de forma distinta en cada caso. Estúdialo con «Cuadernos Reciclados» ($F = 120, v = 2$).

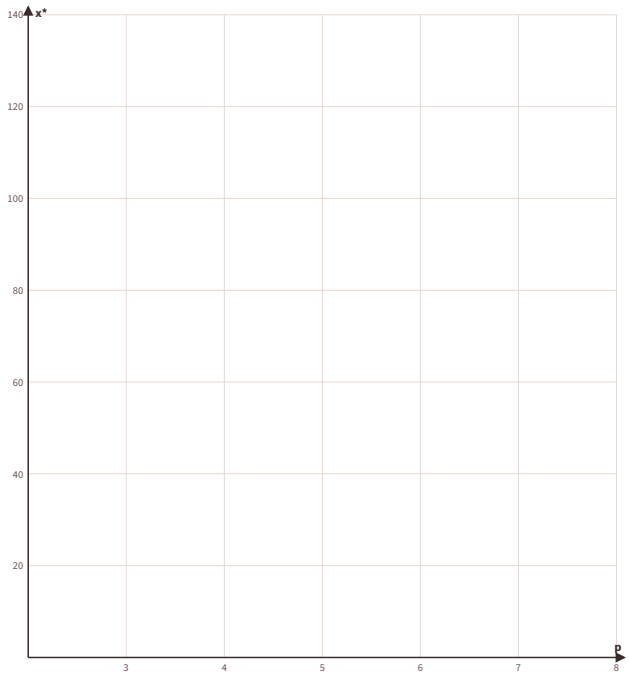
Pasos

1. Completa una tabla de x^* para precios $p = 3, 4, 5, 6$ y 8 € y dibújala. ¿Es una recta?
2. Haz lo mismo variando el coste fijo ($F = 60, 120, 180, 240$) con $p = 5$ y $v = 2$. ¿Qué diferencia observas?
3. Determina el precio mínimo para que el punto de equilibrio no supere la capacidad de 90 cuadernos.
4. Generaliza: ¿qué le pasa a x^* si el margen $p - v$ se duplica? ¿Y si F se duplica? Justifícalo con la fórmula.

1 **Tabla de x^* según el precio.**

Precio p (€)	3	4	5	6	8
Punto de equilibrio x^*					

2 **Dibuja los puntos (p, x^*) y traza la curva que los une.**



Entrega

Dos tablas (variando el precio y el coste fijo), la gráfica de x^* según el precio, el precio mínimo calculado y una regla general justificada con la fórmula.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 4 · Planificamos un pequeño proyecto

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: $30 \cdot 5 = 150$ €; $\frac{4+6+8+10}{4} = 7$; $3x = 120 \Rightarrow x = 40$.
2. Datos que tengo: precio 5 €, capital 300 €, capacidad 100 cuadernos, costes fijos (60, 40 y 20 €) y variables (0,80; 0,70 y 0,50 €). Que faltan: demanda esperada (cuántos se venderán), si el precio puede cambiar, si hay otros costes imprevistos. Que no necesito: el nombre de la miniempresa o la forma de personalizar las tapas (no afectan al cálculo); se valora que lo justifique.
3. Con 50 cuadernos: ingresos $50 \cdot 5 = 250$ €; costes $120 + 50 \cdot 2 = 220$ €; beneficio 30 €. Respuesta abierta sobre la intuición previa.
4. Preguntas posibles: ¿Cuántos cuadernos hay que vender para no perder? ¿Qué pasa si se venden menos de lo esperado? ¿Qué precio conviene? ¿Qué cambio de coste haría inviable el proyecto?

Ficha 2

1. Variables: x (cuadernos, unidades, decisión/incógnita); p (precio, €/cuaderno, dato/decisión); F (coste fijo, €, dato); v (coste variable, €/cuaderno, dato); B (beneficio, €, resultado).
2. Supuestos (se aceptan otros razonados): «Se vende todo» → discutible, depende de la demanda; «el precio de materiales no cambia» → razonable a corto plazo; «mismo precio para todos» → razonable salvo descuentos; «igual que otras ferias» → discutible, depende del público y de la fecha.
3. Capital: $120 + 2x \leq 300 \Rightarrow 2x \leq 180 \Rightarrow x \leq 90$. Capacidad: $x \leq 100$. Se cumplen las dos si $x \leq 90$: intervalo $[0, 90]$ (con x entero).

Ficha 3

1. $F = 60 + 40 + 20 = 120$ €; $v = 0{,}80 + 0{,}70 + 0{,}50 = 2$ €. $C(x) = 120 + 2x$.
2. $C(0) = 120$; $C(30) = 180$, medio 6 €; $C(60) = 240$, medio 4 €; $C(90) = 300$, medio $3{,}33$ € (el coste medio de $x = 0$ no está definido).
3. Ordenada 120: coste fijo, se paga aunque no se fabrique nada. Pendiente 2: cada cuaderno añade 2 € de coste. El cuaderno 61 cuesta $C(61) - C(60) = 242 - 240 = 2$ €. $120 + 2x = 260 \Rightarrow x = 70$.
4. El coste fijo se reparte entre más unidades: el coste medio tiende al coste variable (2 €). Es el mismo modelo $a + b\,x$ de las tarifas de la SdA 1.

Ficha 4

1. $I(x) = 5x$; $B(x) = 5x - (120 + 2x) = 3x - 120$. Tabla: $x = 0, 20, 40, 60, 80$: ingresos 0, 100, 200, 300, 400; costes 120, 160, 200, 240, 280; beneficio −120, −60, 0, 60, 120.
2. $5x = 120 + 2x \Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = 40$. Comprobación: $I(40) = 200$ y $C(40) = 120 + 80 = 200$ ✔. En F4 las rectas se cortan en $(40, 200)$.
3. La recta $B(x) = 3x - 120$ pasa por $(0, -120)$, $(40, 0)$ y $(80, 120)$ y corta al eje horizontal en $x = 40$.
4. $p = 4$: margen 2; $x^* = \frac{120}{2} = 60$. $p = 6$: margen 4; $x^* = \frac{120}{4} = 30$. A mayor precio, menor punto de equilibrio (no de forma lineal).

Ficha 5

1. Datos ordenados: 52, 58, 61, 66, 70, 74, 77, 80. Media $\frac{538}{8} = 67{,}25$; mediana $\frac{66+70}{2} = 68$; mínimo 52; máximo 80; rango $80 - 52 = 28$.
2. Pesimista (52): ingresos 260, costes 224, beneficio 36 €. Realista (68): ingresos 340, costes 256, beneficio 84 €. Optimista (80): ingresos 400, costes 280, beneficio 120 €.
3. Diagrama de barras con alturas 36, 84 y 120 €.
4. $3x - 120 \geq 60 \Rightarrow 3x \geq 180 \Rightarrow x \geq 60$. Ferias con al menos 60 cuadernos: 61, 70, 74, 66, 80, 77, es decir, 6 de 8: $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 75\,\%$ (no la 52 ni la 58).

Ficha 6

1. Base: $x^* = 40$; pesimista 36 €; realista 84 €. $v = 2{,}40$: margen 2,60; $x^* = \frac{120}{2{,}6} \approx 46{,}15 \to 47$; pesimista $52 \cdot 2{,}6 - 120 = 15{,}20$ €; realista $68 \cdot 2{,}6 - 120 = 56{,}80$ €. $v = 3$: margen 2; $x^* = 60$; pesimista $104 - 120 = -16$ €; realista $136 - 120 = 16$ €. $p = 4{,}50$: margen 2,50; $x^* = 48$; pesimista $130 - 120 = 10$ €; realista $170 - 120 = 50$ €. $F = 150$: $x^* = \frac{150}{3} = 50$; pesimista $156 - 150 = 6$ €; realista $204 - 150 = 54$ €.
2. Variación del beneficio realista: $v = 2{,}40$: $\frac{56{,}8-84}{84} \approx -32{,}4\,\%$; $v = 3$: $\frac{16-84}{84} \approx -81{,}0\,\%$; $p = 4{,}50$: $\frac{50-84}{84} \approx -40{,}5\,\%$; $F = 150$: $\frac{54-84}{84} \approx -35{,}7\,\%$. El precio es el dato que más afecta en proporción (un −10 % de precio hace perder un 40,5 % del beneficio) y el coste variable +50 % casi lo elimina. Un 20 % de aumento de coste produce una bajada mayor del beneficio porque el beneficio es una diferencia entre cantidades grandes: pequeñas variaciones de costes se notan mucho en lo que sobra.
3. $52\,(5 - v) - 120 \geq 0 \Rightarrow 5 - v \geq \frac{120}{52} \approx 2{,}308 \Rightarrow v \leq 2{,}69$ €. Aumento máximo sobre 2 €: $\frac{0{,}69}{2} \approx 34{,}6\,\%$ (como máximo un +34 %).

Ficha 7

1. $p = 4$: ventas 90, ingresos 360, costes $120 + 180 = 300$, beneficio 60. $p = 5$: 70, 350, 260, 90. $p = 6$: 50, 300, 220, 80. $p = 7$: 30, 210, 180, 30. El mayor beneficio es 90 € con 5 € (ventas 70, dentro de la capacidad de 90). Con 4 € se venden 90 cuadernos, justo en el límite del capital.
2. Veredicto esperable: «viable con condiciones». Con 5 €: punto de equilibrio 40; en el pesimista (52) hay 36 € de beneficio, en el realista 84 €; la proporción de ferias con beneficio ≥ 60 € es 75 %; el coste variable no debe superar 2,69 € y el coste fijo no debe pasar de 156 € para seguir sin pérdidas en el pesimista. Condición de seguimiento: comprobar las ventas en la primera hora y ajustar la tirada.
3. Revisión cruzada: se valora que cada punto de la lista se compruebe con un cálculo o una referencia al plan.

Ficha 8

1. $C(x) = 150 + 7x$; $I(x) = 12x$; $B(x) = 5x - 150$; $x^* = \frac{150}{5} = 30$ camisetas.
2. Pesimista (25): $B = 125 - 150 = -25$ €. Realista (mediana 31): $155 - 150 = 5$ €. Optimista (40): $200 - 150 = 50$ €. No es viable en el pesimista (pierden 25 €) y apenas gana en el realista: viable solo con cambios.
3. Ejemplo: subir el precio a 13 €: margen 6; $x^* = \frac{150}{6} = 25$; pesimista $6 \cdot 25 - 150 = 0$, realista $6 \cdot 31 - 150 = 36$ €, optimista $240 - 150 = 90$ €. Otra opción: reducir el coste fijo a 125 € ($5 \cdot 25 = 125$). Se aceptan otras propuestas razonadas con comprobación.
4. Límites posibles: solo 5 datos históricos (muestra pequeña); la demanda puede depender del precio (no se modela); los costes pueden cambiar; no se tienen en cuenta devoluciones o ventas a otros precios; los datos de ventas son de otra época.

Refuerzo

1. Tabla: $x = 0$: $C = 30, I = 0, B = -30$; $x = 10$: 40, 30, −10; $x = 15$: 45, 45, 0; $x = 20$: 50, 60, 10; $x = 30$: 60, 90, 30.
2. $3x - x = 30 \Rightarrow 2x = 30 \Rightarrow x = 15$ pulseras.
3. $B(25) = 2 \cdot 25 - 30 = 20$ €: ganan 20 € (ingresos 75 €, costes 55 €).

Ampliación

1. $x^* = \frac{120}{p-2}$: $p = 3 \to 120$; $p = 4 \to 60$; $p = 5 \to 40$; $p = 6 \to 30$; $p = 8 \to 20$. No es una recta: es una curva decreciente (proporcionalidad inversa respecto del margen).
2. $F = 60, 120, 180, 240$ con margen 3: $x^* = 20, 40, 60, 80$: es una recta (proporcionalidad directa con F).
3. $\frac{120}{p-2} \leq 90 \Rightarrow p - 2 \geq \frac{120}{90} \approx 1{,}33 \Rightarrow p \geq 3{,}33$ €.
4. Si el margen se duplica, $x^$ *se reduce a la mitad; si* F *se duplica,* $x^$ se duplica. Justificación: $x^* = \frac{F}{p-v}$ es directamente proporcional a F e inversamente proporcional al margen.

Errores frecuentes

- Confundir coste fijo con coste variable o añadir el coste variable una sola vez en lugar de multiplicarlo por x.
- Calcular el punto de equilibrio con el precio en lugar del margen unitario ($\frac{120}{5}$ en vez de $\frac{120}{3}$).
- No redondear el punto de equilibrio al entero superior cuando representa unidades.
- Cambiar varios datos a la vez en la sensibilidad y no saber a cuál se debe el cambio.
- Tomar la media como único escenario y olvidar el mínimo y el máximo; confundir mediana con media.
- Presentar el resultado del modelo como una certeza, sin señalar supuestos y límites.

Criterios para valorar respuestas abiertas

- En las preguntas abiertas se valora que cada afirmación se apoye en un cálculo o en un dato del dossier y que se mencionen condiciones de seguimiento.
- Se aceptan otros supuestos y otros escenarios (por ejemplo, la media en lugar de la mediana) si se explicitan y se calculan de forma coherente.
- La hoja de cálculo es válida para el cálculo masivo y la sensibilidad, pero las funciones y el punto de equilibrio deben aparecer escritos a mano.
- Se valora especialmente la discusión de los límites del modelo (datos escasos, demanda dependiente del precio, costes imprevistos).

05

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

¿Cómo cambia una variable?

PREGUNTA GUÍA

¿Qué información sobre una situación obtenemos del crecimiento, decrecimiento y tasa de cambio?

CURSO
4.º ESO · Matemáticas A

SESIONES
7 sesiones · 2.º trimestre

SENTIDOS PRIORITARIOS
B · Sentido de la medida · D · Sentido algebraico

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE3, CE5, CE7, CE8

PRODUCTO FINAL
Atlas de cambios y funciones cotidianas

CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 3.1, 5.1, 7.1, 8.1

Contexto, reto y sentido

Una gráfica es una historia contada con ejes: cuánto se aleja una bici de casa a lo largo de una mañana, cómo sube y baja la temperatura en un día, cómo se vacía un depósito, cómo crece la población mundial o un cultivo de bacterias. Saber leer una gráfica no es solo ver si sube o baja: es preguntarse **a qué ritmo** cambia y si ese ritmo es siempre el mismo.

La situación moviliza el sentido de la medida y el algebraico: se interpretan funciones en contexto (crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos), se calculan tasas de variación absolutas y medias con sus unidades, se relaciona la pendiente con el ritmo de cambio y se comparan modelos lineales y no lineales con datos reales (población mundial, ONU) y ficticios. El producto final es un atlas de cambios: cuatro situaciones cotidianas, cada una con su gráfica, su tasa de cambio y un comentario que cuenta la historia con lenguaje matemático.

Reto

Construir un atlas de cambios con cuatro situaciones cotidianas (viaje en bici, temperatura, depósito de agua y crecimiento), cada una con gráfica rotulada, propiedades de la función, tasa de variación con unidades y un comentario que explique si el cambio es lineal o no.

Producto final

Atlas de cambios y funciones cotidianas.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE5** Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

1.1 Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.

3.1 Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada estudiando patrones, propiedades y relaciones.

5.1 Deducir relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente.

7.1 Representar matemáticamente la información más relevante de un problema, conceptos, procedimientos y resultados, visualizando ideas y estructurando procesos.

8.1 Comunicar ideas, conclusiones, conjeturas y razonamientos matemáticos utilizando diferentes medios, con coherencia, claridad y terminología apropiada.

Saberes básicos prioritarios

D
Sentido algebraico

- Interpretación de funciones en contexto: variable dependiente e independiente, dominio y recorrido, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.
- Función lineal y afín: pendiente, ordenada en el origen y expresión algebraica a partir de una tabla o de dos puntos.
- Modelos lineales y no lineales (exponencial): reconocimiento mediante tabla (diferencias constantes frente a razón constante) y gráfica.

B
Sentido de la medida

- Tasa de variación absoluta (TVA) y tasa de variación media (TVM) de una función en un intervalo, con sus unidades (°C/h, km/min, L/min).
- Interpretación de la TVM como ritmo medio de cambio y de la pendiente como tasa de cambio constante; cambios de unidades (km/min a km/h).

F
Sentido socioafectivo

- Persistencia al interpretar gráficas, formulación de conjeturas y aceptación del error como parte del aprendizaje.
- Comunicación clara de una interpretación matemática a otras personas.

Objetivos didácticos

- Interpretar propiedades de funciones en contexto.
- Calcular tasas de variación absolutas y medias sencillas.
- Relacionar pendiente y cambio.
- Comparar modelos lineales y no lineales.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Historias y gráficas

Evidencia: Ficha 1: diagnóstico, relación de historias con gráficas, narración por tramos de un viaje en bici y boceto de una gráfica propia.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Crecimiento/decrecimiento

Evidencia: Ficha 2: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos y lectura de valores en la temperatura de un día y en el viaje en bici.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Tasa absoluta y media

Evidencia: Ficha 3: tabla de TVA y TVM por intervalos (temperatura y viaje en bici), cambio de unidades e interpretación de un intervalo con TVA nula.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Pendiente en contexto

Evidencia: Ficha 4: pendiente en contexto con dos depósitos de agua, ecuación, punto de corte y gráfica.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Comparación de modelos

Evidencia: Ficha 5: comparación de modelos con datos reales de población mundial y un cultivo de bacterias: TVM, diferencias y razón constante, y conjetura lineal o no lineal.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Atlas de cuatro situaciones

Evidencia: Ficha 6: planificación del atlas de cuatro situaciones, quinta situación propia y revisión cruzada.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Reto individual

Evidencia: Ficha 7: reto individual con la batería de un móvil: tasas, modelo lineal, gráfica y explicación de TVA frente a TVM.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Gráficas y tablas ficticias · GeoGebra/hoja de cálculo

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Funciones lineales con escalas claras y cálculos de dos puntos.

Ampliación

Anexo 9

Diseñar dos modelos con misma tasa media pero comportamiento diferente.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Reformulación verbal y gráfica de cada situación: identificación de las variables con sus unidades, relación de historias con gráficas y narración por tramos.	Fichas 1 y 2 / lista de cotejo
3.1	Formulación y comprobación de conjeturas sobre si un cambio es lineal o no a partir de diferencias constantes, razón constante y TVM en varios intervalos.	Ficha 5 y reto individual (Ficha 7) / rúbrica
5.1	Conexión entre pendiente, TVM, crecimiento, ecuación y gráfica de una misma situación, y entre los modelos lineal y no lineal.	Fichas 3, 4 y 5 / escala de valoración
7.1	Representación de cada situación con tabla, gráfica con ejes rotulados y escala, y expresión algebraica cuando procede.	Fichas 4 y 6 y Anexo 4 / rúbrica
8.1	Comentario escrito de cada página del atlas con lenguaje matemático (intervalos, tasas con unidades) y explicación de la interpretación del cambio.	Anexo 4 y Ficha 7 / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Atlas, cálculos y comentarios.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 5 · ¿Cómo cambia una variable?

ALUMNADO

Una bici sale de casa, se para en el parque, vuelve a pedalear y regresa; la temperatura sube hasta media tarde y luego baja; un depósito se vacía a ritmo constante; las bacterias de un cultivo se duplican cada hora y una población crece año tras año. Cada historia tiene su gráfica, pero ¿en cuál el cambio es siempre el mismo? ¿Cuándo es más rápido? Vais a convertiros en cartógrafos de cambios: leer gráficas, calcular a qué ritmo cambia cada magnitud, decidir si el cambio es lineal o no y reunir todo en un atlas que cuente las historias con matemáticas.

> *¿Qué información sobre una situación obtenemos del crecimiento, decrecimiento y tasa de cambio?*

Vuestro reto

Construir un atlas de cambios con cuatro situaciones cotidianas (viaje en bici, temperatura, depósito de agua y crecimiento), cada una con gráfica rotulada, propiedades de la función, tasa de variación con unidades y un comentario que explique si el cambio es lineal o no.

Lo que vais a producir

Atlas de cambios y funciones cotidianas.

Hoja de ruta · 7 sesiones

1. Emparejamos historias y gráficas y contamos cada tramo.
2. Describimos crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos.
3. Calculamos tasas de variación absolutas y medias con sus unidades.
4. Relacionamos la pendiente con el ritmo de cambio en un depósito de agua.
5. Comparamos modelos lineales y no lineales con datos reales y ficticios.
6. Montamos el atlas de cuatro situaciones.
7. Resolvemos un reto individual y explicamos la diferencia entre TVA y TVM.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Interpretar propiedades de funciones en contexto.
- ✓ Calcular tasas de variación absolutas y medias sencillas.
- ✓ Relacionar pendiente y cambio.
- ✓ Comparar modelos lineales y no lineales.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

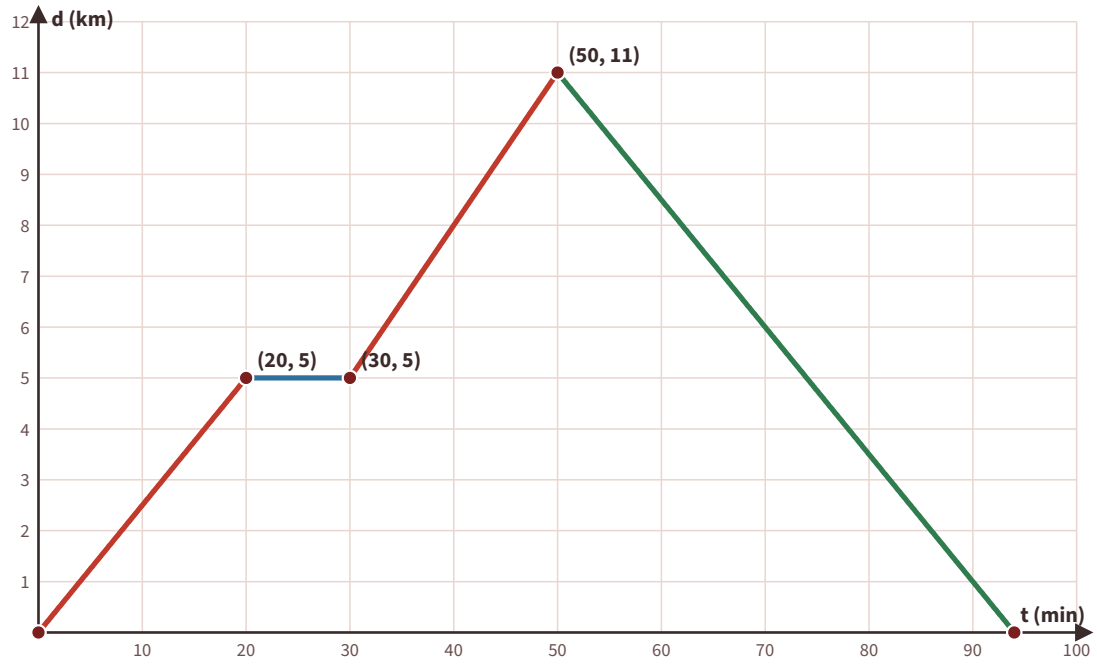
SdA 5 · ¿Cómo cambia una variable?

ALUMNADO

Un viaje en bici (gráfica a trozos), la temperatura de un día, cuatro gráficas misteriosas, un depósito de agua, la población mundial (datos de la ONU), un cultivo de bacterias frente a un modelo lineal, un ejemplo resuelto y la guía de las páginas del atlas. Salvo la población mundial, los datos son ficticios.

F1 Un viaje en bici

GRÁFICO



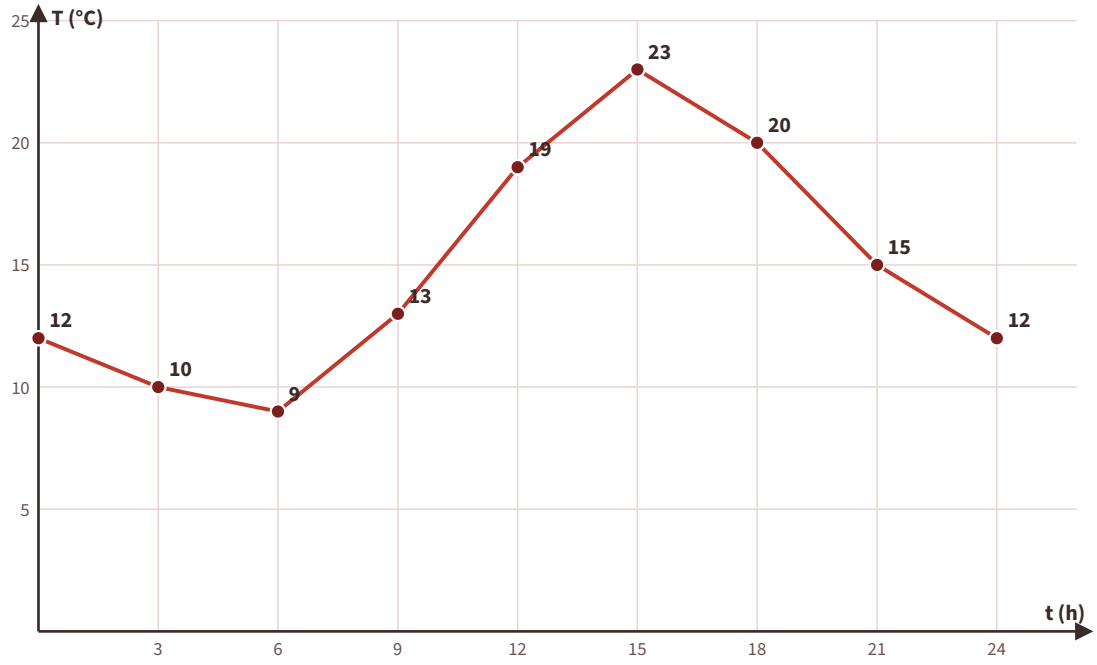
La gráfica muestra la distancia d (en km) a la que está de su casa una persona que sale en bici, en función del tiempo t (en minutos) desde que sale.

Fuente: Datos ficticios creados para el aula.

Cuenta la historia de cada tramo: ¿va, se para o vuelve? ¿A qué ritmo?

F2 Temperatura a lo largo de un día de otoño

GRÁFICO



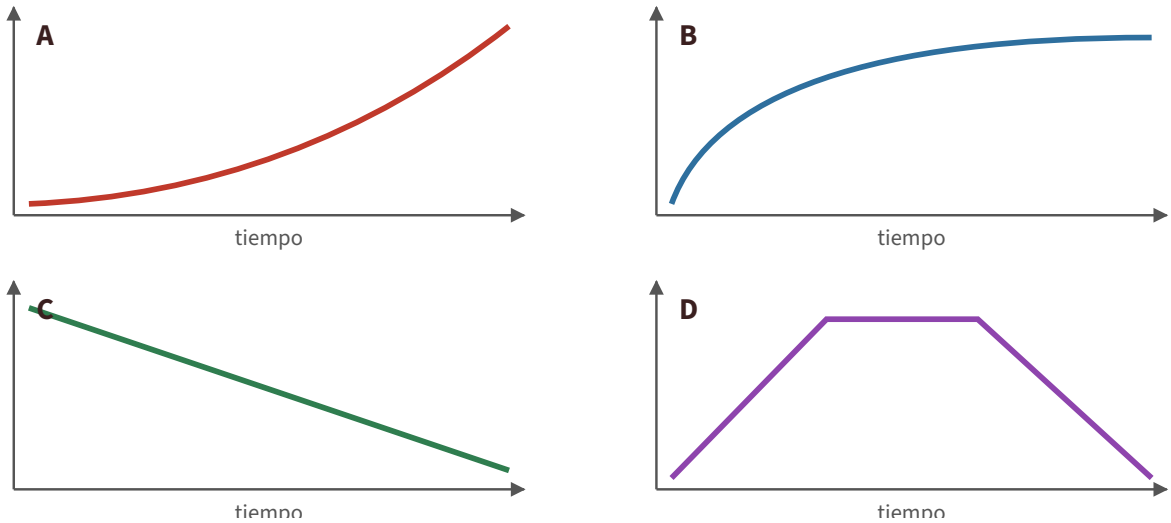
Datos: 12, 10, 9, 13, 19, 23, 20, 15 y 12 °C a las 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 y 24 h. Entre dos mediciones se supone que la temperatura cambia de forma uniforme (interpolación lineal).

Fuente: Datos ficticios, realistas para un día de otoño en el interior peninsular. Medida cada 3 horas.

La gráfica une puntos medidos; no se conoce lo que ocurre entre ellos, solo se supone.

F3 Cuatro gráficas misteriosas

ESQUEMA



Fuente: Esquemas de elaboración propia. Ejes: tiempo (horizontal) y valor (vertical).

Fíjate en la forma de cada curva: ¿sube o baja? ¿cada vez más deprisa o más despacio? ¿en línea recta?

F4 El depósito que se vacía

DATOS

Tiempo t (min)	0	10	20	30
Volumen de agua V (L)	600	450	300	150

Un depósito de 600 L se abre por la parte inferior y deja salir agua. La tabla recoge el volumen que queda cada 10 minutos. Otro depósito, vacío de agua al principio, se llena con un grifo.

Fuente: Datos ficticios creados para el aula.

Calcula cuánto cambia el volumen en cada intervalo de 10 minutos.

F5 Población mundial (1950-2020)

DATOS

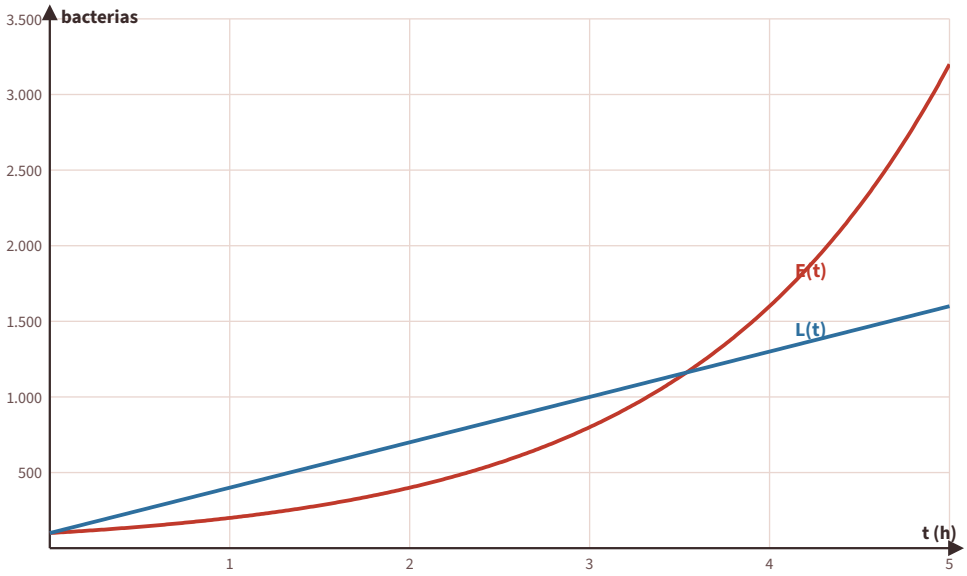
Año	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2020
Población (miles de millones)	2,49	3,02	3,69	4,45	5,33	6,17	7,02	7,89

Fuente: Naciones Unidas, World Population Prospects (estimaciones); cifras redondeadas a centésimas de miles de millones, consultadas en worldometers.info.

1 mil millón = 1 000 000 000 de personas. ¿Crece la población de forma lineal?

F6 Un cultivo de bacterias y un modelo lineal

GRÁFICO



Un cultivo empieza con 100 bacterias y se duplican cada hora: $E(t) = 100 \cdot 2^t$. Un modelo lineal propone empezar con 100 y añadir 300 bacterias por hora: $L(t) = 100 + 300\,t$.

Fuente: Modelos ficticios creados para el aula.

Compara las dos curvas: ¿cuándo coinciden? ¿cuándo supera una a la otra?

F7 Vocabulario y fórmulas: cómo cambia una función

TEXTO

- **Creciente** en un intervalo: al aumentar x aumenta $f(x)$. **Decreciente**: al aumentar x disminuye $f(x)$. **Constante**: no cambia.
- **Máximo / mínimo:** el mayor / menor valor de la función en el intervalo.
- **Tasa de variación absoluta** (TVA) en $[a, b]$: $f(b) - f(a)$. Se mide en las unidades de y.
- **Tasa de variación media** (TVM) en $[a, b]$: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Se mide en unidades de y por unidad de x (km/min, °C/h…). Es el **ritmo medio de cambio**.
- **Función lineal** $y = m\,x + n$: su TVM es siempre la misma, m (la **pendiente**), en cualquier intervalo. n es la ordenada en el origen.
- **Modelos no lineales:** la TVM depende del intervalo elegido. En un modelo **exponencial** el valor se multiplica por un mismo factor en intervalos iguales.

Pendiente de la recta por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2): $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Fuente: Elaboración propia.

Una TVM positiva indica crecimiento; negativa, decrecimiento; cero, ninguna variación media.

F8 Ejemplo resuelto: ritmo de calentamiento de la mañana

ESTUDIO DE CASO

Pregunta. ¿A qué ritmo medio sube la temperatura entre las 6 h y las 15 h?

1. Valores. $f(6) = 9$ °C y $f(15) = 23$ °C.

2. TVA. $f(15) - f(6) = 23 - 9 = 14$ °C.

3. TVM. $\frac{14}{15-6} = \frac{14}{9} \approx 1{,}56$ °C/h.

4. Interpretación. Entre las 6 h y las 15 h la temperatura sube, de media, unos 1,56 °C cada hora. Pero no sube igual en todas las horas: de 6 h a 9 h sube $\frac{13-9}{3} \approx 1{,}33$ °C/h y de 9 h a 12 h sube $\frac{19-13}{3} = 2$ °C/h.

5. Comprobación. Un cambio medio de 1,56 °C/h durante 9 h da $1{,}56 \cdot 9 \approx 14$ °C ✔.

Fuente: Elaboración propia con los datos de F2.

La TVM resume el cambio, pero no dice cómo ha cambiado dentro del intervalo.

F9 Cómo es una página del atlas

PROTOCOLO

Cada página del atlas cuenta una situación y debe incluir:

- **1. Título y pregunta** (¿cómo cambia…?).
- **2. Variables y unidades:** qué es x y qué es y.
- **3. Gráfica** con ejes rotulados, unidades y escala; tabla de valores si ayuda.
- **4. Propiedades:** intervalos de crecimiento, decrecimiento o constancia; máximo y mínimo.
- **5. Tasa de cambio:** TVA y TVM (con unidades) en al menos un intervalo; pendiente si es lineal.
- **6. ¿Lineal o no?** Una frase con la razón (diferencias constantes, TVM constante o no).
- **7. Comentario:** una frase que cuente la historia con lenguaje matemático.

Fuente: Elaboración propia.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 5 · ¿Cómo cambia una variable?

ALUMNADO

FICHA 1 Historias y gráficas

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Lee F1 y F3. Antes de calcular, cuenta lo que ves.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

La pendiente de la recta que pasa por (0, 2) y (4, 10) es…

☐ 2 ☐ 4 ☐ 8

Una función es creciente en un intervalo si…

☐ al aumentar x, aumenta y ☐ al aumentar x, y no cambia ☐ y es positiva

El valor de f(x) = 3x − 2 para x = 4 es…

☐ 10 ☐ 14 ☐ 12

2 **Relaciona cada historia con su gráfica de F3.**

1	Una planta crece cada semana más que la semana anterior (altura según el tiempo).	●
2	Un corredor se cansa: cada minuto avanza menos metros que el anterior (distancia según el tiempo).	●
3	La batería de un móvil se descarga siempre al mismo ritmo (carga según el tiempo).	●
4	Una persona sube una cuesta, descansa en la cima y baja (altura según el tiempo).	●

● **a** Gráfica A

● **b** Gráfica B

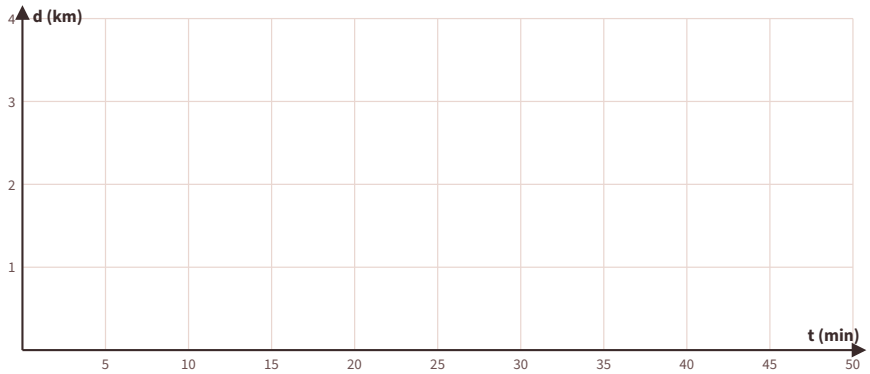
● **c** Gráfica C

● **d** Gráfica D

3 **Cuenta la historia de la gráfica de F1 por tramos.**

Tramo (min)	¿Qué ocurre?	Distancia a casa (km) al inicio y al final del tramo
0 a 20		
20 a 30		
30 a 50		
50 a 94		

4 **Indica en F1 la variable independiente y la dependiente con sus unidades, y escribe el dominio y el recorrido. Dibuja después una gráfica para esta historia: «Un patinete se aleja de casa 3 km en 15 min, espera 10 min y vuelve en 20 min».**



FICHA 2 Crece, decrece, máximo y mínimo

Sesión 2

Usa F2 (temperatura) y F1 (viaje en bici) y el vocabulario de F7.

1 **Con F2, completa los intervalos en los que la temperatura crece o decrece (horas).**

Intervalo (h)	¿Crece, decrece o es constante?	Temperatura al inicio y al final (°C)
De 0 a 6		
De 6 a 15		
De 15 a 24		

2 **Indica el máximo y el mínimo de la temperatura y a qué hora se alcanzan. Calcula la amplitud térmica (máximo − mínimo). Si entre medidas el cambio es uniforme, ¿entre qué horas se supera los 15 °C?**

3 **Verdadero o falso (F2). Justifica las falsas.**

	V	F
La temperatura es creciente durante todo el día.	☐	☐
A las 6 h se alcanza el mínimo.	☐	☐
La función es decreciente entre las 15 h y las 24 h.	☐	☐
A las 3 h hay 10 °C.	☐	☐

4 Con F1, indica los intervalos de tiempo en que la distancia crece, es constante y decrece. ¿Qué significa en la historia que la gráfica sea horizontal entre 20 y 30 min?

FICHA 3 Tasas de variación

Sesión 3

Usa F7 y el ejemplo F8. Escribe siempre las unidades.

1 Completa la tabla con la temperatura de F2.

Intervalo (h)	$f(a)$	$f(b)$	TVA (°C)	TVM (°C/h)
[0, 6]				
[6, 12]				
[12, 15]				
[15, 24]				

2 Con F1, calcula la TVM de cada tramo en km/min y pásala a km/h (multiplica por 60). ¿Qué representa en este contexto?

Tramo (min)	TVM (km/min)	TVM (km/h)	Interpretación
[0, 20]			
[20, 30]			
[30, 50]			
[50, 94]			

3 En F2, la TVM en $[0, 24]$ vale 0 °C/h. ¿Significa que la temperatura no ha cambiado en todo el día? Explícalo.

4 Calcula la TVM de la ida completa del viaje en bici ($[0, 50]$) en km/h. ¿Coincide con la media de las velocidades de los tramos 1 y 3? ¿Por qué?

FICHA 4 La pendiente en contexto

Sesión 4

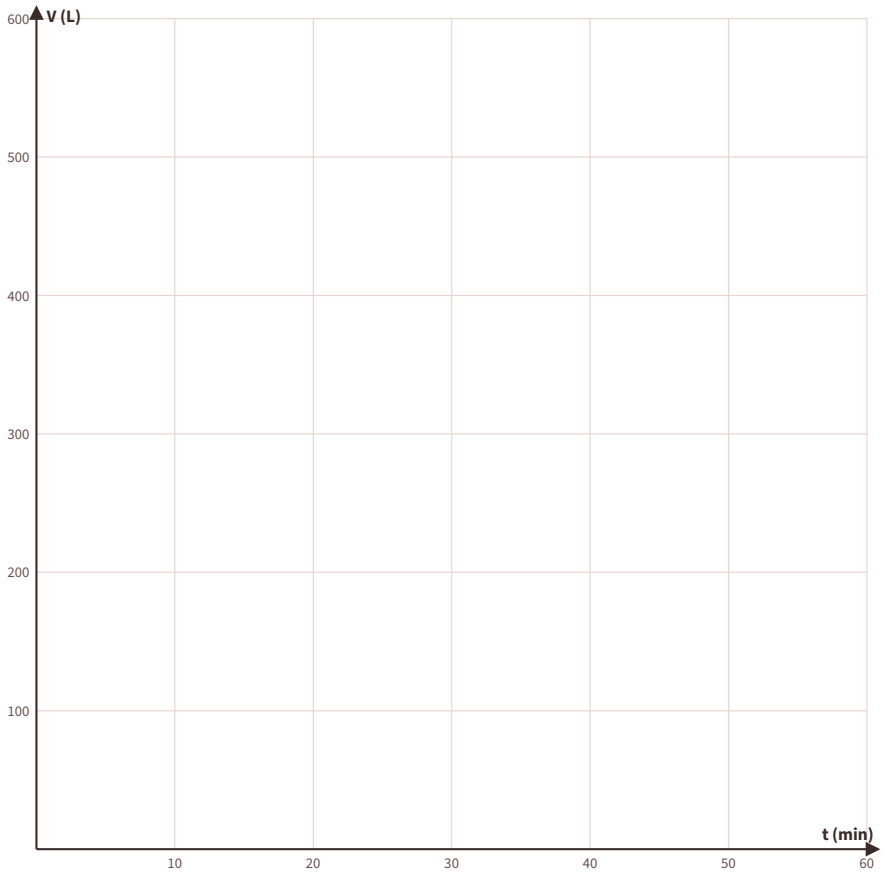
Usa F4 y F7. La pendiente es la TVM de una recta.

1 **Con F4, calcula la TVM entre cada par de mediciones consecutivas. ¿Qué observas? ¿Qué tipo de función es?**

Intervalo (min)	TVA (L)	TVM (L/min)
[0, 10]		
[10, 20]		
[20, 30]		

2 **Escribe la fórmula del volumen $V(t)$, indica qué significan la pendiente y la ordenada en el origen y calcula en qué minuto se vacía el depósito. Escribe el dominio razonable de la función.**

3 **El otro depósito empieza con 50 L y se llena con 8 L/min. Escribe su fórmula, ¿cuándo llega a 450 L? Dibuja las dos rectas en la cuadrícula y calcula en qué minuto tienen el mismo volumen (redondea a décimas).**



4 **¿Qué ocurriría con la gráfica si la pendiente fuera 0? ¿Y si fuera positiva en el primer depósito? Interprétalo con palabras.**

FICHA 5 Lineal o no lineal

Sesión 5

Compara los datos reales de F5 con el cultivo de bacterias de F6. Formula una conjetura y compruébala.

1 **Con F5, completa la tabla de la población mundial por décadas.**

Década	TVA (miles de millones)	TVM (millones de personas por año)	TVA relativa (%)
1950-1960			
1960-1970			
1970-1980			
1980-1990			
1990-2000			
2000-2010			
2010-2020			

2 **Conjetura: ¿crece la población mundial de forma lineal entre 1980 y 2020? Razónalo con tus datos. Usa la TVM entre 1980 y 2020 para estimar la población en 2030 e indica por qué es solo una estimación.**

3 **Con F6, completa la tabla y calcula la TVM de cada intervalo de una hora en cada modelo.**

t (h)	0	1	2	3	4	5
$E(t) = 100 \cdot 2^t$						
$L(t) = 100 + 300\,t$						
TVM de E en [t, t+1]						
TVM de L en [t, t+1]						

4 **¿Entre qué dos horas enteras la exponencial supera al modelo lineal? ¿Qué rasgo de la tabla permite decidir si un modelo es lineal o exponencial?**

FICHA 6 Planificamos el atlas

Sesión 6

Elegid las cuatro situaciones del atlas (F1, F2, F4 y F5 o F6) y planificad cada página con F9.

1 **Completad la tabla de planificación del atlas.**

Situación	Variables y unidades	Propiedad destacada	TVM o pendiente	¿Lineal? ¿Por qué?
Viaje en bici				
Temperatura de un día				
Depósito de agua				
Población o bacterias				

2 **Proponed una quinta situación propia (por ejemplo, saldo de un monedero, altura de una pelota, ahorro mensual). Describidla y decid qué forma esperáis que tenga su gráfica.**

3 **Escribid el comentario de una de las páginas del atlas en dos frases con lenguaje matemático (intervalos, tasas con unidades).**

4 **Revisión cruzada de una página del atlas de otro equipo.**

- ☐ Los ejes están rotulados con unidades y escala
- ☐ Se indican crecimiento, decrecimiento, máximo o mínimo
- ☐ La TVM está bien calculada y con unidades
- ☐ Se justifica si el cambio es lineal o no
- ☐ El comentario cuenta la historia con matemáticas

FICHA 7 Reto individual: la batería del móvil

Sesión 7

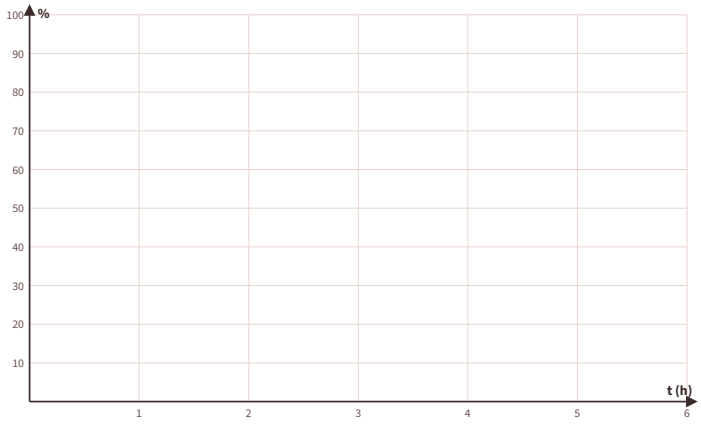
Resuelve sin ayuda del equipo. En un móvil se mide el porcentaje de batería cada 2 horas. ***Uso normal:*** *100, 82, 64 y 46 % a las 0, 2, 4 y 6 horas.* ***Uso intensivo:*** *100, 70, 45 y 25 % a las 0, 2, 4 y 6 horas.*

1 **Calcula la TVM de la batería en cada intervalo de 2 horas para los dos usos (en % por hora). ¿Cuál de los dos es lineal? ¿Por qué?**

Intervalo (h)	TVM uso normal (%/h)	TVM uso intensivo (%/h)
[0, 2]		
[2, 4]		
[4, 6]		

2 **Para el uso normal, escribe la fórmula $B(t)$ y calcula cuándo se agotará la batería si se mide desde las 8:00. Para el uso intensivo, ¿puedes asegurar con estos datos a qué hora se agotará? Explica por qué hay que ser prudente al extrapolar.**

3 **Dibuja los dos usos en la cuadrícula.**



4 **Explica con tus palabras la diferencia entre la tasa de variación absoluta y la tasa de variación media, y por qué una TVM puede ocultar lo que ocurre dentro de un intervalo (usa un ejemplo de este dossier).**

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 5 · ¿Cómo cambia una variable?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Atlas de cambios y funciones cotidianas: cuatro situaciones, cada una con su gráfica, tasa de cambio y comentario.

Título del atlas y equipo

Nombre del atlas, miembros y roles.

Página 1: viaje en bici

Gráfica · tramos · TVM con unidades · comentario.

Página 2: temperatura de un día

Gráfica · crece/decrece · máximo y mínimo · TVM.

Página 3: depósito de agua

Gráfica · pendiente · fórmula $V(t)$ · interpretación.

Página 4: crecimiento (población o bacterias)

Tabla · TVM · ¿lineal o no? · conjetura comprobada.

Comparación y conclusión

Qué situaciones son lineales y cuáles no, y cómo lo hemos comprobado.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 5 · ¿Cómo cambia una variable?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Atlas de cambios y funciones cotidianas**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] Cada página del atlas indica las variables con sus unidades.
- [ ] Las gráficas tienen ejes rotulados, escala uniforme y los puntos o tramos importantes marcados.
- [ ] Se describen correctamente los intervalos de crecimiento, decrecimiento o constancia.
- [ ] Se señalan máximo y mínimo cuando existen.
- [ ] La TVA y la TVM están bien calculadas, con unidades y con la interpretación del signo.
- [ ] En la situación lineal se calcula la pendiente y se escribe la fórmula.
- [ ] Se compara al menos un modelo lineal con uno no lineal justificando la diferencia con datos.
- [ ] Cada página termina con un comentario de dos frases con lenguaje matemático.
- [ ] Se incluye una quinta situación propia o una conjetura comprobada.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 5 · ¿Cómo cambia una variable?

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Atlas de cambios y funciones cotidianas**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 5 · ¿Cómo cambia una variable?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé calcular e interpretar la tasa de variación media de una función con sus unidades.	○	○	○	○
Sé decidir si un cambio es lineal o no a partir de una tabla o una gráfica y explicar por qué.	○	○	○	○
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	○	○	○	○
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	○	○	○	○
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	○	○	○	○
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	○	○	○	○

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 5 · ¿Cómo cambia una variable?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Funciones lineales con escalas claras y cálculos de dos puntos. Una tarifa de taxi ficticia: bajada de bandera de 2 € y 1 € por cada kilómetro.

Ejemplo modelado

Puntos $(0, 2)$ y $(5, 7)$ de la tarifa del taxi: pendiente $m = \frac{7-2}{5-0} = \frac{5}{5} = 1$ €/km. Ordenada en el origen: 2 €. Fórmula: $y = 1\,x + 2$.

Glosario y símbolos

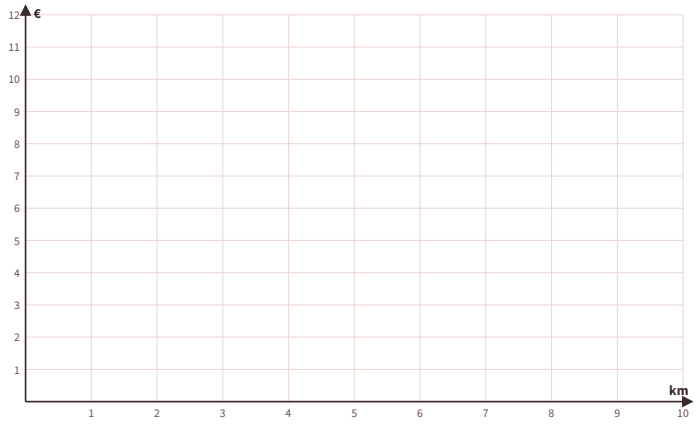
Pendiente m: cuánto sube y cuando x aumenta 1; $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. **Ordenada en el origen** n: valor de y cuando $x = 0$. **TVM**: ritmo medio de cambio; en una recta es la pendiente. **Creciente**: $m > 0$. **Decreciente**: $m < 0$.

1 **Completa la tabla de la tarifa del taxi.**

Kilómetros x	0	2	5	8	10
Coste y (€)	2	4	7		

2 **Calcula la pendiente con los puntos $(2, 4)$ y $(10, 12)$ y escribe la fórmula. ¿Coincide con la del ejemplo?**

3 **Dibuja la recta del taxi en la cuadrícula y marca los puntos $(0, 2)$ y $(5, 7)$.**



ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 5 · ¿Cómo cambia una variable?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Dos modelos con la misma tasa media y comportamiento diferente

La tasa de variación media resume el cambio, pero dos funciones muy distintas pueden tener la misma TVM en un intervalo. Vas a diseñar dos modelos que coincidan en el principio y en el final de un intervalo pero que cambien de forma distinta dentro de él.

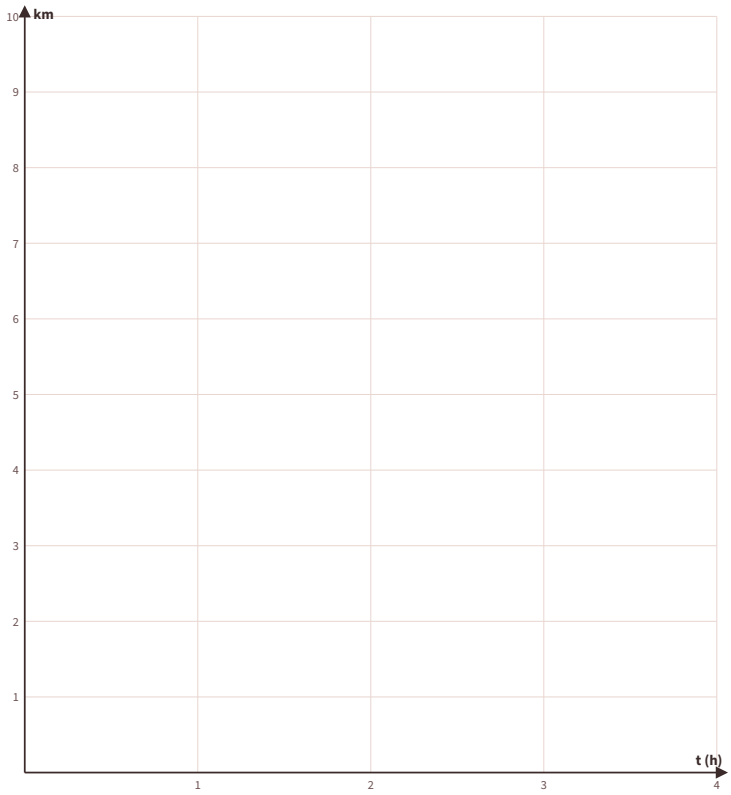
Pasos

1. Elige un contexto (por ejemplo, la distancia recorrida por dos ciclistas) y un intervalo $[0, 4]$ horas en el que los dos recorren 8 km.
2. Propón un modelo lineal f y uno no lineal g con $f(0) = g(0) = 0$ y $f(4) = g(4) = 8$ (por ejemplo, $g(t) = 0{,}5\,t^2$). Haz una tabla de valores y dibuja las dos gráficas.
3. Calcula la TVM de ambas en $[0, 4]$ y en $[0, 2]$ y $[2, 4]$. ¿En qué se parecen y en qué se diferencian?
4. Generaliza: si dos funciones coinciden en a y en b, ¿qué puedes decir de sus TVM en $[a, b]$? ¿Y en los subintervalos? Justifícalo con la fórmula.

1 **Tabla de valores de los dos modelos.**

t (h)	0	1	2	3	4
$f(t)$ lineal					
$g(t)$ no lineal					

2 **Dibuja las dos gráficas.**



Entrega

Contexto, las dos funciones, tabla, gráfica, las TVM calculadas y una conclusión general justificada con la fórmula de la TVM.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 5 · ¿Cómo cambia una variable?

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: $\frac{10-2}{4-0} = 2$; creciente: al aumentar x aumenta y; $f(4) = 3 \cdot 4 - 2 = 10$.
2. Planta ↔ A (convexa: cada vez más rápido); corredor ↔ B (cóncava: cada vez más despacio); batería ↔ C (recta decreciente); cuesta ↔ D (sube, meseta, baja).
3. Tramo 0-20: la distancia crece de 0 a 5 km (se aleja). 20-30: constante en 5 km (parada). 30-50: crece de 5 a 11 km (se aleja más). 50-94: decrece de 11 a 0 km (vuelve a casa).
4. Variable independiente: tiempo t en min; dependiente: distancia d en km. Dominio $[0, 94]$ min; recorrido $[0, 11]$ km. Gráfica del patinete: puntos $(0, 0)$, $(15, 3)$, $(25, 3)$ y $(45, 0)$ unidos con segmentos.

Ficha 2

1. De 0 a 6 h: decrece (12 → 9 °C). De 6 a 15 h: crece (9 → 23 °C). De 15 a 24 h: decrece (23 → 12 °C).
2. Máximo 23 °C a las 15 h; mínimo 9 °C a las 6 h; amplitud $23 - 9 = 14$ °C. Con interpolación lineal: entre 9 h (13 °C) y 12 h (19 °C) sube 2 °C/h, luego 15 °C a las 10 h; entre 18 h (20 °C) y 21 h (15 °C) baja 5/3 °C/h y llega a 15 °C a las 21 h. Se supera 15 °C aproximadamente entre las 10 h y las 21 h.
3. F (decrece de 0 a 6 h y de 15 a 24 h); V; V; V.
4. $[0, 20]$ crece; $[20, 30]$ constante; $[30, 50]$ crece; $[50, 94]$ decrece. Horizontal entre 20 y 30 min: la persona está parada (no cambia su distancia a casa).

Ficha 3

1. [0, 6]: $f(0) = 12$, $f(6) = 9$; TVA -3 °C; TVM $-0{,}5$ °C/h. [6, 12]: 9 y 19; TVA $+10$; TVM $\approx 1{,}67$ °C/h. [12, 15]: 19 y 23; TVA $+4$; TVM $\approx 1{,}33$ °C/h. [15, 24]: 23 y 12; TVA -11; TVM $\approx -1{,}22$ °C/h.
2. [0, 20]: $\frac{5}{20} = 0{,}25$ km/min = 15 km/h (se aleja a 15 km/h). [20, 30]: 0 (parada). [30, 50]: $\frac{6}{20} = 0{,}3$ km/min = 18 km/h. [50, 94]: $\frac{-11}{44} = -0{,}25$ km/min = −15 km/h (vuelve a 15 km/h; el signo negativo indica que se acerca a casa).
3. No: la TVM en $[0, 24]$ es 0 porque $f(24) = f(0) = 12$ °C, pero la temperatura ha subido y bajado durante el día; la TVM solo compara el principio y el final del intervalo.
4. $\frac{11}{50} = 0{,}22$ km/min $= 13{,}2$ km/h. La media de 15 y 18 es 16,5 km/h; no coincide porque en la ida hay una parada de 10 min y los tramos duran tiempos distintos: la TVM del intervalo completo pondera por el tiempo.

Ficha 4

1. [0, 10]: TVA -150 L, TVM -15 L/min; [10, 20]: -150, -15; [20, 30]: -150, -15. La TVM es constante: función lineal (afín) decreciente.
2. $V(t) = 600 - 15\,t$. Pendiente -15 L/min (sale agua a 15 L/min); ordenada 600 L (volumen inicial). $600 - 15t = 0 \Rightarrow t = 40$ min. Dominio razonable $[0, 40]$ min.
3. Segundo depósito: $W(t) = 50 + 8t$; $50 + 8t = 450 \Rightarrow t = 50$ min. Igualdad: $600 - 15t = 50 + 8t \Rightarrow 23t = 550 \Rightarrow t \approx 23{,}9$ min (volumen $\approx 241{,}3$ L). Se aceptan lecturas de la gráfica próximas a 24 min.
4. Pendiente 0: volumen constante (el depósito no pierde ni gana agua, gráfica horizontal). Pendiente positiva en el primero: se llenaría en lugar de vaciarse.

Ficha 5

1. 1950-60: TVA 0,53; TVM 53 millones/año; relativa $\frac{0{,}53}{2{,}49} \approx 21{,}3\,\%$. 1960-70: 0,67; 67; 22,2 %. 1970-80: 0,76; 76; 20,6 %. 1980-90: 0,88; 88; 19,8 %. 1990-2000: 0,84; 84; 15,8 %. 2000-10: 0,85; 85; 13,8 %. 2010-20: 0,87; 87; 12,4 %.
2. Entre 1980 y 2020 la TVA por década es casi constante (0,84 a 0,88): crecimiento aproximadamente lineal en cifras absolutas, con una pendiente de unos 86 millones de personas al año ($\frac{7{,}89-4{,}45}{40} = 0{,}086$ mil millones/año). Pero el crecimiento relativo baja (de 19,8 % a 12,4 %): no es un crecimiento exponencial. Estimación 2030: $7{,}89 + 0{,}86 \approx 8{,}75$ mil millones; es solo una estimación porque supone que el ritmo se mantiene.
3. E: 100, 200, 400, 800, 1600, 3200; L: 100, 400, 700, 1000, 1300, 1600. TVM de E: 100, 200, 400, 800, 1600 bacterias/h (crece). TVM de L: 300 siempre.
4. La exponencial supera a la lineal entre 3 y 4 h (a las 3 h: 800 < 1000; a las 4 h: 1600 > 1300; más precisamente en torno a 3,6 h). En la lineal las diferencias entre valores consecutivos son constantes (300); en la exponencial lo constante es el cociente (×2).

Ficha 6

1. Respuesta modelo: Viaje en bici: t (min), d (km); crece, constante, crece, decrece; TVM 0,25; 0; 0,3; −0,25 km/min; no lineal (a trozos). Temperatura: t (h), T (°C); máx. 23 °C a las 15 h, mín. 9 °C a las 6 h; TVM de 6 a 15: 1,56 °C/h; no lineal. Depósito: t (min), V (L); decreciente; pendiente −15 L/min; lineal. Población/bacterias: población ≈ lineal desde 1980 (TVA ≈ constante), bacterias no lineales (razón ×2).
2. Quinta situación: respuesta abierta; se valora que indique variables y unidades y una forma de gráfica coherente (por ejemplo, saldo de un monedero: decreciente a trozos al gastar y creciente al ingresar).
3. Comentario abierto. Ejemplo: «Entre 6 h y 15 h la temperatura crece con una TVM media de 1,56 °C/h, alcanzando su máximo de 23 °C a las 15 h; después decrece».
4. Revisión cruzada: se valora que se señalen aciertos y mejoras concretas.

Ficha 7

1. Uso normal: $\frac{82-100}{2} = -9$; $\frac{64-82}{2} = -9$; $\frac{46-64}{2} = -9$ %/h: TVM constante, es lineal. Uso intensivo: $\frac{70-100}{2} = -15$; $\frac{45-70}{2} = -12{,}5$; $\frac{25-45}{2} = -10$ %/h: la TVM no es constante, no es lineal (decrece cada vez más despacio).
2. Uso normal: $B(t) = 100 - 9t$; $B = 0 \Rightarrow t = \frac{100}{9} \approx 11{,}1$ h $= 11$ h 7 min; desde las 8:00 se agotaría hacia las 19:07. Uso intensivo: no se puede asegurar: la TVM cambia en cada intervalo (−15, −12,5, −10 %/h) y no sabemos cómo seguirá; a las 6 h quedan 25 %. Si el ritmo siguiese bajando, tardaría más de 2,5 h en agotarse; si se mantuviera en −10 %/h, 2,5 h. Extrapolar un modelo no lineal con tan pocos datos es arriesgado.
3. Gráficas: uso normal, recta que pasa por (0, 100), (2, 82), (4, 64), (6, 46); uso intensivo, curva por (0, 100), (2, 70), (4, 45), (6, 25), decreciente y cada vez más suave.
4. TVA: cambio total ($f(b) - f(a)$, en las unidades de y). TVM: cambio por unidad de x (ritmo medio). La TVM oculta lo que ocurre dentro del intervalo: la temperatura tiene TVM 0 en $[0, 24]$ aunque subió y bajó (F2); la TVM de 1,56 °C/h entre 6 h y 15 h oculta que de 9 a 12 h el ritmo es 2 °C/h.

Refuerzo

1. Taxi: $y = x + 2$: $x = 0, 2, 5, 8, 10 \to y = 2, 4, 7, 10, 12$.
2. $m = \frac{12-4}{10-2} = 1$ €/km; coincide con la del ejemplo; $y = x + 2$.
3. Recta por $(0, 2)$, $(5, 7)$ y $(10, 12)$.

Ampliación

1. Ejemplo: $f(t) = 2t$ y $g(t) = 0{,}5\,t^2$. Tabla: f: 0, 2, 4, 6, 8; g: 0; 0,5; 2; 4,5; 8.
2. TVM en $[0, 4]$: ambas $\frac{8}{4} = 2$ km/h. En $[0, 2]$: f: $\frac{4}{2} = 2$; g: $\frac{2}{2} = 1$. En $[2, 4]$: f: 2; g: $\frac{8-2}{2} = 3$. g empieza despacio y acaba deprisa.
3. General: si $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$, entonces $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$; las TVM en $[a, b]$ son iguales aunque en los subintervalos puedan diferir.

Errores frecuentes

- Calcular la TVM con la resta al revés ($f(a) - f(b)$) o dividir por $f(b)$ en lugar de por $b - a$.
- Olvidar las unidades de la tasa (°C/h, km/min) o no convertirlas (km/min a km/h multiplicando por 60).
- Pensar que una función con TVM 0 en un intervalo no ha cambiado en ningún momento.
- Confundir pendiente y ordenada en el origen, o el signo de la pendiente con el sentido físico de la situación.
- Dar por lineal un fenómeno porque la gráfica «sube» sin comprobar que la TVM es constante.
- Extrapolar sin advertir que se supone que el ritmo se mantiene (por ejemplo, población de 2030).

Criterios para valorar respuestas abiertas

- En los comentarios del atlas se valora el uso de intervalos, tasas con unidades y la justificación de si es lineal o no, más que la extensión.
- Las lecturas de gráficas admiten pequeñas diferencias (por ejemplo, 23,5 o 24 min en el cruce de depósitos) si el procedimiento es correcto.
- Los datos de población proceden de estimaciones de la ONU; conviene actualizarlos a la edición vigente. El resto de datos son ficticios.
- Se puede usar GeoGebra o hoja de cálculo para comprobar tasas y gráficas, pero el cálculo de la TVM debe aparecer escrito.

06

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Gráficas que pueden engañar

PREGUNTA GUÍA

¿Cómo puede una representación ser técnicamente correcta y aun así inducir a error?

CURSO 4.º ESO · Matemáticas A	**SESIONES** 7 sesiones · 2.º trimestre	**SENTIDOS PRIORITARIOS** E · Sentido estocástico · D · Sentido algebraico
COMPETENCIAS ESPECÍFICAS CE1, CE2, CE6, CE7, CE8	**PRODUCTO FINAL** Auditoría matemática de gráficos públicos ficticios	**CRITERIOS DE EVALUACIÓN** 1.1, 2.1, 2.2, 6.1, 7.2, 8.1

Contexto, reto y sentido

El Ayuntamiento ficticio de **Valdeverde** publica cada mes infografías en redes sociales con titulares como «¡El reciclaje se dispara!» o «¡Los robos bajan a la mitad!». Ninguna cifra es falsa, pero algunas imágenes hacen ver cosas que los datos no dicen. El instituto ha creado una **Oficina de Verificación de Datos** y vuestro equipo es el primer equipo de auditoría: tenéis que decidir qué gráficos son fiables, cuáles engañan y cómo se dibujarían con honestidad.

La situación moviliza el sentido estocástico y el algebraico de 4.º ESO: lectura crítica de gráficos estadísticos (origen y escala de los ejes, pictogramas, sectores, acumulados, doble eje), variación porcentual con su base de referencia, razón de áreas en figuras semejantes, índices base 100 y pendiente como ritmo de cambio. Un gráfico puede ser técnicamente correcto y aun así inducir a error; la matemática sirve para medir cuánto lo exagera y para reconstruirlo. Todos los gráficos del dossier son ficticios y creados para el aula.

Reto

Auditar matemáticamente cuatro gráficos públicos ficticios: medir cuánto exageran, recalcular sus porcentajes con la base correcta, rediseñarlos con honestidad y comunicar un veredicto razonado.

Producto final

Auditoría matemática de gráficos públicos ficticios.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- **1.1** Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.
- **2.1** Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.
- **2.2** Seleccionar las soluciones óptimas de un problema valorando tanto la corrección matemática como sus implicaciones desde diferentes perspectivas.
- **6.1** Proponer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.
- **7.2** Seleccionar entre diferentes herramientas, incluidas las digitales, y formas de representación valorando su utilidad para compartir información.
- **8.1** Comunicar ideas, conclusiones, conjeturas y razonamientos matemáticos utilizando diferentes medios, con coherencia, claridad y terminología apropiada.

Saberes básicos prioritarios

E
Sentido estocástico

- Gráficos estadísticos (barras, líneas, sectores, pictogramas): lectura crítica, origen y escala de los ejes.
- Porcentajes y variación porcentual: base de referencia, variación absoluta y relativa, aumentos y disminuciones sucesivos.
- Frecuencias absolutas y acumuladas: diferencia entre el total acumulado y el valor de cada periodo.
- Índices base 100 para comparar series con unidades distintas; correlación frente a causalidad (de forma intuitiva).
- Fuentes de sesgo en la presentación de datos: tamaño y selección de la muestra, datos omitidos, porcentajes que no suman 100.

D
Sentido algebraico

- Representación gráfica de relaciones: escala, pendiente como tasa de cambio y lectura de tramos con ritmos distintos.
- Proporcionalidad y semejanza: si el lado se multiplica por k, el área se multiplica por k^2.

F
Sentido socioafectivo

- Actitud crítica y respetuosa ante la información: distinguir el dato de su presentación sin acusar a quien la publica.
- Trabajo en equipo con roles de auditoría y revisión cruzada.

Objetivos didácticos

- ✓ Detectar escalas y recortes que alteran la percepción.
- ✓ Recalcular porcentajes y cambios.
- ✓ Redibujar una representación de forma más transparente.
- ✓ Comunicar límites y conclusiones.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Galería de gráficos dudosos

Evidencia: Ficha 1: diagnóstico, primera lectura de la galería de gráficos y relación de cada recurso con su efecto.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Ejes truncados y escalas

Evidencia: Ficha 2: alturas visibles del eje truncado de F1, razón de áreas del pictograma de F2 y ritmos por tramo en F6.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Porcentajes sin base

Evidencia: Ficha 3: variación absoluta y porcentual con su base en los titulares de F3, aumentos sucesivos y porcentajes de F7.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Gráficos acumulados y doble eje a nivel crítico

Evidencia: Ficha 4: valores mensuales a partir del acumulado de F4 y variaciones porcentuales de las series de F5.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Reconstrucción de gráficos

Evidencia: Ficha 5: reconstrucción honesta de los gráficos de F1, F4 y F5 en cuadrículas (barras desde cero, valores mensuales e índice base 100).

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Auditoría por equipos

Evidencia: Ficha 6: tabla de auditoría con tres gráficos, pruebas matemáticas, veredicto y revisión cruzada.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Informe y defensa

Evidencia: Ficha 7: reto individual con un gráfico nuevo (cantina del instituto): medir la exageración, recalcular porcentajes y redactar el veredicto.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Gráficos ficticios · hoja de cálculo · checklist

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Comparaciones con dos barras y escalas simples.

Ampliación

Anexo 9

Crear dos gráficos de los mismos datos: uno honesto y otro persuasivo, explicando las decisiones.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1

Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2

Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3

Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Reformulación de cada gráfico en palabras y en datos: qué muestra, qué afirma el titular, qué escala usa y qué pregunta de auditoría plantea.	Fichas 1 y 2 / lista de cotejo
2.1	Comprobación matemática de los gráficos: alturas visibles, razón de áreas, variaciones porcentuales con su base y valores mensuales a partir de acumulados.	Fichas 2, 3 y 4 / escala de valoración
2.2	Valoración del veredicto desde varias perspectivas: qué diría el ayuntamiento, qué entendería la ciudadanía y qué cambio de diseño sería más justo.	Fichas 6 y 7 / rúbrica
6.1	Aplicación de las matemáticas a información pública real o ficticia: variación porcentual, índice base 100, escala y razón de áreas.	Auditoría (Anexo 4) y Ficha 3 / rúbrica
7.2	Elección y construcción de la representación más transparente de los mismos datos (barras desde cero, valores por periodo, índice base 100) y valoración de su utilidad para comunicar.	Ficha 5 y Anexo 4 / rúbrica

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
8.1	Comunicación escrita y oral del veredicto con terminología precisa (origen del eje, variación porcentual, base, razón) y conclusiones claras.	Ficha 7 y defensa (Anexo 4) / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Auditoría, rediseño y explicación.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 6 · Gráficas que pueden engañar

ALUMNADO

Esta mañana el ayuntamiento de Valdeverde ha publicado cinco infografías. «¡El reciclaje de vidrio se dispara!», «¡El club de lectura se multiplica!», «Más visitas, menos quejas: ¡la web funciona!»… Las barras suben, los iconos crecen y las líneas se cruzan. Pero alguien del grupo de matemáticas ha mirado con una regla y ha dicho: «Esto no cuadra». ¿Cuánto crece en realidad el reciclaje? ¿Se ha multiplicado por cuatro el club? Vais a ser la Oficina de Verificación de Datos: mediréis, recalcularéis, redibujaréis y emitiréis un veredicto que se pueda defender con números.

> *¿Cómo puede una representación ser técnicamente correcta y aun así inducir a error?*

Vuestro reto

Auditar matemáticamente cuatro gráficos públicos ficticios: medir cuánto exageran, recalcular sus porcentajes con la base correcta, rediseñarlos con honestidad y comunicar un veredicto razonado.

Lo que vais a producir

Auditoría matemática de gráficos públicos ficticios.

Hoja de ruta · 7 sesiones

1. Exploramos la galería de gráficos dudosos y anotamos primeras sospechas.
2. Medimos el efecto de los ejes truncados, los iconos y las escalas.
3. Recalculamos porcentajes con su base de referencia.
4. Distinguimos acumulados de valores por periodo y desmontamos el doble eje.
5. Reconstruimos los gráficos de forma honesta.
6. Auditamos por equipos con la lista de verificación y revisamos entre equipos.
7. Redactamos y defendemos el informe de auditoría y resolvemos el reto individual.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Detectar escalas y recortes que alteran la percepción.
- ✓ Recalcular porcentajes y cambios.
- ✓ Redibujar una representación de forma más transparente.
- ✓ Comunicar límites y conclusiones.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 6 · Gráficas que pueden engañar

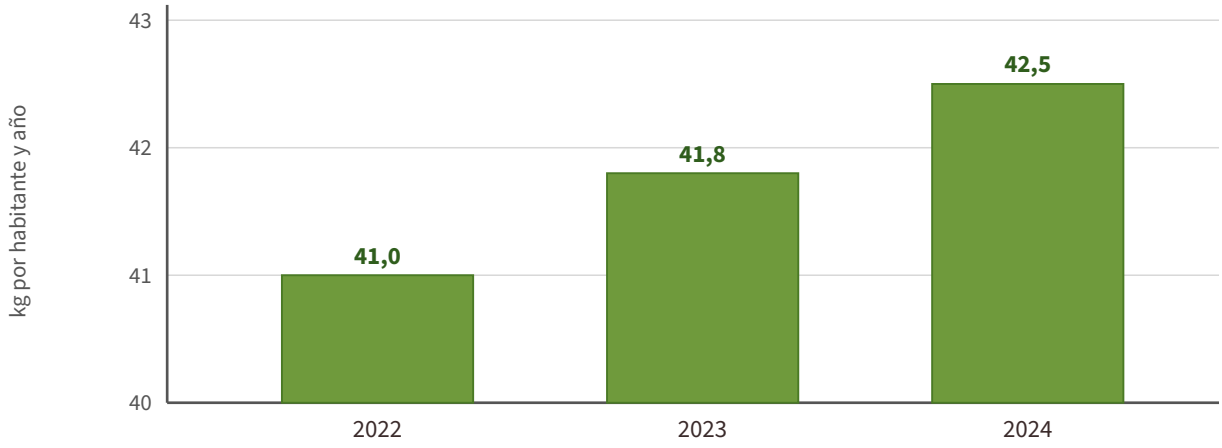
ALUMNADO

Una galería de gráficos públicos ficticios del ayuntamiento de Valdeverde (barras con eje truncado, pictograma, titulares con porcentajes, acumulado, doble eje, eje horizontal irregular y sectores que suman 105 %), una lista de verificación y las fórmulas necesarias. Todos los datos son ficticios.

F1 Reciclaje de vidrio en Valdeverde

ESQUEMA

¡El reciclaje de vidrio se dispara en Valdeverde!



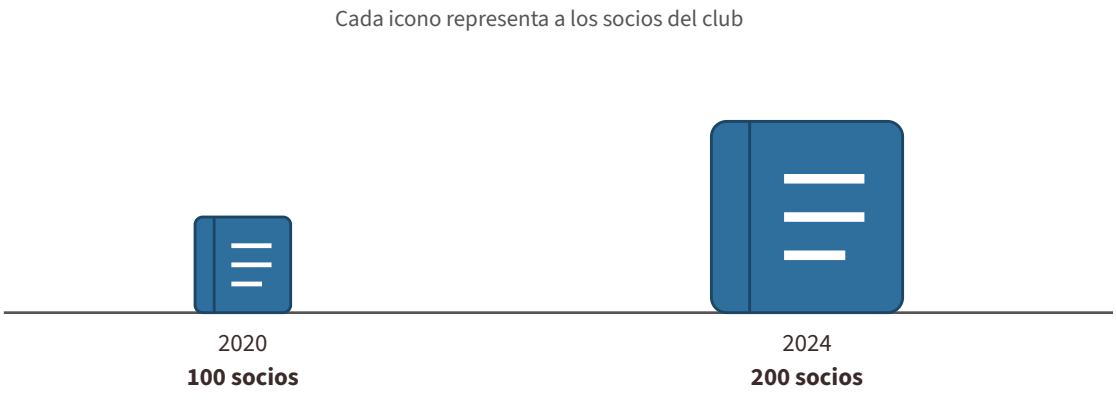
Fuente: Gráfico ficticio creado para el aula. Datos inventados.

Fíjate en el número donde empieza el eje vertical. ¿Cuánto mide la barra de 2024 comparada con la de 2022?

F2 El club de lectura

ESQUEMA

¡El club de lectura se multiplica!



Fuente: Gráfico ficticio creado para el aula. Datos inventados.

El icono de 2024 tiene el doble de ancho y el doble de alto que el de 2020. ¿Es esa la forma justa de mostrar «el doble»?

F3 Titulares con porcentajes

DATOS

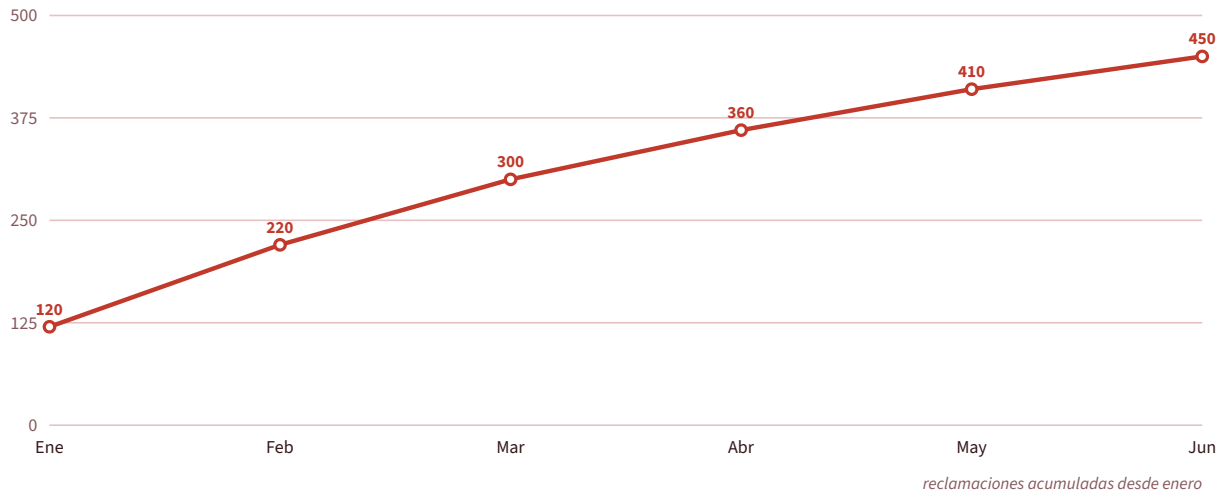
Titular	Datos que daba la nota de prensa
H1. «¡La participación en el taller de robótica se dispara un 300 %!»	Pasó de 2 a 8 participantes.
H2. «¡Los robos en el barrio bajan un 50 %!»	Pasaron de 4 a 2 robos en un año.
H3. «El abono de autobús sube un 20 % y luego baja un 20 %: queda igual que antes»	Precio inicial: 100 €.
H4. «El 60 % de los vecinos apoya la obra de la plaza»	Se preguntó a 5 vecinos en una cafetería: 3 dijeron que sí.

Fuente: Titulares y datos ficticios creados para el aula.

¿Sobre qué cantidad se calcula cada porcentaje? ¿Qué información falta en cada titular?

F4 «Las reclamaciones no paran de crecer»

GRÁFICO



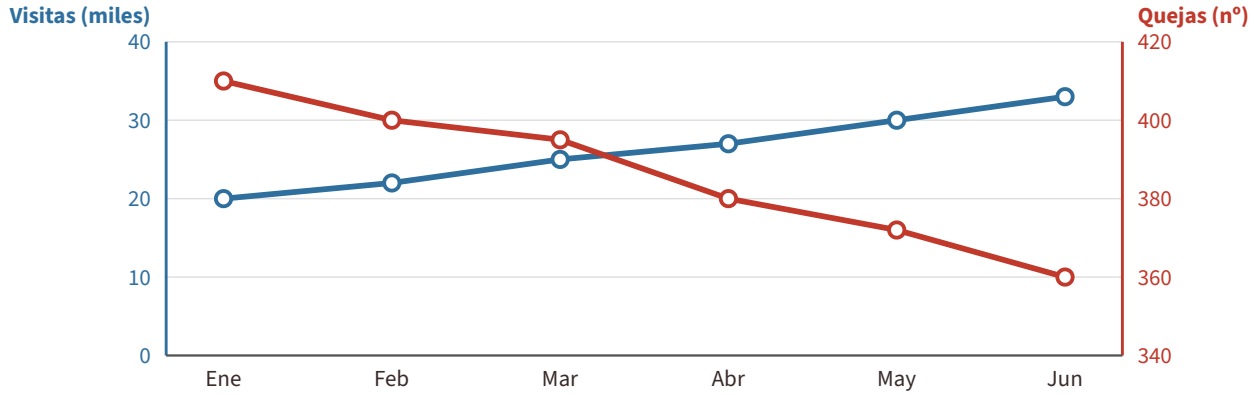
Fuente: Gráfico ficticio creado para el aula. Reclamaciones acumuladas desde enero (datos inventados).

La línea siempre sube. ¿Quiere eso decir que cada mes hay más reclamaciones que el mes anterior?

F5 Dos ejes verticales

ESQUEMA

Más visitas a la web, menos quejas: ¡la web funciona!



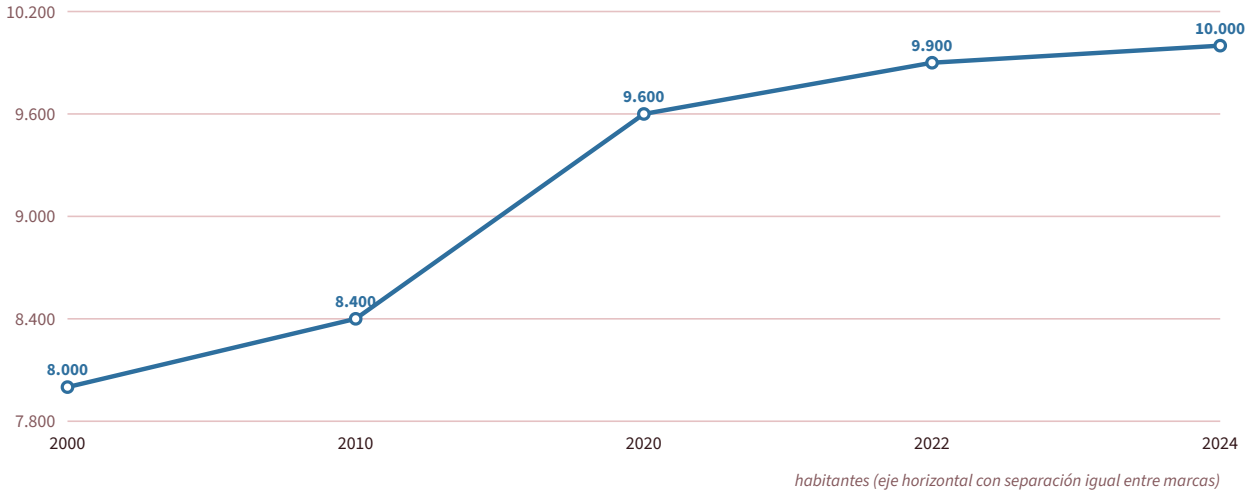
	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
Visitas (miles)	20	22	25	27	30	33
Quejas (nº)	410	400	395	380	372	360

Fuente: Gráfico ficticio creado para el aula. Datos inventados.

Cada serie se lee en un eje distinto (izquierda: visitas; derecha: quejas). Observa dónde empieza cada eje y por qué las líneas se cruzan.

F6 Habitantes de Valdeverde

GRÁFICO



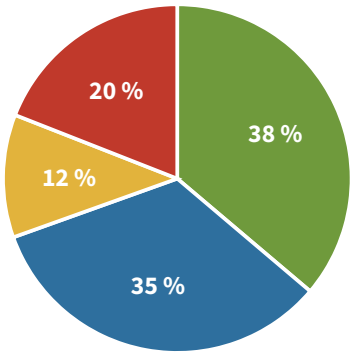
Fuente: Gráfico ficticio creado para el aula. Datos inventados. Los años del eje no están a la misma distancia.

Entre 2000 y 2010 pasan 10 años; entre 2020 y 2022, solo 2. ¿Se ve esa diferencia en el eje?

F7 Movilidad al instituto

ESQUEMA

¿Cómo venimos al instituto? Encuesta de movilidad



- A pie: 38 %
- Autobús: 35 %
- Bici: 12 %
- Coche: 20 %

Encuesta a 200 alumnos y alumnas del instituto ficticio.

Fuente: Gráfico ficticio creado para el aula. Datos inventados.

Suma los cuatro porcentajes. ¿Cuánto debería dar el total en un gráfico de sectores?

F8 Lista de verificación de la Oficina de Datos

PROTOCOLO

- **1. Titular:** ¿qué quiere que pienses? ¿Lo dicen los datos?
- **2. Origen del eje vertical:** ¿empieza en 0? Si no, ¿cuánto cambia la impresión?
- **3. Escala:** ¿las marcas están a la misma distancia? ¿Los años o categorías están bien separados?
- **4. Tamaño de las figuras:** si la figura crece en largo y alto, ¿cómo crece el área?
- **5. Porcentajes:** ¿de qué cantidad se calculan? ¿Cuántos casos hay en realidad?
- **6. Total o por periodo:** ¿es un acumulado? ¿Qué dice cada periodo por separado?
- **7. Dos ejes:** ¿se podría llegar a la imagen contraria cambiando una escala?
- **8. Datos que faltan:** fuente, unidad, año, tamaño y selección de la muestra.
- **9. Suma de partes:** ¿los sectores suman 100 %?
- **10. Causa y coincidencia:** ¿dos series que se mueven juntas prueban que una causa la otra?

Fuente: Elaboración propia.

F9 Fórmulas clave y ejemplo resuelto

TEXTO

- **Variación porcentual:** $\text{variación} = \dfrac{\text{valor final} - \text{valor inicial}}{\text{valor inicial}} \cdot 100$. El denominador es siempre la **base**, el valor inicial.
- **Índice de variación:** aumentar un $p\,\%$ equivale a multiplicar por $1 + \frac{p}{100}$; disminuir un $p\,\%$, por $1 - \frac{p}{100}$. Los cambios sucesivos se **multiplican**, no se suman.
- **Índice base 100:** $I_t = \dfrac{\text{valor}_t}{\text{valor}_0} \cdot 100$. Permite comparar series con unidades distintas en el mismo eje.
- **Semejanza:** si el lado se multiplica por k, el perímetro se multiplica por k y el **área por** k^2.
- **Acumulado:** el valor de un periodo es la **diferencia** entre dos acumulados consecutivos.
- **Pendiente** entre dos puntos: $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, el ritmo de cambio por unidad del eje horizontal.

Ejemplo. Un precio de 50 € sube a 65 €. Variación: $\frac{65-50}{50} \cdot 100 = 30\,\%$. Si luego baja un 30 %, no vuelve a 50 €: $65 \cdot 0{,}70 = 45{,}50$ €.

Fuente: Elaboración propia.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 6 · Gráficas que pueden engañar

ALUMNADO

FICHA 1 Galería de gráficos dudosos

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Observa F1, F2, F4, F5 y F6 con ojo crítico. No hace falta calcular todavía.

1 Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.

Un precio pasa de 50 € a 75 €. Ha subido un…

☐ 25 % ☐ 50 % ☐ 150 %

Si el eje vertical de un gráfico de barras empieza en 40 en lugar de en 0, las barras…

☐ siguen siendo proporcionales a los datos ☐ dejan de ser proporcionales a los datos ☐ no cambian de altura

Una gráfica acumulada que siempre sube indica que…

☐ el valor de cada periodo siempre sube ☐ el total nunca puede bajar, aunque cada periodo sea menor que el anterior

☐ los datos son falsos

2 Primera lectura de la galería.

Gráfico	Mensaje que quiere transmitir	Mi primera sospecha
F1 · Reciclaje de vidrio		
F2 · Club de lectura		
F4 · Reclamaciones		
F5 · Visitas y quejas		
F6 · Habitantes		

3 Relaciona cada recurso gráfico con el efecto que produce.

1	Eje vertical que no empieza en 0	●	**a** Aunque el valor de cada mes baje, la línea sube
2	Iconos más grandes en largo y en alto	●	**b** Una diferencia pequeña parece enorme
3	Porcentaje sin decir de qué cantidad	●	**c** Ritmos de cambio distintos parecen iguales
4	Gráfico acumulado	●	**d** Un cambio de solo 2 casos parece gigante
5	Dos ejes verticales con escalas distintas	●	**e** Dos series parecen cruzarse o estar relacionadas
6	Años no equidistantes con marcas equiespaciadas	●	**f** Un aumento del 100 % parece del 300 %

4 **Un gráfico engañoso, ¿tiene siempre datos falsos? Explícalo con un ejemplo de la galería.**

FICHA 2 Ejes truncados y escalas

Sesión 2

Usa F1, F2, F6 y las fórmulas de F9.

1 **En F1 el eje empieza en 40. Completa la tabla (altura visible = valor − 40).**

Año	Valor real (kg/hab.)	Altura visible de la barra
2022	41,0	
2023	41,8	
2024	42,5	

2 **Completa con tus cálculos.**

La barra de 2024 parece _____ veces la de 2022 (un aumento aparente del _____ %). El dato real solo es _____ veces mayor: un aumento del _____ %. El gráfico exagera unas _____ veces.

3 **En F2 el icono de 2024 tiene el doble de largo y el doble de alto que el de 2020. ¿Cuántas veces mayor es su área? ¿Qué aumento % de socios aparenta por el área? ¿Cuál es el real? ¿Cómo lo dibujarías?**

4 **En F6 los años no están igual de separados. Completa y decide en qué tramo crece más rápido la población.**

Tramo	Variación (habitantes)	Años	Habitantes por año
2000–2010			
2010–2020			
2020–2022			
2022–2024			

FICHA 3 Porcentajes sin base

Sesión 3

Usa F3, F7 y F9. Escribe siempre la base de cada porcentaje.

1 **Analiza los titulares de F3.**

Titular	Valor inicial	Valor final	Variación absoluta	Variación %	¿Qué falta o engaña?
H1					
H2					
H3 (100 → ? → ?)					

2 **Un producto cuesta 80 €. Calcula el precio final en cada caso y compara.**

Situación	Cálculo con índices	Precio final
Sube un 25 % y luego baja un 20 %		
Baja un 20 % y luego sube un 20 %		

3 **Una bajada del 30 %, ¿qué subida necesita para recuperar el valor inicial? Razónalo con una base 100.**

4 **En H4 se afirma «el 60 % apoya la obra». ¿Qué problemas tiene? Y en F7, ¿qué ocurre con los porcentajes?**

FICHA 4 Acumulados y doble eje

Sesión 4

Usa F4, F5 y F9.

1 **A partir del acumulado de F4 calcula las reclamaciones de cada mes.**

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
Acumuladas	120	220	300	360	410	450
De cada mes						

2 ¿Qué ha pasado de verdad con las reclamaciones mensuales entre enero y junio? Calcula la variación porcentual y redacta un titular honesto.

3 Con los datos de F5 completa la tabla.

Serie	Valor en enero	Valor en junio	Variación absoluta	Variación %
Visitas (miles)				
Quejas (nº)				

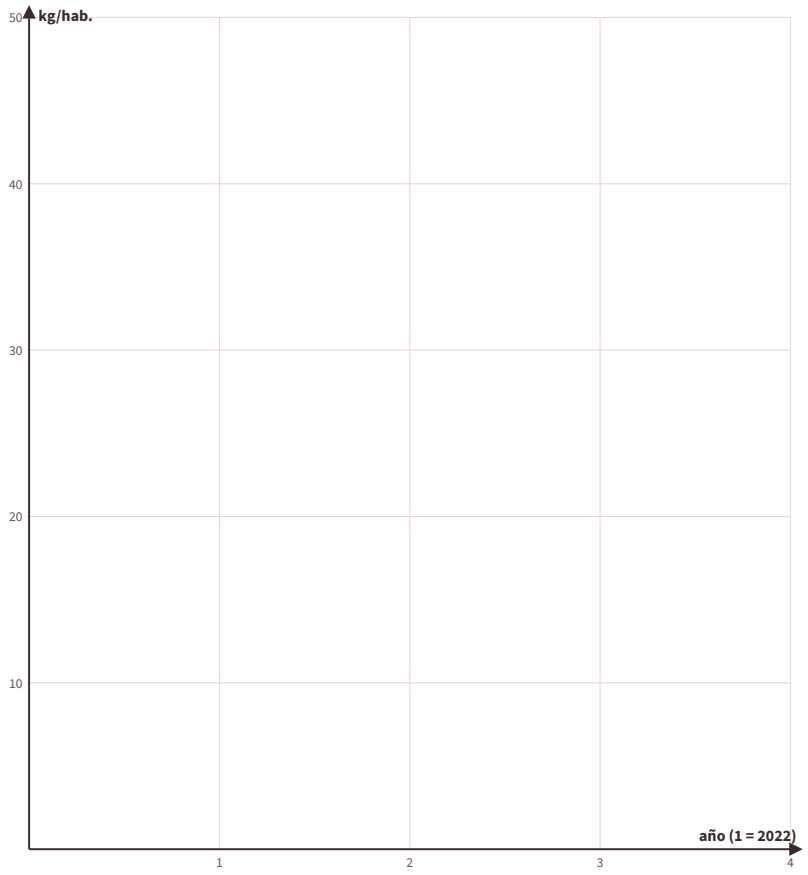
4 F5 dice: «Más visitas, menos quejas: ¡la web funciona!». Indica dos razones matemáticas por las que el gráfico exagera y una razón por la que no prueba que una cosa cause la otra.

FICHA 5 Reconstrucción de gráficos

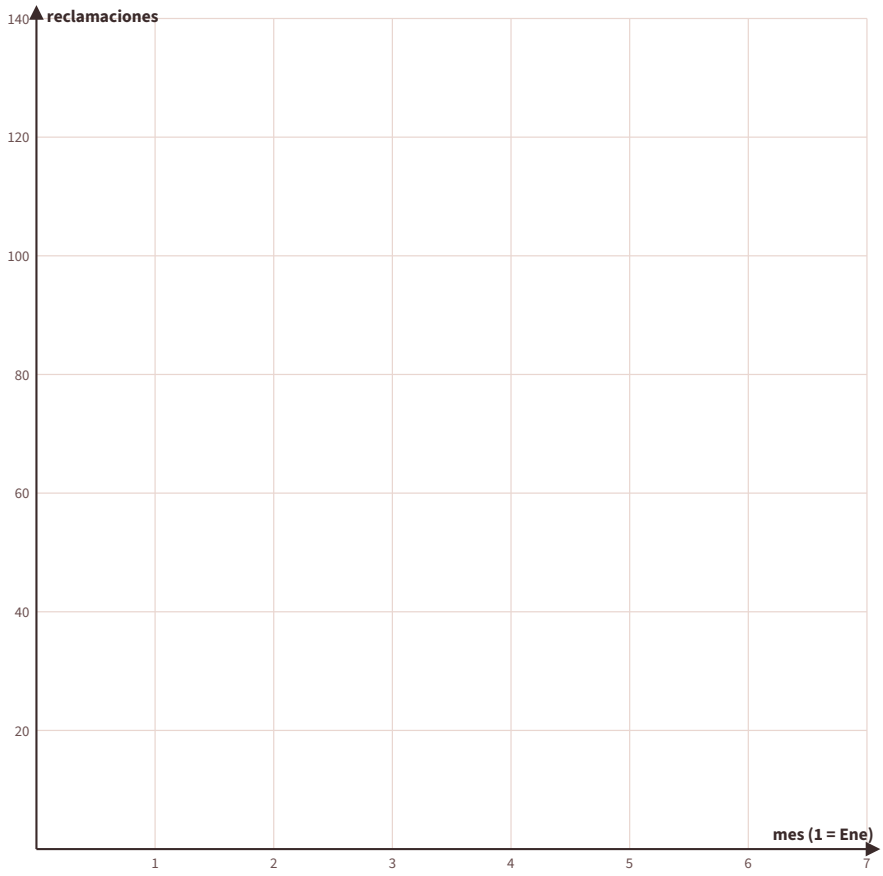
Sesión 5

Dibuja con regla. Cada gráfico debe tener título, ejes rotulados con unidades y fuente.

1 **Dibuja el gráfico de barras de F1 con el eje vertical empezando en 0. Escribe tu titular honesto debajo.**

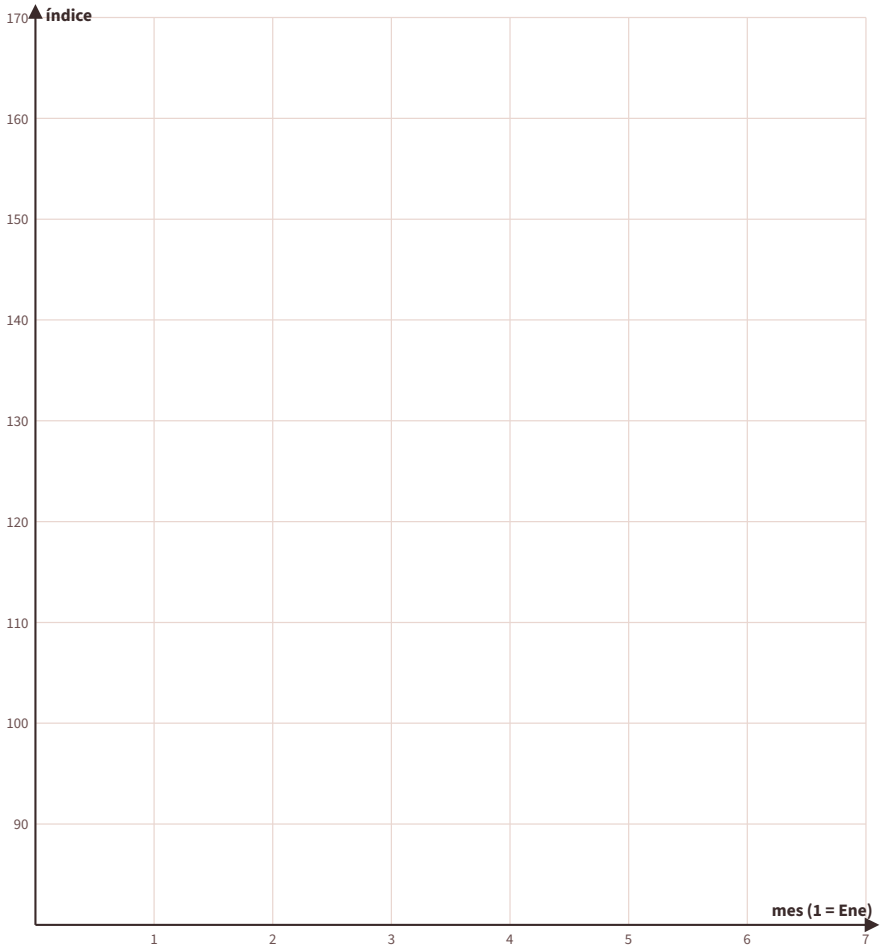


2 Dibuja las reclamaciones **de cada mes** de F4 como barras y compara con el gráfico acumulado.



3 Calcula los índices base 100 de F5 (visitas y quejas, enero = 100) y dibuja las dos series en un mismo eje.

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
Índice visitas						
Índice quejas						



FICHA 6 Auditoría por equipos

Sesión 6

Elegid tres gráficos de F1 a F7. Roles: auditor, calculista, dibujante y portavoz.

1 Tabla de auditoría.

Gráfico	Problema (nº de F8)	Prueba matemática	Cómo lo corregimos

2 **Veredicto por gráfico: marca con una X y justifica en una frase.**

Gráfico	Fiable	Mejorable	Engañoso	Justificación
1				
2				
3				

3 **Revisión cruzada: otro equipo comprueba vuestros cálculos.**

- [ ] Las variaciones porcentuales usan la base correcta
- [ ] Se ha calculado cuánto exagera cada gráfico o por qué no prueba lo que dice
- [ ] Hay una propuesta de gráfico honesto
- [ ] Las conclusiones no acusan a nadie, describen el dato

FICHA 7 Informe y defensa individual

Sesión 7

Resuelve sin ayuda del equipo. Puedes usar calculadora.

1 **La cantina anuncia: «¡Las ventas de bocadillos se duplican!». El gráfico de barras tiene el eje vertical empezando en 4 800: en 2023 vendió 5 000 bocadillos y en 2024, 5 250. Calcula las alturas visibles, cuántas veces mayor parece la barra de 2024 y la variación porcentual real.**

2 **Un titular dice: «Los accidentes en patinete bajan un 25 %». Los datos son: de 4 a 3 accidentes. ¿Es correcto el porcentaje? ¿Es engañoso? Reescríbelo con honestidad.**

3 **Redacta un veredicto de 4-5 líneas con tres argumentos matemáticos y una propuesta de gráfico mejor.**

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 6 · Gráficas que pueden engañar

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Informe de auditoría de un gráfico público ficticio: qué dice, qué prueba, cuánto exagera y cómo se dibujaría con honestidad.

Título y equipo

Gráfico auditado

Fuente, titular y descripción (ejes, escala, datos).

Hallazgos de la lista F8

Números de la lista y qué se ha detectado.

Pruebas matemáticas

Alturas visibles, razón de áreas, variaciones porcentuales con base, valores por periodo.

Gráfico reconstruido

Con ejes rotulados, escala honesta y titular.

Veredicto y recomendación

Fiable / mejorable / engañoso y por qué.

Límites y perspectivas

Qué no sabemos y qué diría quien lo publicó.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 6 · Gráficas que pueden engañar

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Auditoría matemática de gráficos públicos ficticios**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] Se indica el titular del gráfico y qué pretende que pensemos.
- [ ] Se identifica el origen del eje y se calcula la altura visible o la escala usada.
- [ ] Se calcula cuánto exagera el gráfico comparando el cambio visual con el real.
- [ ] Los porcentajes se calculan con la base correcta y se indican valores absolutos.
- [ ] Se distingue entre valores acumulados y valores por periodo cuando procede.
- [ ] Se propone un gráfico honesto con ejes rotulados, unidades, escala y fuente.
- [ ] El veredicto está justificado con al menos tres pruebas matemáticas.
- [ ] El lenguaje es respetuoso: se critica la representación, no a las personas.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 6 · Gráficas que pueden engañar

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Auditoría matemática de gráficos públicos ficticios**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 6 · Gráficas que pueden engañar

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé calcular una variación porcentual con su base y detectar cuándo un porcentaje engaña.	○	○	○	○
Sé redibujar un gráfico de forma honesta y explicar por qué el original exagera.	○	○	○	○
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	○	○	○	○
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	○	○	○	○
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	○	○	○	○
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	○	○	○	○

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 6 · Gráficas que pueden engañar

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Comparaciones con dos barras y escalas simples: aprende a mirar siempre dónde empieza el eje.

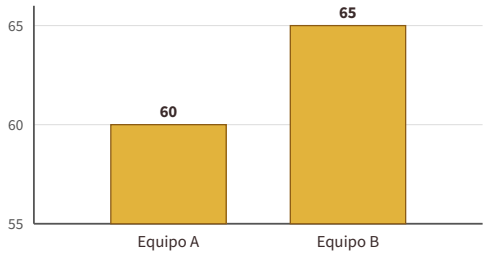
Ejemplo modelado

Dos barras valen 60 y 65 y el eje empieza en 55. Alturas visibles: $60 - 55 = 5$ y $65 - 55 = 10$: la segunda parece **el doble**. Pero $\frac{65}{60} = 1{,}083$: solo es un 8,3 % mayor. Con el eje empezando en 0, las barras serían casi iguales.

Glosario y símbolos

Origen del eje: valor donde empieza. **Altura visible:** valor − origen. **Razón:** cociente entre dos valores. **Variación porcentual:** $\frac{\text{final} - \text{inicial}}{\text{inicial}} \cdot 100$. **Base:** el valor inicial.

1 **Observa el gráfico: dos equipos han marcado 60 y 65 puntos. Completa la tabla.**

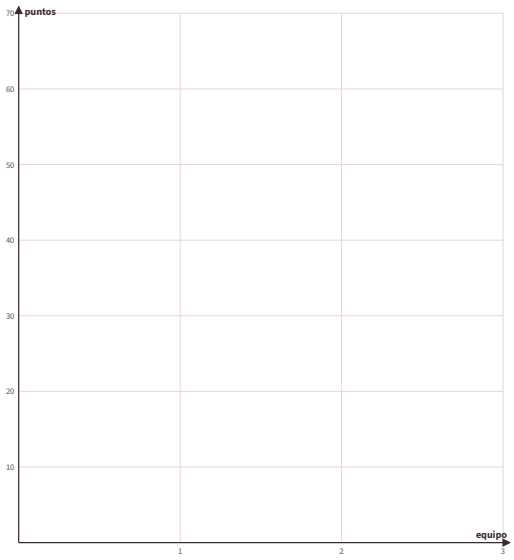


	Equipo A	Equipo B
Valor real		
Altura visible (valor − 55)		
Razón visible B / A		
Razón real B / A		

2 **Completa: el equipo B parece ___ veces mejor, pero su resultado solo es un ___ % mayor.**

Parece _____ veces mejor, pero solo es un _____ % mayor.

3 **Dibuja las dos barras con el eje empezando en 0 (1 cuadrito = 10 puntos) y escribe una frase honesta.**



ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 6 · Gráficas que pueden engañar

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Dos gráficos, mismos datos: el honesto y el persuasivo

Cada equipo recibe los mismos datos y tiene que producir dos gráficos distintos: uno transparente y otro que persuada sin falsear ningún número. Después, vuestro compañero de otro equipo tendrá que averiguar qué trucos habéis usado y cuánto exageran.

Pasos

1. Datos: ventas mensuales de un nuevo bocadillo vegetal en la cantina (ficticios): 180, 190, 200, 210, 215, 225.
2. Dibuja el gráfico honesto y calcula la variación porcentual entre el primer y el último mes.
3. Dibuja el gráfico persuasivo usando solo recursos de F8 (eje, escala, acumulado, porcentajes) y explica cada decisión.
4. Calcula cuántas veces exagera tu gráfico persuasivo y escribe una regla general: cómo cambia la exageración cuando el eje empieza en a en lugar de 0.

1 **Tabla de comparación.**

	Gráfico honesto	Gráfico persuasivo
Origen del eje		
Altura visible primer mes / último mes		
Impresión que da		
Cuánto exagera		

Entrega

Los dos gráficos, el cálculo de la exageración y la regla general escrita con tus palabras y con una fórmula.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 6 · Gráficas que pueden engañar

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: 50 % ($\frac{75-50}{50} = 0{,}5$); dejan de ser proporcionales a los datos; el total nunca puede bajar aunque cada periodo sea menor.
2. Sospechas esperables: F1 eje que empieza en 40; F2 iconos de doble tamaño en las dos dimensiones; F4 acumulado; F5 dos escalas distintas; F6 años no equidistantes.
3. Relación: 1 → b (diferencia pequeña parece enorme); 2 → f (100 % parece 300 %); 3 → d (2 casos parecen gigante); 4 → a (el acumulado sube aunque el mes baje); 5 → e (series que parecen cruzarse); 6 → c (ritmos distintos parecen iguales).
4. No: los datos pueden ser correctos y la presentación engañosa (por ejemplo, F1: 41; 41,8; 42,5 son datos válidos, pero el eje truncado exagera).

Ficha 2

1. Alturas visibles: 2022, 1,0; 2023, 1,8; 2024, 2,5.
2. Parece 2,5 veces la de 2022 (aumento aparente del 150 %). Real: $\frac{42{,}5}{41} \approx 1{,}037$, es decir, un aumento del $\approx 3{,}7\,\%$. Exagera unas $\frac{150}{3{,}66} \approx 41$ veces.
3. Área: $2^2 = 4$ veces mayor, aparenta un aumento del 300 %. Real: de 100 a 200 socios, +100 %. Honesto: dibujar dos iconos iguales (o 1 icono y 2 iconos iguales) para que el área sea proporcional al dato.
4. 2000–2010: $+400$ en 10 años, 40 hab./año. 2010–2020: $+1200$ en 10 años, 120 hab./año. 2020–2022: $+300$ en 2 años, 150 hab./año. 2022–2024: $+100$ en 2 años, 50 hab./año. Más rápido: 2020–2022. Con marcas equiespaciadas, el tramo 2010–2020 parece el de mayor pendiente y 2020–2022 aparenta un crecimiento similar o menor.

Ficha 3

1. H1: 2 → 8, +6 participantes, $\frac{8-2}{2} \cdot 100 = 300\,\%$ (correcto, pero con base muy pequeña: faltan los valores absolutos). H2: 4 → 2, −2 robos, −50 % (con 4 casos, un cambio de 2 es azar normal). H3: 100 → 120 → 96: variación total −4 %, no «queda igual»: $1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96$.
2. Sube 25 % y baja 20 %: $80 \cdot 1{,}25 \cdot 0{,}8 = 80$ € (igual: $1{,}25 \cdot 0{,}8 = 1$). Baja 20 % y sube 20 %: $80 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}2 = 76{,}80$ € (−4 %).
3. Base 100 → 70; para volver a 100 hay que subir 30 sobre 70: $\frac{30}{70} \approx 42{,}9\,\%$ (índice $\frac{1}{0{,}7} \approx 1{,}4286$).
4. H4: muestra de 5 personas en una cafetería (no representativa); 60 % con 5 casos es 3 personas; falta el margen de error. F7: $38 + 35 + 12 + 20 = 105\,\%$: no puede ser un reparto de un total; quizá había respuesta múltiple o hay un error.

Ficha 4

1. Mensuales: 120, 100, 80, 60, 50, 40 (diferencias de los acumulados).
2. De enero a junio: $\frac{40-120}{120} \cdot 100 \approx -66{,}7\,\%$. Titular honesto: «Las reclamaciones mensuales han bajado a un tercio entre enero y junio».
3. Visitas: 20 → 33, +13 mil, $+65\,\%$. Quejas: 410 → 360, −50, $\approx -12{,}2\,\%$.
4. Razones: el eje izquierdo empieza en 0 y el derecho en 340, de modo que la bajada del 12 % ocupa casi la mitad del gráfico; las líneas parecen cruzarse por la elección de escalas; con índices base 100 las curvas serían 165 y 87,8. Causalidad: que dos series se muevan a la vez no prueba que una cause la otra (puede haber otros factores, como una campaña de limpieza).

Ficha 5

1. Barras desde 0: alturas 41; 41,8; 42,5 casi iguales; titular posible: «El reciclaje de vidrio sube un 3,7 % en dos años».
2. Barras mensuales: 120, 100, 80, 60, 50, 40 (decreciente).
3. Índices: visitas 100; 110; 125; 135; 150; 165. Quejas 100; 97,6; 96,3; 92,7; 90,7; 87,8. Ambas series en el mismo eje: las visitas suben 65 puntos y las quejas bajan 12,2 puntos.

Ficha 6

1. Respuesta abierta: cada fila debe citar un número de F8, una prueba concreta (por ejemplo: altura visible 2,5 veces vs +3,7 %; área ×4; 105 %; ritmos 40 → 150 hab./año) y una corrección.
2. Se valora que el veredicto sea coherente con las pruebas: F1, F2, F5 y F6 engañosos o mejorables; F4 engañoso por acumulado; F7 incorrecto porque suma 105 %.
3. Revisión cruzada: se comprueba que cada cálculo es repetible.

Ficha 7

1. Alturas visibles: 2023: $5000 - 4800 = 200$; 2024: $5250 - 4800 = 450$. Parece $\frac{450}{200} = 2{,}25$ veces mayor (aumento aparente del 125 %). Real: $\frac{5250-5000}{5000} = 5\,\%$. Exagera unas 25 veces.
2. El porcentaje es correcto (−1 sobre 4 = −25 %), pero engañoso por la base minúscula: pasar de 4 a 3 accidentes es 1 accidente menos. Honesto: «Ha habido un accidente menos (de 4 a 3)».
3. Respuesta abierta. Debe incluir al menos tres argumentos matemáticos (origen del eje, variación porcentual con base, valores absolutos) y una propuesta de gráfico (barras desde 0, valores etiquetados, fuente).

Refuerzo

1. Alturas visibles: A, 5; B, 10. Razón visible: 2. Razón real: $\frac{65}{60} \approx 1{,}083$.
2. Parece 2 veces mejor, pero solo es un 8,3 % mayor.
3. Barras de 60 y 65 casi iguales; frase: «El equipo B ha marcado 5 puntos más (un 8,3 % más)».

Ampliación

1. Variación honesta: $\frac{225-180}{180} = 25\,\%$.
2. Ejemplo de gráfico persuasivo: eje empezando en 170: alturas visibles 10 y 55, aparentan ×5,5 (+450 %); exageración $\frac{450}{25} = 18$ veces.
3. Regla: si el eje empieza en a, el cociente aparente es $\frac{v_2-a}{v_1-a}$ y el real $\frac{v_2}{v_1}$; cuanto más cerca está a de v_1, más exagera. Se acepta cualquier regla bien justificada.

⚠ Errores frecuentes

- Calcular la variación porcentual dividiendo entre el valor final en lugar de entre el inicial.
- Sumar porcentajes sucesivos (+25 % −20 % = +5 %) en lugar de multiplicar índices.
- Creer que si el lado de un icono se duplica el área se duplica (se cuadruplica).
- Leer el acumulado como si fuera el valor del periodo.
- Concluir que dos series que se mueven juntas son causa y efecto.
- Dar un porcentaje sin los valores absolutos que lo originan.

⚖ Criterios para valorar respuestas abiertas

- Se acepta cualquier veredicto razonado y con pruebas calculadas; se valora la precisión del lenguaje (origen del eje, base, razón) más que el nivel de acusación.
- En los gráficos reconstruidos, se valora la escala uniforme, los ejes rotulados con unidades, el título y la fuente.
- Se puede usar hoja de cálculo para recalcular y dibujar; los cálculos de comprobación deben aparecer escritos.

07

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Diseñamos y medimos espacios

PREGUNTA GUÍA

¿Cómo combinamos medida, pendiente y geometría para que un diseño sea viable?

CURSO
4.º ESO · Matemáticas A

SESIONES
8 sesiones · 2.º-3.º trimestre

SENTIDOS PRIORITARIOS
B · Sentido de la medida · C · Sentido espacial

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE3, CE6, CE7, CE8

PRODUCTO FINAL
Proyecto geométrico de reforma ficticia

CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 1.2, 3.1, 6.1, 7.1, 8.1

Contexto, reto y sentido

La biblioteca del instituto (ficticio) se va a reformar: una sala de lectura en forma de L de 84 m², con una entrada que está **45 cm por encima de la calle**. El equipo de proyecto debe dibujar el plano a escala, diseñar una rampa de acceso que cumpla la normativa, calcular cuánto material hace falta y dentro de qué presupuesto, y colocar mobiliario y pavimento con un diseño simétrico. Si una sola medida falla, el proyecto no es viable: la geometría decide.

La situación moviliza el sentido de la medida y el espacial de 4.º ESO: escala y medidas reales, áreas de figuras compuestas, volumen de prismas, pendiente como razón (porcentaje) y como ángulo, y transformaciones en el plano (traslación, giro y simetría axial) con coordenadas, con un modelo digital opcional. El producto final es un proyecto geométrico de reforma ficticia: plano, memoria de cálculos, presupuesto y revisión de viabilidad. Todos los datos, precios y medidas son ficticios; la tabla de pendientes de rampas es un resumen del Código Técnico de la Edificación (DB-SUA).

Reto

Diseñar el proyecto de reforma de la sala de lectura: plano a escala 1:100, rampa de acceso con pendiente válida, presupuesto de materiales por debajo de 1 450 €, mobiliario con transformaciones del plano y revisión final de viabilidad.

Producto final

Proyecto geométrico de reforma ficticia.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- **1.1** Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.
- **1.2** Seleccionar herramientas y estrategias elaboradas valorando su eficacia e idoneidad en la resolución de problemas.
- **3.1** Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada estudiando patrones, propiedades y relaciones.
- **6.1** Proponer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.
- **7.1** Representar matemáticamente la información más relevante de un problema, conceptos, procedimientos y resultados, visualizando ideas y estructurando procesos.
- **8.1** Comunicar ideas, conclusiones, conjeturas y razonamientos matemáticos utilizando diferentes medios, con coherencia, claridad y terminología apropiada.

Saberes básicos prioritarios

B
Sentido de la medida

- Escala y medidas reales: conversión entre plano y realidad y relación entre razón de longitudes y razón de áreas (k y k^2).
- Áreas de figuras compuestas (rectángulos, trapecios, círculos) y volumen de prismas para calcular materiales.
- Pendiente como razón entre desnivel y longitud horizontal, expresada en porcentaje y en grados; ángulo con razones trigonométricas.
- Estimación, redondeo y cálculo de materiales con merma y unidades de venta.

C
Sentido espacial

- Representación de figuras y espacios en el plano con coordenadas y a escala.
- Transformaciones en el plano: traslación, giro y simetría axial; ejes y centros de simetría de un diseño y conservación de longitudes y áreas.
- Uso de herramientas digitales (GeoGebra) para construir, transformar y comprobar figuras.

F
Sentido socioafectivo

- Perseverancia al enfrentar restricciones que se contradicen y aceptación del error al revisar el proyecto.
- Toma de decisiones compartida con argumentos matemáticos.

Objetivos didácticos

- ✓ Modelizar un espacio mediante figuras geométricas.
- ✓ Calcular longitudes, áreas y pendientes en situaciones sencillas.
- ✓ Investigar transformaciones y propiedades con herramientas.
- ✓ Justificar precisión y decisiones de diseño.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Plano y restricciones

Evidencia: Ficha 1: diagnóstico, medidas tomadas en el plano de F1 y lista de restricciones del proyecto con la magnitud implicada.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Escala y medidas reales

Evidencia: Ficha 2: conversiones plano-realidad a 1:100, elección de escala para un folio A4, fotocopia al 150 % y superficie representada por 1 cm^2.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Pendiente como razón y ángulo en situaciones sencillas

Evidencia: Ficha 3: pendiente de una escalera y de una rampa, longitud mínima según el CTE, ángulo y longitud real de la rampa de 0,45 m de desnivel.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Áreas y materiales

Evidencia: Ficha 4: área de la sala en L, baldosas con merma, pintura, presupuesto y comprobación del límite de 1 450 €.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Transformaciones/simetrías en diseño

Evidencia: Ficha 5: simetrías de baldosas y de un pavimento, y coordenadas del módulo de mesas trasladado, reflejado y girado con comprobación de que cabe en la sala.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Modelo digital opcional

Evidencia: Ficha 6: construcción (digital o en papel) de las transformaciones, comprobación de que conservan longitudes y áreas y efecto de una ampliación de razón 2.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Proyecto final

Evidencia: Ficha 7: plano del equipo a 1:100 sobre cuadrícula, tabla de cálculos y transformaciones usadas en el diseño.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

8

SESIÓN 8

Revisión de viabilidad

Evidencia: Ficha 8: revisión de viabilidad del proyecto frente a las restricciones y reto individual de una rampa nueva.

Ficha: Anexo 3 · ficha 8

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Plano ficticio · regla · calculadora · GeoGebra opcional

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Planta rectangular y pendientes con razones simples.

Ampliación

Anexo 9

Optimizar superficie útil con una restricción geométrica adicional.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Reformulación del encargo: dibujo del plano con cotas, lista de restricciones y magnitudes que hay que calcular para cada una.	Fichas 1 y 7 / lista de cotejo
1.2	Elección y valoración de la estrategia de cálculo: descomposición de la planta en rectángulos, merma en materiales, combinación de botes de pintura de menor coste y elección de la longitud de rampa.	Fichas 3 y 4 / escala de valoración
3.1	Formulación y comprobación de conjeturas: las isometrías conservan longitudes y áreas, la ampliación de razón k multiplica el área por k^2 y la longitud mínima de rampa es desnivel entre pendiente.	Ficha 6 y Ficha 3 / rúbrica
6.1	Conexión del problema real (reforma de una sala) con herramientas geométricas: escala, áreas, volúmenes, pendientes y transformaciones.	Proyecto (Anexo 4) / rúbrica
7.1	Representación del plano a escala 1:100, de la vista lateral de la rampa y de las transformaciones en el plano de coordenadas con rótulos, cotas y unidades.	Fichas 5 y 7 y Anexo 4 / rúbrica

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
8.1	Memoria justificativa del proyecto: cálculos ordenados, uso de lenguaje geométrico (escala, razón, pendiente, simetría, traslación) y conclusión sobre la viabilidad.	Anexo 4 y Ficha 8 / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Proyecto, cálculos y memoria.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 7 · Diseñamos y medimos espacios

ALUMNADO

La biblioteca del instituto es oscura, y para entrar hay que subir tres escalones: con silla de ruedas, imposible. El ayuntamiento ha aprobado una reforma de 1 450 € como máximo y os pide un proyecto en toda regla: plano a escala, rampa que cumpla la norma, suelo nuevo con un diseño bonito y simétrico, pintura y una alfombra para el rincón de cuentacuentos. Un error de escala, de pendiente o de redondeo y los números no cuadran. Vais a ser el estudio de arquitectura del instituto: mediréis, calcularéis, transformaréis figuras en el plano y comprobaréis que vuestro diseño es viable antes de presentarlo.

> *¿Cómo combinamos medida, pendiente y geometría para que un diseño sea viable?*

Vuestro reto

Diseñar el proyecto de reforma de la sala de lectura: plano a escala 1:100, rampa de acceso con pendiente válida, presupuesto de materiales por debajo de 1 450 €, mobiliario con transformaciones del plano y revisión final de viabilidad.

Lo que vais a producir

Proyecto geométrico de reforma ficticia.

Hoja de ruta · 8 sesiones

1. Leemos el plano y listamos las restricciones del proyecto.
2. Convertimos medidas entre plano y realidad y elegimos escalas.
3. Calculamos pendientes y diseñamos la rampa de acceso.
4. Calculamos áreas, materiales y presupuesto.
5. Estudiamos simetrías y transformaciones en el diseño del suelo y del mobiliario.
6. Comprobamos las transformaciones con una herramienta digital o en papel.
7. Dibujamos el proyecto del equipo y su memoria de cálculos.
8. Revisamos la viabilidad y resolvemos un reto individual.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Modelizar un espacio mediante figuras geométricas.
- ✓ Calcular longitudes, áreas y pendientes en situaciones sencillas.
- ✓ Investigar transformaciones y propiedades con herramientas.
- ✓ Justificar precisión y decisiones de diseño.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

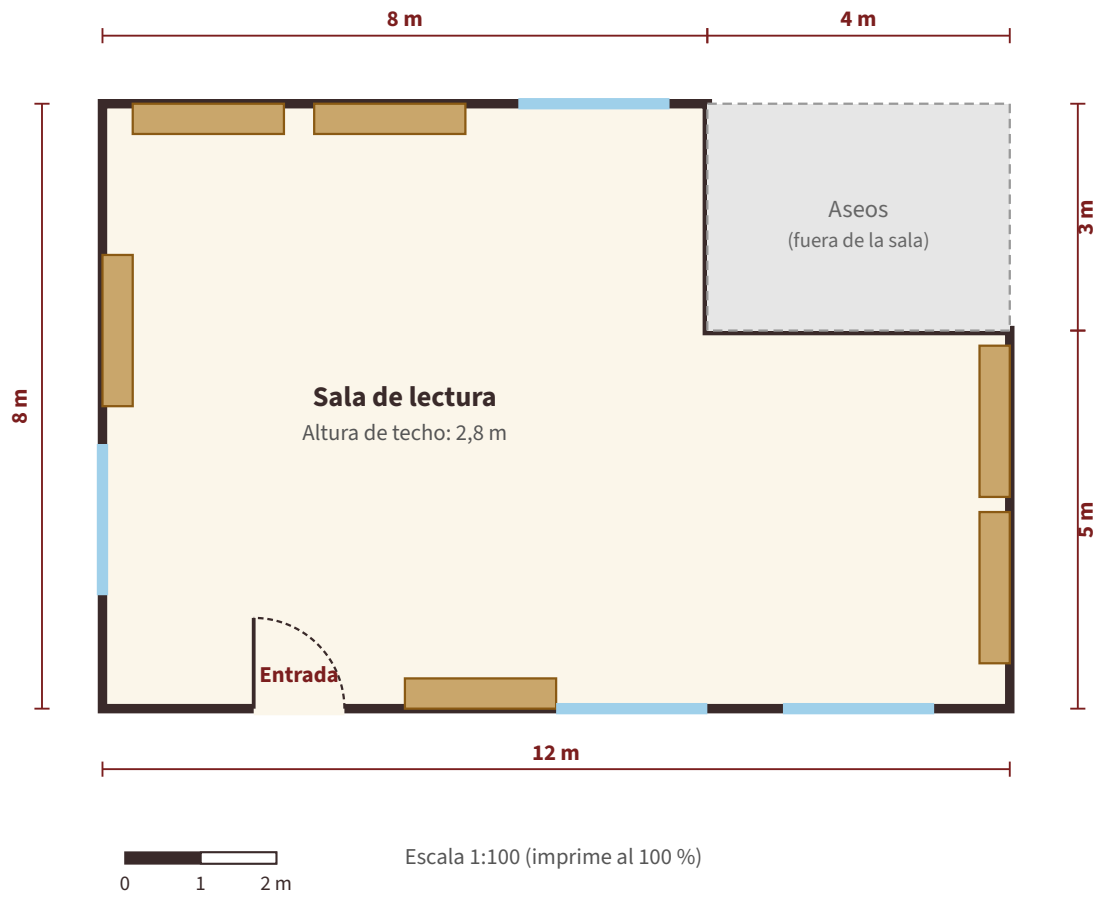
SdA 7 · Diseñamos y medimos espacios

ALUMNADO

Plano a escala 1:100 de la sala, encargo y restricciones, catálogo de materiales ficticio, vista lateral de la rampa con la tabla de pendientes del CTE, diseños de baldosas, plano de coordenadas para el mobiliario, fórmulas y glosario. Los datos y precios son ficticios.

F1 Plano de la sala de lectura (escala 1:100)

ESQUEMA



Fuente: Plano ficticio creado para el aula. Al imprimir al 100 %, 1 cm del plano representa 1 m de la realidad. Estanterías en marrón (2 m de largo y 0,4 m de ancho).

Mide con una regla el ancho y el largo de la sala en el plano y compara con las cotas. ¿Coinciden?

F2 Encargo y restricciones del proyecto

DATOS

Ref.	Restricción	Dato
R1	Superficie útil de la sala (suelo libre de estanterías y de módulos de trabajo)	Al menos 70 m²
R2	Rampa de acceso con pendiente permitida (F4)	Desnivel de 0,45 m; espacio exterior disponible de 7 m en línea recta
R3	Pavimento de baldosas de 50 cm × 50 cm con un diseño simétrico (al menos un eje de simetría)	Merma de corte: 10 %
R4	Presupuesto total de materiales	Máximo 1 450 €
R5	Plano del proyecto a escala 1:100 con cotas y memoria de cálculos	Entrega en el anexo 4

Mobiliario actual: 6 estanterías de $2 \times 0{,}4$ m (ya aparecen en F1). **Mobiliario nuevo:** módulos de trabajo en equipo con forma de trapecio isósceles (base mayor 3 m, base menor 1 m, altura 2 m); caben tantos como permita R1.

Fuente: Encargo ficticio creado para el aula.

Antes de seguir, ¿qué restricciones se pueden comprobar solo con áreas y cuáles necesitan otras herramientas?

F3 Catálogo de materiales

DATOS

Material	Presentación y precio	Dato útil
Baldosa 50 × 50 cm	Caja de 8 baldosas: 22 €	Cada caja cubre 2 m²
Pintura plástica	Bote de 15 L: 48 € · Bote de 5 L: 19 €	Rinde 8 m² por litro y por mano; se dan 2 manos
Hormigón para la rampa	95 € por m³	Se encarga en múltiplos de 0,1 m³
Alfombra circular	3 m de diámetro: 129 € · 4 m de diámetro: 199 €	Zona de cuentacuentos

Datos de la sala: altura del techo 2,8 m; la suma de la superficie de puerta y ventanas (huecos) es de 12 m².

Fuente: Precios y rendimientos ficticios inventados para el aula.

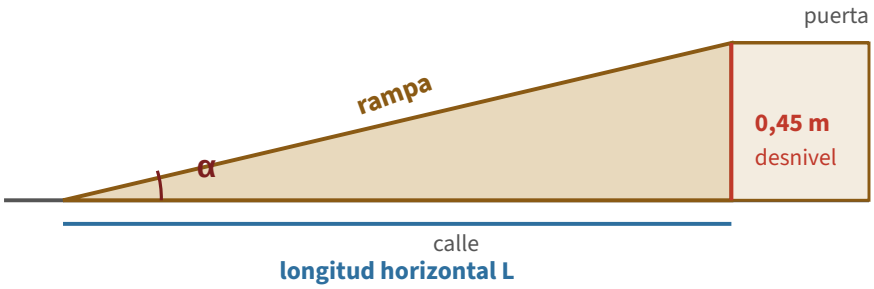
¿Qué materiales se venden en unidades enteras y obligan a redondear hacia arriba?

F4 La rampa: desnivel, longitud y pendiente

ESQUEMA

Vista lateral de la rampa (altura exagerada: el dibujo no está a escala)

pendiente = desnivel / L



Pendiente máxima según la longitud del tramo (L, medida en horizontal):

- $L < 3$ m: pendiente máxima del **10 %**.
- $3\ \text{m} \leq L < 6$ m: pendiente máxima del **8 %**.
- $L \geq 6$ m: pendiente máxima del **6 %**.
- Ningún tramo puede tener más de 9 m; para desniveles mayores se intercala una meseta.

Fuente: Esquema de elaboración propia. La tabla es un resumen simplificado del Código Técnico de la Edificación (DB-SUA, rampas de itinerarios accesibles); consulta siempre la normativa vigente.

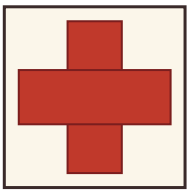
Una pendiente del 8 % significa que por cada 100 m recorridos en horizontal se sube 8 m. Ten en cuenta que la norma depende también de la longitud.

F5 Diseños de baldosas y de pavimento

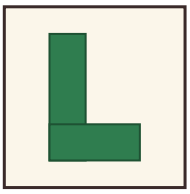
ESQUEMA



Baldosa A

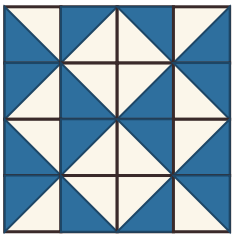


Baldosa B



Baldosa C

Pavimento D (4 × 4 baldosas A)



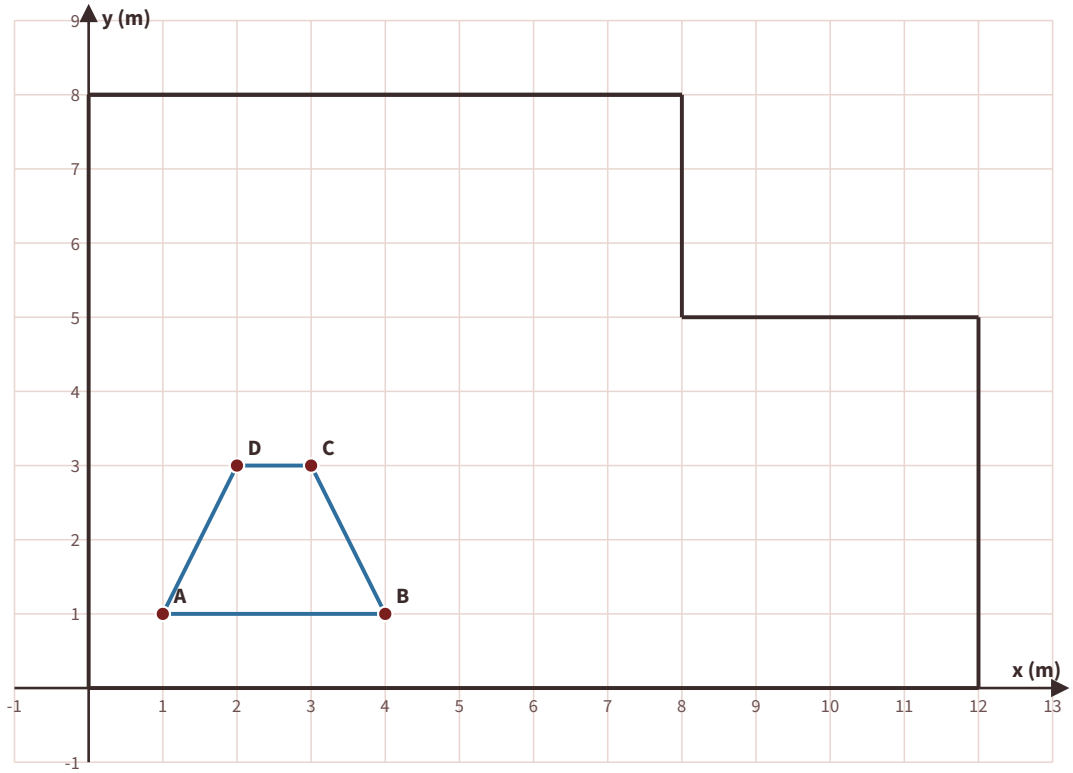
(cada baldosa mide 50 cm)

Fuente: Diseños de elaboración propia.

Busca ejes de simetría y giros que dejen cada diseño igual. ¿Cuál tiene más simetrías?

F6 Plano de coordenadas de la sala y módulo de trabajo

GRÁFICO



Fuente: Plano ficticio creado para el aula. Cada cuadro mide 1 m. El módulo de trabajo es el trapecio ABCD, con A(1, 1), B(4, 1), C(3, 3) y D(2, 3).

Comprueba que el módulo ABCD es un trapecio isósceles y calcula su área con la fórmula del trapecio.

F7 Fórmulas clave y ejemplo resuelto

TEXTO

- **Escala** $1 : E$: una longitud d en el plano representa $d \cdot E$ en la realidad. Si la longitud se multiplica por k, **el área se multiplica por** k^2.
- **Áreas:** rectángulo $b \cdot h$; trapecio $\frac{B+b}{2} \cdot h$; círculo πr^2. El **volumen** de un prisma es el área de la base por la altura.
- **Pendiente:** $p = \dfrac{\text{desnivel}}{\text{longitud horizontal}} \cdot 100\,\%$. Ángulo de inclinación: $\tan \alpha = \dfrac{\text{desnivel}}{\text{longitud horizontal}}$. Longitud real de la rampa: $\sqrt{L^2 + \text{desnivel}^2}$.
- **Transformaciones** (coordenadas): traslación de vector (a, b): $(x, y) \to (x + a,\ y + b)$; simetría respecto de la recta $x = c$: $(x, y) \to (2c - x,\ y)$; giro de 180° respecto de (a, b): $(x, y) \to (2a - x,\ 2b - y)$. Estas transformaciones conservan longitudes, ángulos y áreas.
- **Merma:** porcentaje extra de material por cortes y roturas.

Ejemplo resuelto. Una sala rectangular de 6 m × 4 m a escala 1:50 mide $\frac{600}{50} = 12$ cm × $\frac{400}{50} = 8$ cm. Su área es 24 m² y, con baldosas de 0,25 m² y un 10 % de merma, hacen falta $24 \cdot 1{,}10 = 26{,}4$ m², es decir, $\frac{26{,}4}{0{,}25} = 105{,}6 \to 106$ baldosas.

Fuente: Elaboración propia.

F8 Modelo digital con GeoGebra (opcional) o con papel

PROTOCOLO

- **1.** Abre GeoGebra Clásico o la versión web y activa la cuadrícula y los ejes. Marca los puntos $A(1,1)$, $B(4,1)$, $C(3,3)$ y $D(2,3)$ y crea el polígono con la herramienta *Polígono*.
- **2.** Dibuja la recta $x = 6$ y aplica *Simetría axial* al polígono. Anota las coordenadas de los vértices de la imagen.
- **3.** Crea el vector $(0;\ 3{,}5)$ y aplica *Traslación*. Después, con el punto $(6, 4)$, aplica *Rotación* de $180°$.
- **4.** Con la herramienta *Área* y *Distancia* comprueba el área del polígono y la longitud del lado AB y de su imagen.
- **5.** Con la herramienta *Homotecia* (razón 2, centro en el origen) amplía el módulo y compara áreas.
- **Sin ordenador:** usa papel cuadriculado con 1 cuadro = 1 m y calca el polígono para trasladarlo, doblar el papel por la recta $x = 6$ (simetría) o girar el calco con un alfiler en $(6, 4)$.

Fuente: Elaboración propia.

F9 Vocabulario del proyecto

GLOSARIO

Planta	Vista desde arriba de un espacio.
Escala	Razón entre una longitud del plano y la longitud real. 1:100 significa 1 cm en el plano por 100 cm reales.
Desnivel	Diferencia de altura entre dos puntos.
Pendiente	Razón entre el desnivel y la longitud horizontal; se suele dar en %.
Merma	Material que se pierde al cortar o por roturas.
Isometría	Transformación que conserva distancias: traslación, giro y simetría axial.
Eje de simetría	Recta que deja la figura igual al reflejarla.
Superficie útil	Superficie libre que se puede utilizar.

Fuente: Elaboración propia.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 7 · Diseñamos y medimos espacios

ALUMNADO

FICHA 1 Plano y restricciones

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Usa F1 y F2. Mide con regla sobre el plano impreso al 100 %.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

En un plano a escala 1:100, 5 cm representan…

☐ 5 cm ☐ 50 cm ☐ 5 m

El área de un rectángulo de 8 m × 5 m es…

☐ 13 m² ☐ 26 m² ☐ 40 m²

Una rampa que sube 0,5 m en 10 m horizontales tiene una pendiente de…

☐ 5 % ☐ 20 % ☐ 50 %

2 **Mide en el plano (F1) y completa la tabla con las medidas reales.**

Segmento	Medida en el plano (cm)	Medida real (m)
Pared norte		
Pared oeste		
Pared este		
Entrante: lado horizontal inferior		
Entrante: lado vertical		

3 **Lista de restricciones (F2): ¿qué magnitud intervendrá en cada una y cómo la comprobarás?**

Ref.	Magnitud implicada	Cómo lo comprobaré
R1		
R2		
R3		
R4		

4 **Primera estimación a ojo: ¿cuántos m² de suelo tiene la sala? ¿Cuántas baldosas crees que harán falta?**

FICHA 2 Escala y medidas reales

Sesión 2

Usa F1 y F7. Escribe siempre la unidad.

1 **Convierte entre plano y realidad a escala 1:100.**

Medida en el plano	Medida real	Medida real	Medida en el plano
7,5 cm		1,2 m (puerta)	
12 cm		8 m (pared oeste)	
0,4 cm		5,625 m (rampa)	

2 **Se quiere dibujar la planta completa (12 m × 8 m) en un folio A4 (29,7 cm × 21 cm) dejando 1 cm de margen. ¿Cuál es la escala más grande entre 1:20, 1:25, 1:50 y 1:100 que cabe? Razónalo.**

3 **Un plano a escala 1:100 se fotocopia al 150 %. ¿Cuánto mide ahora en la copia el lado de 12 m? ¿Qué escala tiene la copia?**

4 **¿Qué superficie real representa 1 cm² del plano a escala 1:100? ¿Y a escala 1:50? Justifica la relación con k^2.**

FICHA 3 Pendiente y rampa

Sesión 3

Usa F4 y F7. El desnivel que hay que salvar es de 0,45 m.

1 **Calcula la pendiente en porcentaje.**

Situación	Desnivel	Longitud horizontal	Pendiente
Peldaño de la escalera actual (contrahuella 15 cm, huella 30 cm)			
Rampa que sube 0,45 m en 9 m			
Rampa que sube 0,45 m en 3 m			

2 **¿Qué longitud horizontal necesita la rampa de 0,45 m con cada pendiente? Indica cuáles cumplen la norma (F4) y por qué.**

Pendiente elegida	Longitud horizontal L	¿Cumple la norma?
10 %		
8 %		
6 %		

3 **Elige la rampa que cabe en los 7 m disponibles. Calcula su ángulo de inclinación y su longitud real (sobre la pendiente).**

4 **Si la rampa se hiciera de 3 m de largo, ¿qué pendiente tendría y qué dice la norma? ¿Y si el desnivel fuera de 0,2 m?**

FICHA 4 Áreas y materiales

Sesión 4

Usa F1, F2 y F3. Redondea siempre hacia arriba cuando se compre por unidades.

1 **Calcula el área de la sala en L de dos formas distintas (descomponiendo en rectángulos y restando).**

2 **Calcula las baldosas y cajas necesarias, con merma, y su precio.**

Concepto	Cálculo	Resultado
Área con merma		
Cajas necesarias		
Coste del pavimento		

3 **Pintura: calcula el perímetro, la superficie de pared sin huecos y los litros para 2 manos. Elige la combinación de botes más barata.**

4 **Completa el presupuesto: pavimento, pintura, hormigón de la rampa (volumen del prisma triangular de ancho 1,2 m) y alfombra de 3 m. ¿Se cumple R4? ¿Y si se elige la alfombra de 4 m?**

Concepto	Cálculo	Coste (€)
Pavimento		
Pintura		
Hormigón		
Alfombra		
TOTAL		

FICHA 5 Simetrías y transformaciones

Sesión 5

Usa F5, F6 y F7.

1 Completa la tabla de simetrías de F5.

Diseño	Nº de ejes de simetría	¿Gira sobre sí mismo? (ángulo menor)
Baldosa A		
Baldosa B		
Baldosa C		
Pavimento D		

2 Calcula las coordenadas de las imágenes del módulo ABCD (F6) con las fórmulas de F7 y dibújalas en la cuadrícula de F6 (o en tu cuaderno).

Transformación	A'	B'	C'	D'
Simetría respecto de $x = 6$				
Traslación de vector $(0;\ 3{,}5)$				
Giro de 180° respecto de $(6, 4)$				

3 ¿Cuál de las tres imágenes **no** cabe en la sala (F6)? Indica qué vértice falla y por qué.

4 Superficie útil. Con 2 módulos de 4 m² y las 6 estanterías, ¿cumple R1? ¿Y con 3 módulos?

FICHA 6 Modelo digital (opcional) o en papel

Sesión 6

Sigue F8. Si no hay ordenadores, trabajad con papel cuadriculado y calco.

1 **Construye el módulo ABCD y su imagen por la simetría respecto de $x = 6$. Anota las coordenadas y comprueba con la herramienta de medida (o regla) los lados.**

Medida	Original	Imagen
Longitud AB (m)		
Longitud CD (m)		
Área (m²)		

2 **Conjetura. ¿Qué crees que ocurre con las longitudes y el área al hacer una simetría, una traslación o un giro? Justifícalo con tus mediciones.**

3 **Homotecia de razón 2 con centro en el origen: calcula el área del módulo ampliado y compárala con la original. Escribe la relación entre la razón de longitudes y la de áreas.**

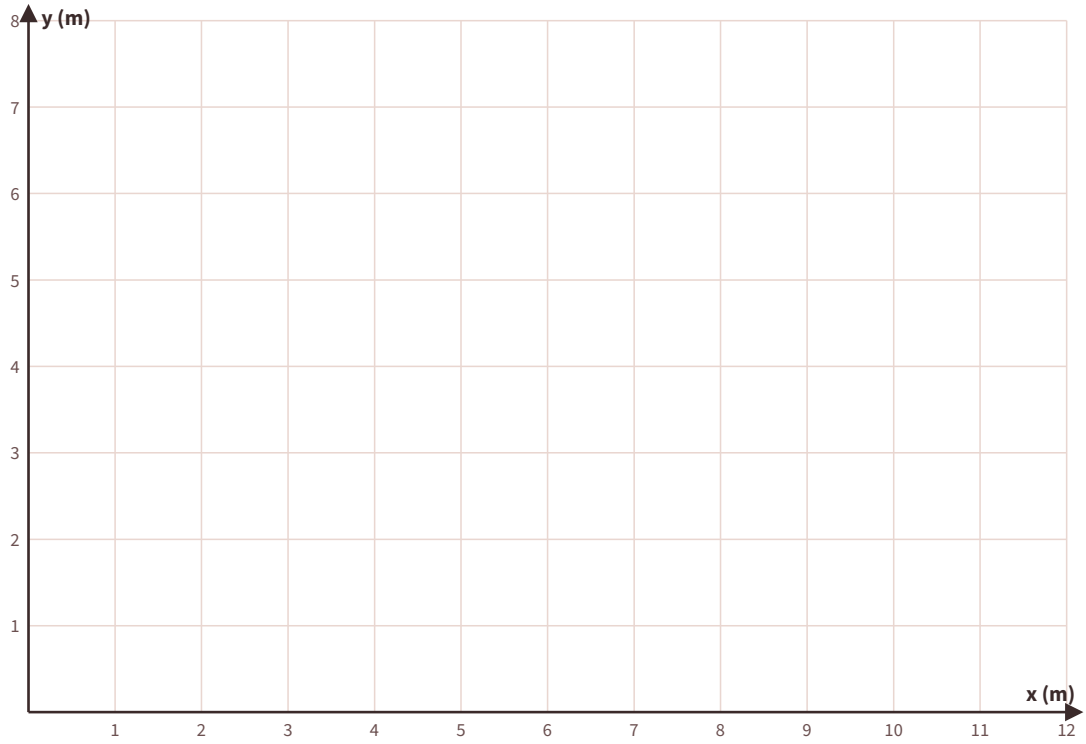
Razón k	Base mayor	Altura	Área	Área nueva / área original
1	3 m	2 m	4 m²	
2				
3				

FICHA 7 Proyecto final

Sesión 7

Trabajad en equipo con roles: dibujante, calculista, secretario/a y portavoz.

1 **Plano del proyecto (1 cuadro = 1 m): dibuja el contorno de la sala, la posición de los módulos (indica qué transformación usáis), las estanterías y la rampa.**



2 **Tabla de cálculos del proyecto.**

Magnitud	Cálculo	Resultado
Superficie útil (R1)		
Pendiente y longitud de la rampa (R2)		
Baldosas y cajas (R3)		
Presupuesto total (R4)		

3 **Describid el diseño del suelo y de los módulos: simetrías y transformaciones que usáis y por qué.**

FICHA 8 Revisión de viabilidad

Sesión 8

Revisad el proyecto con otro equipo y resuelve el reto individual sin ayuda.

1 **Revisión cruzada de R1 a R5.**

- [ ] R1: la superficie útil es de al menos 70 m² (con el cálculo escrito)
- [ ] R2: la pendiente y la longitud de la rampa cumplen F4 y caben en 7 m
- [ ] R3: el diseño del suelo es simétrico y las cajas incluyen la merma del 10 %
- [ ] R4: el total no supera los 1 450 € y los redondeos son hacia arriba
- [ ] R5: el plano está a escala 1:100 con cotas y la memoria es clara

2 **Reto individual. Otra sala tiene una entrada con 0,6 m de desnivel y solo 6 m de espacio en línea recta. ¿Es viable una rampa según F4? Calcula las pendientes necesarias y razona.**

3 **En un plano a escala 1:200, un salón mide 3 cm × 2 cm. Calcula sus dimensiones reales y su área real, y qué área ocupa en el plano.**

4 **Escribe una conclusión de 3 líneas: ¿qué parte de la geometría ha sido decisiva para saber si el proyecto es viable?**

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 7 · Diseñamos y medimos espacios

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Proyecto geométrico de reforma de la sala de lectura: plano, cálculos, transformaciones y viabilidad.

Título y equipo

Plano del proyecto a 1:100

Contorno, rampa, estanterías y módulos con cotas.

Rampa

Desnivel, pendiente, longitud, ángulo y vista lateral.

Transformaciones usadas

Coordenadas de originales e imágenes.

Cálculos y presupuesto

Superficie útil, baldosas, pintura, hormigón, alfombra y total.

Revisión de viabilidad

R1-R5 con ✓ o ✗.

Conclusión y mejoras

Decisión y qué cambiaríais.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 7 · Diseñamos y medimos espacios

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Proyecto geométrico de reforma ficticia**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] El plano está dibujado a escala 1:100 y tiene cotas con unidades.
- [ ] Se han convertido correctamente las medidas entre el plano y la realidad.
- [ ] La rampa tiene pendiente y longitud que cumplen la tabla de F4 y caben en el espacio disponible.
- [ ] El área de la sala en L está calculada y comprobada de dos maneras.
- [ ] Los materiales se han calculado con merma y redondeados hacia arriba a unidades enteras.
- [ ] El presupuesto total no supera los 1 450 €.
- [ ] Las transformaciones del mobiliario tienen coordenadas calculadas y se ha comprobado que caben en la sala.
- [ ] La memoria explica con lenguaje geométrico cada decisión y la conclusión sobre la viabilidad.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 7 · Diseñamos y medimos espacios

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Proyecto geométrico de reforma ficticia**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 7 · Diseñamos y medimos espacios

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé pasar medidas del plano a la realidad y calcular áreas y pendientes en un problema real.	○	○	○	○
Sé calcular las coordenadas de una figura transformada y comprobar si cabe en un espacio.	○	○	○	○
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	○	○	○	○
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	○	○	○	○
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	○	○	○	○
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	○	○	○	○

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 7 · Diseñamos y medimos espacios

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Planta rectangular y pendientes con razones simples.

Ejemplo modelado

Plano a escala 1:100: una pared mide 4 cm. Realidad: $4 \cdot 100 = 400$ cm $= 4$ m. Rampa que sube 0,2 m en 4 m: pendiente $\frac{0{,}2}{4} = 0{,}05 = 5\,\%$.

Glosario y símbolos

Escala 1:100: 1 cm del plano son 100 cm = 1 m reales. **Pendiente** = desnivel ÷ longitud horizontal (×100 para %). **Área rectángulo** = base · altura. **Caja de baldosas:** 2 m² cada una.

1 **Aula de lectura de 6 m × 4 m (esquema). Calcula el área y las cajas de baldosas necesarias sin merma (cada caja cubre 2 m²).**



2 **Dibuja el aula a escala 1:100 y escribe las medidas del dibujo.**

3 **Calcula la pendiente de cada rampa y di si es mayor o menor del 8 %.**

Rampa	Desnivel	Longitud horizontal	Pendiente (%)	¿Mayor del 8 %?
A	0,2 m	4 m		
B	0,3 m	3 m		
C	0,4 m	8 m		

4 **Completa: una rampa de 0,3 m de desnivel con pendiente del 10 % necesita ___ m de longitud horizontal.**

$L = \frac{0{,}3}{0{,}10} =$ _____ m.

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 7 · Diseñamos y medimos espacios

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Optimizar la superficie útil con un pasillo mínimo

La normativa de accesibilidad exige un pasillo libre de al menos **1,2 m** entre cualquier módulo de trabajo y las paredes o estanterías. Con la colocación del enunciado (F6), el módulo ABCD queda a 1 m de la pared oeste y su simétrico respecto de $x = 6$ también queda cerca de las estanterías de la pared este (cuya cara está en $x = 11{,}6$). ¿Cuánto hay que desplazar los módulos?

Pasos

1. Calcula la distancia entre el módulo ABCD y la pared oeste ($x = 0$) y entre su imagen simétrica y la cara de las estanterías este ($x = 11{,}6$). ¿Cumplen el pasillo de 1,2 m?
2. Traslada el módulo a metros hacia el este y recalcula las dos distancias en función de a. Escribe y resuelve las desigualdades.
3. Halla el menor a que cumple las dos condiciones y comprueba que los módulos siguen sin tocarse entre sí (separación mínima 1,2 m entre B y B').
4. Generaliza: si la sala tiene ancho W y la estantería ocupa 0,4 m en cada pared, ¿cómo depende el pasillo de la posición del módulo? Escribe una regla.

1 **Tabla de distancias.**

Desplazamiento a	Distancia al oeste	Distancia de la imagen simétrica a estanterías este	¿Cumple 1,2 m?
0 m			
0,2 m			
0,6 m			

Entrega

El valor mínimo de a con el cálculo completo, la comprobación de que la superficie útil no cambia (R1) y una regla general escrita con tus palabras y una expresión.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 7 · Diseñamos y medimos espacios

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: 5 m; 40 m²; 5 % ($\frac{0{,}5}{10} = 0{,}05$).
2. Pared norte 12 cm → 12 m; pared oeste 8 cm → 8 m; pared este 5 cm → 5 m; entrante horizontal 4 cm → 4 m; entrante vertical 3 cm → 3 m (a escala 1:100, 1 cm = 1 m). Se acepta ±1 mm de error de medida.
3. R1: áreas (sala, estanterías, módulos). R2: pendiente (razón desnivel/longitud) y longitud. R3: área del suelo, cajas, simetría. R4: áreas, volumen, precios y suma.
4. Respuesta abierta; el cálculo exacto es 84 m² y 336 baldosas sin merma (ver ficha 4). Se valora una estimación razonada (por ejemplo, 96 − 12).

Ficha 2

1. 7,5 cm → 7,5 m; 12 cm → 12 m; 0,4 cm → 0,4 m. Real → plano: 1,2 m → 1,2 cm; 8 m → 8 cm; 5,625 m → 5,625 cm.
2. A escala $1 : E$ la planta mide $\frac{1200}{E}$ cm × $\frac{800}{E}$ cm. Con 1:50: 24 cm × 16 cm (cabe en 27,7 cm × 19 cm); con 1:25: 48 cm (no cabe). Escala más grande que cabe: **1:50** (1:20 sería 60 cm).
3. Longitud en la copia: $12 \cdot 1{,}5 = 18$ cm. Escala: $\frac{18\text{ cm}}{1200\text{ cm}} = \frac{1}{66{,}7}$, es decir, 1:66,7 aproximadamente.
4. A 1:100, 1 cm del plano = 1 m real, así que 1 cm² = 1 m². A 1:50, 1 cm = 0,5 m, así que 1 cm² = $0{,}5^2 = 0{,}25$ m². Relación: la razón de longitudes k da k^2 para áreas.

Ficha 3

1. Peldaño: $\frac{15}{30} = 0{,}5 = 50\,\%$. Rampa 0,45 m en 9 m: $\frac{0{,}45}{9} = 0{,}05 = 5\,\%$. Rampa 0,45 m en 3 m: $\frac{0{,}45}{3} = 0{,}15 = 15\,\%$.
2. 10 %: $L = \frac{0{,}45}{0{,}10} = 4{,}5$ m; no cumple (con $L \geq 3$ m el máximo es 8 %). 8 %: $L = 5{,}625$ m; sí cumple ($3 \leq L < 6$). 6 %: $L = 7{,}5$ m; cumple pendiente (para $L \geq 6$) pero supera los 7 m disponibles.
3. Se elige el 8 %, $L = 5{,}625$ m (< 7 m). Ángulo: $\tan\alpha = 0{,}08 \Rightarrow \alpha \approx 4{,}57^\circ$. Longitud real: $\sqrt{5{,}625^2 + 0{,}45^2} \approx 5{,}64$ m.
4. Con 3 m: $\frac{0{,}45}{3} = 15\,\%$: no cumple (con $L = 3$ m ya se aplica el máximo del 8 %, y el 10 % solo vale si $L < 3$ m). Con desnivel 0,2 m: a 10 % haría falta $L = 2$ m (menor de 3 m: permitido); a 8 % haría falta $L = 2{,}5$ m (también válido, pues el máximo para $L < 3$ m es 10 %).

Ficha 4

1. Área en L: $8 \cdot 8 + 4 \cdot 5 = 64 + 20 = 84$ m². Restando: $12 \cdot 8 - 4 \cdot 3 = 96 - 12 = 84$ m².
2. Con merma: $84 \cdot 1{,}10 = 92{,}4$ m²; cajas: $\frac{92{,}4}{2} = 46{,}2 \to 47$ cajas. Coste: $47 \cdot 22 = 1\,034$ €. (Comprobación: 336 baldosas, 369,6 → 370; $\frac{370}{8} = 46{,}25 \to 47$.)
3. Perímetro: $12 + 5 + 4 + 3 + 8 + 8 = 40$ m. Paredes: $40 \cdot 2{,}8 = 112$ m²; sin huecos: $112 - 12 = 100$ m². Dos manos: 200 m²; litros: $\frac{200}{8} = 25$ L. Combinaciones: 15 + 5 + 5 L = 25 L por $48 + 19 + 19 = 86$ €; 5 botes de 5 L = 95 €; 2 botes de 15 L = 30 L por 96 €. La más barata: **86 €**.
4. Hormigón: volumen $\frac{1}{2} \cdot 5{,}625 \cdot 0{,}45 \cdot 1{,}2 = 1{,}51875$ m³ → 1,6 m³ → $1{,}6 \cdot 95 = 152$ €. Alfombra 3 m: 129 €. Total: $1\,034 + 86 + 152 + 129 = 1\,401$ € ≤ 1 450 € ✔. Con alfombra de 4 m: $1\,034 + 86 + 152 + 199 = 1\,471$ € > 1 450 € ✘.

Ficha 5

1. Baldosa A: 1 eje (la diagonal que separa los colores), no gira sobre sí misma (salvo 360°). Baldosa B (cruz): 4 ejes y giro de 90°. Baldosa C: sin ejes ni giros. Pavimento D: 2 ejes (el vertical y el horizontal que pasan por el centro) y giro de 180°; no tiene giro de 90° ni ejes diagonales.
2. Simetría respecto de $x = 6$: $A'(11, 1), B'(8, 1), C'(9, 3), D'(10, 3)$. Traslación $(0;\ 3{,}5)$: $A''(1;\ 4{,}5), B''(4;\ 4{,}5), C''(3;\ 6{,}5), D''(2;\ 6{,}5)$. Giro de 180° respecto de $(6, 4)$: $A'''(11, 7), B'''(8, 7), C'''(9, 5), D'''(10, 5)$.
3. El giro de 180°. El vértice $A'''(11, 7)$ queda dentro del hueco de los aseos (la zona $x > 8, y > 5$ no pertenece a la sala); los otros vértices están en el borde o dentro.
4. Estanterías: $6 \cdot 0{,}8 = 4{,}8$ m². Con 2 módulos: $84 - 4{,}8 - 8 = 71{,}2$ m² ≥ 70 ✔. Con 3: $84 - 4{,}8 - 12 = 67{,}2$ m² < 70 ✘.

Ficha 6

1. Original: $AB = 3$ m, $CD = 1$ m, área 4 m². Imagen: $A'B' = 3$ m, $C'D' = 1$ m, área 4 m² (mismas medidas). Área del trapecio: $\frac{3+1}{2} \cdot 2 = 4$.
2. Conjetura esperada: las tres transformaciones conservan longitudes, ángulos y áreas (isometrías). Justificación con las medidas de la tabla.
3. Razón 1: base 3, altura 2, área 4, razón de áreas 1. Razón 2: base 6, altura 4, área $\frac{6+2}{2} \cdot 4 = 16$, razón de áreas $4 = 2^2$. Razón 3: base 9, altura 6, área $\frac{9+3}{2} \cdot 6 = 36$, razón de áreas $9 = 3^2$. Regla: razón de áreas $= k^2$.

Ficha 7

1. Respuesta abierta. Ejemplo válido: módulo ABCD en $A(1, 1)$… y su simétrico respecto de $x = 6$ (dos módulos), rampa en la entrada norte en dirección norte con 5,625 m, 6 estanterías como en F1. Debe verse la escala 1 cuadro = 1 m.
2. Superficie útil 71,2 m²; rampa 8 %, $L = 5{,}625$ m, 4,57°; baldosas 47 cajas (1 034 €); pintura 86 €; hormigón 152 €; alfombra 129 €; total 1 401 € (si se elige la alfombra de 3 m).
3. Simetría axial de los módulos respecto de $x = 6$ y diseño de suelo simétrico (por ejemplo, el pavimento D). Se valora que se nombren las transformaciones con sus coordenadas.

Ficha 8

1. R1: 71,2 m² ✔. R2: 8 %, 5,625 m < 7 m ✔. R3: 47 cajas ✔, diseño simétrico ✔. R4: 1 401 € ✔. R5: plano 1:100 con cotas.
2. Con 6 m disponibles la pendiente sería $\frac{0{,}6}{6} = 10\,\%$. Como $L = 6$ m ($L \geq 6$), el máximo permitido es 6 %: **no cumple**. Para 6 % harían falta $\frac{0{,}6}{0{,}06} = 10$ m (más de los 6 m disponibles y más de 9 m por tramo, así que además habría que dividir en dos tramos con meseta). Para 8 % harían falta 7,5 m, pero un tramo de 7,5 m (≥ 6) solo puede tener 6 %. Conclusión: **no es viable** en 6 m.
3. Real: $3 \cdot 200 = 600$ cm $= 6$ m; $2 \cdot 200 = 4$ m. Área real: 24 m². En el plano: $3 \cdot 2 = 6$ cm². Relación: $24\ \text{m}^2 = 240\,000\ \text{cm}^2$ y $240\,000/6 = 40\,000 = 200^2$.
4. Respuesta abierta (por ejemplo: la pendiente, que depende del desnivel y de la longitud; o el área útil).

Refuerzo

1. Área $6 \cdot 4 = 24$ m²; cajas de 2 m²: $\frac{24}{2} = 12$ cajas.
2. Plano 1:100: 6 cm × 4 cm.
3. A: $\frac{0{,}2}{4} = 5\,\%$ (no). B: $\frac{0{,}3}{3} = 10\,\%$ (sí). C: $\frac{0{,}4}{8} = 5\,\%$ (no).
4. $L = \frac{0{,}3}{0{,}10} = 3$ m.

Ampliación

1. Original: distancia del módulo (punto más cercano: $x = 1$) a la pared oeste = 1 m < 1,2 ✘. La imagen simétrica tiene su punto más cercano a las estanterías en $x = 11$: $11{,}6 - 11 = 0{,}6$ m < 1,2 ✘.
2. Con desplazamiento a hacia el este: oeste $1 + a \geq 1{,}2 \Rightarrow a \geq 0{,}2$. Este: $11{,}6 - (11 - a) = 0{,}6 + a \geq 1{,}2 \Rightarrow a \geq 0{,}6$. (Si se mantiene la simetría, se mueve el módulo a hacia el este y su imagen a hacia el oeste.)
3. Menor a que cumple ambas: **0,6 m**. B pasa a $(4{,}6;\ 1)$ y B' a $(7{,}4;\ 1)$: separación 2,8 m ≥ 1,2 ✔. La superficie útil sigue siendo 71,2 m² (las isometrías conservan el área).
4. Regla: si la sala mide W de ancho y hay estanterías de 0,4 m en ambas paredes, la parte más a la izquierda del módulo debe cumplir $x_{\min} \geq 1{,}2$ (más 0,4 m si hay estantería en esa pared) y la más a la derecha $x_{\max} \leq W - 0{,}4 - 1{,}2$. Con $W = 12$ y estantería solo en el este: el módulo debe quedar en $1{,}2 \leq x \leq 10{,}4$. Se aceptan otras formulaciones correctas.

Errores frecuentes

- Confundir la escala con el área: creer que 1 cm² del plano a 1:100 representa 100 cm² (son 10 000 cm² = 1 m²).
- Calcular la pendiente con la longitud de la rampa (hipotenusa) en vez de con la longitud horizontal, o dividir al revés (longitud entre desnivel).
- Olvidar la merma o redondear hacia abajo al comprar cajas, botes o m³.
- Dar la pendiente como decimal sin pasarla a porcentaje, o aplicar la tabla del CTE sin mirar la longitud del tramo.
- Aplicar mal las fórmulas de las isometrías (por ejemplo, $x \to 6 - x$ en lugar de $x \to 12 - x$ para la simetría respecto de $x = 6$).
- No comprobar que la imagen de una figura cabe en la sala (las transformaciones no garantizan viabilidad).

Criterios para valorar respuestas abiertas

- En el proyecto se acepta cualquier disposición que cumpla R1 a R5 con cálculos comprobables; se valora la coherencia entre el plano, la tabla de cálculos y el presupuesto.
- El plano se evalúa por la escala correcta, las cotas con unidades y la legibilidad, no por la estética.
- La calculadora y GeoGebra son válidos, pero cada resultado debe ir acompañado del cálculo o de la construcción que lo justifica.

08

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Estadísticas que pueden engañar

PREGUNTA GUÍA

¿Cuándo una muestra permite afirmar algo sobre una población?

CURSO
4.º ESO · Matemáticas A

SESIONES
8 sesiones · 3.º trimestre

SENTIDOS PRIORITARIOS
E · Sentido estocástico

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE2, CE3, CE6, CE7, CE8

PRODUCTO FINAL
Informe de investigación estadística

CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 2.1, 3.1, 6.1, 7.1, 8.1

Contexto, reto y sentido

El instituto ficticio **IES Valle Claro** tiene 600 estudiantes (150 por curso). La orientadora ha oído en la sala de profesores que «los adolescentes duermen poco y por eso sacan peores notas», y la dirección quiere saber si es cierto antes de cambiar el horario del primer día. Es imposible preguntar a todo el mundo cada semana, así que se trabaja con **muestras**. Pero una muestra puede ser engañosa: si solo se pregunta a quien va a la biblioteca, o a una sola clase, la conclusión puede ser falsa sin que nadie haya mentido.

La situación moviliza el sentido estocástico de 4.º ESO: formulación de una pregunta estadística, población, muestra y sesgo, tablas y gráficos de una variable, medidas de localización y de dispersión (media, mediana, cuartiles, desviación típica), nube de puntos con dos variables, recta de ajuste y correlación a nivel interpretativo, y alcance y límites de las conclusiones. Los datos del instituto son ficticios (generados con ordenador); se citan además dos casos reales de la historia de la estadística: la encuesta de 1936 de la revista *Literary Digest* y el cuarteto de Anscombe (1973).

Reto

Elaborar un informe de investigación estadística sobre el sueño y las notas del alumnado: comparar tres muestras con la población, organizar y resumir los datos, analizar la relación entre dos variables con un ajuste lineal y redactar conclusiones con sus límites.

Producto final

Informe de investigación estadística.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- **1.1** Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.
- **2.1** Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.
- **3.1** Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada estudiando patrones, propiedades y relaciones.
- **6.1** Proponer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.
- **7.1** Representar matemáticamente la información más relevante de un problema, conceptos, procedimientos y resultados, visualizando ideas y estructurando procesos.
- **8.1** Comunicar ideas, conclusiones, conjeturas y razonamientos matemáticos utilizando diferentes medios, con coherencia, claridad y terminología apropiada.

Saberes básicos prioritarios

E
Sentido estocástico

- Formulación de preguntas estadísticas: población, muestra, variables cualitativas y cuantitativas; muestreo aleatorio y fuentes de sesgo (voluntarios, un solo grupo, no respuesta).
- Organización de datos de una variable: tablas de frecuencias absolutas, relativas y acumuladas; histogramas y diagramas de caja.
- Medidas de localización (media, mediana, moda, cuartiles) y de dispersión (rango, rango intercuartílico, varianza, desviación típica, coeficiente de variación); comparación de dos grupos.
- Datos de dos variables: nube de puntos, relación lineal, correlación y recta de ajuste con tecnología; interpretación de pendiente, interpolación y extrapolación.
- Correlación y causalidad: variables de confusión; alcance y límites de las conclusiones; margen de error aproximado $\frac{1}{\sqrt{n}}$ en proporciones.

F
Sentido socioafectivo

- Actitud crítica ante la información estadística y honestidad al comunicar límites e incertidumbre.
- Trabajo en equipo con roles de investigación (coordinación, análisis, gráficos, redacción) y revisión cruzada.

Objetivos didácticos

- ✓ Organizar datos de una y dos variables.
- ✓ Interpretar localización y dispersión.
- ✓ Valorar relación entre dos variables sin confundir correlación y causa.
- ✓ Analizar representatividad de una muestra.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Pregunta y diseño del estudio

Evidencia: Ficha 1: diagnóstico, definición de población, muestra y variables, lección de 1936 y diseño de un cuestionario con sus posibles sesgos.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Muestra y sesgo

Evidencia: Ficha 2: cálculo de media y porcentaje de tres muestras frente a los datos de la población, error de cada muestra y margen de error según el tamaño.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Organización de una variable

Evidencia: Ficha 3: tabla de frecuencias, histograma, media, mediana, moda y cuartiles de las horas de sueño de la muestra aleatoria.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Dispersión y comparación

Evidencia: Ficha 4: medidas de dispersión y diagramas de caja de dos líneas de autobús con la misma media y comparación con la desviación típica.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Dos variables y nube de puntos

Evidencia: Ficha 5: nube de puntos entre pantalla y nota, valoración visual de la correlación y análisis de causa y variables de confusión.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Ajuste lineal tecnológico a nivel interpretativo

Evidencia: Ficha 6: interpretación de las rectas de ajuste (pendiente, ordenada, correlación), predicción e interpolación frente a extrapolación.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Informe

Evidencia: Ficha 7: borrador del informe del equipo: pregunta, muestra, gráficos, medidas, relación entre variables y conclusión.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

8

SESIÓN 8

Alcance de conclusiones

Evidencia: Ficha 8: reto individual con una encuesta de cafetería (sesgo, proporción, margen de error) y un conjunto pequeño de datos.

Ficha: Anexo 3 · ficha 8

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Base de datos ficticia · hoja de cálculo · gráficos

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Una variable y comparación de dos grupos antes de introducir dos variables.

Ampliación

Anexo 9

Crear una muestra sesgada que cambie la conclusión y demostrar el efecto.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1

Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2

Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3

Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Reformulación del problema como pregunta estadística: población, muestra, variables, tipo de datos y plan de recogida.	Fichas 1 y 2 / lista de cotejo
2.1	Comprobación de la corrección de los cálculos estadísticos (medias, cuartiles, desviación típica, recta de ajuste) y contraste de las muestras con los datos de la población.	Fichas 2, 3 y 4 / escala de valoración
3.1	Formulación y comprobación de conjeturas: una muestra grande no basta si está sesgada, dos grupos con la misma media pueden diferir en dispersión y una correlación no implica causa.	Fichas 4, 5 y 6 / rúbrica
6.1	Aplicación de la estadística a una pregunta real del centro: elección de muestra, resumen de datos y valoración de la relación entre sueño, pantalla y notas.	Informe (Anexo 4) / rúbrica
7.1	Representación de los datos con tablas, histogramas, diagramas de caja y nubes de puntos con ejes rotulados y escalas adecuadas.	Fichas 3, 4 y 5 y Anexo 4 / rúbrica

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
8.1	Redacción de conclusiones con lenguaje estadístico preciso y un apartado de límites que indica qué se puede y qué no se puede afirmar.	Informe (Anexo 4) y Ficha 8 / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Informe, gráficos, medidas y apartado de límites.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 8 · Estadísticas que pueden engañar

ALUMNADO

«Los adolescentes duermen poco y por eso suspenden.» La frase suena a verdad… pero ¿lo han demostrado los datos? La orientadora del IES Valle Claro ha recogido tres muestras de 30 alumnos y alumnas: voluntarios de la biblioteca, una selección al azar y una clase de 4.º. Cada muestra cuenta una historia distinta. Y en la historia real de la estadística hubo una encuesta con 2,4 millones de respuestas que se equivocó por completo. Vais a convertiros en el equipo de investigación del instituto: elegiréis bien la muestra, resumiréis los datos, estudiaréis la relación entre sueño, pantallas y notas y diréis, con honestidad, hasta dónde llegan vuestras conclusiones.

> *¿Cuándo una muestra permite afirmar algo sobre una población?*

Vuestro reto

Elaborar un informe de investigación estadística sobre el sueño y las notas del alumnado: comparar tres muestras con la población, organizar y resumir los datos, analizar la relación entre dos variables con un ajuste lineal y redactar conclusiones con sus límites.

Lo que vais a producir

Informe de investigación estadística.

Hoja de ruta · 8 sesiones

1. Formulamos la pregunta estadística y planificamos el estudio.
2. Comparamos tres muestras con la población y detectamos sesgos.
3. Organizamos y resumimos una variable con tablas, gráficos y medidas.
4. Medimos la dispersión y comparamos dos grupos.
5. Representamos dos variables en una nube de puntos.
6. Interpretamos una recta de ajuste con tecnología y sus límites.
7. Redactamos el informe de investigación del equipo.
8. Valoramos el alcance de las conclusiones en un reto individual.

Al terminar seré capaz de…

- ✓ Organizar datos de una y dos variables.
- ✓ Interpretar localización y dispersión.
- ✓ Valorar relación entre dos variables sin confundir correlación y causa.
- ✓ Analizar representatividad de una muestra.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 8 · Estadísticas que pueden engañar

ALUMNADO

El estudio del IES Valle Claro (datos ficticios), la población completa en una tabla de frecuencias, tres formas de elegir una muestra, los datos de las muestras, una nube de puntos con su recta de ajuste, dos líneas de autobús con distinta dispersión, un caso histórico real y las fórmulas. Los datos del instituto están generados con ordenador para el aula.

F1 ¿Duermen poco los adolescentes? El estudio del IES Valle Claro

ESTUDIO DE CASO

Pregunta de investigación. ¿Cuántas horas duerme el alumnado del IES Valle Claro entre semana? ¿Se parece la media a lo recomendado? ¿Hay relación entre las horas de sueño, las horas de pantalla y la nota de Matemáticas?

Población: los 600 alumnos y alumnas del centro (150 de cada curso de ESO). **Variables:** horas de sueño entre semana (h, de 0,5 en 0,5), horas de pantalla al día (h, con un decimal) y nota media de Matemáticas (de 0 a 10, con un decimal). Se recomienda dormir entre **8 y 10 horas** a los 13-18 años.

Una lección de 1936. La revista *Literary Digest* envió unos 10 millones de cuestionarios y recibió unos 2,4 millones de respuestas: predijo que Landon ganaría las elecciones presidenciales de EE. UU. con el 57 % de los votos. Ganó Roosevelt con alrededor del 61 %. Una encuesta mucho más pequeña (unas 50 000 personas, con muestreo mejor diseñado) acertó. La revista había elegido la muestra con listas de suscriptores, de teléfonos y de coches, es decir, entre personas con más dinero que la media, y solo contestó una parte.

Fuente: Estudio ficticio creado para el aula. La recomendación de sueño es de la Academia Americana de Medicina del Sueño (2016). El caso de 1936 es histórico: cifras aproximadas citadas en manuales de estadística.

¿Por qué 2,4 millones de respuestas pueden valer menos que 50 000? ¿Qué sesgos tuvo la elección de la muestra?

F2 Toda la población: horas de sueño entre semana (600 alumnos y alumnas)

DATOS

Horas de sueño	Alumnado	Porcentaje
[5, 6) h	9	1,5 %
[6, 7) h	69	11,5 %
[7, 8) h	220	36,7 %
[8, 9) h	228	38,0 %
[9, 10] h	74	12,3 %
Total	**600**	**100 %**

Parámetros de la población: media de sueño $\mu = 7{,}74$ h; desviación típica $\sigma = 0{,}88$ h; el **49,7 %** duerme menos de 8 h; nota media de Matemáticas **5,90**; pantalla media **2,9** h/día.

Fuente: Datos ficticios generados con ordenador para el aula (censo ficticio del centro).

Estos valores son los «verdaderos» del centro. ¿Qué muestras se acercan más a ellos?

F3 Tres formas de elegir una muestra de 30 personas

DATOS

Muestra	Cómo se ha elegido	Observaciones
A · Biblioteca	Se pregunta a 30 alumnos y alumnas que están en la biblioteca durante el recreo y quieren participar.	Voluntarios que van a la biblioteca.
B · Aleatoria	Se numera a los 600 y se sortean 30 números con un generador de números aleatorios.	Todas las personas tienen la misma probabilidad de salir.
C · Una clase	Se pregunta a 30 estudiantes de 4.º elegidos entre los de ese curso.	Solo 4.º ESO.

Fuente: Procedimientos ficticios creados para el aula.

Antes de calcular nada: ¿cuál de las tres crees que representa mejor al centro? ¿Qué podría fallar en cada una?

F4 Horas de sueño de las tres muestras (h)

TEXTO

Muestra A (biblioteca): 7,5; 8,0; 7,5; 8,5; 8,0; 6,5; 7,5; 8,0; 8,5; 8,5; 7,5; 8,5; 6,5; 8,5; 9,5; 9,0; 8,0; 8,5; 8,0; 8,0; 8,0; 9,0; 8,0; 7,5; 8,5; 10,0; 8,0; 8,0; 9,5; 7,5.

Muestra B (aleatoria): 9,0; 9,0; 8,0; 7,5; 8,0; 9,5; 7,5; 8,5; 9,0; 6,5; 8,5; 7,5; 8,0; 7,5; 8,0; 7,5; 7,0; 7,0; 8,0; 7,5; 7,5; 7,5; 5,5; 7,5; 7,0; 7,5; 7,5; 8,0; 8,5; 7,5.

Muestra C (una clase de 4.º): 7,0; 7,5; 6,5; 6,5; 8,0; 6,5; 7,5; 7,5; 7,5; 7,5; 6,5; 6,5; 8,0; 8,0; 6,0; 7,5; 7,0; 7,5; 7,5; 7,0; 7,0; 5,5; 7,5; 7,0; 7,5; 7,0; 6,5; 7,0; 7,0; 8,0.

Fuente: Datos ficticios generados con ordenador para el aula (30 valores cada muestra).

Calcula la media y el porcentaje que duerme menos de 8 h en cada muestra (ficha 2).

F5 Muestra B (aleatoria): sueño, pantalla y nota

DATOS

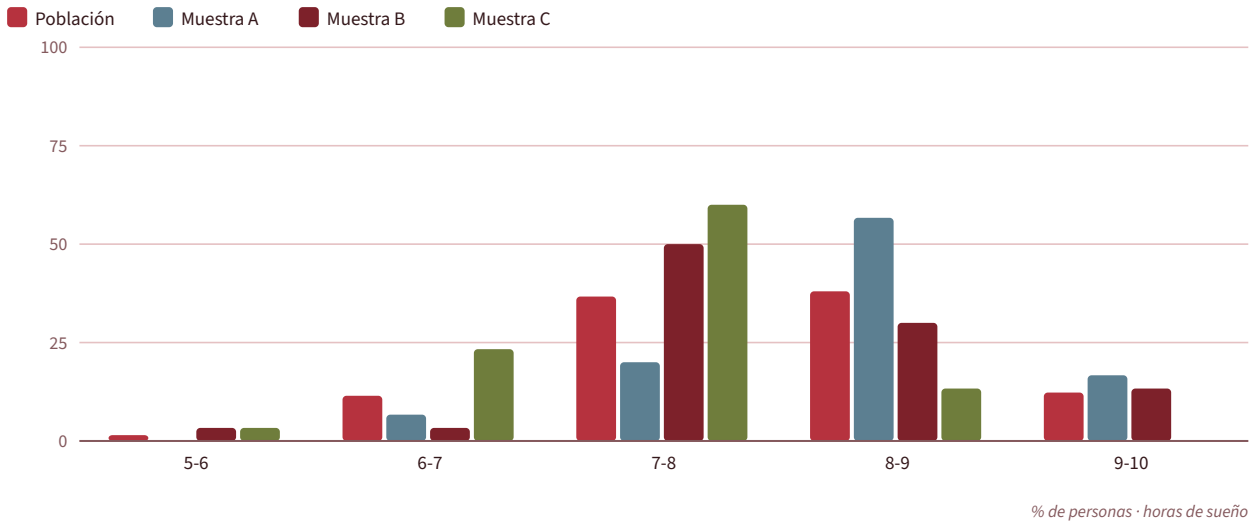
Nº	Sueño (h)	Pantalla (h/día)	Nota	Nº	Sueño (h)	Pantalla (h/día)	Nota
1	9,0	2,7	6,6	16	7,5	5,3	5,6
2	9,0	2,1	8,2	17	7,0	4,7	5,2
3	8,0	1,0	6,0	18	7,0	4,0	4,2
4	7,5	5,1	3,3	19	8,0	2,7	7,6
5	8,0	2,5	7,4	20	7,5	1,6	5,0
6	9,5	1,8	6,6	21	7,5	4,2	5,1
7	7,5	3,5	4,2	22	7,5	4,2	4,9
8	8,5	3,6	5,5	23	5,5	2,4	5,1
9	9,0	2,0	6,1	24	7,5	2,9	6,8
10	6,5	4,6	3,6	25	7,0	4,6	4,9
11	8,5	2,7	9,3	26	7,5	4,7	5,7
12	7,5	3,4	5,6	27	7,5	1,7	7,5
13	8,0	2,9	5,6	28	8,0	3,1	8,7
14	7,5	4,3	4,9	29	8,5	2,8	8,0
15	8,0	2,0	6,9	30	7,5	2,5	6,9

Fuente: Datos ficticios generados con ordenador para el aula.

Estos 30 estudiantes son la muestra con la que se trabaja en las fichas 3, 5 y 6.

F6 ¿Se parece cada muestra a la población?

GRÁFICO

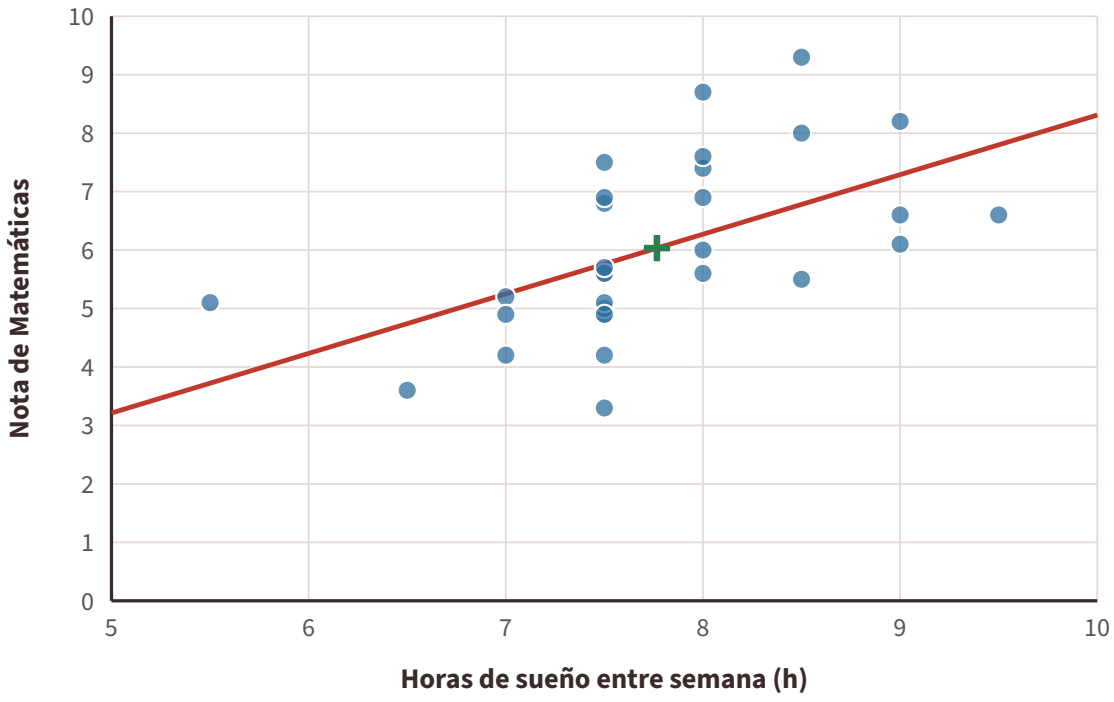


Fuente: Datos de F2 y F4. Porcentaje de personas en cada intervalo de horas de sueño.

Compara la forma de cada serie con la de la población.

F7 Muestra B: sueño y nota de Matemáticas

ESQUEMA



Recta de ajuste de la nota y sobre las horas de sueño x: $\hat{y} = -1{,}88 + 1{,}02\,x$. Coeficiente de correlación: $r = 0{,}55$.

Fuente: Gráfico de elaboración propia con los datos de F5. La recta roja es la recta de ajuste calculada con hoja de cálculo; la cruz verde marca el punto de medias. Los puntos repetidos se superponen.

¿Qué indica el signo de la pendiente? ¿Es fuerte la relación?

F8 Tiempo de trayecto al instituto de dos líneas de autobús (min)

DATOS

Trayecto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Línea A	24	25	26	25	24	26	25	25	24	26
Línea B	10	40	18	32	25	15	35	25	20	30

Fuente: Datos ficticios creados para el aula: 10 trayectos de cada línea.

Las dos líneas tienen la misma media. ¿Dan el mismo servicio? ¿Con cuál llegarías más puntual?

F9 Fórmulas clave y ejemplo resuelto

TEXTO

- **Media:** $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n}$. **Mediana:** valor central de los datos ordenados. **Moda:** valor más frecuente.
- **Cuartiles:** Q_1 y Q_3 son las medianas de la mitad inferior y de la superior. **Rango intercuartílico:** $RIC = Q_3 - Q_1$. **Rango:** máximo menos mínimo.
- **Desviación típica:** $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$ (la varianza es σ^2). **Coeficiente de variación:** $CV = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\,\%$.
- **Recta de ajuste:** $\hat{y} = a + bx$. La pendiente b indica cuánto cambia y, de media, al aumentar x en una unidad. El coeficiente de correlación r está entre -1 y 1: cerca de ± 1, relación lineal fuerte; cerca de 0, débil. **Correlación no es causalidad.**
- **Margen de error aproximado** de una proporción en una muestra aleatoria de n personas: $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Ejemplo resuelto. Datos: 4, 6, 6, 8, 11. $\bar{x} = \frac{35}{5} = 7$. Desviaciones: $-3, -1, -1, 1, 4$; cuadrados: $9, 1, 1, 1, 16$; suma 28; $\sigma = \sqrt{\frac{28}{5}} = \sqrt{5{,}6} \approx 2{,}37$. Mediana $= 6$; $Q_1 = \frac{4+6}{2} = 5$ y $Q_3 = \frac{8+11}{2} = 9{,}5$ (se excluye la mediana de las mitades).

Fuente: Elaboración propia.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 8 · Estadísticas que pueden engañar

ALUMNADO

FICHA 1 Pregunta y diseño del estudio

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Lee F1. Antes de calcular, hay que saber qué se pregunta y a quién.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

La media de 2, 4, 4 y 10 es…

☐ 4 ☐ 5 ☐ 10

La mediana de 3, 5, 7, 9 y 11 es…

☐ 5 ☐ 7 ☐ 9

Una muestra es…

☐ toda la población ☐ una parte de la población que se estudia para conocerla ☐ un dato anormal

2 **Completa la ficha técnica del estudio del IES Valle Claro (F1).**

Elemento	Respuesta
Población	
Muestra posible	
Variable 1 (tipo)	
Variable 2 (tipo)	
Variable 3 (tipo)	

3 **La encuesta de 1936 de *Literary Digest* tuvo 2,4 millones de respuestas y falló. Explica con tus palabras por qué una muestra enorme no garantiza un buen resultado.**

4 Diseña tres preguntas de un cuestionario para estudiar el sueño del alumnado y señala un posible sesgo de redacción o de elección de muestra en cada una.

FICHA 2 Muestra y sesgo

Sesión 2

Usa F2, F3, F4 y F9. Redondea a dos decimales.

1 Calcula para cada muestra la media de sueño y el porcentaje de personas que duermen menos de 8 h. Compáralos con la población (F2).

	Media (h)	% que duerme menos de 8 h	Error de la media (|muestra − μ|)
Muestra A			
Muestra B			
Muestra C			
Población			

2 ¿Qué muestra representa mejor a la población? ¿Qué sesgo explica el resultado de cada una de las otras dos? Usa F6 como apoyo.

3 Margen de error aproximado $\frac{1}{\sqrt{n}}$ de una proporción. Completa y valora si la diferencia de la muestra B con la población en el % que duerme menos de 8 h es compatible con el azar.

Tamaño de la muestra n	30	100	400	1 000
Margen $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (en %)				

4 ¿Se puede arreglar el sesgo de la muestra A pidiendo a 3 000 personas de la biblioteca? Razónalo.

FICHA 3 Organización de una variable

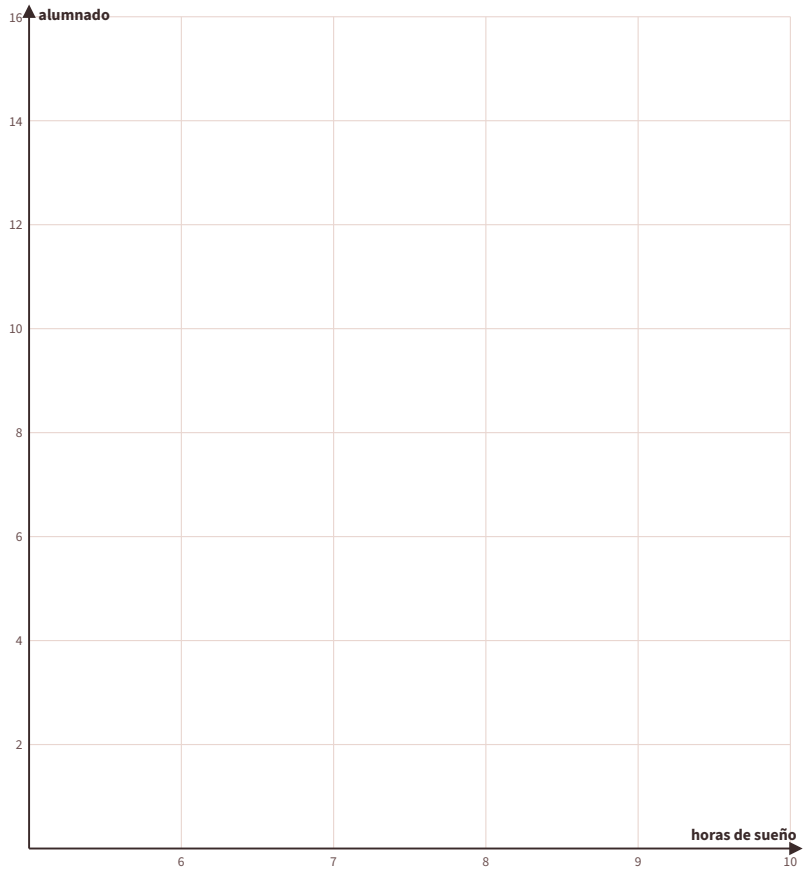
Sesión 3

Trabaja con las horas de sueño de la muestra B (F5, columna «Sueño»).

1 Completa la tabla de frecuencias.

Intervalo (h)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa (%)	Frecuencia absoluta acumulada
[5, 6)			
[6, 7)			
[7, 8)			
[8, 9)			
[9, 10]			

2 Dibuja el histograma (una columna por intervalo).



3 Calcula con los 30 datos: media, mediana, moda, Q_1, Q_3 y rango intercuartílico.

Media	Mediana	Moda	Q_1	Q_3	RIC

4 Según esta muestra, ¿cumple el alumnado la recomendación de 8-10 h? ¿Qué porcentaje la cumple? ¿Con qué cautelas lo afirmarías?

FICHA 4 Dispersión y comparación

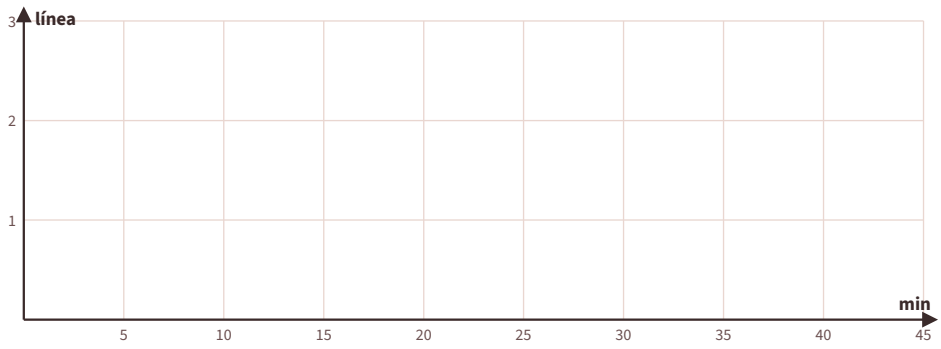
Sesión 4

Usa F8 y las fórmulas de F9. Calcula con papel y con calculadora.

1 Completa las medidas de cada línea.

Línea	Media	Mediana	Q_1	Q_3	Rango	RIC	σ
A							
B							

2 Dibuja los dos diagramas de caja con los cinco números (mín., Q_1, mediana, Q_3, máx.): A arriba (y = 2) y B abajo (y = 1).



3 Calcula el coeficiente de variación de cada línea y escribe un párrafo: ¿qué línea es más fiable para llegar a las 8:30 y por qué, si la media es la misma?

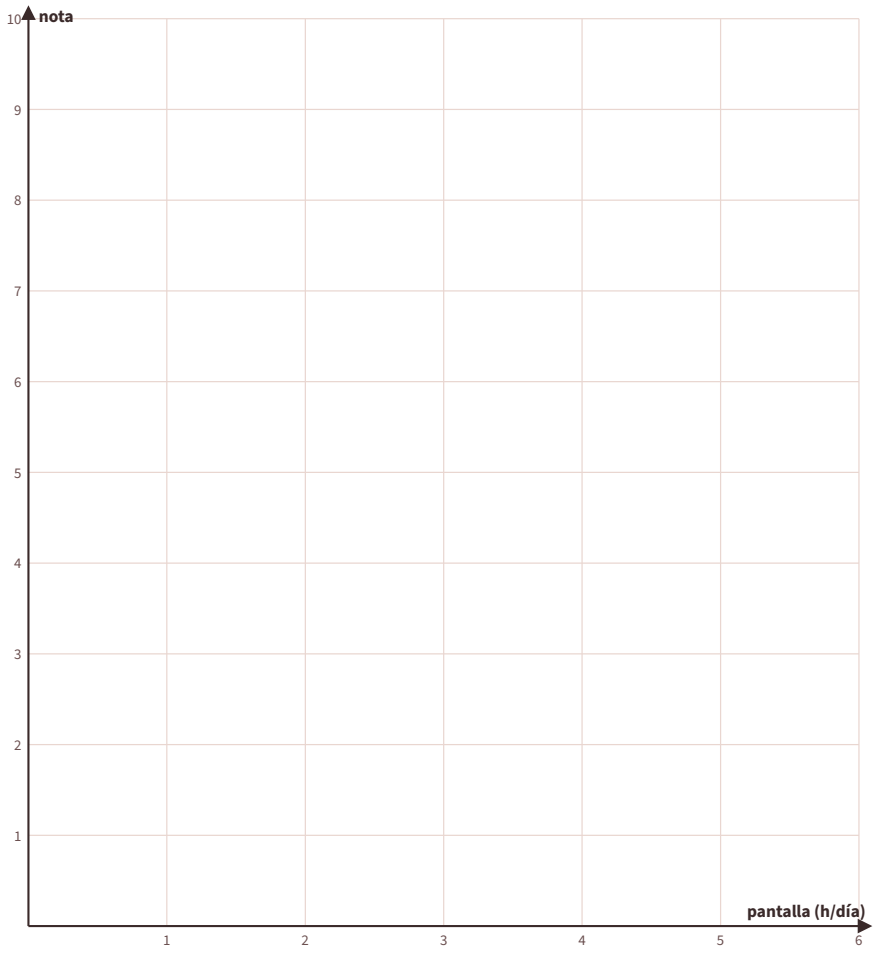
4 **Conjetura. Si a todos los trayectos de la línea A se les suman 5 minutos, ¿qué ocurre con la media y con la desviación típica? Compruébalo con los datos.**

FICHA 5 Dos variables: nube de puntos

Sesión 5

Usa F5 y F7. Variables: horas de pantalla (x) y nota (y).

1 **Representa en la nube de puntos los 12 primeros alumnos de F5 (pantalla, nota).**



2 **Describe la relación entre pantalla y nota (dirección, fuerza) y elige el valor más probable de r para los 30 datos.**

Valor más probable de r…

☐ −0,95 ☐ −0,56 ☐ 0 ☐ 0,56

3 **Una compañera concluye: «Las pantallas bajan las notas». Escribe dos explicaciones alternativas compatibles con esa nube de puntos (variables de confusión).**

4 **Di si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).**

	V	F
Si $r = 0{,}9$, un aumento de x provoca siempre un aumento de y.	☐	☐
Si $r \approx 0$, no hay ninguna relación entre las variables.	☐	☐
Una correlación puede deberse a una tercera variable.	☐	☐
Una nube de puntos con forma de «U» puede tener $r \approx 0$ y estar muy relacionada.	☐	☐

FICHA 6 Recta de ajuste e interpretación

Sesión 6

Usa F7. La recta y r se han calculado con hoja de cálculo; tu trabajo es interpretar.

1 **La recta de F7 es $\hat{y} = -1{,}88 + 1{,}02x$, con $r = 0{,}55$. Interpreta con una frase la pendiente y explica por qué la ordenada (-1,88) no tiene sentido en este contexto.**

2 **Usa la recta para predecir la nota con cada número de horas de sueño. Indica si es interpolación o extrapolación (el sueño observado va de 5,5 a 9,5 h).**

Horas de sueño	Nota prevista	¿Interpolación o extrapolación?	¿Es razonable?
7			
8,5			
12			

3 **El alumno nº 7 duerme 7,5 h y tiene un 4,2. ¿Qué nota prevé la recta? Calcula el residuo (real − previsto) e interprétalo.**

4 El valor r^2 indica el porcentaje de variación de la nota «explicado» por la recta. Calcúlalo y escribe qué significa que el resto no esté explicado.

FICHA 7 Borrador del informe

Sesión 7

Trabajad en equipo con roles: coordinación, análisis, gráficos y redacción.

1 Elegid una variable cuantitativa y una pregunta de investigación. Planificad el estudio.

Elemento	Decisión del equipo
Pregunta	
Población	
Muestra y cómo se elige	
Posibles sesgos	

2 Resumid los datos de la muestra B con la variable elegida: tabla de frecuencias, gráfico y medidas.

3 Relación entre dos variables: gráfico, recta o valor de r (si procede) e interpretación.

4 **Conclusión y límites: ¿qué podéis afirmar y qué no?**

FICHA 8 Alcance de las conclusiones

Sesión 8

Resuelve sin ayuda del equipo. Puedes usar calculadora.

1 **En la cola de la cafetería, a las 11:00, se pregunta a 40 alumnos y 34 dicen que compran bocadillo casi todos los días. Calcula la proporción y el margen de error aproximado. ¿Se puede afirmar que «el 85 % del alumnado compra bocadillo»? Razónalo.**

2 **Seis alumnos sacaron en un examen 6, 8, 5, 9, 7 y 7. Calcula la media, la desviación típica y el rango intercuartílico.**

3 **Un estudio dice: «Quienes toman cereales para desayunar sacan mejores notas». Escribe tres preguntas críticas que harías (muestra, variables de confusión, tipo de datos).**

4 **Redacta un párrafo de conclusiones sobre el sueño en el IES Valle Claro con una frase que diga qué NO se puede afirmar.**

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 8 · Estadísticas que pueden engañar

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Informe de investigación estadística sobre el sueño y las notas del IES Valle Claro (o sobre la variable elegida por el equipo).

Título y equipo

Pregunta y población

Pregunta, variables y tipo de datos.

Muestra y sesgos

Cómo se eligió y qué sesgos puede tener.

Organización de los datos

Tabla de frecuencias y gráfico rotulado.

Medidas

Media, mediana, cuartiles y desviación típica.

Dos variables

Nube de puntos, r y recta.

Conclusiones

Respuesta a la pregunta con datos.

Límites del estudio

Qué no se puede afirmar y por qué.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 8 · Estadísticas que pueden engañar

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Informe de investigación estadística**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] La pregunta de investigación está formulada con población y variables bien definidas.
- [ ] Se indica cómo se ha elegido la muestra y se analizan sus posibles sesgos.
- [ ] Las tablas de frecuencias tienen frecuencias absolutas, relativas y acumuladas correctas.
- [ ] Los gráficos (histograma, caja, nube de puntos) tienen ejes rotulados, escala y título.
- [ ] Las medidas de localización y dispersión están calculadas y bien interpretadas.
- [ ] La relación entre dos variables se describe (dirección y fuerza) sin confundir correlación y causa.
- [ ] Las conclusiones responden a la pregunta con datos y se compara la muestra con la población.
- [ ] Hay un apartado de límites que indica qué no se puede afirmar.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 8 · Estadísticas que pueden engañar

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Informe de investigación estadística**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 8 · Estadísticas que pueden engañar

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé decidir si una muestra puede representar a una población y explicar su sesgo.	○	○	○	○
Sé interpretar una recta de ajuste y el coeficiente de correlación sin afirmar causalidad.	○	○	○	○
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	○	○	○	○
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	○	○	○	○
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	○	○	○	○
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	○	○	○	○

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 8 · Estadísticas que pueden engañar

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Una variable y comparación de dos grupos antes de pasar a dos variables, con conjuntos pequeños de datos.

Ejemplo modelado

Datos: 3, 5, 5, 9. Media: $\frac{22}{4} = 5{,}5$. Ordenados: 3, 5, 5, 9 → mediana $= \frac{5+5}{2} = 5$. Moda: 5. Rango: $9 - 3 = 6$.

Glosario y símbolos

Población: todos. **Muestra:** una parte. **Media:** suma ÷ cantidad. **Mediana:** dato central. **Moda:** el que más se repite. **Rango:** máximo − mínimo. **Sesgo:** error sistemático por elegir mal la muestra.

1 **Dos grupos de 6 estudiantes han hecho un test (nota sobre 10). Grupo X: 5, 6, 6, 7, 8, 8. Grupo Y: 3, 5, 6, 7, 9, 10. Completa la tabla.**

Grupo	Media	Mediana	Moda	Rango
X				
Y				

2 **¿Qué grupo tiene los datos más agrupados? ¿Qué medida lo indica?**

3 **Para saber cuántas horas duermen los 600 estudiantes del centro, ¿es buena idea preguntar solo a las 30 personas que están en el patio a las 8:00? Explica por qué.**

4 **Completa con tus palabras: una muestra buena es ___ y se elige ___.**

Una muestra buena es _____ y se elige _____.

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 8 · Estadísticas que pueden engañar

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Fabricar una muestra sesgada y demostrar el efecto

¿Con qué facilidad se puede hacer que los datos «digan» lo que uno quiere? Vais a seleccionar a propósito 10 alumnos de la muestra B (F5) para que la conclusión cambie, a medir cuánto cambia y a ver por qué los números resumen no bastan, con el cuarteto de Anscombe (1973).

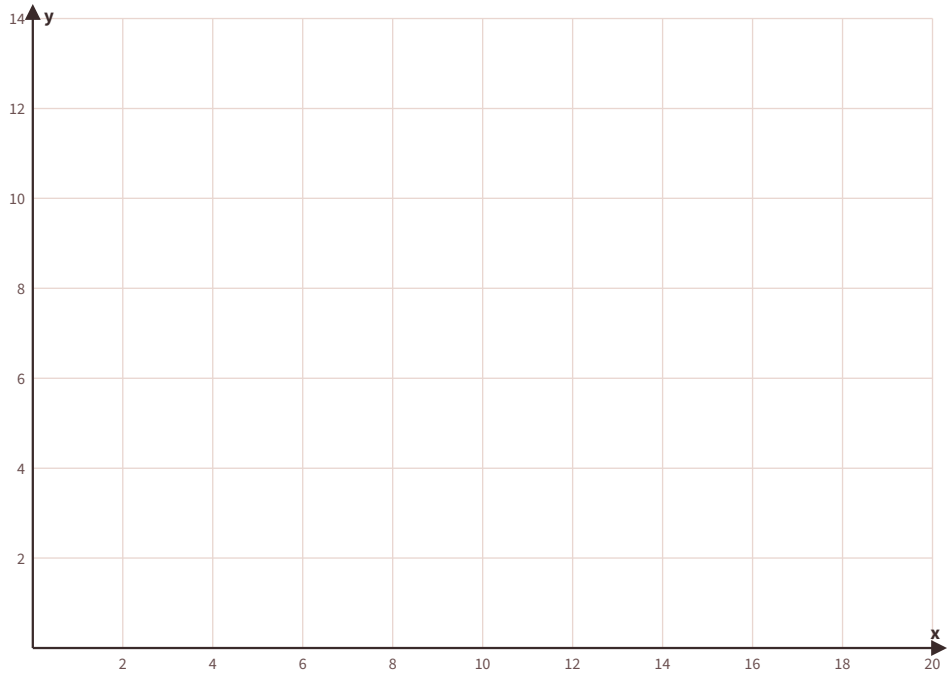
Pasos

1. De los 30 estudiantes de F5 elige los 10 con mayor nota y calcula la media de sueño y de nota; después elige los 10 con menor nota y repite. Compara con la muestra completa.
2. Redacta dos titulares opuestos, cada uno cierto para su submuestra, y explica qué sesgo se ha cometido.
3. Los conjuntos de Anscombe 2 y 4 (tabla) tienen la misma media de x (9) y de y (7,50), la misma recta ($\hat{y} \approx 3 + 0{,}5x$) y la misma correlación ($r \approx 0{,}82$). Dibuja ambos en una nube de puntos.
4. Explica qué falla si solo se mira r y la recta, y generaliza: ¿qué dos comprobaciones harías antes de fiarte de un ajuste lineal?

1 Datos de Anscombe (1973).

x (conjunto 2)	y (conjunto 2)	x (conjunto 4)	y (conjunto 4)
10	9,14	8	6,58
8	8,14	8	5,76
13	8,74	8	7,71
9	8,77	8	8,84
11	9,26	8	8,47
14	8,10	8	7,04
6	6,13	8	5,25
4	3,10	19	12,50
12	9,13	8	5,56
7	7,26	8	7,91
5	4,74	8	6,89

2 Nubes de puntos.



Entrega

Una tabla con las dos submuestras sesgadas, los dos titulares, las dos nubes de Anscombe y una regla de dos líneas sobre cuándo fiarse de una correlación.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 8 · Estadísticas que pueden engañar

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: 5 ($\frac{20}{4}$); 7; una parte de la población que se estudia para conocerla.
2. Población: los 600 alumnos del IES Valle Claro. Muestra posible: 30 alumnos elegidos al azar. Variables: horas de sueño (cuantitativa continua, medida de 0,5 en 0,5 h), horas de pantalla (cuantitativa continua), nota de Matemáticas (cuantitativa continua).
3. La muestra no era representativa: se eligió entre suscriptores, propietarios de coche y teléfono (más ricos) y solo contestó una parte (sesgo de selección y de no respuesta). El tamaño reduce el error aleatorio, pero no corrige el sesgo.
4. Respuesta abierta. Ejemplo: «¿Duermes lo suficiente?» (pregunta cargada, no cuantitativa); preguntar solo a quien está en la biblioteca (sesgo de selección); preguntar por la noche anterior (no representa lo habitual).

Ficha 2

1. A: media 8,15 h; 26,7 % duerme menos de 8 h (8 de 30); error de la media 0,41 h. B: media 7,77 h; 56,7 % (17 de 30); error 0,03 h. C: media 7,12 h; 86,7 % (26 de 30); error 0,62 h. Población: $\mu = 7{,}74$ h; 49,7 %.
2. La muestra B (aleatoria) es la más representativa: error de la media 0,03 h y distribución de F6 parecida a la población. A tiene sesgo de selección (voluntarios que van a la biblioteca: más estudiosos, que duermen más): sobrestima el sueño. C tiene sesgo por conglomerado: solo es 4.º, el curso que menos duerme: subestima el sueño del centro.
3. Márgenes: $n = 30$: $\frac{1}{\sqrt{30}} \approx 18{,}3\,\%$; $n = 100$: 10 %; $n = 400$: 5 %; $n = 1000$: $\approx 3{,}2\,\%$. La diferencia de B con la población en el % es $|56,7 - 49,7| = 7,0$ puntos, menor que 18,3: compatible con el azar. Con A la diferencia es 23,0 puntos y con C 37,0: mayores que 18,3, no son compatibles con el azar, señal de sesgo.
4. No: aumentar el tamaño reduce el error aleatorio pero no el sesgo; seguirían siendo solo personas de la biblioteca (como en la encuesta de 1936).

Ficha 3

1. Frecuencias absolutas: [1, 1, 15, 9, 4]; relativas: 3,3 %, 3,3 %, 50,0 %, 30,0 %, 13,3 %; acumuladas: [np.int64(1), np.int64(2), np.int64(17), np.int64(26), np.int64(30)].
2. Histograma con columnas de altura 1, 1, 15, 9 y 4 (el intervalo [7, 8) es el más alto).
3. Media 7,77 h (suma 233); mediana 7,5 h; moda 7,5 h (12 veces); $Q_1 = 7{,}5$ y $Q_3 = 8$ (medianas de las mitades de 15 datos: 8.º valor de cada mitad); RIC $= 0{,}5$ h.
4. Cumplen la recomendación (8 h o más) 13 de los 30: 6 con 8,0 h, 3 con 8,5 h, 3 con 9,0 h y 1 con 9,5 h, es decir, el 43,3 %. Cautelas: es una muestra de 30 personas (margen de error $\approx 18\,\%$), solo del IES Valle Claro, y las horas de sueño son declaradas.

Ficha 4

1. Línea A: media 25; mediana 25; $Q_1 = 24$; $Q_3 = 26$; rango 2; RIC 2; $\sigma \approx 0{,}77$ (varianza 0,6). Línea B: media 25; mediana 25; $Q_1 = 18$; $Q_3 = 32$; rango 30; RIC 14; $\sigma \approx 8{,}93$ (varianza 79,8).
2. A: mín. 24, Q_1 24, mediana 25, Q_3 26, máx. 26 (caja muy estrecha). B: mín. 10, Q_1 18, mediana 25, Q_3 32, máx. 40 (caja ancha).
3. $CV_A = \frac{0{,}77}{25} \cdot 100 \approx 3{,}1\,\%$; $CV_B = \frac{8{,}93}{25} \cdot 100 \approx 35{,}7\,\%$. La línea A es la más fiable: sus tiempos son casi iguales; con la línea B se puede tardar entre 10 y 40 min. La media sola no basta.
4. La media pasa a 30 y la desviación típica no cambia (0,77 y 8,93): sumar una constante desplaza los datos pero no su dispersión.

Ficha 5

1. Puntos (pantalla, nota): (2,7; 6,6), (2,1; 8,2), (1,0; 6,0), (5,1; 3,3), (2,5; 7,4), (1,8; 6,6), (3,5; 4,2), (3,6; 5,5), (2,0; 6,1), (4,6; 3,6), (2,7; 9,3) y (3,4; 5,6). A mayor pantalla, tendencia a menor nota.
2. Relación lineal negativa y moderada: $r = -0{,}56$ (la opción correcta es −0,56). No es muy fuerte: hay puntos alejados de la tendencia (por ejemplo, 2,7 h de pantalla con un 9,3).
3. Explicaciones alternativas: quienes usan más pantalla duermen menos (el sueño afecta a la nota); el curso (los mayores usan más pantalla y tienen asignaturas más difíciles); el tiempo de estudio, etc. Una correlación no prueba causa.
4. F, F, V, V. (Con $r = 0{,}9$ la relación es fuerte pero no implica causa ni «siempre»; $r \approx 0$ solo indica que no hay relación lineal; una «U» puede tener $r \approx 0$.)

Ficha 6

1. Pendiente: por cada hora más de sueño, la nota sube unos 1,02 puntos de media en esta muestra (relación, no causa). La ordenada -1,88 sería la nota prevista con 0 h de sueño: fuera del rango observado (5,5-9,5 h) y negativa, no tiene sentido.
2. 7 h: $-1{,}88 + 1{,}02 \cdot 7 = 5{,}26$, interpolación, razonable. 8,5 h: $-1{,}88 + 1{,}02 \cdot 8{,}5 = 6{,}79$, interpolación, razonable. 12 h: $10{,}36$, extrapolación, no razonable (supera el 10 y está fuera del rango observado).
3. Previsto: $-1{,}88 + 1{,}02 \cdot 7{,}5 = 5{,}77$. Residuo: $4{,}2 - 5{,}77 = -1{,}57$: la nota real es 1,57 puntos menor de lo que prevé la recta; la recta no explica todo, hay otros factores.
4. $r^2 = 0{,}31 \approx 31\,\%$: la recta explica solo un 31 % de la variación de la nota; el 69 % restante depende de otros factores (estudio, capacidad, motivación, azar...).

Ficha 7

1. Respuestas abiertas. Se valora que la pregunta sea estadística (con población y variable), que se razone el sesgo de la muestra, que las tablas y gráficos estén bien rotulados y que las conclusiones estén acotadas.
2. Sugerencia de revisión: comparar los resultados con los parámetros de F2 y con las otras muestras; usar $\frac{1}{\sqrt{30}} \approx 18\,\%$ como margen para proporciones.

Ficha 8

1. $\hat{p} = \frac{34}{40} = 0{,}85$; margen $\frac{1}{\sqrt{40}} \approx 15{,}8\,\%$: la proporción real podría estar entre 69 % y 100 %. Además, la cola de la cafetería no es una muestra aleatoria (sesgo: solo quien compra está en la cola). No se puede afirmar que el 85 % del alumnado compre bocadillo.
2. Media: $\frac{42}{6} = 7$. Desviaciones: $-1,\ 1,\ -2,\ 2,\ 0,\ 0$; cuadrados: $1, 1, 4, 4, 0, 0$; suma 10; $\sigma = \sqrt{\frac{10}{6}} \approx 1{,}29$. Ordenados: 5, 6, 7, 7, 8, 9: $Q_1 = 6, Q_3 = 8$, RIC $= 2$.
3. Ejemplos: ¿cómo se eligió la muestra? ¿Qué desayuna quien toma cereales (nivel socioeconómico, hábitos de estudio)? ¿Se compara con otro grupo? ¿Son notas autoinformadas?
4. Respuesta abierta. Debe incluir resultados (media de 7,74 h en la población, 7,77 h en la muestra aleatoria), la comparación con las muestras sesgadas y una frase como «no se puede afirmar que dormir más cause mejores notas».

Refuerzo

1. X: media $\frac{40}{6} \approx 6{,}67$; mediana 6,5; moda 6 y 8; rango 3. Y: media $\frac{40}{6} \approx 6{,}67$; mediana 6,5; moda ninguna; rango 7.
2. El grupo X: tiene el rango menor (3 frente a 7), sus datos están más agrupados.
3. No: es una muestra de conveniencia (quienes madrugan o llegan pronto), no representa al conjunto; hay sesgo de selección.
4. Una muestra buena es representativa y se elige al azar.

Ampliación

1. Las 10 notas más altas: 9,3; 8,7; 8,2; 8,0; 7,6; 7,5; 7,4; 6,9; 6,9; 6,8 (media 7,73); estos suelen dormir más. Las 10 más bajas: 3,3; 3,6; 4,2; 4,2; 4,9; 4,9; 4,9; 5,0; 5,1; 5,1 (media 4,52). Se acepta cualquier cálculo coherente con F5: lo importante es ver que la conclusión cambia según la submuestra.
2. Titulares opuestos: «Quien tiene buenas notas duerme más de 8 h» frente a «Quien suspende duerme poco»; ambos ciertos en su submuestra, sesgo de selección según la variable de respuesta.
3. Conjunto 2: forma curva (parábola); conjunto 4: nueve puntos con $x = 8$ y uno aislado en $x = 19$; ambos tienen $r \approx 0{,}82$ y recta $\hat{y} \approx 3 + 0{,}5x$, pero la relación lineal no describe bien ninguno.
4. Siempre hay que dibujar la nube de puntos (forma) y comprobar la influencia de valores atípicos; además, valorar que r solo mide relación lineal y no causalidad.

Errores frecuentes

- Pensar que una muestra más grande corrige siempre el sesgo.
- Confundir correlación con causalidad, o creer que $r \approx 0$ significa ausencia de toda relación.
- Calcular la desviación típica sin elevar al cuadrado o sin dividir entre n antes de la raíz.
- Calcular cuartiles con una regla distinta sin avisar o incluir la mediana en las mitades de datos impares.
- Extrapolar fuera del rango observado (por ejemplo, 12 h de sueño) sin cuestionarlo.
- Comparar solo medias y olvidar la dispersión.

Criterios para valorar respuestas abiertas

- Se acepta cualquier cuartil que siga un método explícito (aquí, mediana de las mitades); la calculadora o la hoja de cálculo pueden dar valores algo distintos.
- En las conclusiones se valora que sean proporcionadas a los datos, comparen con la población y cierren con una limitación clara.
- Las tablas y gráficos se evalúan por el rotulado, la escala y la coherencia con los datos, no por el estilo.

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

09 ¿Qué riesgo estamos dispuestos a asumir?

PREGUNTA GUÍA

¿Cómo usamos la probabilidad para comparar riesgos sin confundir posibilidad con certeza?

CURSO	4.º ESO · Matemáticas A
SESIONES	8 sesiones · 3.º trimestre
SENTIDOS PRIORITARIOS	E · Sentido estocástico
COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CE1, CE2, CE3, CE6, CE8
PRODUCTO FINAL	Informe de probabilidad para una decisión
CRITERIOS DE EVALUACIÓN	1.1, 1.2, 2.2, 3.1, 6.1, 8.1

Contexto, reto y sentido

El **Gabinete de Riesgos** del IES (ficticio) ha recibido tres consultas de la dirección: ¿conviene aislar a quien da positivo en un test rápido de gripe?, ¿qué hacer con la excursión de dos días si hay previsión de lluvia?, ¿merece la pena un seguro para el móvil del alumnado? Cada decisión tiene incertidumbre, y en cada una hay una forma de equivocarse: confundir «posible» con «seguro», olvidar que dos sucesos pueden depender uno del otro o fijarse solo en la media y no en el peor caso.

La situación moviliza el sentido estocástico de 4.º ESO: lenguaje del riesgo (probabilidad, riesgo absoluto y relativo, frecuencias naturales), espacios muestrales y recuento, experimentos compuestos con diagramas de árbol, probabilidades condicionadas de forma intuitiva, esperanza matemática como coste medio, comparación de opciones con criterios explícitos y simulación con hoja de cálculo. Los datos de los tres escenarios son ficticios; las probabilidades de los juegos de azar de la escala de F3 son reales y se obtienen por recuento.

Reto

Elaborar un informe de probabilidad para una decisión: modelizar un escenario con espacio muestral y árbol, calcular probabilidades y costes medios de dos o tres opciones, contrastar con una simulación y recomendar una opción diciendo qué riesgo se asume.

Producto final

Informe de probabilidad para una decisión.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- **1.1** Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.
- **1.2** Seleccionar herramientas y estrategias elaboradas valorando su eficacia e idoneidad en la resolución de problemas.
- **2.2** Seleccionar las soluciones óptimas de un problema valorando tanto la corrección matemática como sus implicaciones desde diferentes perspectivas.
- **3.1** Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada estudiando patrones, propiedades y relaciones.
- **6.1** Proponer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.
- **8.1** Comunicar ideas, conclusiones, conjeturas y razonamientos matemáticos utilizando diferentes medios, con coherencia, claridad y terminología apropiada.

Saberes básicos prioritarios

E
Sentido estocástico

- Lenguaje del riesgo: probabilidad, riesgo absoluto y relativo, frecuencias naturales y comunicación de la incertidumbre.
- Espacios muestrales y técnicas de recuento (principio de multiplicación) en experimentos simples y compuestos.
- Experimentos compuestos: diagramas de árbol, probabilidad de un camino por producto y de un suceso por suma; suceso contrario.
- Probabilidad condicionada de forma intuitiva con tablas y árboles de frecuencias: $P(A|B)$ distinto de $P(B|A)$.
- Toma de decisiones: coste medio (esperanza matemática), peor caso y dispersión; simulación con hoja de cálculo y ley de los grandes números.

F
Sentido socioafectivo

- Gestión de la incertidumbre y del miedo al riesgo: distinguir lo posible de lo probable y decidir con criterios explícitos.
- Respeto de las preferencias de riesgo de cada persona y argumentación en equipo.

Objetivos didácticos

- ✓ Calcular probabilidades simples y compuestas.
- ✓ Usar diagramas de árbol y tablas.
- ✓ Comparar riesgos y comunicar probabilidades con rigor.
- ✓ Tomar decisiones justificadas según criterios explícitos.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Lenguaje del riesgo

Evidencia: Ficha 1: diagnóstico, traducción de expresiones del lenguaje cotidiano a probabilidades, riesgo absoluto y relativo con el medicamento de F4 y escala de F3.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Espacios muestrales

Evidencia: Ficha 2: recuento de PIN y de la Primitiva, probabilidades con dos dados y espacio muestral de dos días de lluvia (sucesos no equiprobables).

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Árboles en dos etapas

Evidencia: Ficha 3: árbol de la excursión (F6): probabilidades de los caminos y de los sucesos; árbol del seguro en dos años con huecos.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Probabilidades condicionadas solo de forma intuitiva si procede

Evidencia: Ficha 4: frecuencias naturales del test rápido (F5), probabilidades condicionadas, efecto de la prevalencia y segundo test.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Comparación de dos opciones

Evidencia: Ficha 5: costes medios y peor caso de los planes de la excursión y del seguro del móvil, y elección con criterios explícitos.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Simulación tecnológica

Evidencia: Ficha 6: contraste de la simulación de 1 000 repeticiones (F9) con las probabilidades teóricas y simulación manual con dados.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Informe de riesgo

Evidencia: Ficha 7: borrador del informe del equipo con escenario, modelo, cálculos, simulación y recomendación.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

8

SESIÓN 8

Reto individual

Evidencia: Ficha 8: reto individual con una aplicación meteorológica (condicionada), un seguro de bici y una decisión justificada.

Ficha: Anexo 3 · ficha 8

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Dados/cartas · simulador/hoja de cálculo · árboles

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Experimentos equiprobables de dos etapas.

Ampliación

Anexo 9

Diseñar dos juegos con igual probabilidad de ganar pero distinta distribución de premios.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial
Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa
Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final
Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Reformulación de cada escenario como experimento aleatorio: identificación del espacio muestral, de las etapas y de las probabilidades de partida con palabras y con un árbol.	Fichas 1 y 2 / lista de cotejo
1.2	Elección y uso de la herramienta adecuada: recuento, tabla de frecuencias naturales, árbol con producto y suma, esperanza o simulación.	Fichas 3, 4 y 6 / escala de valoración
2.2	Valoración de la solución óptima desde varias perspectivas: coste medio, peor caso, probabilidad de pérdida alta y preferencia de riesgo del centro.	Fichas 5 y 8 / rúbrica
3.1	Formulación y comprobación de conjeturas: $P(A\|B)$ no es $P(B\|A)$, la prevalencia cambia el valor de un test positivo y la media sola no basta para decidir.	Fichas 4 y 5 / rúbrica
6.1	Aplicación de la probabilidad a decisiones reales del centro (salud, excursión, seguro) con datos ficticios y con probabilidades reales de juegos de azar.	Informe (Anexo 4) y Ficha 7 / rúbrica
8.1	Comunicación de probabilidades y riesgos con lenguaje preciso (fracciones, porcentajes, frecuencias naturales) y recomendación argumentada.	Informe (Anexo 4) y Ficha 8 / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Informe, árboles, simulación y recomendación.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 9 · ¿Qué riesgo estamos dispuestos a asumir?

ALUMNADO

El lunes aparecen 84 positivos en un test rápido de gripe en el instituto y alguien propone mandar a casa a todo el mundo. Pero el test no es perfecto: ¿cuántos de esos 84 estarán realmente enfermos? Además hay una excursión de dos días con un 30 % de probabilidad de lluvia el sábado, y un seguro de móvil que cuesta 25 € al año. ¿Merece la pena? Vais a convertiros en el Gabinete de Riesgos del instituto: dibujaréis árboles, contaréis casos, compararéis costes medios y peores casos, simularéis mil excursiones en la hoja de cálculo y recomendaréis una opción diciendo claramente qué riesgo se asume.

> *¿Cómo usamos la probabilidad para comparar riesgos sin confundir posibilidad con certeza?*

Vuestro reto

Elaborar un informe de probabilidad para una decisión: modelizar un escenario con espacio muestral y árbol, calcular probabilidades y costes medios de dos o tres opciones, contrastar con una simulación y recomendar una opción diciendo qué riesgo se asume.

Lo que vais a producir

Informe de probabilidad para una decisión.

Hoja de ruta · 8 sesiones

1. Traducimos el lenguaje del riesgo a probabilidades y distinguimos riesgo absoluto y relativo.
2. Construimos espacios muestrales y contamos casos.
3. Dibujamos árboles de dos etapas y calculamos probabilidades.
4. Interpretamos probabilidades condicionadas con frecuencias naturales.
5. Comparamos opciones con coste medio y peor caso.
6. Simulamos con hoja de cálculo y contrastamos con la teoría.
7. Redactamos el informe de riesgo del equipo.
8. Resolvemos el reto individual.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Calcular probabilidades simples y compuestas.
- ✓ Usar diagramas de árbol y tablas.
- ✓ Comparar riesgos y comunicar probabilidades con rigor.
- ✓ Tomar decisiones justificadas según criterios explícitos.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 9 · ¿Qué riesgo estamos dispuestos a asumir?

ALUMNADO

Tres escenarios de decisión (test rápido, excursión y seguro del móvil), vocabulario del riesgo, una escala de probabilidades con casos reales, riesgo absoluto y relativo, los árboles de dos escenarios, la tabla del seguro, las fórmulas y una simulación de 1 000 excursiones con su protocolo para la hoja de cálculo. Los datos de los escenarios son ficticios.

F1 Tres decisiones del Gabinete de Riesgos

ESTUDIO DE CASO

E1 · Test rápido de gripe. En una semana con gripe, el 4 % del alumnado está enfermo. El test «FluCheck» da positivo al 90 % de las personas enfermas (**sensibilidad**) y negativo al 95 % de las sanas (**especificidad**). Se hace el test a 1 000 alumnos y alumnas. ¿Qué probabilidad hay de estar enfermo si el test da positivo?

E2 · Excursión de dos días. La previsión da un 30 % de probabilidad de lluvia el sábado. Si llueve el sábado, la probabilidad de lluvia el domingo es del 50 %; si el sábado está seco, es del 20 %. Cada día de lluvia con la actividad al aire libre cuesta 300 € de pérdidas (autobús y monitores ya pagados). **Plan A:** hacer la ruta exterior los dos días sin reserva. **Plan B:** reservar un pabellón cubierto los dos días: 250 € seguros. **Plan C:** reservar el pabellón solo el domingo: 120 €, y el sábado se asume el riesgo.

E3 · Seguro del móvil. Un móvil de 300 €. Probabilidad de avería o pérdida cubrible en un año: 8 %. El seguro cuesta 25 € al año y, si hay siniestro, hay que pagar una franquicia de 40 € (el seguro repone el móvil). Sin seguro, un siniestro cuesta 300 €.

Fuente: Escenarios ficticios creados para el aula. Todos los datos son inventados.

¿En cuál de los tres escenarios crees que la media del coste decide por sí sola? ¿En cuál importa más el peor caso?

F2 Vocabulario del riesgo

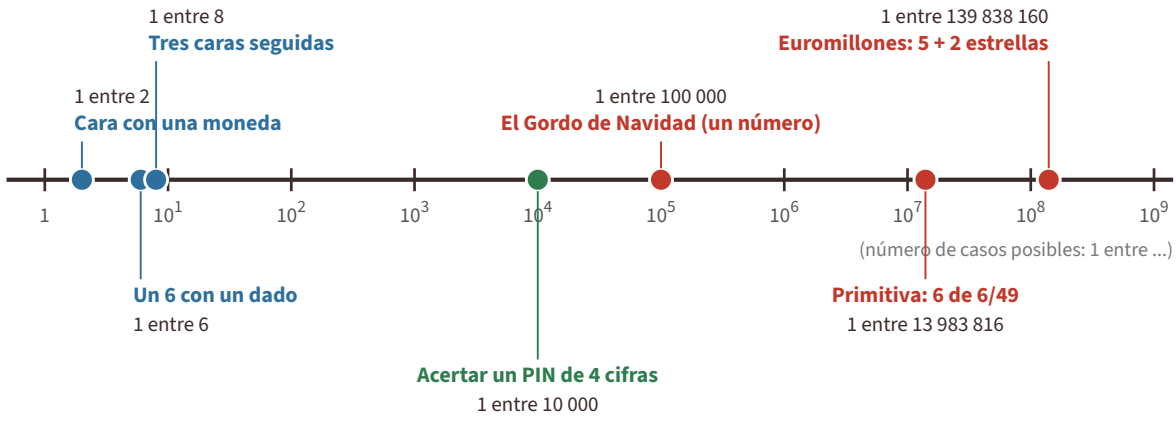
GLOSARIO

Probabilidad	Número entre 0 y 1 (o entre 0 % y 100 %) que mide la posibilidad de un suceso.
Riesgo absoluto	Probabilidad del suceso en un grupo (por ejemplo, 2 de cada 1 000).
Riesgo relativo	Cociente entre el riesgo de dos grupos. Puede impresionar mucho aunque el riesgo absoluto sea pequeño.
Frecuencias naturales	Expresar probabilidades como «de cada 1 000 personas…» para razonar con recuentos.
Sensibilidad / especificidad	Probabilidad de que el test dé positivo en un enfermo / negativo en una persona sana.
Prevalencia	Porcentaje de personas de la población que tienen la enfermedad.
Probabilidad condicionada	$P(A\|B)$: probabilidad de A sabiendo que ha ocurrido B.
Esperanza o coste medio	Valor medio a largo plazo: suma de cada valor por su probabilidad.
Probabilidad de precipitación (AEMET)	Probabilidad de que en un punto cualquiera de la zona y en el periodo indicado se recojan 0,1 mm de lluvia o más.

Fuente: Elaboración propia. La definición de probabilidad de precipitación sigue el criterio de la AEMET.

F3 Escala de probabilidades: de lo corriente a lo extremo

ESQUEMA



Fuente: Elaboración propia. Valores obtenidos por recuento: $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ *en la Primitiva;* $\binom{50}{5} \cdot \binom{12}{2} = 139\,838\,160$ *en el Euromillones (5 números de 50 y 2 estrellas de 12); 100 000 números en el Gordo de Navidad. Escala logarítmica. Reglas de los sorteos conocidas al elaborar el material; compruébalas si han cambiado.*

Cada marca es 10 veces menos probable que la anterior. ¿Cuántas veces es más fácil sacar un 6 con un dado que acertar la Primitiva?

F4 Riesgo absoluto y riesgo relativo (ejemplo ficticio)

DATOS

Medicamento	Personas con efecto adverso grave (de cada 1 000 personas)	Titular posible
Antiguo	2 de cada 1 000	—
Nuevo	1 de cada 1 000	«El nuevo medicamento reduce el riesgo a la mitad»

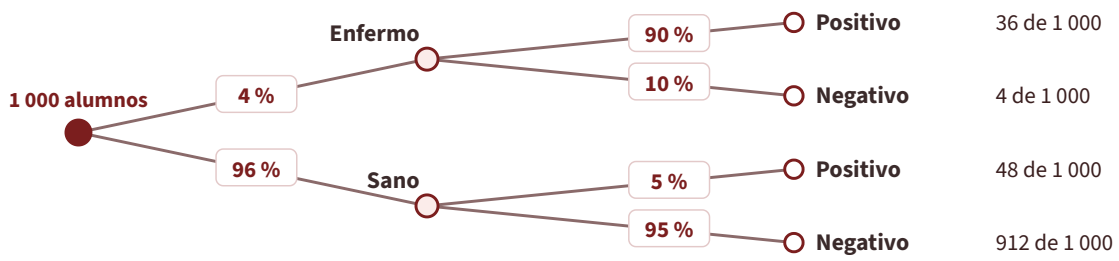
Reducción relativa del riesgo: $\frac{2-1}{2} = 50\,\%$. Reducción absoluta: $2 - 1 = 1$ por cada 1 000 personas, es decir, $0{,}1$ puntos porcentuales.

Fuente: Ejemplo ficticio creado para el aula.

Los dos números describen lo mismo. ¿Cuál asusta o ilusiona más? ¿Cuál informa mejor?

F5 E1 · El test rápido con frecuencias naturales

ESQUEMA



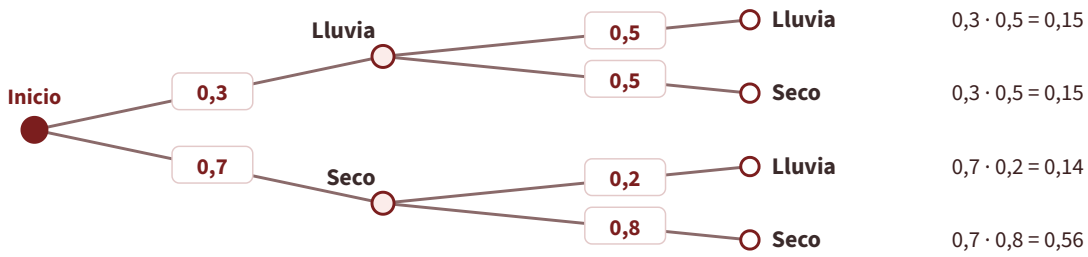
Positivos: $36 + 48 = 84$. De los 84 positivos, solo 36 están enfermos: $P(\text{enfermo} \mid \text{positivo}) = \frac{36}{84} = \frac{3}{7} \approx 43\,\%$.

Fuente: Árbol de elaboración propia a partir de los datos de F1 (prevalencia 4 %, sensibilidad 90 %, especificidad 95 %).

Compara $P(\text{positivo} \mid \text{enfermo}) = 90\,\%$ con $P(\text{enfermo} \mid \text{positivo}) \approx 43\,\%$. ¿Por qué no son iguales?

F6 E2 · Árbol de la excursión de dos días

ESQUEMA



Las cuatro probabilidades suman $0{,}15 + 0{,}15 + 0{,}14 + 0{,}56 = 1$. La probabilidad de que llueva al menos un día es $1 - 0{,}56 = 0{,}44$.

Fuente: Árbol de elaboración propia a partir de los datos de F1.

El domingo no tiene siempre la misma probabilidad de lluvia: depende de lo que haya pasado el sábado.

F7 E3 · Costes del seguro del móvil

DATOS

Opción	Sin siniestro (92 %)	Con siniestro (8 %)	Coste medio al año
Sin seguro	0 €	300 € (reponer el móvil)	—
Con seguro	25 € (prima)	25 € + 40 € (franquicia) = 65 €	—

Fuente: Datos ficticios creados para el aula (móvil de 300 €, probabilidad de siniestro 8 % al año).

Completa la última columna en la ficha 5. ¿Qué opción te da más tranquilidad?

F8 Fórmulas clave y ejemplo resuelto

TEXTO

- **Laplace:** $P(S) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$ si los casos son igual de probables. **Contrario:** $P(\overline{S}) = 1 - P(S)$.
- **Recuento:** si una elección tiene m opciones y otra n, juntas tienen $m \cdot n$. Un PIN de 4 cifras: $10^4 = 10\,000$ casos.
- **Árbol:** la probabilidad de un camino es el **producto** de las de sus ramas; la de un suceso con varios caminos es la **suma**.
- **Condicionada:** $P(A|B) = \dfrac{P(A \text{ y } B)}{P(B)}$. Con frecuencias naturales: casos de A y B entre casos de B.
- **Esperanza:** si un resultado cuesta x_i con probabilidad p_i, el coste medio es $\sum x_i\, p_i$.
- **Dispersión** de un coste: $\sigma = \sqrt{\sum p_i x_i^2 - \mu^2}$.

Ejemplo resuelto. Un juego paga 12 € con probabilidad $\frac{1}{10}$ y 0 € el resto. Coste medio para quien lo organiza: $12 \cdot \frac{1}{10} = 1{,}20$ €. Si la entrada cuesta 1 €, el juego es desfavorable para quien juega en 0,20 € por partida.

Fuente: Elaboración propia.

F9 E2 · Simulación de 1 000 excursiones en la hoja de cálculo

DATOS

Resultado	Veces que salió	Probabilidad teórica
Lluvia ambos días (LL)	153	0,15
Lluvia sábado, seco domingo (LS)	163	0,15
Seco sábado, lluvia domingo (SL)	128	0,14
Seco ambos días (SS)	556	0,56

Protocolo para la hoja de cálculo. En la celda A2: =ALEATORIO(); en B2: =SI(A2<0,3;"L";"S") (sábado). En C2: =ALEATORIO(); en D2: =SI(B2="L";SI(C2<0,5;"L";"S");SI(C2<0,2;"L";"S")) (domingo). En E2: =B2&D2 (resultado). Copia las filas hasta la 1001 y cuenta con =CONTAR.SI(E:E;"LL"). Costes del plan A: =300*(B2="L")+300*(D2="L"). En una hoja en inglés, RAND(), IF y COUNTIF.

Fuente: Simulación generada con ordenador para el aula (1 000 repeticiones).

¿Coinciden exactamente las veces con $1\,000 \cdot p$? Si repites la simulación, ¿salen los mismos números?

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 9 · ¿Qué riesgo estamos dispuestos a asumir?

ALUMNADO

FICHA 1 El lenguaje del riesgo

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Usa F1, F2, F3 y F4.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

«1 de cada 20» equivale a una probabilidad del…

☐ 2 % ☐ 5 % ☐ 20 %

La probabilidad de sacar un número par con un dado de 6 caras es…

☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{6}$

Si la probabilidad de un suceso es 0,3, la de su contrario es…

☐ 0,3 ☐ 0,7 ☐ 1,3

2 **Relaciona cada expresión con la probabilidad que mejor la representa.**

1 Casi seguro ●	● a 30 %
2 Muy improbable ●	● b $\approx 99\,\%$
3 Tan probable como no ●	● c 5 %
4 1 de cada 20 ●	● d $\approx 1\,\%$
5 Probabilidad de 0,3 ●	● e 50 %

3 **En F4, ¿qué diferencia hay entre «reduce el riesgo a la mitad» y «1 persona menos de cada 1 000»? Calcula la reducción relativa y la absoluta y decide cuál es más honesta como titular.**

4 **Con la escala de F3, ¿cuántas veces es más probable sacar un 6 con un dado que acertar la Primitiva? Expresa también $\frac{1}{13\,983\,816}$ en notación científica.**

FICHA 2 Espacios muestrales y recuento

Sesión 2

Usa F3 y F8. Puedes usar calculadora.

1 **PIN de 4 cifras. ¿Cuántos hay? ¿Cuántos tienen las 4 cifras distintas? ¿Probabilidad de acertar a la primera si sabes que las cifras son distintas?**

2 **Primitiva: se eligen 6 números de 49 sin orden. Calcula $\binom{49}{6} = \frac{49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$ y la probabilidad de un boleto. Compara con el Gordo (1 entre 100 000).**

3 **Con dos dados, escribe cuántos resultados hay y calcula $P(\text{suma} \geq 10)$ y $P(\text{suma impar})$.**

4 **En E2, el espacio muestral de los dos días es {LL, LS, SL, SS}. ¿Son sucesos igual de probables? Explica por qué no se puede usar Laplace.**

FICHA 3 Árboles de dos etapas

Sesión 3

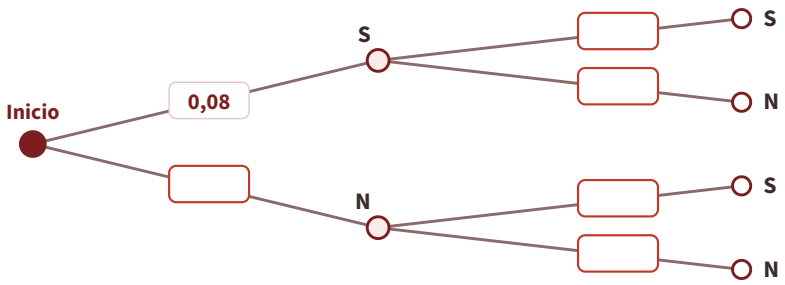
Usa F6 y F8.

1 **Con el árbol de F6 completa la tabla.**

Suceso	Caminos	Probabilidad
Llueve los dos días		
Llueve exactamente un día		
No llueve ningún día		
Llueve al menos un día		
Llueve el domingo		

2 **Comprueba que las probabilidades de los cuatro caminos suman 1 y explica por qué la probabilidad de lluvia el domingo (0,29) no es 0,3 ni 0,5 ni 0,2.**

3 **E3 en dos años. S = siniestro y N = sin siniestro, con $P(S) = 0{,}08$ cada año (independientes). Completa el árbol.**



4 **Calcula con el árbol: $P(\text{ningún siniestro en 2 años})$, $P(\text{exactamente uno})$ y $P(\text{dos})$. Comprueba la suma.**

FICHA 4 Probabilidades condicionadas

Sesión 4

Usa F5. Razona con frecuencias naturales: de cada 1 000 personas…

1 **Completa la tabla de 1 000 alumnos de E1 (prevalencia 4 %, sensibilidad 90 %, especificidad 95 %).**

	Test positivo	Test negativo	Total
Enfermos			40
Sanos			960
Total			1 000

2 **Calcula $P(\text{positivo} \mid \text{enfermo})$ y $P(\text{enfermo} \mid \text{positivo})$. Explica por qué son distintas y qué error se comete al confundirlas.**

3 **En otra semana la prevalencia sube al 20 %. Completa la tabla (mismo test) y calcula la nueva $P(\text{enfermo} \mid \text{positivo})$.**

	Test positivo	Test negativo	Total
Enfermos			200
Sanos			800
Total			1 000

4 **Si a las personas con un primer positivo se les repite el test (independiente del anterior), ¿cómo cambiaría la probabilidad de estar enfermo? Estímala con las 84 personas positivas de F5.**

FICHA 5 Comparamos dos opciones

Sesión 5

Usa F1, F6, F7 y F8. Un equipo calcula y otro revisa.

1 **E2. Completa los costes de cada plan en cada resultado y calcula el coste medio.**

Resultado	Probabilidad	Plan A	Plan B	Plan C
LL	0,15			
LS	0,15			
SL	0,14			
SS	0,56			
Coste medio				
Peor caso				

2 **E3. Calcula el coste medio al año con y sin seguro y la diferencia. ¿Qué opción cuesta menos de media? ¿Cuál tiene el peor caso más suave?**

3 **Si el centro no puede perder más de 300 € en ninguna situación, ¿qué plan de E2 elegiría? ¿Y si quisiera minimizar el coste medio?**

4 **Redacta una recomendación para E2 o E3 diciendo qué riesgo se asume y qué criterio se usa (coste medio, peor caso o ambos).**

FICHA 6 Simulación y probabilidad

Sesión 6

Usa F9. Se puede usar hoja de cálculo; si no, trabajad con dados.

1 **Completa con la simulación de F9: frecuencias relativas, probabilidad teórica y diferencia.**

Resultado	Frecuencia relativa	Probabilidad teórica	Diferencia
LL			
LS			
SL			
SS			

2 **A partir de la simulación, calcula el coste medio del plan A y compáralo con el valor teórico.**

3 **Simulación manual (sin ordenador) de E2 con un dado de 10 caras o con la tabla de números aleatorios: sábado llueve si sale 1, 2 o 3. Si llovió, domingo llueve con 1-5; si no llovió, con 1-2. Haced 20 repeticiones.**

Repetición	Dado sábado	Resultado sábado	Dado domingo	Resultado domingo

4 **¿Cuántas repeticiones habría que hacer para fiarse más de la simulación? ¿Por qué no sale exactamente 0,56?**

FICHA 7 Borrador del informe

Sesión 7

Trabajad en equipo con roles: coordinación, cálculos, árbol y redacción. Elegid E1, E2 o E3.

1 **Escenario elegido y modelo: espacio muestral, etapas, probabilidades de partida y supuestos.**

2 **Árbol o tabla con las probabilidades y los cálculos (producto y suma).**

3 **Comparación de opciones: coste medio, peor caso y contraste con la simulación.**

Opción	Coste medio	Peor caso	Probabilidad de pérdida alta

4 **Recomendación, riesgo asumido y límites del modelo.**

FICHA 8 Reto individual

Sesión 8

Resuelve sin ayuda del equipo. Puedes usar calculadora.

1 **En abril llueve el 20 % de los días. Una aplicación acierta el 90 % de los días de lluvia (dice «lluvia») y se equivoca el 15 % de los días secos (dice «lluvia»). En 1 000 días, ¿cuántos días llueve y cuántos dice la aplicación «lluvia»? Calcula $P(\text{llueve} \mid \text{dice lluvia})$.**

2 **Una bici de 600 € tiene un 5 % de probabilidad de robo en un año. El seguro cuesta 40 € y deja 100 € de franquicia. Calcula el coste medio con y sin seguro y el peor caso de cada opción.**

3 **Decide si contratarías el seguro de la bici. Justifica con una probabilidad, un coste medio y una frase sobre el riesgo que asumes.**

4 **Explica con tus palabras por qué un test positivo no equivale a estar enfermo.**

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 9 · ¿Qué riesgo estamos dispuestos a asumir?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Informe de probabilidad para una decisión del Gabinete de Riesgos del IES.

Título y equipo

Escenario y supuestos

Qué se decide, datos de partida y supuestos.

Espacio muestral y recuento

Resultados posibles y casos.

Árbol o tabla de frecuencias

Con probabilidades en las ramas.

Cálculos

Producto, suma y condicionada con fracciones.

Simulación

Datos y comparación con la teoría.

Comparación de opciones

Coste medio, peor caso y criterio.

Recomendación y límites

Opción elegida, riesgo que se asume y qué no sabemos.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 9 · ¿Qué riesgo estamos dispuestos a asumir?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Informe de probabilidad para una decisión**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] El escenario está descrito con sus datos y supuestos.
- [ ] El espacio muestral y las etapas del experimento están bien identificados.
- [ ] El árbol tiene todas las ramas con probabilidades y las probabilidades finales suman 1.
- [ ] Se multiplican las probabilidades a lo largo de los caminos y se suman los caminos de un mismo suceso.
- [ ] Se distingue entre $P(A|B)$ y $P(B|A)$ cuando procede, con frecuencias naturales.
- [ ] Se calculan el coste medio y el peor caso de cada opción.
- [ ] Se contrasta con una simulación o una repetición experimental y se comenta la diferencia.
- [ ] La recomendación dice claramente qué riesgo se asume y con qué criterio.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 9 · ¿Qué riesgo estamos dispuestos a asumir?

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Informe de probabilidad para una decisión**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 9 · ¿Qué riesgo estamos dispuestos a asumir?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé usar árboles y tablas para calcular probabilidades compuestas y condicionadas.	○	○	○	○
Sé comparar dos opciones con el coste medio y el peor caso y explicar mi decisión.	○	○	○	○
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	○	○	○	○
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	○	○	○	○
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	○	○	○	○
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	○	○	○	○

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 9 · ¿Qué riesgo estamos dispuestos a asumir?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Experimentos equiprobables de dos etapas, con árboles parcialmente dibujados.

Ejemplo modelado

Se lanzan dos monedas. Espacio muestral: CC, CX, XC, XX (4 casos igual de probables). $P(\text{dos caras}) = \frac{1}{4}$. Con árbol: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Glosario y símbolos

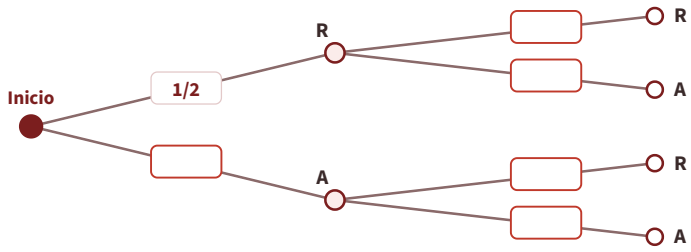
$P(S)$: probabilidad de S. Casos favorables / casos posibles. Árbol: **se multiplica en el camino y se suma entre caminos**. R = roja, A = azul.

1 **Se lanza una moneda y después un dado de 6 caras. Completa el espacio muestral y calcula $P(\text{cara y número par})$.**

Espacio muestral: C1, C2, C3, C4, C5, C6, _____, _____, _____, _____, _____, _____ (_____ casos). Favorables: _____. $P =$ _____

.

2 **Bolsa con 1 bola roja y 1 azul; se saca una, se devuelve y se saca otra. Completa el árbol (primera rama escrita).**



3 **Calcula $P(\text{dos bolas del mismo color})$ y $P(\text{colores distintos})$.**

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 9 · ¿Qué riesgo estamos dispuestos a asumir?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Dos juegos con la misma probabilidad de ganar y distinto riesgo

Dos juegos pueden dar la misma probabilidad de ganar y el mismo premio medio y, sin embargo, no ser iguales: uno puede dar premios más repartidos y otro concentrarlos. Eso es riesgo. Diseñad dos juegos con entrada de 1 € y probabilidad de ganar algo de $\frac{1}{4}$, con la misma ganancia media, pero con distinta distribución de premios, y compárad su dispersión.

Pasos

1. Juego 1: gana con probabilidad $\frac{1}{4}$ y recibe siempre 4 €. Calcula la ganancia media y la desviación típica del premio recibido (0 € o 4 €).
2. Juego 2: gana con probabilidad $\frac{1}{4}$; después se lanza una moneda: cara, 1 €; cruz, 7 €. Calcula la ganancia media y la desviación típica.
3. Diseña un Juego 3 con $P(\text{ganar}) = \frac{1}{4}$ y el mismo premio medio, con premios 2 € y 6 € repartidos como quieras. Calcula su desviación típica.
4. Generaliza: si dos juegos tienen la misma media, ¿qué indica la desviación típica sobre el riesgo? ¿Para quién es mejor cada uno?

1 **Tabla de comparación.**

Juego	Premio recibido y probabilidad	Media	σ
1			
2			
3			

Entrega

Los tres juegos con su distribución, medias y desviaciones típicas, y una conclusión escrita sobre la relación entre dispersión y riesgo.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 9 · ¿Qué riesgo estamos dispuestos a asumir?

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: 5 %; $\frac{1}{2}$ (3 pares de 6); 0,7.
2. Casi seguro → $\approx 99\,\%$; muy improbable → $\approx 1\,\%$; tan probable como no → 50 %; 1 de cada 20 → 5 %; probabilidad de 0,3 → 30 %.
3. Reducción relativa: $\frac{2-1}{2} = 50\,\%$. Reducción absoluta: 1 por cada 1 000 (0,1 puntos porcentuales). La relativa suena enorme; la absoluta es más honesta porque dice cuántas personas se benefician (1 de cada 1 000). El titular ideal da los dos.
4. $\frac{13\,983\,816}{6} \approx 2\,330\,636$ veces más probable. $\frac{1}{13\,983\,816} \approx 7{,}15 \cdot 10^{-8}$.

Ficha 2

1. PIN: $10^4 = 10\,000$. Con cifras distintas: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$; $P = \frac{1}{5040} \approx 0{,}0002$.
2. $\binom{49}{6} = \frac{10\,068\,347\,520}{720} = 13\,983\,816$. $P = \frac{1}{13\,983\,816} \approx 7{,}15 \cdot 10^{-8}$. El Gordo es $\frac{13\,983\,816}{100\,000} \approx 140$ veces más probable.
3. $6 \cdot 6 = 36$ resultados. Suma ≥ 10: $3 + 2 + 1 = 6$ casos → $\frac{1}{6}$. Suma impar: 18 casos → $\frac{1}{2}$.
4. No: $P(LL) = 0{,}15, P(LS) = 0{,}15, P(SL) = 0{,}14, P(SS) = 0{,}56$. Laplace exige casos igual de probables; aquí la lluvia del domingo depende de la del sábado.

Ficha 3

1. LL: $0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15$. Exactamente un día: LS + SL $= 0{,}15 + 0{,}14 = 0{,}29$. Ningún día: $0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$. Al menos un día: $1 - 0{,}56 = 0{,}44$ ($0{,}15 + 0{,}29$). Lluvia el domingo: LL + SL $= 0{,}15 + 0{,}14 = 0{,}29$.
2. Suma: $0{,}15 + 0{,}15 + 0{,}14 + 0{,}56 = 1$. La lluvia del domingo no es 0,3, 0,5 ni 0,2 porque es una mezcla ponderada de 0,5 (si llovió el sábado, probabilidad 0,3) y 0,2 (si no llovió, probabilidad 0,7): $0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}29$.
3. Árbol: S 0,08 y N 0,92 en el primer año; en el segundo año, otra vez S 0,08 y N 0,92 en cada rama (independencia). Hojas: SS 0,0064; SN 0,0736; NS 0,0736; NN 0,8464.
4. Ninguno: $0{,}92^2 = 0{,}8464$. Exactamente uno: $2 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92 = 0{,}1472$. Dos: $0{,}08^2 = 0{,}0064$. Suma: $0{,}8464 + 0{,}1472 + 0{,}0064 = 1$. (Al menos uno: 0,1536.)

Ficha 4

1. Enfermos: positivos 36, negativos 4. Sanos: positivos 48 (5 % de 960), negativos 912. Totales: positivos 84, negativos 916.
2. $P(\text{positivo}|\text{enfermo}) = \frac{36}{40} = 90\,\%$. $P(\text{enfermo}|\text{positivo}) = \frac{36}{84} = \frac{3}{7} \approx 42{,}9\,\%$. Son distintas porque tienen distinta base: la primera se calcula entre los 40 enfermos y la segunda entre los 84 positivos, en los que hay muchos falsos positivos (48). Confundirlas es el error de la «inversión de la condicional».
3. Enfermos 200: positivos 180, negativos 20. Sanos 800: positivos 40, negativos 760. Totales: 220 y 780. $P(\text{enfermo}|\text{positivo}) = \frac{180}{220} \approx 81{,}8\,\%$. Con más prevalencia, un positivo es más fiable.
4. Entre los 84 positivos: 36 enfermos y 48 sanos. Segundo test: de los 36 enfermos dan positivo $0{,}9 \cdot 36 = 32{,}4$; de los 48 sanos, $0{,}05 \cdot 48 = 2{,}4$. $P = \frac{32{,}4}{34{,}8} \approx 93{,}1\,\%$. Repetir el test mejora mucho la certeza (si los errores son independientes).

Ficha 5

1. Plan A: LL 600, LS 300, SL 300, SS 0 → media $0{,}15 \cdot 600 + 0{,}15 \cdot 300 + 0{,}14 \cdot 300 + 0 = 90 + 45 + 42 = 177$ €; peor caso 600 €. Plan B: 250 € en todos los casos → media 250 €; peor caso 250 €. Plan C: LL 420, LS 420, SL 120, SS 120 → media $0{,}15 \cdot 420 + 0{,}15 \cdot 420 + 0{,}14 \cdot 120 + 0{,}56 \cdot 120 = 63 + 63 + 16{,}8 + 67{,}2 = 210$ €; peor caso 420 €.
2. Sin seguro: $0{,}08 \cdot 300 = 24$ €. Con seguro: $25 + 0{,}08 \cdot 40 = 28{,}20$ €. Diferencia: 4,20 € más caro de media con seguro. Pero el peor caso sin seguro es 300 € y con seguro 65 €.
3. Con un límite de 300 € en todas las situaciones, solo el plan B (250 €) lo cumple. Para minimizar el coste medio, el plan A (177 €).
4. Respuesta abierta. Debe nombrar el criterio (por ejemplo, «elegimos B porque el peor caso es 250 € y el centro no soporta 600 €»), mencionar el coste medio y reconocer el riesgo asumido (en A hay un 15 % de perder 600 €).

Ficha 6

1. Frecuencias relativas: LL 0,153; LS 0,163; SL 0,128; SS 0,556. Diferencias con 0,15, 0,15, 0,14 y 0,56: $+0{,}003$; $+0{,}013$; $-0{,}012$; $-0{,}004$.
2. Coste de A: $300 \cdot (163 + 128 + 2 \cdot 153) = 300 \cdot 597 = 179\,100$ € en 1 000 excursiones, es decir, 179,10 € de media (teórico 177 €; diferencia 2,10 €).
3. Resultados propios. Con 20 repeticiones se esperan unas 3 LL, 3 LS, 3 SL y 11 SS, pero con variación grande.
4. Cuantas más repeticiones se realizan, más tiende a estabilizarse la frecuencia relativa alrededor de la probabilidad teórica (ley de los grandes números), aunque el azar sigue fluctuando. La variación típica disminuye aproximadamente como $1/\sqrt{n}$; por ejemplo, multiplicar por 100 el número de ensayos reduce aproximadamente a una décima parte el error típico.

Ficha 7

1. Respuestas abiertas. Se evalúa que el modelo tenga supuestos explícitos, el árbol o la tabla estén completos, los cálculos sean correctos (producto, suma, condicionada o esperanza), se contraste con una simulación y la recomendación diga el riesgo asumido.

Ficha 8

1. De 1 000 días: 200 de lluvia y 800 secos. La app dice «lluvia» en $0{,}9 \cdot 200 = 180$ días de lluvia y en $0{,}15 \cdot 800 = 120$ días secos: 300 días. $P(\text{llueve} \mid \text{dice lluvia}) = \frac{180}{300} = 0{,}6$.
2. Sin seguro: $0{,}05 \cdot 600 = 30$ €; peor caso 600 €. Con seguro: $40 + 0{,}05 \cdot 100 = 45$ €; peor caso $40 + 100 = 140$ €.
3. Respuesta abierta, por ejemplo: «No contrato el seguro si asumo el riesgo: probabilidad de robo 5 %, coste medio 30 € frente a 45 €; el peor caso son 600 €». O: «Sí lo contrato porque prefiero limitar la pérdida a 140 €». Se valora la coherencia entre cálculo y decisión.
4. Porque hay falsos positivos: el valor de un positivo depende de la prevalencia y de la especificidad; con poca prevalencia la mayoría de los positivos pueden ser sanos (en E1, 48 de 84).

Refuerzo

1. Espacio muestral: C1…C6 y X1…X6 (12 casos). Favorables: C2, C4, C6 (3). $P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.
2. Árbol: R $\frac{1}{2}$, A $\frac{1}{2}$; en cada rama, R $\frac{1}{2}$ y A $\frac{1}{2}$. Hojas: $\frac{1}{4}$ cada una.
3. Mismo color: RR + AA $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Distintos: RA + AR $= \frac{1}{2}$.

Ampliación

1. Juego 1: premio 4 € con prob. $\frac{1}{4}$ y 0 € con $\frac{3}{4}$: media 1 €; $\sigma = \sqrt{\frac{16}{4} - 1} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$.
2. Juego 2: premios 1 € ($\frac{1}{8}$), 7 € ($\frac{1}{8}$) y 0 € ($\frac{3}{4}$): media $\frac{1}{8} + \frac{7}{8} = 1$ €; $E(x^2) = \frac{1}{8} + \frac{49}{8} = 6{,}25$; $\sigma = \sqrt{6{,}25 - 1} = \sqrt{5{,}25} \approx 2{,}29$.
3. Ejemplo de Juego 3: premios 2 € y 6 € con probabilidades p_2 y p_6 tales que $2p_2 + 6p_6 = 1$ y $p_2 + p_6 = \frac{1}{4}$: $p_6 = \frac{1}{8}$, $p_2 = \frac{1}{8}$. Entonces $E(x^2) = \frac{4}{8} + \frac{36}{8} = 5$ y $\sigma = \sqrt{5 - 1} = 2$.
4. Con la misma media, mayor σ significa más variabilidad de los resultados: más riesgo (tanto de ganar mucho como de no ganar). Quien teme perder prefiere menor dispersión; quien busca un gran premio, mayor.

Errores frecuentes

- Confundir $P(A|B)$ con $P(B|A)$ (por ejemplo, creer que un test positivo del 90 % de sensibilidad implica un 90 % de probabilidad de estar enfermo).
- Sumar probabilidades a lo largo de las ramas o multiplicar entre caminos diferentes.
- Usar Laplace cuando los casos no son igual de probables (por ejemplo, {LL, LS, SL, SS}).
- Fiarse solo del coste medio sin considerar el peor caso o la probabilidad de pérdida alta.
- Pensar que una simulación debe dar exactamente las probabilidades teóricas.
- Olvidar que el riesgo relativo grande puede corresponder a un riesgo absoluto minúsculo.

Criterios para valorar respuestas abiertas

- En las recomendaciones se acepta cualquier opción si el criterio es explícito y los cálculos son correctos; se valora que se reconozca el riesgo asumido.
- En el informe se valora más el modelo y la justificación que el resultado numérico concreto, salvo errores de cálculo.
- Se puede usar hoja de cálculo para las simulaciones: se indica que son aleatorias y que cada repetición da valores distintos.

10

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Matemáticas para tomar una decisión

PREGUNTA GUÍA

¿Cómo combinamos números, modelos, gráficos y datos cuando ninguna respuesta depende de una sola cuenta?

CURSO
4.º ESO · Matemáticas A

SESIONES
9 sesiones · 3.º trimestre

SENTIDOS PRIORITARIOS
A-B-C-D-E-F · Integración de sentidos

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE2, CE5, CE6, CE7, CE8, CE10

PRODUCTO FINAL
Informe integrador de decisión multicriterio

CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 1.2, 2.2, 5.2, 6.1, 7.1, 8.1, 10.1

Contexto, reto y sentido

El Ayuntamiento ficticio de **Valdeverde** concede al IES **12 000 € (IVA incluido)** para renovar el patio, una parcela de 18 m × 14 m. Tres comisiones del alumnado han presentado propuestas: una **pista multideporte** (P1), una **zona verde** (P2) y un **auditorio al aire libre** (P3). Ninguna respuesta depende de una sola cuenta: cada propuesta es mejor en algo distinto, cuesta de forma diferente al cabo de los años, tiene que caber en la parcela, cuenta con más o menos apoyo en la encuesta y arrastra un riesgo de sobrecoste.

La situación integra los cinco sentidos de 4.º ESO: porcentajes e IVA (numérico), funciones lineales de coste y su cruce (algebraico), medida de superficies y restricciones geométricas con el semicírculo (espacial), encuesta con margen de error y riesgo con probabilidades (estocástico) y trabajo en equipo (socioafectivo). El producto es una **matriz de decisión multicriterio** con pesos explícitos y un informe que dice qué datos se han usado, qué se ha supuesto y hasta qué punto la decisión cambiaría si los pesos fueran otros. Todos los datos son ficticios y creados para el aula; el IVA general del 21 % es real.

Reto

Elaborar un informe integrador que compare tres propuestas para el patio con cinco criterios (coste, uso, preferencia, riesgo y mantenimiento), decida una con una matriz ponderada y defienda la decisión explicando supuestos, incertidumbres y qué la haría cambiar.

Producto final

Informe integrador de decisión multicriterio.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE5** Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.
- **CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.
- **CE10** Trabajar en equipo con respeto, asumiendo roles y valorando la diversidad.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- **1.1** Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.
- **1.2** Seleccionar herramientas y estrategias elaboradas valorando su eficacia e idoneidad en la resolución de problemas.
- **2.2** Seleccionar las soluciones óptimas de un problema valorando tanto la corrección matemática como sus implicaciones desde diferentes perspectivas.
- **5.2** Analizar y poner en práctica conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.
- **6.1** Proponer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.
- **7.1** Representar matemáticamente la información más relevante de un problema, conceptos, procedimientos y resultados, visualizando ideas y estructurando procesos.
- **8.1** Comunicar ideas, conclusiones, conjeturas y razonamientos matemáticos utilizando diferentes medios, con coherencia, claridad y terminología apropiada.
- **10.1** Colaborar activamente en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva y tomando decisiones informadas.

Saberes básicos prioritarios

A
Sentido numérico

- Porcentajes: IVA, porcentaje del presupuesto y aumentos sucesivos; operaciones con números decimales y redondeo con sentido.
- Estimación del error y cifras significativas en resultados de costes y de encuestas.

D
Sentido algebraico

- Funciones lineales como modelo de costes (fijo + variable) y su representación; pendiente y ordenada en origen con su significado.
- Resolución de ecuaciones e inecuaciones para hallar el punto de cruce y el valor máximo que cumple una restricción.

C
Sentido espacial

- Áreas del rectángulo y del semicírculo; perímetro; comprobación de que una figura cabe en un recinto y porcentaje de ocupación.
- Representación a escala de una parcela y de las huellas de las propuestas.

E
Sentido estocástico

- Encuesta: frecuencias relativas, margen de error aproximado $1/\sqrt{n}$ e interpretación de intervalos que se solapan.
- Probabilidad y riesgo: coste esperado y peor caso de una propuesta con posible sobrecoste.

F
Sentido socioafectivo

- Toma de decisiones multicriterio y negociación de pesos en equipo; aceptación de que la decisión depende de las prioridades.
- Revisión por pares y comunicación respetuosa de una recomendación con sus límites.

Objetivos didácticos

- ✓ Seleccionar herramientas matemáticas según cada subproblema.
- ✓ Integrar cálculos, gráficos y datos en una recomendación.
- ✓ Explicitar supuestos, incertidumbres y límites.
- ✓ Trabajar cooperativamente y comunicar una decisión.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Presentación de tres propuestas ficticias

Evidencia: Ficha 1: lectura de las tres propuestas (F1, F2), IVA del presupuesto, restricciones obligatorias y reformulación del problema.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Criterios y datos relevantes

Evidencia: Ficha 2: criterios graduables frente a restricciones, tipo de dato, encuesta con margen de error (F5) y propuesta de pesos del equipo.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Costes y porcentajes

Evidencia: Ficha 3: costes por partidas y con IVA de P1, P2 y P3, porcentaje del presupuesto consumido y sobrecostes encadenados.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Modelo funcional

Evidencia: Ficha 4: modelo funcional de P1 y de los costes a t años, tabla, gráfica y puntos de cruce (F4).

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Restricción geométrica

Evidencia: Ficha 5: restricción geométrica sobre la parcela (F3): longitud máxima, radio máximo, capacidad y porcentaje de ocupación.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Datos y riesgo

Evidencia: Ficha 6: riesgo de sobrecoste (F6): peor caso, probabilidad de superar el presupuesto, coste esperado y probabilidades de la encuesta.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Matriz de decisión

Evidencia: Ficha 7: matriz de decisión: normalización a escala 0-10, ponderación (F7) y comparación de pesos de dos equipos.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

8

SESIÓN 8

Informe y revisión por pares

Evidencia: Ficha 8: borrador del informe, gráfico de puntuaciones, supuestos y límites, y revisión por pares.

Ficha: Anexo 3 · ficha 8

9

SESIÓN 9

Defensa final e individual

Evidencia: Ficha 9: reto individual con una decisión nueva (toldo), cruce de costes, encuesta y sensibilidad de pesos.

Ficha: Anexo 3 · ficha 9

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Dossier ficticio completo · hoja de cálculo · calculadora · plantillas

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Reducir a dos propuestas y tres criterios con cálculos guiados.

Ampliación

Anexo 9

Análisis de sensibilidad: cambiar pesos o datos y comprobar si cambia la decisión.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Reformulación del problema con restricciones obligatorias, criterios graduables y datos relevantes, en palabras y con la parcela dibujada.	Fichas 1, 2 y 5 / lista de cotejo
1.2	Elección de la herramienta adecuada para cada subproblema: porcentajes, función lineal, área, margen de error, coste esperado o matriz ponderada.	Fichas 3, 4, 5 y 6 / escala de valoración
2.2	Selección de la propuesta óptima valorando corrección matemática, restricciones, riesgo y prioridades de los usuarios, y comprobación de su robustez ante otros pesos.	Fichas 7 y 9 y defensa / rúbrica
5.2	Conexión entre procesos: el coste con IVA alimenta la función, la función se cruza con el mantenimiento, la geometría limita el parámetro y todo entra en la matriz.	Fichas 4, 5 y 7 / rúbrica
6.1	Formulación y resolución con herramientas matemáticas de una situación real del centro (el patio), diciendo qué datos son ficticios.	Informe (Anexo 4) y Ficha 8 / rúbrica
7.1	Representación de la información relevante: tabla de costes, gráfica de funciones, plano de la parcela con cotas y gráfico de puntuaciones.	Fichas 4, 5 y 8 / escala de valoración
8.1	Comunicación de la decisión con terminología precisa, unidades, supuestos y límites, por escrito y en la defensa oral.	Informe (Anexo 4), Ficha 9 y defensa / rúbrica
10.1	Trabajo cooperativo: reparto de roles, acuerdo de pesos con argumentos, revisión por pares y respeto a opiniones distintas.	Ficha 8, protocolo F9 y observación / lista de cotejo

☆ Evidencias clave de esta SdA

Informe integrador, matriz, anexos de cálculo y defensa.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 10 · Matemáticas para tomar una decisión

ALUMNADO

El ayuntamiento ofrece 12 000 € para el patio y tres comisiones del alumnado piden cosas distintas: una pista multideporte, una zona verde o un auditorio al aire libre. Una dice que es la que más gusta, otra que es la más barata de mantener, otra que es la que más gente cabe. Todas tienen razón en algo. ¿Cómo se decide cuando ninguna respuesta depende de una sola cuenta? Vais a comprobar con cuentas de verdad si cada propuesta cabe en el presupuesto y en la parcela, qué pasa con su coste a lo largo de los años, cuánto apoyo tiene de verdad en la encuesta y qué riesgo corre. Después construiréis una matriz de decisión con pesos propios y comprobaréis si vuestra recomendación aguanta si otro equipo da más importancia a otra cosa.

> *¿Cómo combinamos números, modelos, gráficos y datos cuando ninguna respuesta depende de una sola cuenta?*

Vuestro reto

Elaborar un informe integrador que compare tres propuestas para el patio con cinco criterios (coste, uso, preferencia, riesgo y mantenimiento), decida una con una matriz ponderada y defienda la decisión explicando supuestos, incertidumbres y qué la haría cambiar.

Lo que vais a producir

Informe integrador de decisión multicriterio.

Hoja de ruta · 9 sesiones

1. Presentamos las tres propuestas y fijamos qué es obligatorio.
2. Elegimos criterios y datos relevantes y leemos la encuesta con su margen de error.
3. Calculamos costes con IVA y porcentajes del presupuesto.
4. Modelizamos con funciones el coste a lo largo de los años.
5. Comprobamos las restricciones geométricas sobre la parcela.
6. Analizamos datos y riesgo de sobrecoste.
7. Construimos la matriz de decisión con pesos.
8. Redactamos el informe y lo revisamos entre equipos.
9. Defendemos la decisión y resolvemos el reto individual.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Seleccionar herramientas matemáticas según cada subproblema.
- ✓ Integrar cálculos, gráficos y datos en una recomendación.
- ✓ Explicitar supuestos, incertidumbres y límites.
- ✓ Trabajar cooperativamente y comunicar una decisión.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 10 · Matemáticas para tomar una decisión

ALUMNADO

Tres propuestas ficticias para el patio con sus precios unitarios, el plano de la parcela con las huellas de cada una, la gráfica del coste a lo largo de los años, la encuesta, la tabla de riesgos, el método de la matriz de decisión, las fórmulas y el protocolo de trabajo en equipo. Todos los datos son ficticios; solo el IVA del 21 % corresponde al tipo general vigente.

F1 Las tres propuestas para el patio

DATOS

	P1 · Pista multideporte	P2 · Zona verde	P3 · Auditorio al aire libre
Qué se construye	Pista de 9 m de ancho y longitud L ajustable, con vallado perimetral y dos canastas	Zona ajardinada de 120 m² con riego, 6 árboles y bancos	Gradas en semicírculo de radio r, escenario y focos
Qué se puede ajustar	La longitud L (m)	Nada: el tamaño es fijo	El radio r (m)
Capacidad de uso	20 personas a la vez	30 personas a la vez	1 persona por m² de grada
Mantenimiento anual	400 €/año	600 €/año	250 €/año
Posible sobrecoste	Probabilidad 20 %, sube un 10 %	Probabilidad 10 %, sube un 10 %	Probabilidad 30 %, sube un 20 %

Fuente: Propuestas ficticias creadas para el aula (Ayuntamiento de Valdeverde, datos inventados).

Las comisiones proponen P1 con $L = 15$ m y P3 con $r = 6$ m. ¿Son esas las únicas medidas posibles? ¿Qué las limita?

F2 Reglas del concurso y precios unitarios

DATOS

Concepto	Valor
Presupuesto máximo	12 000 € **con IVA incluido**
IVA aplicable a todas las obras	21 %
Parcela del patio	18 m × 14 m; el borde de 14 m de la izquierda es el muro del edificio
Margen de seguridad	1 m libre alrededor, dentro de la parcela (zona útil: 16 m × 12 m)
Precios sin IVA · pista (P1)	Pavimento 38 €/m²; vallado perimetral 45 €/m; equipamiento deportivo 2 400 € (fijo)
Precios sin IVA · zona verde (P2)	Césped y plantación 25 €/m²; riego 2 800 €; bancos 1 200 €; árbol 180 € cada uno
Precios sin IVA · auditorio (P3)	Gradas y pavimento 95 €/m² de planta; escenario 1 800 €; iluminación 1 500 €
Aforo del auditorio	1 persona por m² de grada (se redondea hacia abajo)

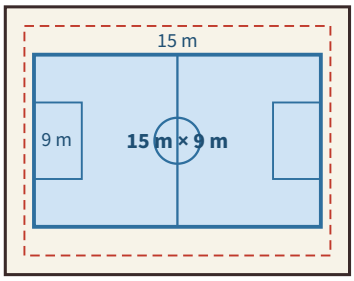
Fuente: Datos ficticios creados para el aula. El tipo general del IVA (21 %) es el vigente en España.

Todos los precios de esta tabla van sin IVA. ¿Qué precio de las tablas hay que multiplicar por 1,21 antes de compararlo con 12 000 €?

F3 La parcela y la huella de cada propuesta

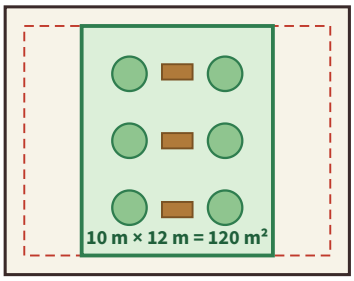
ESQUEMA

P1 · Pista multideporte



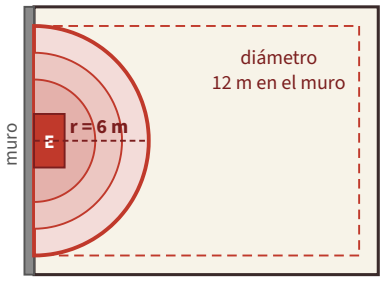
parcela 18 m × 14 m · margen 1 m

P2 · Zona verde



parcela 18 m × 14 m · margen 1 m

P3 · Auditorio al aire libre



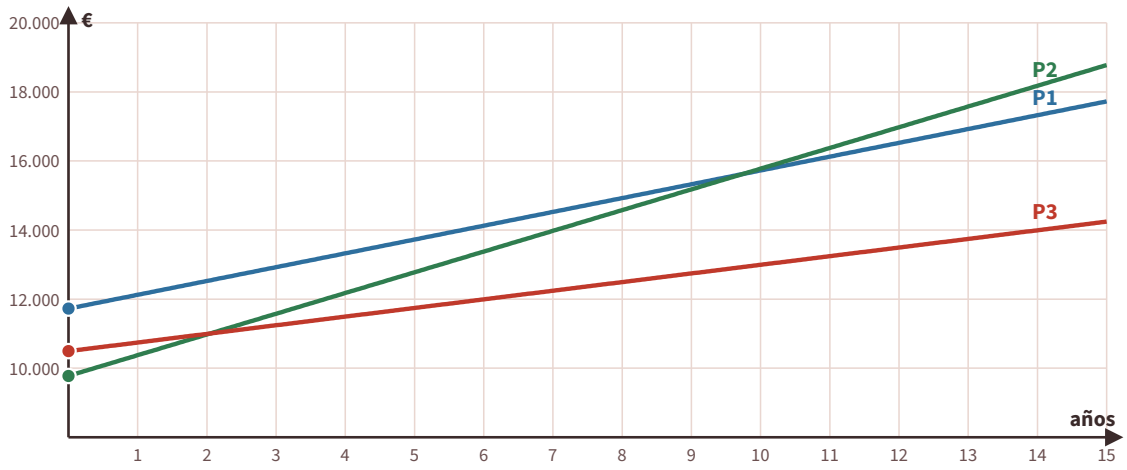
parcela 18 m × 14 m · margen 1 m

Fuente: Plano de elaboración propia a escala 1 : 100 en la pantalla (10 px por metro). Datos ficticios.

La línea roja discontinua marca el margen de 1 m. ¿Qué propuesta deja más espacio libre? ¿Cuál agota la zona útil en un lado?

F4 Coste acumulado a lo largo de los años (obra con IVA + mantenimiento)

GRÁFICO



Las tres rectas parten del coste de la obra con IVA (11 724,90 €, 9 776,80 € y 10 493,27 €) y crecen cada año lo que cuesta el mantenimiento (400, 600 y 250 €). La pendiente de cada recta es su mantenimiento anual.

Fuente: Gráfica de elaboración propia con los datos de F1 y F2 (obra con IVA y mantenimiento anual). Atención: el eje vertical empieza en 8 000 €.

Observa dónde se cortan las rectas. ¿Qué propuesta es la más barata al principio? ¿Y a largo plazo?

F5 Encuesta al alumnado del centro

DATOS

Propuesta preferida	Votos	Porcentaje
P1 · Pista multideporte	54	45 %
P2 · Zona verde	30	25 %
P3 · Auditorio	36	30 %
Total	120	100 %

Margen de error aproximado. Con n respuestas aleatorias, un porcentaje medido está a menos de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ del valor real (en tanto por uno) con confianza alta. Para $n = 120$: $\frac{1}{\sqrt{120}} \approx 0{,}091$, es decir, unos **9,1 puntos porcentuales**. Dos propuestas solo se pueden ordenar con seguridad si sus intervalos «porcentaje ± margen» no se solapan.

Fuente: Encuesta ficticia creada para el aula: 120 personas elegidas al azar entre el alumnado, una respuesta cada una.

¿Gana P1 a P2 con seguridad? ¿Y a P3? ¿Qué harías para reducir el margen de error?

F6 Riesgo de sobrecoste de cada propuesta

DATOS

Propuesta	Probabilidad de sobrecoste	Si ocurre, el coste sube un…	Probabilidad de que no ocurra
P1	20 %	10 %	80 %
P2	10 %	10 %	90 %
P3	30 %	20 %	70 %

El sobrecoste se aplica sobre el coste con IVA. **Coste esperado con riesgo** = coste · $(1 + p \cdot s)$, siendo p la probabilidad del sobrecoste y s su porcentaje (en tanto por uno). **Peor caso** = coste · $(1 + s)$.

Fuente: Datos ficticios creados para el aula (estimaciones de la oficina técnica del ayuntamiento).

¿Cuál es la propuesta con menor probabilidad de pasarse del presupuesto? ¿Importa más la probabilidad o el tamaño del sobrecoste?

F7 Cómo se construye una matriz de decisión

TEXTO

1. Restricciones. Son condiciones obligatorias (presupuesto de 12 000 €, caber en la parcela). Una propuesta que no las cumple se descarta o se ajusta.

2. Criterios. Son características graduables que se comparan: coste, uso, preferencia, riesgo y mantenimiento.

3. Normalización (escala 0 a 10). Para poder sumar euros con personas hay que pasar cada dato a una puntuación de 0 a 10:

- Si **más es mejor** (uso, preferencia): $\text{punt.} = 10 \cdot \dfrac{x}{x_{\max}}$
- Si **menos es mejor** (coste, mantenimiento): $\text{punt.} = 10 \cdot \dfrac{x_{\min}}{x}$
- Riesgo: $\text{punt.} = 10 \cdot (1 - p)$, siendo p la probabilidad de superar el presupuesto.

4. Pesos. Cada criterio tiene un peso en % y los pesos suman 100. Los pesos expresan prioridades y deben acordarse y justificarse.

5. Puntuación final. $S = \dfrac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_5 x_5}{100}$

Ejemplo con dos móviles A y B. Precio: A 300 €, B 400 € (menos es mejor). Batería: A 20 h, B 30 h (más es mejor). Pesos: precio 60 %, batería 40 %.

A: precio $10 \cdot \frac{300}{300} = 10$; batería $10 \cdot \frac{20}{30} \approx 6{,}67$; $S_A = \frac{60 \cdot 10 + 40 \cdot 6{,}67}{100} \approx 8{,}67$.

B: precio $10 \cdot \frac{300}{400} = 7{,}5$; batería 10; $S_B = \frac{60 \cdot 7{,}5 + 40 \cdot 10}{100} = 8{,}5$.

Gana A, pero por muy poco. Con pesos 40 % y 60 % ganaría B: **la decisión depende de las prioridades.**

Fuente: Elaboración propia. Método de suma ponderada, habitual en la toma de decisiones multicriterio.

Haz la cuenta del ejemplo con los pesos 40 % y 60 % y comprueba que gana B.

F8 Fórmulas y herramientas

TEXTO

- **IVA:** precio con IVA = precio sin IVA $\cdot\, 1{,}21$. Para quitar el IVA, se divide entre 1,21.
- **Aumentos sucesivos:** un aumento del $p\,\%$ multiplica por $1 + \frac{p}{100}$; un descuento del $p\,\%$ multiplica por $1 - \frac{p}{100}$.
- **Función lineal de coste:** $C(x) = m\,x + n$. n es el coste fijo (con $x = 0$) y m el coste por unidad.
- **Cruce de dos rectas:** se igualan las expresiones, $m_1 t + n_1 = m_2 t + n_2$, y se despeja $t = \dfrac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2}$.
- **Áreas:** rectángulo $b \cdot h$; círculo πr^2; semicírculo $\dfrac{\pi r^2}{2}$. Perímetro de un rectángulo $2b + 2h$.
- **Porcentaje de ocupación:** $\dfrac{\text{área de la propuesta}}{\text{área útil}} \cdot 100$.
- **Margen de error de una encuesta:** $\approx \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
- **Coste esperado con riesgo:** $C\,(1 + p\,s)$. **Peor caso:** $C\,(1 + s)$.
- **Cálculo con calculadora:** redondea al final, no en los pasos intermedios; los euros, a dos decimales; los metros, a dos decimales.

Fuente: Elaboración propia.

F9 Protocolo de trabajo en equipo y de revisión por pares

PROTOCOLO

Roles (rotan en cada ficha): coordinación (reparte el tiempo y da la palabra), cálculos (hace y comprueba las cuentas con la calculadora), representación (dibuja tablas, gráficas y planos) y redacción (escribe las conclusiones con terminología precisa).

Acuerdo de pesos:

- Cada persona escribe en silencio sus pesos (suman 100) y una razón.
- Se ponen en común sin interrumpir, de una en una.
- El equipo propone un reparto que todas las personas puedan aceptar. Si hay empate, se prueba con los dos repartos y se compara el resultado.

Revisión por pares:

- Se intercambian los borradores con otro equipo.
- Se revisan cuatro cosas: ¿están las unidades?, ¿se entiende de dónde sale cada número?, ¿los cálculos están bien?, ¿la conclusión se sigue de los datos?
- La devolución sigue el formato: dos fortalezas, una mejora, y un dato o cálculo que se ha comprobado.
- Se recibe la crítica agradeciendo y preguntando; no se discute al momento.

Defensa: 3 minutos por equipo; todas las personas hablan; se debe decir qué cambiaría la decisión.

Fuente: Elaboración propia.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 10 · Matemáticas para tomar una decisión

ALUMNADO

FICHA 1 Presentamos las tres propuestas

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Usa F1 y F2. Calculadora permitida.

1 **Resume las tres propuestas con F1.**

Propuesta	Qué se construye	Medida que se puede ajustar	Mantenimiento (€/año)
P1			
P2			
P3			

2 **Marca verdadero o falso según F1 y F2.**

	V	F
El presupuesto de 12 000 € ya incluye el IVA.	☐	☐
Los precios unitarios de F2 están dados sin IVA.	☐	☐
Una pista de 18 m de largo cabe en la parcela respetando el margen de 1 m.	☐	☐
Las tres propuestas tienen el mismo mantenimiento anual.	☐	☐
Una propuesta puede tener la obra más barata y salir más cara con los años.	☐	☐

3 **El coste de P2 sin IVA es de 8 080 €. Calcula su coste con IVA y cuánto dinero del presupuesto queda libre.**

4 **Con tus palabras: ¿qué hay que decidir?, ¿qué condiciones son obligatorias (restricciones)? y ¿qué cosas se pueden comparar y puntuar (criterios)?**

FICHA 2 Criterios, datos y encuesta

Sesión 2

Usa F1, F2, F5 y F7.

1 **Completa la tabla de criterios del equipo.**

Criterio	Dato que lo mide	¿Más es mejor o menos es mejor?	Fuente
Coste inicial			
Uso (capacidad)			
Preferencia del alumnado			
Riesgo de sobrecoste			
Mantenimiento			

2 **Con F5, completa la encuesta con su intervalo («porcentaje ± margen»).**

Propuesta	Votos	Porcentaje	Intervalo (± 9,1 puntos)
P1	54		
P2	30		
P3	36		

3 **Calcula el margen de error $1/\sqrt{n}$ con $n = 120$ y con $n = 480$. ¿Se puede afirmar que P1 gana a P2? ¿Y a P3? Explica por qué.**

4 Cada persona del equipo propone en silencio unos pesos para los cinco criterios (suman 100). Después, el equipo acuerda unos pesos comunes y los justifica (F9).

Criterio	Peso acordado (%)	Justificación
Coste inicial		
Uso		
Preferencia		
Riesgo		
Mantenimiento		
Total	100	

FICHA 3 Costes y porcentajes

Sesión 3

Usa F1, F2 y F8. Redondea a dos decimales al final.

1 P1 con $L = 15$ m y 9 m de ancho (el vallado rodea toda la pista). Completa.

Partida	Cálculo	Importe sin IVA (€)
Pavimento (38 €/m²)		
Vallado perimetral (45 €/m)		
Equipamiento		
Total sin IVA		
Total con IVA		

2 **P2 (120 m², 6 árboles) y P3 (radio 6 m, gradas en semicírculo). Completa.**

Partida	Cálculo	Importe sin IVA (€)
P2 · Césped y plantación		
P2 · Riego, bancos y árboles		
P2 · Total con IVA		
P3 · Gradas (área del semicírculo)		
P3 · Escenario e iluminación		
P3 · Total con IVA		

3 **Elige la respuesta correcta.**

El precio sin IVA es 8 080 €. El precio con IVA es…

☐ 8 080 · 0,21 = 1 696,80 € ☐ 8 080 · 1,21 = 9 776,80 € ☐ 8 080 + 21 = 8 101 €

Un coste sube un 10 % y después baja un 10 %. El resultado final es…

☐ el coste inicial ☐ un 1 % menos que el inicial ☐ un 1 % más que el inicial

Si 10 493,27 € es el 87,4 % del presupuesto, el presupuesto es…

☐ ≈ 12 000 € ☐ ≈ 9 170 € ☐ ≈ 14 000 €

4 **¿Qué porcentaje del presupuesto consume cada propuesta? Si P1 sufre un sobrecoste del 10 %, ¿cuánto cuesta y se pasa del presupuesto? ¿En cuánto?**

FICHA 4 Modelo funcional del coste

Sesión 4

Usa F2, F4 y F8.

1 **Para P1 con 9 m de ancho y longitud L, completa el modelo del coste.**

Pavimento: $38 \cdot 9 \cdot L =$ _____ L. Vallado: $45 \cdot (2L + 18) =$ _____ $L +$ _____.

Equipamiento: 2 400.

Coste sin IVA: $C(L) =$ _____ $L +$ _____.

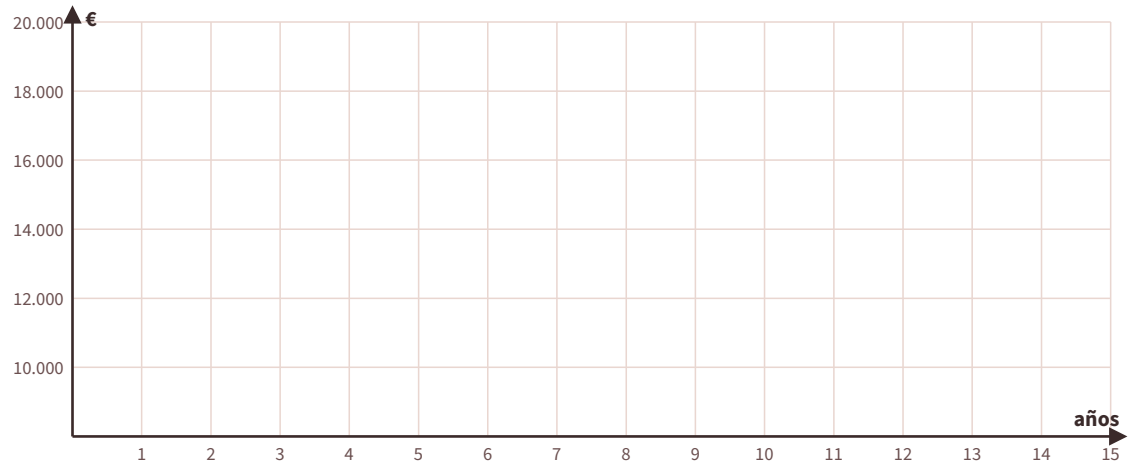
Coste con IVA: $C_{IVA}(L) = 1{,}21 \cdot C(L) =$ _____ $L +$ _____. La pendiente significa _____.

2 Calcula $C_{IVA}(L)$ y decide si cabe en el presupuesto. Después halla algebraicamente la L máxima (resuelve $C_{IVA}(L) \leq 12\,000$).

L (m)	Coste con IVA (€)	¿Cabe en 12 000 €?
12		
14		
15		
16		

3 Coste total a t años = obra con IVA + mantenimiento · t. Completa la tabla y dibuja las tres rectas en la cuadrícula.

Años	P1 (€)	P2 (€)	P3 (€)
0			
5			
10			
15			



4 Escribe $C_1(t)$, $C_2(t)$ y $C_3(t)$. Halla en qué año se igualan P1 y P2, y P2 y P3. ¿Se igualan alguna vez P1 y P3? Interpreta el resultado: ¿a partir de cuándo compensa más cada una?

FICHA 5 Restricción geométrica

Sesión 5

Usa F3, F1 y F8. Zona útil: 16 m × 12 m.

1 Comprueba si cada propuesta cabe en la zona útil (P3 apoyado en el muro de 14 m).

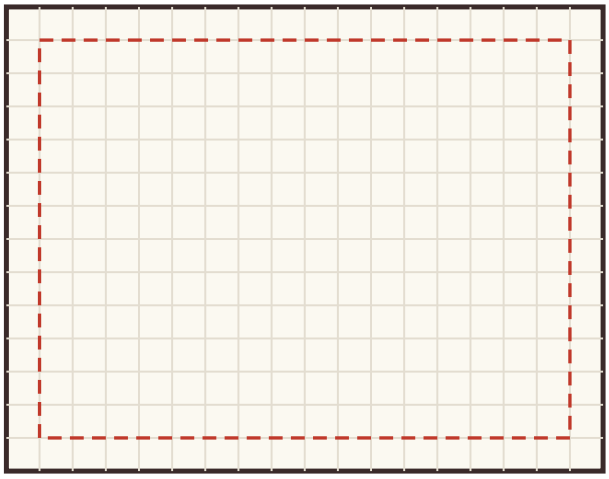
Propuesta	Medida necesaria	Espacio útil disponible	¿Cabe?
P1 ($L = 15$ m, 9 m de ancho)			
P2 (zona de 120 m²)			
P3 ($r = 6$ m)			

2 P3: calcula el área del semicírculo con $r = 6$ m y el aforo. Halla el radio máximo por geometría y el radio máximo por presupuesto resolviendo $180{,}56\,r^2 + 3\,993 \leq 12\,000$. ¿Qué restricción manda?

3 **Porcentaje de la zona útil (192 m²) que ocupa cada propuesta.**

Propuesta	Área ocupada (m²)	% de la zona útil
P1 (15 × 9)		
P2		
P3 ($r = 6$)		

4 **Dibuja sobre la parcela dos rectángulos distintos de 120 m² que quepan en la zona útil (marca sus medidas). ¿Cabe uno de 20 m × 6 m? Explica.**



cada cuadrícula = 1 m × 1 m · línea roja: margen de 1 m

FICHA 6 Datos y riesgo

Sesión 6

Usa F5, F6 y F8.

1 **Peor caso de cada propuesta (el sobrecoste ocurre).**

Propuesta	Coste con IVA (€)	Coste si ocurre el sobrecoste (€)	¿Supera 12 000 €?	Probabilidad de superarlo
P1	11 724,90			
P2	9 776,80			
P3	10 493,27			

2 Coste esperado con riesgo: $C\,(1 + p\,s)$ y sobrecoste esperado.

Propuesta	$p \cdot s$	Coste esperado (€)	Sobrecoste esperado (€)
P1			
P2			
P3			

3 Se eligen dos personas al azar de la encuesta (se aproxima como independientes). Calcula la probabilidad de que las dos prefieran P1 y la de que al menos una prefiera P3.

4 El centro prefiere no pasarse del presupuesto con más de un 15 % de probabilidad. ¿Qué propuestas cumplen ese criterio de riesgo? Razona.

FICHA 7 Matriz de decisión

Sesión 7

Usa F7 y los datos de las fichas anteriores. Redondea a dos decimales.

1 Normaliza cada criterio a escala 0-10 con la regla de F7.

Criterio	Datos (P1 · P2 · P3)	Regla	P1	P2	P3
Coste (€)	11 724,90 · 9 776,80 · 10 493,27	10 · mín/x			
Uso (personas)	20 · 30 · 56	10 · x/máx			
Preferencia (%)	45 · 25 · 30	10 · x/máx			
Riesgo (prob. superar)	20 % · 0 % · 30 %	10 · (1 − p)			
Mantenimiento (€/año)	400 · 600 · 250	10 · mín/x			

2 Puntuación final con los pesos del equipo A (25, 25, 20, 15, 15).

Criterio	Peso (%)	P1	P2	P3
Coste	25			
Uso	25			
Preferencia	20			
Riesgo	15			
Mantenimiento	15			
Puntuación final S	100			

3 El equipo B da más peso al coste: (40, 10, 20, 15, 15). Calcula sus tres puntuaciones y compáralas con las del equipo A.

4 ¿Qué propuesta es la mejor? ¿Es suficiente la diferencia entre las dos primeras para considerar que una es mejor que la otra? ¿Qué restricciones cumple?

FICHA 8 Informe y revisión por pares

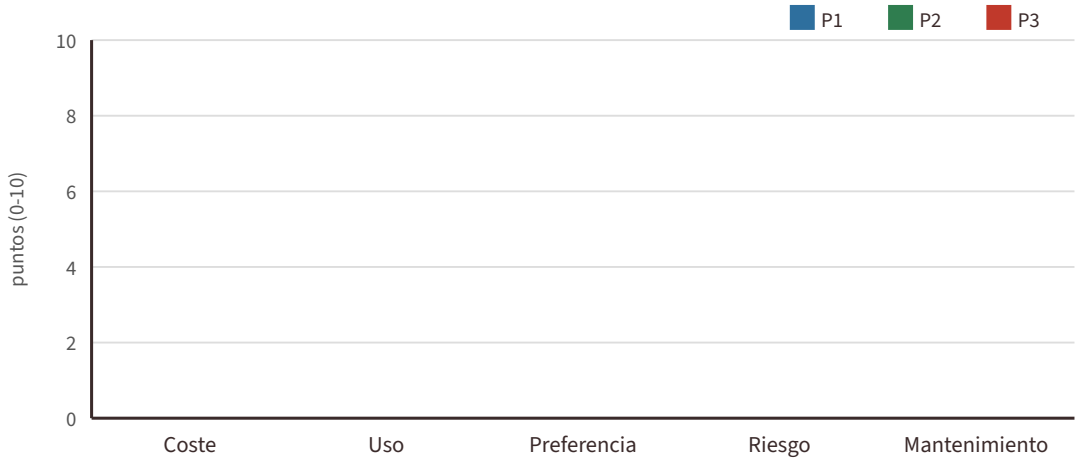
Sesión 8

Trabajad en equipo con los roles de F9.

1 **Lista de comprobación del borrador. Marca lo que ya está.**

- [ ] Las restricciones (presupuesto y parcela) se comprueban con cálculos para las tres propuestas.
- [ ] Los costes llevan IVA y todos los importes están en euros con dos decimales.
- [ ] Hay una tabla o gráfica de costes a lo largo de los años con el cruce señalado.
- [ ] La matriz indica los pesos, los datos y las puntuaciones normalizadas.
- [ ] Se ha comprobado qué pasa con otros pesos.
- [ ] Se dice qué datos son ficticios.

2 **Dibuja el gráfico de barras agrupadas de las puntuaciones normalizadas de las tres propuestas en los cinco criterios (con los datos de la ficha 7).**



3 **Redacta los supuestos y las limitaciones de vuestro informe (qué datos son estimaciones, qué no se ha tenido en cuenta, qué podría cambiar).**

4 **Revisión del informe de otro equipo (F9).**

Equipo revisado	Dos fortalezas	Una mejora	Dato o cálculo que he comprobado

FICHA 9 Reto individual: el toldo

Sesión 9

Resuelve sin ayuda del equipo. Calculadora permitida. Datos ficticios.

1 El instituto necesita un toldo para el auditorio. Oferta X: 1 800 € de obra y 90 €/año de mantenimiento. Oferta Y: 1 200 € de obra y 140 €/año. Escribe el coste total $C_X(t)$ y $C_Y(t)$, halla en qué año se igualan y di cuál compensa si se va a usar 20 años.

2 En una encuesta de 80 personas, 36 prefieren la oferta X. Calcula el porcentaje, el margen de error $1/\sqrt{n}$ y el intervalo. ¿Se puede asegurar que X es la preferida por la mayoría?

3 Puntuaciones normalizadas (0-10): coste inicial X = 6, Y = 9; durabilidad X = 9, Y = 6; estética X = 7, Y = 7. Calcula la puntuación de cada oferta con pesos (50, 30, 20) y con pesos (20, 60, 20).

Pesos (coste, durabilidad, estética)	Puntuación X	Puntuación Y	Gana
50, 30, 20			
20, 60, 20			

4 Defiende tu recomendación en cuatro líneas: qué has comparado, qué oferta elegirías, con qué prioridades y qué te haría cambiar de idea.

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 10 · Matemáticas para tomar una decisión

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Informe integrador de decisión multicriterio sobre el patio del IES.

Título y equipo

Propuestas y restricciones

Qué se compara y qué es obligatorio.

Criterios y pesos acordados

Cinco criterios, pesos y razones.

Costes y modelo funcional

Costes con IVA, función y cruces.

Plano de la parcela

Huellas a escala con cotas.

Datos y riesgo

Encuesta con margen, peor caso y coste esperado.

Matriz de decisión

Normalización, pesos y puntuaciones.

Sensibilidad y límites

Qué pasa con otros pesos o datos.

Recomendación

Propuesta elegida, razones y qué la cambiaría.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 10 · Matemáticas para tomar una decisión

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Informe integrador de decisión multicriterio**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] Las tres propuestas se comparan con las mismas restricciones y criterios.
- [ ] Los costes están calculados con IVA, con unidades y dos decimales.
- [ ] Hay una función de coste bien planteada y los puntos de cruce están calculados.
- [ ] Se comprueba la restricción geométrica con números y con un plano a escala.
- [ ] La encuesta se presenta con su margen de error y se interpreta bien.
- [ ] El riesgo se expresa con probabilidad, peor caso y coste esperado.
- [ ] La matriz muestra datos, normalización, pesos y puntuaciones, y los pesos suman 100.
- [ ] Se estudia qué pasa con otros pesos y la recomendación dice qué la cambiaría.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 10 · Matemáticas para tomar una decisión

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Informe integrador de decisión multicriterio**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 10 · Matemáticas para tomar una decisión

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé calcular costes con IVA, plantear una función de coste y hallar cuándo dos opciones se igualan.	○	○	○	○
Sé construir una matriz de decisión con pesos y comprobar si la decisión cambia al cambiar los pesos.	○	○	○	○
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	○	○	○	○
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	○	○	○	○
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	○	○	○	○
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	○	○	○	○

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 10 · Matemáticas para tomar una decisión

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Decisión con solo dos propuestas (P1 y P2) y tres criterios (coste, uso y mantenimiento), con los cálculos guiados.

Ejemplo modelado: dos móviles A y B

Precio: A 300 €, B 400 €. Batería: A 20 h, B 30 h. Pesos: precio 60 %, batería 40 %.

Precio (menos es mejor): A $= 10 \cdot \frac{300}{300} = 10$; B $= 10 \cdot \frac{300}{400} = 7{,}5$.

Batería (más es mejor): A $= 10 \cdot \frac{20}{30} \approx 6{,}67$; B $= 10$.

Puntuación: $S_A = \frac{60 \cdot 10 + 40 \cdot 6{,}67}{100} \approx 8{,}67$; $S_B = \frac{60 \cdot 7{,}5 + 40 \cdot 10}{100} = 8{,}5$. Gana A.

Glosario y símbolos

Coste con IVA = coste sin IVA · $1{,}21$. **Normalizar:** pasar un dato a una puntuación de 0 a 10. **Peso:** importancia de un criterio en %. **Menos es mejor** (coste, mantenimiento): $10 \cdot \frac{\text{mín}}{x}$. **Más es mejor** (uso): $10 \cdot \frac{x}{\text{máx}}$.

1 **Coste con IVA de P1 y P2. Sin IVA: P1 = 9 690 €, P2 = 8 080 €.**

P1: $9\,690 \cdot 1{,}21 =$ _____ €.

P2: $8\,080 \cdot 1{,}21 =$ _____ €.

¿Caben en 12 000 €? _____.

2 **Normaliza con la regla de cada criterio (se da el primer valor).**

Criterio	Datos P1 · P2	Regla	P1	P2
Coste (€)	11 724,90 · 9 776,80	10 · mín/x		10
Uso (personas)	20 · 30	10 · x/máx		
Mantenimiento (€/año)	400 · 600	10 · mín/x		

3 **Con los pesos coste 40 %, uso 30 % y mantenimiento 30 %, calcula la puntuación final de cada propuesta y elige.**

$S_{P1} = \frac{40 \cdot \_\_\_ + 30 \cdot \_\_\_ + 30 \cdot \_\_\_}{100} =$ _____

$S_{P2} = \frac{40 \cdot \_\_\_ + 30 \cdot \_\_\_ + 30 \cdot \_\_\_}{100} =$ _____

Gana _____.

4 **Escribe una frase de recomendación diciendo qué propuesta eliges y por qué (nombra al menos un criterio).**

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 10 · Matemáticas para tomar una decisión

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

¿Cuánto tiene que valer la preferencia para que cambie la decisión?

Una decisión multicriterio solo es fiable si resiste pequeños cambios en los pesos o en los datos. Vais a hacer un análisis de sensibilidad de la matriz de la ficha 7: ¿cuándo deja P3 de ser la mejor?

Pasos

1. Calcula las puntuaciones con los pesos (20, 10, 40, 15, 15), es decir, dando mucho más valor a la preferencia del alumnado. ¿Cambia la propuesta ganadora?
2. Llama w al peso de la preferencia y reparte el resto $(100 - w)$ entre los otros cuatro criterios manteniendo su proporción original (25 : 25 : 15 : 15). Expresa $S_1(w)$ y $S_3(w)$ y halla el valor de w para el que P1 y P3 empatan.
3. Cambia los datos: si en la encuesta P1 tuviera 48 votos, P2 30 y P3 42, ¿cuál sería el orden con los pesos del equipo A? ¿Qué le ocurre a la comparación entre P1 y P2?
4. Escribe una conclusión de robustez de máximo cinco líneas: qué recomendarías y con qué salvedades.

1 **Tabla de sensibilidad.**

Escenario	P1	P2	P3	Ganadora
Pesos del equipo A				
Pesos (20, 10, 40, 15, 15)				
Votos 48 · 30 · 42				

Entrega

Una tabla de sensibilidad con tres escenarios, el valor de w del empate y una conclusión que diga cuánto se puede fiar la recomendación.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 10 · Matemáticas para tomar una decisión

DOCENTE

Ficha 1

1. P1: pista con L ajustable; P2: zona verde fija de 120 m²; P3: auditorio con radio r ajustable. Mantenimiento: 400, 600 y 250 €/año.
2. V; V; F (la zona útil mide 16 m, así que $L \leq 16$ m); F (400, 600 y 250 €); V (por ejemplo P2 es la más barata de obra pero la que más cuesta de mantener).
3. Con IVA: $8\,080 \cdot 1{,}21 = 9\,776{,}80$ €. Queda libre: $12\,000 - 9\,776{,}80 = 2\,223{,}20$ €.
4. Respuesta abierta. Se espera: decidir qué propuesta se construye para el patio con 12 000 € (IVA incluido). Restricciones obligatorias: presupuesto, que quepa en la parcela con margen de 1 m (y el auditorio apoyado en el muro). Criterios graduables: coste, uso, preferencia del alumnado, riesgo de sobrecoste y mantenimiento.

Ficha 2

1. Coste inicial: euros con IVA (F1, F2), menos es mejor. Uso: personas a la vez (F1), más es mejor. Preferencia: % de la encuesta (F5), más es mejor. Riesgo: probabilidad de superar el presupuesto (F6), menos es mejor. Mantenimiento: €/año (F1), menos es mejor.
2. P1: 54 votos, 45 %, intervalo [35,9 ; 54,1]. P2: 30 votos, 25 %, [15,9 ; 34,1]. P3: 36 votos, 30 %, [20,9 ; 39,1].
3. $1/\sqrt{120} \approx 0{,}091$ (9,1 puntos); $1/\sqrt{480} \approx 0{,}046$ (4,6 puntos). P1 gana a P2 con seguridad: [35,9 ; 54,1] y [15,9 ; 34,1] no se solapan. P1 frente a P3 no se puede asegurar: [35,9 ; 54,1] y [20,9 ; 39,1] se solapan entre 35,9 % y 39,1 %. Para reducir el margen hay que aumentar n (cuadruplicar n lo divide a la mitad).
4. Respuesta abierta. Se valora que los pesos sumen 100 y que cada peso tenga una razón (por ejemplo, un peso alto en coste porque el presupuesto es fijo). Aceptar cualquier reparto razonado.

Ficha 3

1. Pavimento: $38 \cdot 9 \cdot 15 = 5\,130$ €. Vallado: perímetro $2 \cdot 15 + 2 \cdot 9 = 48$ m; $45 \cdot 48 = 2\,160$ €. Equipamiento: 2 400 €. Total sin IVA: $9\,690$ €. Con IVA: $9\,690 \cdot 1{,}21 = 11\,724{,}90$ €.
2. P2: césped $25 \cdot 120 = 3\,000$ €; riego, bancos y 6 árboles: $2\,800 + 1\,200 + 6 \cdot 180 = 5\,080$ €; total sin IVA $8\,080$ €; con IVA 9 776,80 €. P3: área $\frac{\pi \cdot 6^2}{2} = 18\pi \approx 56{,}55$ m²; gradas $95 \cdot 56{,}55 = 5\,372{,}12$ €; escenario e iluminación $1\,800 + 1\,500 = 3\,300$ €; total sin IVA 8 672,12 €; con IVA 10 493,27 €.
3. $8\,080 \cdot 1{,}21 = 9\,776{,}80$ €. Un aumento y un descuento del 10 % multiplican por $1{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}99$: un 1 % menos. $10\,493{,}27/0{,}874 \approx 12\,000$ €. Respuestas: segunda, segunda, primera.
4. P1: $11\,724{,}90/12\,000 \approx 97{,}7\,\%$; P2: $81{,}5\,\%$; P3: $87{,}4\,\%$. Con +10 %: P1 $= 11\,724{,}90 \cdot 1{,}1 = 12\,897{,}39$ €, que supera el presupuesto en $897{,}39$ €.

Ficha 4

1. Pavimento: $38 \cdot 9 \cdot L = 342\,L$. Vallado: $45 \cdot (2L + 18) = 90L + 810$. Coste sin IVA: $C(L) = 342L + 90L + 810 + 2\,400 = 432L + 3\,210$. Con IVA: $C_{IVA}(L) = 522{,}72\,L + 3\,884{,}10$. La pendiente es el coste de cada metro más de longitud (522,72 €/m con IVA).
2. $L = 12$: 10 156,74 € (cabe). $L = 14$: 11 202,18 € (cabe). $L = 15$: 11 724,90 € (cabe). $L = 16$: 12 247,62 € (no cabe). $522{,}72L + 3\,884{,}10 \leq 12\,000 \Rightarrow L \leq \frac{8\,115{,}90}{522{,}72} \approx 15{,}53$ m.
3. P1: 11 724,90, 13 724,90, 15 724,90, 17 724,90 €. P2: 9 776,80, 12 776,80, 15 776,80, 18 776,80 €. P3: 10 493,27, 11 743,27, 12 993,27, 14 243,27 € (en 0, 5, 10 y 15 años). Rectas con ordenada en origen el coste de obra y pendiente el mantenimiento.
4. $C_1(t) = 11\,724{,}90 + 400t$, $C_2(t) = 9\,776{,}80 + 600t$, $C_3(t) = 10\,493{,}27 + 250t$. P1 = P2: $11\,724{,}90 + 400t = 9\,776{,}80 + 600t \Rightarrow t = \frac{1\,948{,}10}{200} \approx 9{,}74$ años. P2 = P3: $9\,776{,}80 + 600t = 10\,493{,}27 + 250t \Rightarrow t = \frac{716{,}47}{350} \approx 2{,}05$ años. P1 = P3: $t = \frac{1\,231{,}63}{-150} < 0$: nunca (con $t \geq 0$), P3 es siempre más barata que P1. Interpretación: P2 es la más barata al principio pero deja de serlo tras 2,05 años (P3 pasa a ser más barata); P1 supera a P2 en coste total hasta casi 10 años y después es más barata que ella, pero P3 sigue por debajo de las dos.

Ficha 5

1. P1: 15 m ≤ 16 m y 9 m ≤ 12 m, cabe. P2: 10 × 12 m cabe en 16 × 12. P3: diámetro 12 m sobre el muro (zona útil de 12 m) y 6 m de profundidad ≤ 16 m, cabe justo.
2. Área $= 18\pi \approx 56{,}55$ m², aforo 56 personas. Geometría: el diámetro $2r \leq 12$, luego $r \leq 6$ m. Presupuesto: $149{,}2257 \cdot 1{,}21 = 180{,}56$; $r^2 \leq \frac{12\,000 - 3\,993}{180{,}56} \approx 44{,}35$, $r \leq 6{,}66$ m. Manda la geometría ($r \leq 6$ m); el presupuesto permitiría hasta 6,66 m.
3. P1: $15 \cdot 9 = 135$ m²; $135/192 \approx 70{,}3\,\%$. P2: 120 m²; $62{,}5\,\%$. P3: 56,55 m²; $29{,}5\,\%$. Para P1 la restricción que manda es el presupuesto ($L \leq 15{,}53$ m frente a $L \leq 16$ m por la parcela).
4. Ejemplos: 10 × 12 m (en horizontal 12 × 10) y 15 × 8 m. También 16 × 7,5 m. Uno de 20 × 6 m no cabe: 20 m > 16 m (y > 12 m si se gira).

Ficha 6

1. P1: 12 897,39 €, supera 12 000 € (probabilidad 20 %). P2: 10 754,48 €, no supera (0 %). P3: 12 591,92 €, supera (30 %).
2. P1: $p \cdot s = 0{,}02$; 11 959,40 €; sobrecoste esperado 234,50 €. P2: $0{,}01$; 9 776,80 €; 0,00 €. P3: $0{,}06$; 11 122,87 €; 629,60 €.
3. Las dos prefieren P1: $0{,}45^2 = 0{,}2025$ (≈ 20,3 %). Ninguna prefiere P3: $0{,}7^2 = 0{,}49$; al menos una la prefiere: $1 - 0{,}49 = 0{,}51$ (51 %).
4. Solo cumple P2 (0 % de probabilidad de superar el presupuesto). P1 (20 %) y P3 (30 %) superan el 15 %. Si el centro aceptara hasta un 30 %, cumplirían las tres: la decisión depende de cuánto riesgo se acepte.

Ficha 7

1. Coste: 8,34 ; 10 ; 9,32. Uso: 3,57 ; 5,36 ; 10. Preferencia: 10 ; 5,56 ; 6,67. Riesgo: 8 ; 10 ; 7. Mantenimiento: 6,25 ; 4,17 ; 10.
2. Puntuación final: P1 7,11; P2 7,08; P3 8,71. Por ejemplo, P3: $\frac{25 \cdot 9{,}32 + 25 \cdot 10 + 20 \cdot 6{,}67 + 15 \cdot 7 + 15 \cdot 10}{100} = 8{,}71$.
3. Equipo B: P1 7,83; P2 7,77; P3 8,61. El orden no cambia (P3 > P1 ≈ P2), pero P1 y P2 siguen prácticamente empatados. Con A: P1 7,11, P2 7,08, P3 8,71.
4. P3 es la mejor con ambos conjuntos de pesos, por más de 0,7 puntos sobre las otras. Entre P1 y P2 la diferencia (0,04 puntos con los pesos de A) es demasiado pequeña para decir que una es mejor. P3 cumple las restricciones con $r = 6$ m (cabe en la parcela y cuesta 10 493,27 €), pero con un 30 % de probabilidad de superar el presupuesto. Se aceptan recomendaciones razonadas distintas si explican el riesgo.

Ficha 8

1. Respuestas abiertas. Se valora que la lista se complete con honestidad y que el equipo pueda mostrar dónde está cada elemento en su borrador.
2. Puntuaciones (equipo A): Coste 8,34, 10, 9,32. Uso: 3,57, 5,36, 10. Preferencia: 10, 5,56, 6,67. Riesgo: 8, 10, 7. Mantenimiento: 6,25, 4,17, 10. Se valora eje 0-10, tres barras por criterio con leyenda y etiquetas.
3. Respuesta abierta. Supuestos esperables: precios ficticios, sobrecosto aplicado sobre el coste con IVA, aforo de 1 persona/m², encuesta aleatoria con margen de 9,1 puntos, mantenimiento constante y sin inflación. Límites: no se valoran ruido, sombra ni accesibilidad.
4. Respuesta abierta. Se valora que la revisión sea específica (un dato concreto comprobado), con dos fortalezas reales y una mejora accionable.

Ficha 9

1. $C_X(t) = 1\,800 + 90t$ y $C_Y(t) = 1\,200 + 140t$. Igualdad: $1\,800 + 90t = 1\,200 + 140t \Rightarrow 600 = 50t \Rightarrow t = 12$ años. Para $t < 12$ gana Y (más barata); para $t > 12$ gana X. A 20 años: $C_X = 3\,600$ €, $C_Y = 4\,000$ €. Compensa X.
2. $36/80 = 45\,\%$. Margen $1/\sqrt{80} \approx 0{,}112$ (11,2 puntos). Intervalo [33,8 ; 56,2]. No se puede asegurar que X tenga la mayoría (50 % está dentro del intervalo).
3. Pesos (50, 30, 20): X $= \frac{50\cdot 6 + 30\cdot 9 + 20\cdot 7}{100} = 7{,}1$; Y $= \frac{50\cdot 9 + 30\cdot 6 + 20\cdot 7}{100} = 7{,}7$; gana Y. Pesos (20, 60, 20): X $= \frac{120 + 540 + 140}{100} = 8{,}0$; Y $= \frac{180 + 360 + 140}{100} = 6{,}8$; gana X. La decisión cambia con los pesos.
4. Respuesta abierta. Se espera que la recomendación nombre las dos ofertas, use el punto de cruce de 12 años, la sensibilidad a los pesos y el margen de error de la encuesta, y diga qué cambiaría la decisión (por ejemplo, un periodo de uso inferior a 12 años o dar más peso al coste inicial).

Refuerzo

1. P1: $9\,690 \cdot 1{,}21 = 11\,724{,}90$ €. P2: $8\,080 \cdot 1{,}21 = 9\,776{,}80$ €. Ambos caben en 12 000 €.
2. Coste: P1 8,34, P2 10. Uso: P1 $10 \cdot \frac{20}{30} \approx 6{,}67$, P2 10. Mantenimiento: P1 10, P2 $10 \cdot \frac{400}{600} \approx 6{,}67$.
3. $S_{P1} = \frac{40\cdot 8{,}34 + 30\cdot 6{,}67 + 30\cdot 10}{100} \approx 8{,}34$. $S_{P2} = \frac{40\cdot 10 + 30\cdot 10 + 30\cdot 6{,}67}{100} \approx 9{,}00$. Gana P2.
4. Respuesta abierta, p. ej.: «Elijo P2 porque cuesta menos y cabe más gente, aunque su mantenimiento es mayor».

Ampliación

1. Con (20, 10, 40, 15, 15): P1 8,16, P2 6,88, P3 8,08. Cambia la ganadora: pasa de P3 a P1 (por 0,08 puntos).
2. Resto de pesos: $25\,\frac{100-w}{80}$, $25\,\frac{100-w}{80}$, $15\,\frac{100-w}{80}$, $15\,\frac{100-w}{80}$. Cada puntuación es lineal en w: $S_1(w) = 6{,}394 + 0{,}0361\,w$ y $S_3(w) = 9{,}224 - 0{,}0256\,w$ (con w en %). Resolviendo $S_1(w) = S_3(w)$ sale $w \approx 45{,}9\,\%$: P1 supera a P3 si la preferencia pesa más de un 46 %, casi el doble del peso del equipo A. Se acepta resolver por tanteo con hoja de cálculo.
3. Con los votos 48 · 30 · 42 (preferencia 10, 6,25, 8,75): P1 7,11, P2 7,21, P3 9,13. Orden P3 > P2 > P1: P1 y P2 intercambian posiciones, lo que confirma que estaban prácticamente empatadas.
4. Conclusión esperable: P3 es la ganadora robusta ante cambios moderados de pesos o datos (necesita más de un 46 % de peso en preferencia para dejar de serlo); sin embargo, P1 y P2 están casi empatadas y su orden no es fiable. P3 tiene un 30 % de riesgo de pasarse del presupuesto: la recomendación debe mencionarlo.

⚠ Errores frecuentes

- Comparar costes sin IVA con el presupuesto con IVA, o aplicar el IVA solo a una parte.
- Calcular el 21 % de aumento como $\cdot\, 0{,}21$ en lugar de $\cdot\, 1{,}21$.
- Confundir la pendiente (mantenimiento anual) con la ordenada en origen (coste de la obra) en la función de coste a t años.
- Olvidar el perímetro completo de la pista en el vallado, o usar el área del círculo completo en lugar del semicírculo.
- Pensar que dos propuestas con una diferencia mínima en la matriz son claramente distintas, o que dos porcentajes de una encuesta con intervalos solapados se pueden ordenar con seguridad.
- Normalizar al revés los criterios en los que menos es mejor (coste, mantenimiento).
- Usar pesos que no suman 100 o presentarlos sin justificación.

⚖ Criterios para valorar respuestas abiertas

- En las recomendaciones se acepta cualquier propuesta si los cálculos son correctos, los pesos están justificados y se comprueba la robustez de la decisión.
- Se valora más la coherencia entre el modelo, los números y la conclusión que coincidir con el resultado del solucionario.
- Cálculos con calculadora o hoja de cálculo. Redondear solo el resultado final. Los pequeños desfases de céntimos por el redondeo de π son aceptables.
- Todos los datos son ficticios; solo el IVA del 21 % es real.

Créditos, fuentes y condiciones de uso

Edición revisada: octubre de 2026

Situaciones de aprendizaje · Matemáticas · 4.º ESO · Matemáticas A. Material elaborado y editado por **recursoseso.com**.

Normativa de referencia

- Ley Orgánica 2/2006, de Educación, modificada por la Ley Orgánica 3/2020 (LOMLOE).
- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la ESO.
- Currículos autonómicos correspondientes, a los que debe adaptarse esta propuesta.

Gráficos, esquemas y fórmulas

Gráficas, diagramas, planos y esquemas de elaboración propia. Fórmulas compuestas con **KaTeX** (licencia MIT). Los mapas, cuando aparecen, se elaboran con datos de **Natural Earth** (dominio público).

Datos y contextos

Los problemas usan datos reales cuando se indica su fuente (INE, Eurostat, Banco de España, AEMET, organismos oficiales y similares), redondeados con fines didácticos. Los catálogos de precios, tarifas, empresas, personajes y conjuntos de datos señalados como ficticios han sido creados para el aula. Las cifras económicas y tarifas deben actualizarse cuando se trabajen problemas del presente.

Herramientas digitales

Las referencias a calculadora, hoja de cálculo o geometría dinámica (por ejemplo, GeoGebra) son orientativas: todas las actividades pueden resolverse también con lápiz, papel y los datos del dossier.

Condiciones de uso

© 2026 recursoseso.com. Todos los derechos reservados. Se autoriza la reproducción de las páginas de este cuaderno para su uso en el aula por parte del docente o del centro educativo que lo ha adquirido u obtenido legítimamente. No está permitida su redistribución, venta, publicación en otras webs o plataformas ni su modificación para uso comercial sin autorización expresa de recursoseso.com.

Si detectas algún error o quieres proponer una mejora, puedes comunicarlo a través de **recursoseso.com**. Este material se revisa y actualiza periódicamente.