SITUACIONES DE APRENDIZAJE

Matemáticas

3.º ESO

10 situaciones de aprendizaje completas

Con secuencia didáctica, evaluación, rúbricas y anexos listos para usar

Índice

Presentación del cuaderno 3

Plan general 5

SdA 01 ¿Todos los números son iguales? 6

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 12

SdA 02 Potencias para describir el mundo 34

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 40

SdA 03 ¿Cuánto crecerá? 63

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 69

SdA 04 Patrones que permiten predecir 89

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 95

SdA 05 Álgebra para modelizar 117

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 124

SdA 06 Resolver para decidir 146

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 153

SdA 07 El mundo cambia: las funciones lo cuentan 179

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 186

SdA 08 Medir sin poder medir directamente 213

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 219

SdA 09 ¿Qué población representa mejor los datos? 242

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 249

SdA 10 Tomar decisiones bajo incertidumbre 273

Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente 280

Créditos, fuentes y condiciones de uso 301

PRESENTACIÓN

Un cuaderno para pensar con las matemáticas

Este cuaderno reúne **10 situaciones de aprendizaje** completas de Matemáticas para 3.º ESO, con un total de **75 sesiones**. Cada situación parte de un reto con sentido y culmina en un producto final en el que el alumnado interpreta, modeliza, resuelve, comprueba y comunica.

Sobre este volumen

El currículo estatal agrupa 1.º-3.º, por lo que la secuenciación por curso debe adaptarse a cada comunidad. Este volumen propone para 3.º ESO una progresión de consolidación y modelización: números, proporcionalidad, sucesiones, álgebra, funciones, geometría, estadística y probabilidad.

Criterio de uso curricular. La concreción y secuenciación propuestas son orientativas. Deben adaptarse al currículo de la comunidad autónoma, a la programación del departamento, al número real de sesiones y al punto de partida del alumnado.

Criterios metodológicos comunes

- Resolución de problemas como eje de aprendizaje, evitando reducir las situaciones a una sucesión de ejercicios rutinarios.
- Conexión entre representaciones numéricas, algebraicas, gráficas, geométricas y verbales.
- Uso razonado de calculadora, hoja de cálculo, geometría dinámica u otras herramientas cuando mejoran la comprensión o la comprobación.
- Evaluación continua y formativa mediante producciones de proceso, producto final y evidencia individual.
- Trabajo explícito del sentido socioafectivo: perseverancia, revisión del error, comunicación, cooperación e inclusión.

Cómo está organizada cada situación

Contexto y reto
Pregunta guía, reto y producto final.

Currículo
Competencias, criterios, saberes y objetivos.

Sesiones
Secuencia con una evidencia por sesión.

DUA
Medidas de inclusión, refuerzo y ampliación.

Evaluación
Instrumentos, rúbrica y variantes.

Los diez anexos de cada situación

Cada situación incluye anexos listos para imprimir o proyectar: dossier con datos, tablas, gráficas y esquemas, fichas de trabajo, plantillas, instrumentos de evaluación y una guía docente con todas las soluciones. Los del alumnado llevan cabecera para nombre, grupo y fecha.

1. Ficha de lanzamiento del reto
2. Dossier de fuentes y materiales base

3 Fichas de actividades del alumnado

4 Plantilla del producto final

5 Lista de cotejo para el proceso y la entrega

6 Rúbrica imprimible

7 Autoevaluación y coevaluación

8 Material de apoyo y refuerzo

9 Actividad de ampliación

10 Guía docente de respuestas y orientaciones

Claves de lectura: competencias y sentidos

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICAS (SÍNTESIS)

CE1 Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.

CE2 Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.

CE3 Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.

CE4 Utilizar el pensamiento computacional: descomponer, reconocer patrones, generalizar y crear algoritmos.

CE5 Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.

CE6 Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.

CE7 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.

CE8 Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

CE9 Gestionar emociones, aceptar el error y perseverar en el aprendizaje de las matemáticas.

CE10 Trabajar en equipo con respeto, asumiendo roles y valorando la diversidad.

SENTIDOS DE LOS SABERES BÁSICOS

A Sentido numérico

B Sentido de la medida

C Sentido espacial

D Sentido algebraico

E Sentido estocástico

F Sentido socioafectivo

Base normativa: LOMLOE y Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo. La secuenciación es orientativa y debe adaptarse al currículo autonómico. En cada situación, los criterios de evaluación se presentan en síntesis operativa; su formulación literal figura en el anexo II del real decreto.

Plan general · 3.º ESO

1.º trimestre	1.º-2.º trimestre	2.º trimestre	2.º-3.º trimestre	3.º trimestre
3 situaciones · 21 sesiones	1 situación · 7 sesiones	2 situaciones · 16 sesiones	1 situación · 8 sesiones	3 situaciones · 23 sesiones

1 ¿Todos los números son iguales?

7 sesiones · 1.º trimestre

Mapa de los conjuntos numéricos

2 Potencias para describir el mundo

7 sesiones · 1.º trimestre

Dossier de órdenes de magnitud

3 ¿Cuánto crecerá?

7 sesiones · 1.º trimestre

Simulador de crecimiento y decisiones financieras

4 Patrones que permiten predecir

7 sesiones · 1.º-2.º trimestre

Informe de sucesiones y progresiones

5 Álgebra para modelizar

8 sesiones · 2.º trimestre

Catálogo de modelos polinómicos

6 Resolver para decidir

8 sesiones · 2.º trimestre

Dossier de ecuaciones y sistemas contextualizados

7 El mundo cambia: las funciones lo cuentan

8 sesiones · 2.º-3.º trimestre

Atlas de funciones y fenómenos

8 Medir sin poder medir directamente

8 sesiones · 3.º trimestre

Informe de medida indirecta

9 ¿Qué población representa mejor los datos?

7 sesiones · 3.º trimestre

Estudio estadístico comparativo

10 Tomar decisiones bajo incertidumbre

8 sesiones · 3.º trimestre

Laboratorio de probabilidad y decisiones

01

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

¿Todos los números son iguales?

PREGUNTA GUÍA

¿Por qué algunas cantidades necesitan nuevos tipos de números para poder expresarse?

CURSO
3.º ESO

SESIONES
7 sesiones · 1.º trimestre

SENTIDOS PRIORITARIOS
A · Sentido numérico

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE3, CE5, CE7

PRODUCTO FINAL
Mapa de los conjuntos numéricos

CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 1.2, 3.1, 5.1, 7.1

Contexto, reto y sentido

El instituto prepara para la Semana de la Ciencia una exposición en el pasillo central con el título «Los números tienen familia». La comisión organizadora ha encontrado un problema: cada vez que alguien pregunta «¿qué tipo de número es este?», los carteles actuales solo dicen «natural», «decimal» o «raíz», sin explicar qué tiene que ver unos con otros. Os piden que construyáis el panel principal: un mapa que muestre cómo los conjuntos de números se van ampliando porque aparecen problemas que los anteriores no pueden resolver.

La situación moviliza el sentido numérico en 3.º ESO: números enteros, racionales (fracciones y decimales exactos o periódicos), irracionales introductorios (raíces no exactas y π) y números reales. Se trabaja la clasificación con argumentos, la representación en la recta numérica y la diferencia entre un valor exacto y una aproximación con su error. El mapa final solo es válido si cada número colocado va acompañado de su justificación.

Reto

Construir el mapa de los conjuntos numéricos de la exposición: clasificar 16 tarjetas de números, justificar cada clasificación, situarlas en la recta real y distinguir lo exacto de lo aproximado.

Producto final

Mapa de los conjuntos numéricos.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE5** Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

1.1 Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.

1.2 Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.

3.1 Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.

5.1 Reconocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente.

7.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales.

Saberes básicos prioritarios

A
Sentido numérico

- Números enteros y racionales: representación en la recta, orden y densidad (entre dos racionales siempre hay otro).
- Fracciones y decimales: expresión decimal exacta o periódica y fracción generatriz.
- Números irracionales introductorios: raíces no exactas y el número π; diferencia con los racionales.
- Números reales: representación en la recta (incluida la construcción geométrica de raíces con el teorema de Pitágoras) y relaciones de inclusión $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Aproximaciones por truncamiento y redondeo; error absoluto; cotas de un número.

F
Sentido socioafectivo

- Argumentar y escuchar razones ajenas: aceptar que una clasificación errónea se corrige con una justificación mejor.
- Tolerar la incertidumbre: reconocer que un número puede ser exacto aunque no se pueda escribir entero.

Objetivos didácticos

- ✓ Clasificar números según sus propiedades.
- ✓ Representar y ordenar números en la recta real.
- ✓ Distinguir expresión exacta y aproximada.
- ✓ Relacionar cada conjunto con problemas que lo hacen necesario.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Situaciones que “rompen” los naturales

Evidencia: Ficha 1: tabla de situaciones que no tienen solución en los naturales, con la ecuación y el conjunto mínimo necesario.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

De enteros a racionales

Evidencia: Ficha 2: números situados y ordenados en la recta, fracciones intercaladas y verdadero/falso sobre enteros y racionales.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Decimales exactos y periódicos

Evidencia: Ficha 3: tabla de decimales exactos y periódicos, criterio del denominador y fracciones generatrices calculadas.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Raíces no exactas e irracionales a nivel introductorio

Evidencia: Ficha 4: clasificación de raíces (exactas y no exactas) y razonamiento sobre por qué la diagonal del cuadrado no es una fracción.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Recta real y aproximaciones

Evidencia: Ficha 5: acotación de raíces, errores absolutos de aproximaciones de π y construcción de $\sqrt{5}$ sobre la cuadrícula.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Mapa de conjuntos con ejemplos

Evidencia: Ficha 6: tabla de clasificación de las 16 tarjetas y borrador del diagrama de conjuntos del equipo.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Reto individual de clasificación y justificación

Evidencia: Ficha 7: evidencia individual de clasificación, representación y justificación con ocho números nuevos.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Tarjetas de números · recta numérica · calculadora · diagramas de conjuntos

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Números seleccionados y diagrama anidado parcialmente completado.

Ampliación

Anexo 9

Investigar aproximaciones racionales de $\sqrt{2}$ y acotar entre decimales.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Identificación en cada situación de la operación o ecuación que plantea y del conjunto numérico mínimo necesario para resolverla.	Ficha 1 y Ficha 4 / lista de cotejo
1.2	Elección de estrategias adecuadas: criterio del denominador, fracción generatriz, acotación por cuadrados y construcción con Pitágoras.	Fichas 3 y 5 / escala de valoración
3.1	Formulación y comprobación de conjeturas (¿hay otra fracción entre dos dadas?, ¿es 0,999… igual a 1?, ¿puede una fracción valer $\sqrt{2}$?).	Fichas 2, 3 y 4 / rúbrica
5.1	Conexión entre fracción, decimal, raíz y punto de la recta para un mismo número, y entre los conjuntos mediante inclusiones.	Ficha 6 y mapa final (Anexo 4) / rúbrica
7.1	Representación de los números en la recta numérica, en la cuadrícula y en el diagrama de conjuntos con rótulos correctos.	Mapa final (Anexo 4) y Ficha 7 / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Mapa, clasificación, recta y justificación.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 1 · ¿Todos los números son iguales?

ALUMNADO

Pasillo central del instituto, Semana de la Ciencia. Un cartel dice: «Los números tienen familia». Una alumna de primero pregunta: «¿Y por qué hay números con coma que nunca acaban? ¿Y qué es eso de la raíz de dos?». Nadie sabe contestar con claridad. Vosotros y vosotras vais a construir el mapa que lo explique: colocaréis 16 números en su familia, demostraréis por qué ahí y no en otra, y los situaréis en la recta. Un número mal colocado hará que el mapa no sea creíble: hay que justificar cada decisión.

> *«¿Por qué algunas cantidades necesitan nuevos tipos de números para poder expresarse?»*

Vuestro reto

Construir el mapa de los conjuntos numéricos de la exposición: clasificar 16 tarjetas de números, justificar cada clasificación, situarlas en la recta real y distinguir lo exacto de lo aproximado.

Lo que vais a producir

Mapa de los conjuntos numéricos.

Hoja de ruta · 7 sesiones

1. Descubrimos situaciones reales en las que los números naturales no bastan.
2. Pasamos de los enteros a las fracciones y las situamos en la recta.
3. Distinguimos decimales exactos y periódicos y hallamos su fracción generatriz.
4. Conocemos las raíces no exactas y los números irracionales.
5. Acotamos números reales, medimos errores y construimos raíces con Pitágoras.
6. Clasificamos las 16 tarjetas y dibujamos el mapa de conjuntos del equipo.
7. Resolvemos de forma individual un reto de clasificación y justificación.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Clasificar números según sus propiedades.
- ✓ Representar y ordenar números en la recta real.
- ✓ Distinguir expresión exacta y aproximada.
- ✓ Relacionar cada conjunto con problemas que lo hacen necesario.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 1 · ¿Todos los números son iguales?

ALUMNADO

Situaciones que rompen los conjuntos, 16 tarjetas de números, diagrama de conjuntos, recta numérica, cuadro de conjuntos, guía de decimales, construcción geométrica de raíces y tabla de aproximaciones. Todos los datos son matemáticos (valores exactos) o ficticios para el aula.

F1 Seis situaciones que rompen los números

DATOS

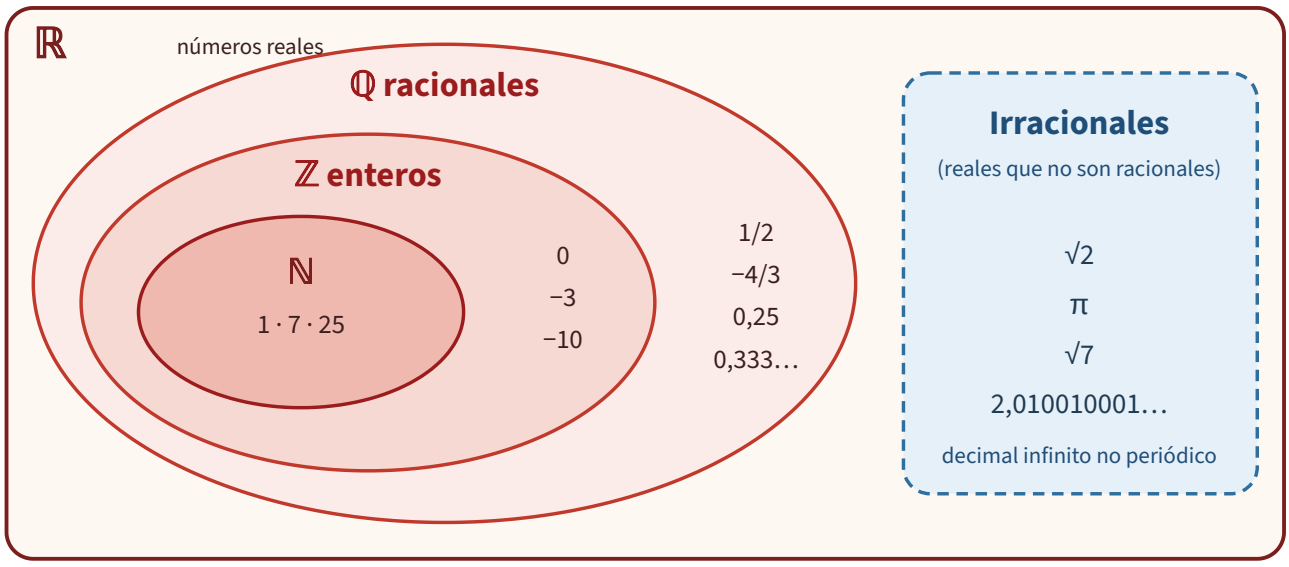
N.º	Situación	Planteamiento
1	Un termómetro marca 3 °C y la temperatura baja 5 grados.	$3 - 5 = ?$
2	Se reparten 3 barras de pan entre 4 personas a partes iguales.	$4x = 3$
3	Se parte por la mitad una entrada de 7 €.	$2x = 7$
4	Se quiere cercar un terreno cuadrado de 2 m² de superficie y se pide la longitud de su lado.	$x^2 = 2$
5	Se mide la longitud de una circunferencia de 1 m de diámetro.	$L = \pi \cdot d = \pi \cdot 1$
6	Se compran 5 camisetas y se pagan 35 €.	$5x = 35$

Fuente: Situaciones de elaboración propia para el aula.

¿En cuáles de estas situaciones sigue bastando con los números naturales? ¿Qué número nuevo hace falta en cada una de las demás?

F2 Diagrama de conjuntos numéricos

ESQUEMA



Fuente: Esquema de elaboración propia. En este cuaderno, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ y el 0 se considera un entero.

Cada conjunto contiene al anterior: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Los irracionales completan $\mathbb{R}$ fuera de $\mathbb{Q}$.

F3 Las 16 tarjetas de números

DATOS

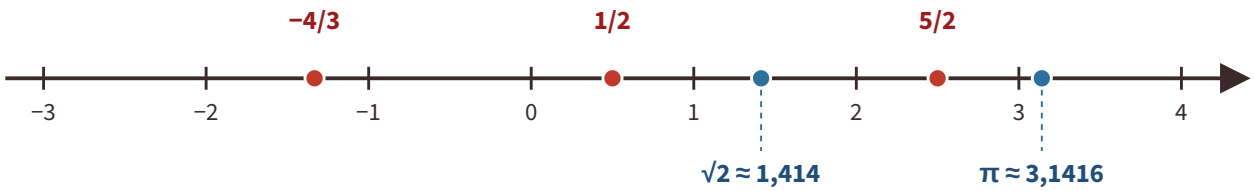
Tarjeta	Número	Tarjeta	Número
T1	7	T9	$\sqrt{9}$
T2	-3	T10	π
T3	0	T11	$3{,}14$
T4	$\frac{5}{2}$	T12	$-\sqrt{16}$
T5	$-\frac{4}{3}$	T13	$\sqrt{\frac{1}{9}}$
T6	$0{,}25$	T14	$2{,}010010001\ldots$ (cada vez un cero más entre los unos)
T7	$0{,}\overline{3}$	T15	$\sqrt{12}$
T8	$\sqrt{2}$	T16	$0{,}\overline{9}$

Fuente: Colección de elaboración propia para el aula.

Estas son las tarjetas que hay que clasificar para el mapa. Alguna parece de una familia y es de otra.

F4 Recta numérica: racionales e irracionales

ESQUEMA



Rojo: racionales (fracciones). Azul: irracionales. Cada punto de la recta es un número real.

Fuente: Esquema a escala (1 unidad = 85 unidades del dibujo).

Entre dos puntos cualesquiera de la recta siempre hay infinitos números racionales y también infinitos irracionales.

F5 Cuadro de los conjuntos numéricos

DATOS

Conjunto	Qué contiene	Qué problema lo hace necesario	Ejemplos
$\mathbb{N}$ **naturales**	Los números de contar: $1, 2, 3, \ldots$	Contar objetos	$1,\ 7,\ 25$
$\mathbb{Z}$ **enteros**	Naturales, sus opuestos y el 0	Restas imposibles ($3-5$), deudas, temperaturas bajo cero	$0,\ -3,\ -10$
$\mathbb{Q}$ **racionales**	Fracciones $\frac{a}{b}$ con a, b enteros y $b \neq 0$. Su decimal es exacto o periódico	Repartos y divisiones no exactas ($4x = 3$)	$\frac{1}{2},\ -\frac{4}{3},\ 0{,}25,\ 0{,}\overline{3}$
$\mathbb{I}$ **irracionales**	Decimales con infinitas cifras que no se repiten periódicamente: no son fracciones	Medidas como la diagonal del cuadrado ($x^2 = 2$) o la longitud de la circunferencia	$\sqrt{2},\ \pi,\ \sqrt{7}$
$\mathbb{R}$ **reales**	Racionales e irracionales juntos: todos los puntos de la recta	Medir cualquier longitud y representar cualquier punto de la recta	Todos los anteriores

Fuente: Elaboración propia.

🔍 $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ y ningún número está a la vez en $\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{I}$.

F6 Decimales: exactos, periódicos y fracción generatriz

TEXTO

¿Exacto o periódico? Se simplifica la fracción. Si el denominador solo tiene los factores 2 y 5, el decimal es **exacto**; si tiene algún otro factor primo, es **periódico**.

- $\frac{3}{8}$: $8 = 2^3 \to 0{,}375$ (exacto).
- $\frac{5}{6}$: $6 = 2 \cdot 3 \to 0{,}8333\ldots = 0{,}8\overline{3}$ (periódico mixto).
- $\frac{4}{11} \to 0{,}3636\ldots = 0{,}\overline{36}$ (periódico puro).

Fracción generatriz de un periódico puro. Para $x = 0{,}\overline{27}$: el periodo tiene 2 cifras, así que multiplicamos por 100.

$100x = 27{,}2727\ldots$ y $x = 0{,}2727\ldots \to$ restando: $99x = 27 \to x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$.

Periódico mixto. Para $y = 0{,}1\overline{6}$: $100y = 16{,}666\ldots$ y $10y = 1{,}666\ldots \to$ restando: $90y = 15 \to y = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$.

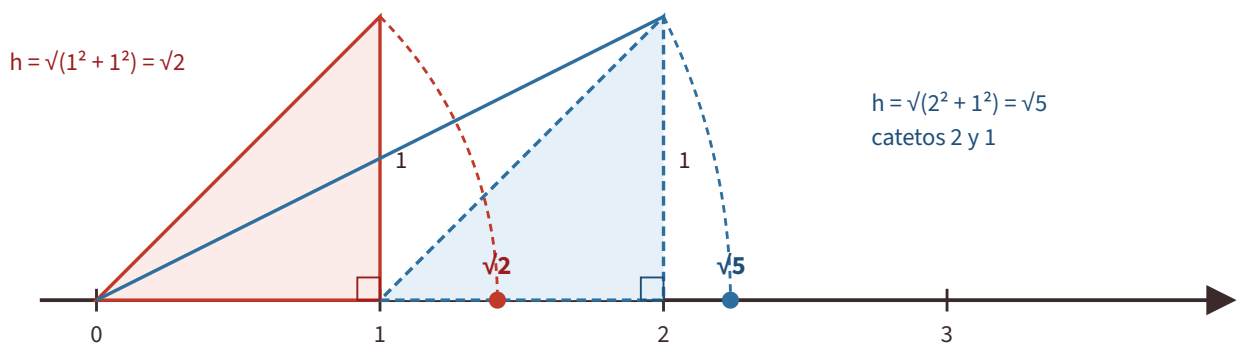
Un caso curioso. Si $z = 0{,}\overline{9}$, entonces $10z - z = 9$, luego $9z = 9$ y $z = 1$. Es decir, $0{,}999\ldots = 1$.

Fuente: Elaboración propia.

🔍 Comprueba siempre dividiendo: la fracción generatriz debe dar el decimal de partida.

F7 Raíces en la recta con el teorema de Pitágoras

ESQUEMA



Fuente: Construcción geométrica de elaboración propia (1 unidad = 150 unidades del dibujo).

Con un compás se «traslada» la hipotenusa sobre la recta: el punto obtenido representa exactamente la raíz.

F8 Aproximaciones de $\sqrt{2}$ y de π

DATOS

Número	Aproximación	Cifras decimales	Error absoluto (aprox.)
$\sqrt{2}$	1	0	$0{,}414$
$\sqrt{2}$	$1{,}4$	1	$0{,}0142$
$\sqrt{2}$	$1{,}41$	2	$0{,}0042$
$\sqrt{2}$	$1{,}414$	3	$0{,}00021$
π	$3{,}14$	2	$0{,}00159$
π	$\frac{22}{7} = 3{,}142857\ldots$	—	$0{,}00126$
π	$3{,}1416$	4	$0{,}0000073$

Fuente: Valores calculados con calculadora; $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ *y* $\pi = 3{,}14159265\ldots$. *El error absoluto es* $|\text{valor real} - \text{aproximación}|$.

Más cifras decimales suelen dar menos error, pero hay aproximaciones con pocas cifras que son sorprendentemente buenas, como $\frac{22}{7}$.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 1 · ¿Todos los números son iguales?

ALUMNADO

FICHA 1 Cuando los naturales no bastan

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Lee F1. Antes de resolver, decide qué tipo de número necesita cada situación.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

$\frac{3}{4}$ es igual a…

☐ 0,34 ☐ 0,75 ☐ 1,33

¿Cuál es el mayor de estos números?

☐ −9 ☐ −5 ☐ −2

$\sqrt{81}$ es igual a…

☐ 9 ☐ 40,5 ☐ 8,1

2 **Completa la tabla para las situaciones de F1.**

N.º	¿Tiene solución en $\mathbb{N}$? (sí / no)	Resultado o cómo se expresa	Conjunto mínimo necesario
1			
2			
3			
4			
5			
6			

3 **En la situación 4 (el lado de un terreno cuadrado de 2 m²), comprueba con la calculadora si $1{,}4$, $1{,}41$ o $1{,}42$ elevado al cuadrado da exactamente 2. ¿Qué observas?**

4 **Explica con tus palabras por qué los números negativos y las fracciones «nacieron» como respuesta a problemas concretos.**

FICHA 2 De los enteros a los racionales

Sesión 2

Trabaja con F4 y F5. Recuerda que $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$ es un cociente de enteros.

1 **Sitúa en la recta los números $-3{,}5$; $-\frac{4}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{2}$ y 2. Rotula cada punto.**



2 **Ordena de menor a mayor y comprueba tu orden pasando todos a decimal: $\frac{7}{4}$; $-\frac{3}{2}$; $\frac{5}{3}$; -1; $\frac{3}{5}$.**

3 **Escribe tres fracciones distintas que estén entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$. Explica cómo las has encontrado y si podrías seguir encontrando más.**

4 **Verdadero o falso. Corrige las falsas.**

	V	F
Todo número entero es racional.	☐	☐
$-\frac{4}{3}$ es un número entero.	☐	☐
$\frac{6}{3}$ es un número natural.	☐	☐
Entre dos fracciones distintas siempre hay otra fracción.	☐	☐

FICHA 3 Decimales exactos y periódicos

Sesión 3

Usa el criterio y los ejemplos de F6. Comprueba con calculadora solo al final.

1 **Completa la tabla. Divide numerador entre denominador y escribe el decimal con la notación de periodo.**

Fracción	Decimal	Tipo (exacto / periódico puro / periódico mixto)
$\frac{3}{8}$		
$\frac{5}{6}$		
$\frac{4}{11}$		
$\frac{7}{20}$		
$\frac{2}{7}$		

2 **Sin dividir, decide si el decimal es exacto o periódico. Justifica con la descomposición del denominador (fracción simplificada).**

Fracción	Denominador descompuesto	¿Exacto o periódico?
$\frac{9}{40}$		
$\frac{7}{12}$		
$\frac{11}{25}$		
$\frac{5}{18}$		

3 **Halla la fracción generatriz, simplifica y comprueba dividiendo: a) $0,\overline{7}$; b) $2,\overline{45}$; c) $0,1\overline{6}$.**

4 Una compañera dice: «$0{,}999\ldots$ es menor que 1, aunque muy poco». Usa el método de F6 para razonar si tiene razón.

FICHA 4 Raíces exactas y no exactas

Sesión 4

Trabaja con F1, F5, F7 y F8. Una raíz es exacta cuando el radicando es el cuadrado de un número racional.

1 Relaciona cada raíz con su valor o con su tipo.

1 $\sqrt{49}$	a 7
2 $\sqrt{\frac{9}{25}}$	b $\frac{3}{5}$
3 $\sqrt{0{,}49}$	c $0{,}7$
4 $\sqrt{20}$	d irracional (aprox. $4{,}47$)
5 $\sqrt{50}$	e irracional (aprox. $7{,}07$)

2 Clasifica $-\sqrt{16}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{\frac{1}{9}}$ y $\sqrt{13}$ como racional o irracional y explica por qué.

3 Una baldosa cuadrada tiene 1 m de lado. a) Calcula su diagonal usando el teorema de Pitágoras. b) ¿Se puede escribir esa diagonal como una fracción? Una persona dice: «$1{,}4142135$ es la diagonal exacta». ¿Tiene razón? Razona.

4 **Completa el razonamiento sobre decimales.**

Un número racional tiene un decimal _____ o _____. El decimal de $\sqrt{2}$ tiene infinitas cifras y no se _____, así que $\sqrt{2}$ es un número _____.

FICHA 5 La recta real y las aproximaciones

Sesión 5

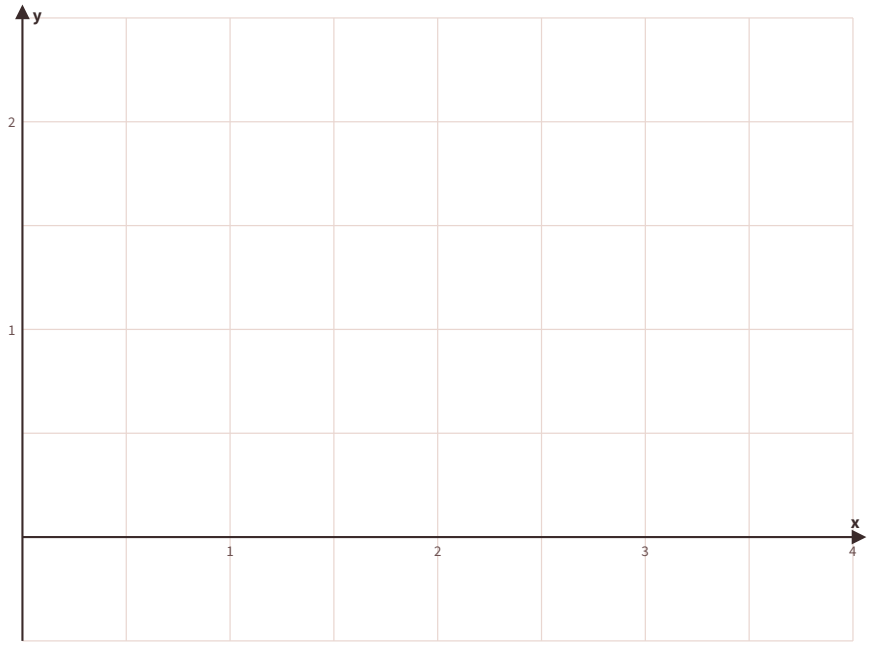
Usa F7 y F8. Recuerda que el error absoluto es la distancia entre el valor real y la aproximación.

1 **Acota $\sqrt{3}$ entre dos decimales de una cifra usando cuadrados. Completa: $1{,}7^2 = \ldots$ y $1{,}8^2 = \ldots$; por tanto $\ldots < \sqrt{3} < \ldots$. Después afina a dos cifras decimales probando con $1{,}73$ y $1{,}74$.**

2 **Calcula el error absoluto de cada aproximación de $\pi = 3{,}14159265\ldots$ y decide cuál es mejor.**

Aproximación	Error absoluto	Ordena de mejor (1) a peor (3)
$3{,}14$		
$\frac{22}{7}$		
$3{,}1$		

3 **Representa $\sqrt{5}$ en la cuadrícula: dibuja un triángulo rectángulo de catetos 2 y 1 con un vértice en el origen, traslada la hipotenusa con el compás sobre el eje horizontal y rotula el punto.**



4 **Redondea $\sqrt{5} = 2{,}2360679\ldots$ a las décimas y a las centésimas y calcula el error absoluto de cada redondeo.**

FICHA 6 El mapa de los conjuntos

Sesión 6

Trabajo en equipo con las tarjetas de F3. Roles: clasificador, comprobador (calculadora), dibujante y portavoz. Rotad al terminar cada bloque.

1 **Marca con X todos los conjuntos a los que pertenece cada tarjeta ($\mathbb{N}$ con 1, 2, 3…; el 0 es un entero).**

Tarjeta	Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	Irracional
T1	7					
T2	-3					
T3	0					
T4	$\frac{5}{2}$					
T5	$-\frac{4}{3}$					
T6	$0{,}25$					
T7	$0{,}\overline{3}$					
T8	$\sqrt{2}$					
T9	$\sqrt{9}$					
T10	π					
T11	$3{,}14$					
T12	$-\sqrt{16}$					
T13	$\sqrt{\frac{1}{9}}$					
T14	$2{,}0100\ldots$					
T15	$\sqrt{12}$					
T16	$0{,}\overline{9}$					

2 **Justifica por escrito las tres clasificaciones que más discusión hayan generado en el equipo (por ejemplo T9, T11, T13 o T16).**

3 **Borrador del diagrama de conjuntos del equipo: dibuja los conjuntos anidados y coloca los números de las tarjetas.**

4 **Revisión cruzada con otro equipo.**

- [ ] Cada número está en el conjunto más pequeño al que pertenece (y en los que lo contienen)
- [ ] Los irracionales están fuera de $\mathbb{Q}$
- [ ] Las fracciones generatrices se han comprobado dividiendo
- [ ] Los números situados en la recta están en el orden correcto

FICHA 7 Reto individual: clasificar y justificar

Sesión 7

Prueba individual: resuelve sin ayuda del equipo. Se puede usar calculadora para comprobar.

1 Clasifica cada número en todos los conjuntos a los que pertenece ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$) y justifica en una línea: -8; $\frac{7}{3}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{10}$; $0{,}\overline{45}$; $1{,}5$; $\frac{3}{16}$; $\sqrt{\frac{4}{25}}$.

Número	Conjuntos	Justificación
-8		
$\frac{7}{3}$		
$\sqrt{81}$		
$\sqrt{10}$		
$0{,}\overline{45}$		
$1{,}5$		
$\frac{3}{16}$		
$\sqrt{\frac{4}{25}}$		

2 Halla la fracción generatriz de $0{,}\overline{45}$ y de $1{,}5\overline{3}$. Simplifica.

3 Acota $\sqrt{10}$ entre dos decimales de una cifra, calcula el error absoluto de la aproximación $3{,}2$ y representa $\sqrt{10}$ de forma aproximada en la recta entre 3 y 4.

4 Explica en cuatro frases por qué hace falta ampliar los números desde $\mathbb{N}$ hasta $\mathbb{R}$ y qué situación obliga a cada ampliación.

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 1 · ¿Todos los números son iguales?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Mapa de los conjuntos numéricos para la exposición «Los números tienen familia». Cada número colocado lleva su justificación.

Título y equipo

Nombre del mapa, integrantes y roles.

¿Por qué se amplían los números?

Una situación para cada salto: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

Diagrama de conjuntos

Dibuja $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y la zona de irracionales. Coloca las 16 tarjetas.

Justificaciones

Cinco números con su clasificación razonada (fracción generatriz, raíz, periodo…).

Recta numérica

Sitúa al menos cinco tarjetas, dos de ellas irracionales.

Exacto o aproximado

Una aproximación con su error absoluto.

Conclusión

Qué nos enseña el mapa sobre las familias de números.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 1 · ¿Todos los números son iguales?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Mapa de los conjuntos numéricos**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] Las 16 tarjetas están colocadas en el conjunto más pequeño al que pertenecen.
- [ ] Cada clasificación dudosa (T9, T11, T13, T16) lleva una justificación escrita.
- [ ] Las inclusiones $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ se respetan en el diagrama.
- [ ] Los irracionales están fuera de $\mathbb{Q}$ y dentro de $\mathbb{R}$.
- [ ] Las fracciones generatrices están calculadas y comprobadas dividiendo.
- [ ] La recta numérica tiene escala uniforme y los puntos en el orden correcto.
- [ ] Se distingue claramente un valor exacto de una aproximación y se indica el error.
- [ ] Hay una situación real para cada ampliación de los números.
- [ ] El mapa es legible: rótulos claros y símbolos correctos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$).

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 1 · ¿Todos los números son iguales?

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Mapa de los conjuntos numéricos**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 1 · ¿Todos los números son iguales?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé decidir si una fracción da un decimal exacto o periódico sin dividir y calcular su fracción generatriz.	◯	◯	◯	◯
Sé explicar por qué $\sqrt{2}$ no es una fracción y distinguirlo de una aproximación como $1{,}414$.	◯	◯	◯	◯
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	◯	◯	◯	◯
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	◯	◯	◯	◯
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	◯	◯	◯	◯
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	◯	◯	◯	◯

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 1 · ¿Todos los números son iguales?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Ocho números seleccionados y un diagrama anidado parcialmente completado. Trabaja los pasos modelados antes de clasificar.

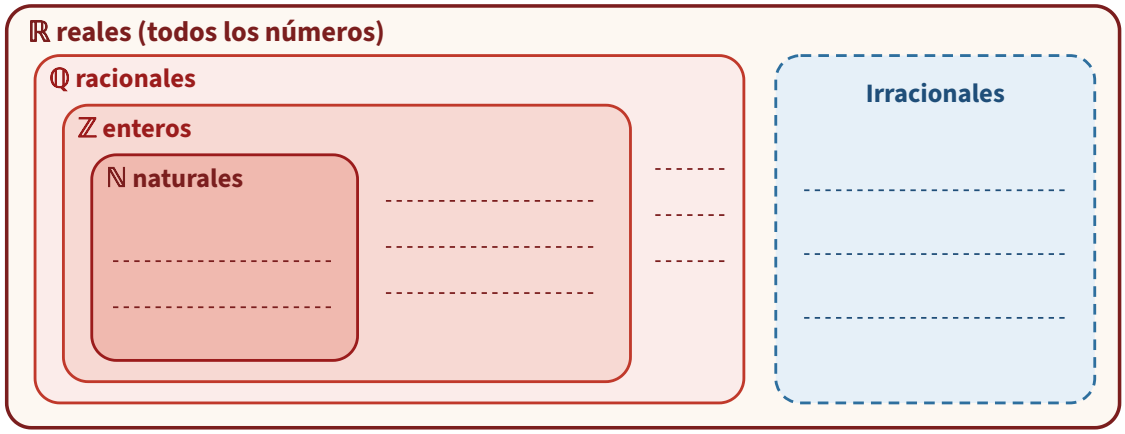
Ejemplo modelado

Clasifico $-\frac{2}{5}$. **1.** ¿Es natural? No, es negativo. **2.** ¿Es entero? No, no es un número «sin parte decimal»: $-\frac{2}{5} = -0{,}4$. **3.** ¿Se escribe como fracción de enteros? Sí, es $\frac{-2}{5}$. Entonces es racional y real: $-\frac{2}{5} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Glosario y símbolos

$\in$ = «pertenece a» · $\subset$ = «está contenido en» · $\mathbb{N}$ naturales · $\mathbb{Z}$ enteros · $\mathbb{Q}$ racionales (fracciones) · $\mathbb{I}$ irracionales · $\mathbb{R}$ reales. **Exacto**: decimal acabado o periódico. **Irracional**: infinitas cifras sin periodo. $\overline{3}$ indica que el 3 se repite.

1 **Completa el diagrama anidado: escribe en cada región los números de la lista que le corresponden: 6; -2; $\frac{3}{4}$; $0{,}5$; $0{,}\overline{6}$; $\sqrt{16}$; $\sqrt{5}$; π.**



2 **Para cada número, responde sí o no.**

Número	¿Natural?	¿Entero?	¿Fracción de enteros?	¿Decimal infinito no periódico?
6				
-2				
$\frac{3}{4}$				
$\sqrt{5}$				

3 **Pasa a decimal y di si es exacto o periódico: $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}$.**

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 1 · ¿Todos los números son iguales?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Aproximaciones racionales de $\sqrt{2}$

Los babilonios ya sabían aproximar $\sqrt{2}$ con fracciones. Un método sencillo: si a es una aproximación, otra mejor es $\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)$. Vais a ver cuánto mejora y si alguna fracción puede llegar a ser exacta.

Pasos

1. Partiendo de $a_1 = 1$, calcula a_2, a_3 y a_4 con la fórmula. Escríbelos como fracciones y como decimales.
2. Calcula a_n^2 y el error absoluto $|\sqrt{2} - a_n|$ de cada uno. ¿Cómo evoluciona el número de cifras correctas?
3. Acota $\sqrt{2}$ entre dos decimales de tres cifras decimales, comprobando con cuadrados.
4. Demuestra o argumenta con tus palabras por qué ninguna de estas fracciones puede valer exactamente $\sqrt{2}$ (pista: si $\frac{p}{q}$ fuese $\sqrt{2}$, entonces $p^2 = 2q^2$; ¿qué pasa con la paridad de p y de q?).

1 **Tabla de aproximaciones.**

n	a_n (fracción)	a_n (decimal)	a_n^2	Error absoluto
1				
2				
3				
4				

2 **Intervalo de tres cifras decimales para $\sqrt{2}$ comprobado con cuadrados.**

Entrega

Una tabla completa, una frase que describa cómo mejora la aproximación y una justificación breve de por qué $\sqrt{2}$ no es racional.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 1 · ¿Todos los números son iguales?

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: $0{,}75$; -2; 9.
2. 1) $3-5=-2$: no tiene solución en $\mathbb{N}$; necesita $\mathbb{Z}$. 2) $x=\frac{3}{4}$: no en $\mathbb{N}$ ni en $\mathbb{Z}$; necesita $\mathbb{Q}$. 3) $x=\frac{7}{2}=3{,}5$: $\mathbb{Q}$. 4) $x=\sqrt{2}$: ni en $\mathbb{Q}$; necesita $\mathbb{R}$ (irracional). 5) $L=\pi$: irracional, $\mathbb{R}$. 6) $x=7$: sí tiene solución en $\mathbb{N}$.
3. $1{,}4^2=1{,}96$; $1{,}41^2=1{,}9881$; $1{,}42^2=2{,}0164$. Ninguno da exactamente 2: $1{,}41$ se queda corto y $1{,}42$ se pasa; la solución está entre ambos y no es un decimal acabado.
4. Respuesta abierta: los negativos aparecen con deudas y temperaturas; las fracciones con repartos y medidas. Se valora que cada ampliación esté ligada a una situación.

Ficha 2

1. Posiciones: $-3{,}5$ entre -4 y -3 (a mitad); $-\frac{4}{3}=-1{,}33$ un tercio por debajo de -1; $\frac{1}{2}$ a mitad entre 0 y 1; $\frac{5}{2}=2{,}5$ a mitad entre 2 y 3; 2 en la marca.
2. Decimales: $-1{,}5$; -1; $0{,}6$; $1{,}6\overline{6}$; $1{,}75$. Orden: $-\frac{3}{2}<-1<\frac{3}{5}<\frac{5}{3}<\frac{7}{4}$.
3. Entre $\frac{1}{3}=0{,}33\ldots$ y $\frac{1}{2}=0{,}5$: por ejemplo $\frac{2}{5}=0{,}4$, $\frac{3}{7}\approx 0{,}43$, $\frac{4}{9}\approx 0{,}44$ o $\frac{5}{12}\approx 0{,}42$. Método: pasar a decimales o hallar la media $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{12}$; se puede repetir con las nuevas fracciones, así que hay infinitas.
4. V, F, V, V. Corrección: $-\frac{4}{3}$ es racional pero no entero (está entre -2 y -1); $\frac{6}{3}=2\in\mathbb{N}$; la media de dos fracciones es siempre otra fracción entre ellas.

Ficha 3

1. $\frac{3}{8}=0{,}375$ exacto; $\frac{5}{6}=0{,}8\overline{3}$ periódico mixto; $\frac{4}{11}=0{,}\overline{36}$ periódico puro; $\frac{7}{20}=0{,}35$ exacto; $\frac{2}{7}=0{,}\overline{285714}$ periódico puro (periodo de 6 cifras).
2. $40=2^3\cdot 5\to$ exacto $(0{,}225)$; $12=2^2\cdot 3\to$ periódico $(0{,}58\overline{3})$; $25=5^2\to$ exacto $(0{,}44)$; $18=2\cdot 3^2\to$ periódico $(0{,}2\overline{7})$. Las cuatro fracciones ya están simplificadas.
3. a) $x=0{,}\overline{7}$: $10x-x=7\to 9x=7\to x=\frac{7}{9}$. b) $x=2{,}\overline{45}$: $100x=245{,}4545\ldots$, resto x: $99x=243\to x=\frac{243}{99}=\frac{27}{11}$ $(27:11=2{,}4545\ldots)$. c) $0{,}1\overline{6}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$.
4. No tiene razón: si $z=0{,}\overline{9}$, $10z=9{,}\overline{9}$ y $10z-z=9$, luego $z=1$. Los dos símbolos representan el mismo número. Se valora que la explicación use el método y no solo la intuición.

Ficha 4

1. $\sqrt{49}=7$; $\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$; $\sqrt{0{,}49}=0{,}7$; $\sqrt{20}\approx 4{,}47$ irracional; $\sqrt{50}\approx 7{,}07$ irracional.
2. $-\sqrt{16}=-4$: entero y racional. $\sqrt{12}=2\sqrt{3}\approx 3{,}46$: irracional (12 no es cuadrado de un racional). $\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$: racional. $\sqrt{13}\approx 3{,}61$: irracional.
3. a) $d=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\approx 1{,}41421356$. b) No se puede escribir como fracción de enteros: su decimal no termina ni se repite. $1{,}4142135$ es una aproximación (tiene error), no la diagonal exacta: $1{,}4142135^2=1{,}99999982\ldots\neq 2$.
4. Racional: decimal exacto o periódico. $\sqrt{2}$: no se repite $\to$ irracional.

Ficha 5

1. $1{,}7^2 = 2{,}89$ y $1{,}8^2 = 3{,}24 \to 1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$. Con $1{,}73^2 = 2{,}9929$ y $1{,}74^2 = 3{,}0276 \to 1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$.
2. Errores: $|\pi - 3{,}14| \approx 0{,}00159$; $|\pi - \frac{22}{7}| \approx 0{,}00126$; $|\pi - 3{,}1| \approx 0{,}0416$. Mejor: $\frac{22}{7}$ (1.º), $3{,}14$ (2.º), $3{,}1$ (3.º).
3. Triángulo con vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(2,1)$: hipotenusa $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Con el compás centrado en el origen y radio igual a la hipotenusa, se marca el punto del eje x a $\approx 2{,}24$.
4. Redondeo a décimas: $2{,}2$ con error $0{,}036$; a centésimas: $2{,}24$ con error $0{,}0039$ (el error disminuye al añadir cifras).

Ficha 6

1. T1 7: N Z Q R. T2 -3: Z Q R. T3 0: Z Q R (no N). T4 $\frac{5}{2}$: Q R. T5: Q R. T6 $0{,}25$: Q R. T7 $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$: Q R. T8 $\sqrt{2}$: R, irracional. T9 $\sqrt{9} = 3$: N Z Q R. T10 π: R, irracional. T11 $3{,}14 = \frac{314}{100}$: Q R. T12 $-\sqrt{16} = -4$: Z Q R. T13 $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$: Q R. T14: R, irracional (infinitas cifras sin periodo, porque el número de ceros crece). T15 $\sqrt{12}$: R, irracional. T16 $0{,}\overline{9} = 1$: N Z Q R.
2. Justificaciones esperables: T9 es 3 (raíz exacta); T11 es un decimal exacto, luego fracción; T13 es $\frac{1}{3}$; T16 vale 1 por el método de la ficha 3. Se acepta cualquier justificación correcta.
3. El diagrama debe tener las cuatro regiones anidadas y la zona de irracionales fuera de $\mathbb{Q}$, con los 16 números colocados.
4. Si el equipo incluye el 0 en $\mathbb{N}$, se acepta siempre que lo declare y sea coherente.

Ficha 7

1. -8: Z Q R. $\frac{7}{3}$: Q R. $\sqrt{81} = 9$: N Z Q R. $\sqrt{10}$: irracional R. $0{,}\overline{45}$: Q R. $1{,}5$: Q R. $\frac{3}{16}$: Q R ($16 = 2^4$, decimal exacto $0{,}1875$). $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$: Q R.
2. $x = 0{,}\overline{45}$: $99x = 45 \to x = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$. $y = 1{,}5\overline{3}$: $100y = 153{,}33\ldots$, $10y = 15{,}33\ldots \to 90y = 138 \to y = \frac{138}{90} = \frac{23}{15}$ (comprobar: $23 : 15 = 1{,}5\overline{3}$).
3. $3^2 = 9 < 10 < 16 = 4^2$; $3{,}1^2 = 9{,}61$ y $3{,}2^2 = 10{,}24 \to 3{,}1 < \sqrt{10} < 3{,}2$. Con $\sqrt{10} = 3{,}16227\ldots$, el error de $3{,}2$ es $\approx 0{,}0377$. En la recta, el punto queda un poco a la derecha de $3{,}1$.
4. Respuesta abierta: $\mathbb{N}$ para contar; $\mathbb{Z}$ para restas que dan negativo; $\mathbb{Q}$ para repartos y divisiones; $\mathbb{R}$ (irracionales) para medidas como la diagonal del cuadrado o la circunferencia, que no son fracciones.

Refuerzo

1. 6: N Z Q R. -2: Z Q R. $\frac{3}{4}$: Q R. $0{,}5$: Q R. $0{,}\overline{6}$: Q R. $\sqrt{16} = 4$: N Z Q R. $\sqrt{5}$ y π: irracionales (R).
2. 6: sí, sí, sí, no. -2: no, sí, sí, no. $\frac{3}{4}$: no, no, sí, no. $\sqrt{5}$: no, no, no, sí.
3. $\frac{1}{4} = 0{,}25$ exacto; $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$ periódico; $\frac{3}{5} = 0{,}6$ exacto.

Ampliación

1. $a_2 = \frac{1}{2}(1 + 2) = \frac{3}{2} = 1{,}5$; $a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12} \approx 1{,}41667$; $a_4 = \frac{577}{408} \approx 1{,}4142157$.
2. Cuadrados: $a_2^2 = 2{,}25$; $a_3^2 \approx 2{,}00694$; $a_4^2 \approx 2{,}000006$. Errores: $0{,}0858$; $0{,}00245$; $0{,}0000021$. Las cifras correctas aproximadamente se duplican en cada paso.
3. $1{,}414^2 = 1{,}999396$ y $1{,}415^2 = 2{,}002225 \to 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$.
4. Argumento: si $\frac{p}{q}$ (irreducible) fuese $\sqrt{2}$, $p^2 = 2q^2$, luego p^2 es par y p es par, $p = 2k$; entonces $4k^2 = 2q^2 \to q^2 = 2k^2$, luego q también es par: contradicción con que la fracción es irreducible.

⚠ Errores frecuentes

- Decir que un decimal con muchas cifras es irracional: $0{,}123456789$ es racional porque es exacto.
- Creer que $1{,}414$ es $\sqrt{2}$ exacto en lugar de una aproximación con error.
- Olvidar que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$: marcar solo el conjunto «más grande» o solo el «más pequeño» en la tabla.
- Pensar que toda raíz es irracional: $\sqrt{9}$, $\sqrt{\frac{1}{9}}$ y $\sqrt{0{,}49}$ son racionales.
- Confundir periodo con cifras repetidas al final de una aproximación de calculadora ($0{,}3333333$ no es lo mismo que $0{,}\overline{3}$ hasta que se razona).
- En la fracción generatriz mixta, restar mal o no multiplicar por la potencia de 10 correcta.

⚖ Criterios para valorar respuestas abiertas

- En las justificaciones se valora que se use una razón matemática (periodo, raíz exacta, fracción de enteros), no solo «lo dice la calculadora».
- Se acepta que $\mathbb{N}$ incluya el 0 si el alumnado lo declara y es coherente; la clave es la justificación.
- La calculadora sirve para comprobar, pero no para decidir la irracionalidad: un decimal en pantalla es siempre finito.
- En la recta se valora la escala uniforme y el orden correcto; la posición exacta de un irracional se acepta con tolerancia razonable.

02

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Potencias para describir el mundo

PREGUNTA GUÍA

¿Cómo podemos calcular y comparar cantidades extremas sin perder la escala?

CURSO 3.º ESO	**SESIONES** 7 sesiones · 1.º trimestre	**SENTIDOS PRIORITARIOS** A · Sentido numérico
COMPETENCIAS ESPECÍFICAS CE1, CE2, CE3, CE7	**PRODUCTO FINAL** Dossier de órdenes de magnitud	**CRITERIOS DE EVALUACIÓN** 1.1, 1.2, 2.1, 3.1, 7.1

Contexto, reto y sentido

La Semana de la Ciencia del instituto incluye este año la exposición «Del átomo a las estrellas». El comité organizador quiere un panel que permita comparar de un vistazo cosas tan distintas como un virus, un cabello, el Everest o la distancia hasta el Sol. El problema es que escribir $149\,600\,000\,000$ m o $0{,}0000001$ m en un cartel es ilegible, y comparar a ojo una magnitud con otra es casi imposible. Os piden elaborar el dossier que resuelva este problema.

La situación moviliza el sentido numérico en 3.º ESO: potencias de exponente entero y sus propiedades, radicales sencillos como potencias de exponente fraccionario, notación científica con producto, cociente y suma, y estimación con control del error. Un dato aislado no sirve: lo valioso es comparar órdenes de magnitud, calcular cuántas veces es mayor una cantidad que otra y saber cuánto se equivoca una aproximación.

Reto

Elaborar un dossier de órdenes de magnitud con ocho cantidades extremas escritas en notación científica, una escala de potencias de 10, dos comparaciones calculadas y el análisis del error de una aproximación.

Producto final

Dossier de órdenes de magnitud.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

1.1 Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.

1.2 Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.

2.1 Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.

3.1 Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.

7.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales.

Saberes básicos prioritarios

A
Sentido numérico

- Potencias de exponente entero: significado de los exponentes cero y negativo y patrones de las potencias de 10 y de 2.
- Propiedades de las potencias (producto, cociente y potencia de potencia con la misma base; mismo exponente) y su uso para simplificar.
- Radicales sencillos: relación con las potencias ($\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$), extracción de factores y operaciones básicas.
- Notación científica: escritura, orden de magnitud y operaciones (producto, cociente y suma con el mismo exponente).
- Estimación y error: aproximación por redondeo, cifras significativas, error absoluto y relativo.

F
Sentido socioafectivo

- Gestión de la frustración ante cálculos largos: revisar con una estimación o con la calculadora antes de dar un resultado por bueno.
- Valoración del trabajo en equipo: reparto de magnitudes y comprobación cruzada.

Objetivos didácticos

- ✓ Aplicar propiedades de potencias.
- ✓ Simplificar radicales sencillos y relacionarlos con potencias.
- ✓ Operar con notación científica.
- ✓ Valorar precisión y error de aproximaciones.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Patrones de potencias

Evidencia: Ficha 1: tabla de potencias de 10 y de 2 con exponentes cero y negativos, ordenación de magnitudes en la escala F2 y patrón del folio doblado.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Propiedades y operaciones

Evidencia: Ficha 2: simplificación de expresiones con potencias, detección de errores frecuentes y problema del rumor (3^n).

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Radicales y simplificación sencilla

Evidencia: Ficha 3: relación entre radicales y potencias, simplificación de radicales y problema de la parcela cuadrada.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Notación científica: producto y cociente

Evidencia: Ficha 4: conversión y operaciones en notación científica con datos reales (tiempo de la luz, glóbulos rojos en fila).

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Estimación y cifras significativas de forma funcional

Evidencia: Ficha 5: errores absoluto y relativo de aproximaciones, cifras significativas y estimación del folio doblado.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Dossier de magnitudes

Evidencia: Ficha 6: borrador del dossier del equipo: tabla de ocho magnitudes, comparación por cociente y escala.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Reto individual

Evidencia: Ficha 7: evidencia individual con propiedades, radicales, notación científica y análisis de error.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Calculadora científica · tarjetas de magnitudes · hoja de cálculo opcional

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Potencias con exponentes enteros sencillos y radicales cuadrados perfectos parciales.

Ampliación

Anexo 9

Comparar errores absoluto y relativo en dos aproximaciones.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Interpretación de los datos de F1 y selección de la operación (cociente, producto, suma) adecuada a cada pregunta de comparación.	Fichas 4 y 6 / lista de cotejo
1.2	Aplicación de las propiedades de las potencias, de la extracción de factores en radicales y de las operaciones en notación científica.	Fichas 2, 3 y 4 / escala de valoración
2.1	Comprobación de resultados con estimación por órdenes de magnitud, con la calculadora y con una segunda vía de cálculo.	Ficha 5 y dossier (Anexo 4) / rúbrica
3.1	Formulación y comprobación de conjeturas sobre patrones de potencias y sobre el error de las aproximaciones.	Fichas 1 y 5 / rúbrica
7.1	Representación de las cantidades en notación científica y en una escala de potencias de 10 con rótulos y unidades.	Dossier (Anexo 4) y Ficha 7 / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Dossier, operaciones y análisis de precisión.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 2 · Potencias para describir el mundo

ALUMNADO

Un cartel de la exposición «Del átomo a las estrellas» dice que el Sol está a 149 600 000 000 m y que un virus mide 0,0000001 m. Dos personas se quedan contando ceros y se pierden. ¿Cuántas veces es mayor lo grande que lo pequeño? ¿Y si doblarais un folio 42 veces, llegaría a la Luna? Vais a convertiros en el equipo que domestica las cantidades extremas: las escribiréis con potencias, las compararéis y diréis cuánto os podéis fiar de cada aproximación.

> *¿Cómo podemos calcular y comparar cantidades extremas sin perder la escala?*

Vuestro reto

Elaborar un dossier de órdenes de magnitud con ocho cantidades extremas escritas en notación científica, una escala de potencias de 10, dos comparaciones calculadas y el análisis del error de una aproximación.

Lo que vais a producir

Dossier de órdenes de magnitud.

Hoja de ruta · 7 sesiones

1. Descubrimos los patrones de las potencias de 10 y de 2, también con exponentes cero y negativos.
2. Aplicamos las propiedades para simplificar expresiones con potencias.
3. Relacionamos radicales y potencias, y simplificamos radicales sencillos.
4. Operamos en notación científica con datos reales de física y biología.
5. Estimamos, redondeamos y calculamos el error de las aproximaciones.
6. Montamos el borrador del dossier de órdenes de magnitud del equipo.
7. Resolvemos de forma individual el reto final.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Aplicar propiedades de potencias.
- ✓ Simplificar radicales sencillos y relacionarlos con potencias.
- ✓ Operar con notación científica.
- ✓ Valorar precisión y error de aproximaciones.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 2 · Potencias para describir el mundo

ALUMNADO

Tabla de magnitudes reales, escala logarítmica de potencias de 10, propiedades de las potencias, guía de notación científica, radicales con su árbol de factores, tabla de errores y el reto del folio doblado. Los valores son aproximados y proceden de fuentes científicas de referencia.

F1 Magnitudes extremas del universo

DATOS

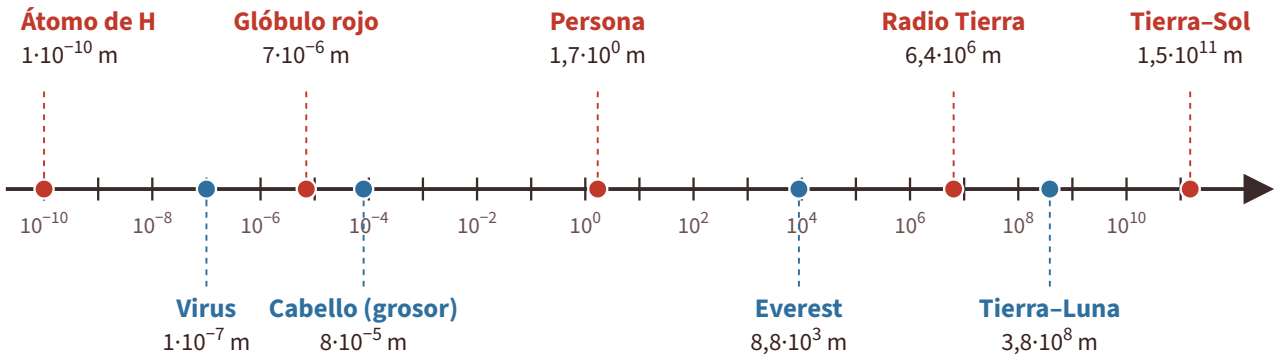
Magnitud	Valor
Diámetro de un átomo de hidrógeno	$1 \cdot 10^{-10}$ m
Diámetro del virus SARS-CoV-2	$1 \cdot 10^{-7}$ m
Diámetro de un glóbulo rojo	$7 \cdot 10^{-6}$ m
Grosor de un cabello	$8 \cdot 10^{-5}$ m
Altura de una persona adulta	$1{,}7$ m
Altura del Everest	$8{,}849 \cdot 10^{3}$ m
Radio de la Tierra	$6{,}371 \cdot 10^{6}$ m
Distancia Tierra–Luna (media)	$3{,}844 \cdot 10^{8}$ m
Distancia Tierra–Sol (1 unidad astronómica)	$1{,}496 \cdot 10^{11}$ m
Año luz	$9{,}461 \cdot 10^{15}$ m
Velocidad de la luz en el vacío	$2{,}998 \cdot 10^{8}$ m/s
Masa de la Tierra	$5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg
Masa del Sol	$1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg
Población mundial (aprox.)	$8 \cdot 10^{9}$ personas

Fuente: Valores de referencia de NASA, UAI (Unión Astronómica Internacional) y CODATA, redondeados a 2-4 cifras significativas. Los tamaños biológicos son valores medios aproximados.

Escribe cada valor sin notación científica en tu cuaderno: ¿cuántos ceros tiene el más grande?

F2 Escala de potencias de 10

ESQUEMA



Escala logarítmica: cada marca multiplica la medida por 10 (de 10^{-10} a 10^{11} hay 21 saltos).

Fuente: Esquema de elaboración propia con los datos de F1. Escala logarítmica: la posición de cada punto es el exponente de 10 de su medida.

Estar a la derecha no significa «un poco más grande»: cada marca es 10 veces mayor que la anterior.

F3 Propiedades de las potencias

DATOS

Propiedad	Regla	Ejemplo
Producto, misma base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$
Cociente, misma base	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$5^6 : 5^2 = 5^4$
Potencia de una potencia	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(3^2)^3 = 3^6$
Producto, mismo exponente	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^3 \cdot 5^3 = 10^3$
Cociente, mismo exponente	$a^n : b^n = (a : b)^n$	$6^2 : 3^2 = 2^2$
Exponente cero	$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$	$7^0 = 1$
Exponente negativo	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

Fuente: Elaboración propia.

Errores típicos: $2^3 \cdot 2^2 \neq 4^5$ (se suman los exponentes, la base no cambia) y $(a^2)^3 \neq a^5$ (se multiplican los exponentes).

F4 Notación científica paso a paso

TEXTO

Un número está en **notación científica** si se escribe $a \cdot 10^n$ con $1 \leq a < 10$ y n entero. El exponente n es el **orden de magnitud**.

- $384\,400\,000 = 3{,}844 \cdot 10^8$ (la coma se mueve 8 lugares a la izquierda).
- $0{,}000\,007 = 7 \cdot 10^{-6}$ (la coma se mueve 6 lugares a la derecha).

Producto: se multiplican las partes decimales y se suman los exponentes. $(3 \cdot 10^8) \cdot (2{,}5 \cdot 10^3) = 7{,}5 \cdot 10^{11}$.

Cociente: se dividen las partes decimales y se restan los exponentes. $(6 \cdot 10^7) : (4 \cdot 10^2) = 1{,}5 \cdot 10^5$.

Suma y resta: se pasa al mismo exponente. $3{,}2 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 = 3{,}2 \cdot 10^5 + 0{,}4 \cdot 10^5 = 3{,}6 \cdot 10^5$.

Normalizar: si al operar sale $a \geq 10$, se ajusta. $(5 \cdot 10^{-3}) \cdot (4 \cdot 10^7) = 20 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^5$.

Fuente: Elaboración propia.

Comprueba siempre con un orden de magnitud: $10^8 \cdot 10^3$ debe dar algo cercano a 10^{11}.

F5 Radicales: reglas básicas

DATOS

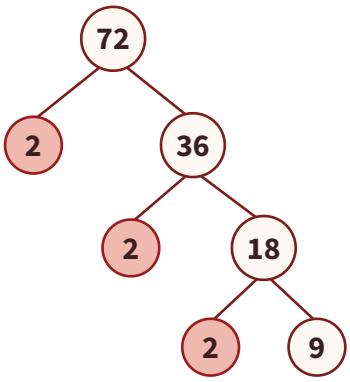
Idea	Regla	Ejemplo
Raíz como potencia	$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$	$\sqrt{7} = 7^{1/2}; \sqrt[3]{25} = 5^{2/3}$
Producto de raíces	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$
Cociente de raíces	$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$	$\sqrt{45} : \sqrt{5} = \sqrt{9} = 3$
Sacar factores	$\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$	$\sqrt{72} = \sqrt{6^2 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$
Suma de radicales semejantes	$p\sqrt{a} + q\sqrt{a} = (p+q)\sqrt{a}$	$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

Fuente: Elaboración propia.

Solo se pueden sumar radicales con el mismo radicando y el mismo índice: $\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$.

F6 Simplificar $\sqrt{72}$ con el árbol de factores

ESQUEMA



1.º Descomponer en factores primos

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$

2.º Agrupar en pares (raíz cuadrada)

$\sqrt{72} = \sqrt{(2^2 \cdot 3^2 \cdot 2)}$

3.º Sacar los pares fuera

$\sqrt{72} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49$

Comprobación: $8{,}49^2 \approx 72{,}08$

Fuente: Esquema de elaboración propia.

Cada pareja de factores iguales sale de la raíz como un solo factor.

F7 Aproximaciones de la distancia Tierra–Luna

DATOS

Aproximación	Error absoluto	Error relativo
$4 \cdot 10^5$ km	15 600 km	4,06 %
$3{,}8 \cdot 10^5$ km	4 400 km	1,14 %
$3{,}84 \cdot 10^5$ km	400 km	0,10 %

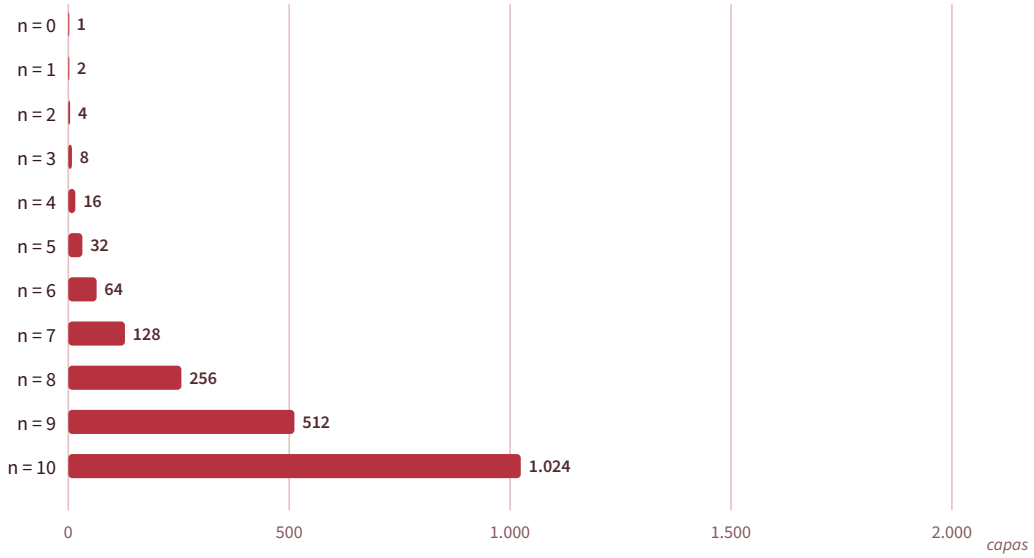
Error absoluto $= |\text{valor real} - \text{aproximación}|$. **Error relativo** $= \dfrac{\text{error absoluto}}{\text{valor real}}$ (se suele dar en %). El error relativo permite comparar aproximaciones de magnitudes de distinto tamaño.

Fuente: Valor medio de referencia: 384 400 km (NASA). Aproximaciones de elaboración propia; los errores están calculados con el valor de referencia.

Cada cifra significativa más reduce el error relativo aproximadamente a la décima parte.

F8 Doblar un folio: número de capas

GRÁFICO



Fuente: Cálculo propio: tras n dobleces hay 2^n capas.

¿Cuántas capas habrá con 11 dobleces? ¿Por qué cada barra es el doble que la anterior?

F9 El folio doblado: grosor

DATOS

Dobleces n	Capas 2^n	Grosor
0	1	0,1 mm
10	1 024	102,4 mm $\approx$ 10 cm
20	1 048 576	$\approx$ 105 m
30	1 073 741 824	$\approx$ 107 km
42	2^{42}	¿?

Fuente: Cálculo propio con un folio de $0{,}1$ mm de grosor (10^{-4} m). En la práctica es imposible doblar un folio más de 7-8 veces: es un modelo matemático.

Completa la última fila en la ficha 5 y compara con la distancia Tierra–Luna (F1).

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 2 · Potencias para describir el mundo

ALUMNADO

FICHA 1 Patrones de potencias

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Trabaja con F1, F2, F8 y F9. Busca el patrón antes de aplicar una regla.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

2^3 es igual a…

☐ 6 ☐ 8 ☐ 9

5^0 es igual a…

☐ 0 ☐ 1 ☐ 5

10^{-2} es igual a…

☐ −100 ☐ 0,01 ☐ 0,1

2 **Completa la tabla con el patrón: cada vez que el exponente baja una unidad, el valor se divide entre la base.**

Potencia	Desarrollo	Valor
10^4		
10^1		
10^0		
10^{-1}		
10^{-3}		
2^{-2}		

3 **Escribe cada cantidad como potencia de 10:** $1\,000\,000$; $0{,}0001$; 10; $0{,}001$.

4 Con F2: a) ¿Qué es más grande, el grosor de un cabello o un glóbulo rojo? ¿A cuántas potencias de 10 están, aproximadamente? b) ¿Cuántas potencias de 10 hay entre un átomo de hidrógeno y una persona? c) Con F8, ¿cuántas capas tendría un folio con 11 dobleces? ¿Y con 12?

FICHA 2 Propiedades de las potencias

Sesión 2

Usa la tabla F3. Escribe cada paso: primero la propiedad, luego el resultado.

1 Simplifica cada expresión a una sola potencia y calcula su valor.

Expresión	Propiedad aplicada y paso	Potencia única	Valor
$2^3 \cdot 2^5$			
$3^7 : 3^4$			
$(5^2)^3$			
$10^{-2} \cdot 10^5$			
$\dfrac{2^5 \cdot 2^{-3}}{2^4}$			

2 Verdadero o falso. Corrige las falsas.

	V	F
$2^3 \cdot 2^2 = 4^5$	☐	☐
$(a^2)^3 = a^5$	☐	☐
$5^0 = 0$	☐	☐
$2^{-3} = -8$	☐	☐
$6^4 : 3^4 = 2^4$	☐	☐

3 Un rumor lo sabe 1 persona a las 9:00. Cada hora, cada persona que lo sabe se lo cuenta a otras 2 que no lo sabían (así que el número de personas que lo saben se triplica). Completa la tabla y escribe la expresión para n horas. ¿Cuántas horas pasan hasta que lo sabe un centro de 1 000 personas?

Horas n	0	1	2	3	4	5
Personas que lo saben						

4 Memoria informática: 1 KiB $= 2^{10}$ bytes y 1 MiB $= 2^{10}$ KiB. Expresa 1 MiB en bytes como una sola potencia de 2 y calcula su valor. Una foto ocupa 2^3 MiB: ¿cuántos bytes son?

FICHA 3 Radicales y potencias

Sesión 3

Trabaja con F5 y F6. Una raíz cuadrada exacta tiene pares de factores iguales.

1 Relaciona cada radical con su potencia o valor.

1 $\sqrt{7}$ ●	● a $7^{1/2}$
2 $\sqrt[3]{25}$ ●	● b $5^{2/3}$
3 $\sqrt[4]{3^2}$ ●	● c $3^{1/2}$
4 $\sqrt[3]{2^3}$ ●	● d 2

2 Simplifica sacando factores fuera de la raíz (usa el árbol de F6).

Radical	Descomposición	Simplificado
$\sqrt{72}$		
$\sqrt{50}$		
$\sqrt{45}$		
$\sqrt{48}$		

3 Calcula y simplifica: a) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2}$; b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$; c) $\sqrt{18} + \sqrt{8}$; d) $\sqrt{45} : \sqrt{5}$.

4 Una parcela cuadrada tiene 72 m² de superficie. Calcula su lado y su perímetro en forma exacta (con radical) y en forma aproximada con dos decimales. Si la valla cuesta 12 € por metro, ¿cuánto cuesta cercarla?

FICHA 4 Notación científica

Sesión 4

Usa F1 y F4. Escribe el resultado siempre en notación científica normalizada (con la parte decimal entre 1 y 10).

1 Convierte.

Número	Notación científica
$384\,400\,000$ m	
$0{,}000\,007$ m	
$4{,}2 \cdot 10^{5}$ → número decimal	
$6{,}5 \cdot 10^{-4}$ → número decimal	

2 Calcula y normaliza: a) $(3 \cdot 10^{8}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^{3})$; b) $(6{,}4 \cdot 10^{6}) : (3{,}2 \cdot 10^{-3})$; c) $3{,}2 \cdot 10^{5} + 4 \cdot 10^{4}$; d) $(5 \cdot 10^{-3}) \cdot (4 \cdot 10^{7})$.

3 La luz viaja a $3 \cdot 10^{8}$ m/s (aproximación de F1). ¿Cuánto tarda en llegar la luz del Sol a la Tierra? Da el tiempo en segundos (notación científica) y en minutos.

4 **Un glóbulo rojo mide $7 \cdot 10^{-6}$ m. ¿Cuántos cabrían en fila a lo largo de una persona de $1{,}7$ m? Estima primero con órdenes de magnitud.**

FICHA 5 Estimar y medir el error

Sesión 5

Usa F7, F8 y F9. El error relativo permite comparar aproximaciones de cantidades de distinto tamaño.

1 **La distancia media Tierra–Luna es $384\,400$ km. Completa la tabla (error relativo en %, con dos decimales).**

Aproximación (km)	Error absoluto (km)	Error relativo (%)
$4 \cdot 10^5$		
$3{,}8 \cdot 10^5$		
$3{,}84 \cdot 10^5$		

2 **Redondea a las cifras significativas que se indican y calcula el error relativo: a) distancia Tierra–Sol $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m a 2 cifras; b) radio de la Tierra $6{,}371 \cdot 10^6$ m a 1 cifra.**

3 **El reto del folio: con $0{,}1$ mm de grosor, ¿cuánto mediría la pila tras 42 dobleces? Calcula $2^{42} \approx 4{,}4 \cdot 10^{12}$ capas y pasa a metros. Compara el resultado con la distancia Tierra–Luna de F1.**

4 **¿Con cuántos dobleces se supera por primera vez la distancia Tierra–Luna? ¿Es realista doblar un folio tantas veces? Razona.**

FICHA 6 Borrador del dossier de órdenes de magnitud

Sesión 6

Trabajo en equipo. Roles: calculista, comprobador (calculadora), dibujante de la escala y portavoz. Elegid ocho magnitudes de F1.

1 **Tabla de las ocho magnitudes elegidas.**

Magnitud	Valor (notación científica)	Orden de magnitud	Estimación del comprobador

2 **Comparación 1: ¿cuántas veces es mayor una magnitud grande que otra pequeña (escribe el cociente en notación científica y pásalo a palabras)? Comparación 2: otra pareja distinta.**

3 **Borrador de la escala de potencias de 10 con vuestras ocho magnitudes.**

4 **Revisión cruzada con otro equipo.**

- [ ] Todos los valores están en notación científica normalizada
- [ ] Los cocientes se han calculado restando exponentes y se han comprobado
- [ ] La escala tiene marcas uniformes y los puntos están en su lugar
- [ ] Las unidades aparecen en todos los datos

FICHA 7 Reto individual de órdenes de magnitud

Sesión 7

Prueba individual: resuelve sin ayuda del equipo. Se puede usar calculadora para comprobar.

1 **Simplifica a una sola potencia y calcula: a)** $\dfrac{3^5 \cdot 3^{-2}}{3^2}$; **b)** $(2^3)^2 \cdot 2^{-4}$.

2 **Simplifica: a)** $\sqrt{98}$; **b)** $\sqrt{12} + \sqrt{27}$.

3 **Calcula en notación científica: a)** $(4{,}5 \cdot 10^{-3}) \cdot (2 \cdot 10^{7})$; **b)** $(7{,}2 \cdot 10^{9}) : (9 \cdot 10^{4})$.

4 **Una bacteria mide $2 \cdot 10^{-6}$ m. ¿Cuántas bacterias caben en fila en 1 cm? Escribe el resultado en notación científica.**

5 **Alguien aproxima la distancia Tierra–Sol ($149\,597\,871$ km) por $1{,}5 \cdot 10^{8}$ km. Calcula los errores absoluto y relativo y valora si es una buena aproximación.**

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 2 · Potencias para describir el mundo

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Dossier de órdenes de magnitud para la exposición «Del átomo a las estrellas». Todos los valores en notación científica y con unidades.

Título y equipo

Nombre del dossier, integrantes y roles.

Tabla de ocho magnitudes

Magnitud · valor en notación científica · orden de magnitud.

Escala de potencias de 10

Dibuja una recta con marcas 10^n y coloca las ocho magnitudes.

Dos comparaciones

Cociente en notación científica y frase: «A es ___ veces mayor que B».

Error de una aproximación

Redondeo, error absoluto y error relativo.

Comprobación

Estimación por órdenes de magnitud y firma del equipo revisor.

Conclusión

Qué enseña el dossier sobre la escala del universo.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 2 · Potencias para describir el mundo

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Dossier de órdenes de magnitud**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] Las ocho magnitudes están escritas en notación científica normalizada y con unidades.
- [ ] El orden de magnitud de cada una es correcto.
- [ ] La escala de potencias de 10 tiene marcas uniformes y los puntos están en el exponente correcto.
- [ ] Las dos comparaciones usan cocientes bien calculados (restando exponentes) y se expresan con una frase.
- [ ] Hay un cálculo de error absoluto y relativo con su interpretación.
- [ ] Cada resultado se ha comprobado con una estimación por órdenes de magnitud.
- [ ] Las propiedades de las potencias se han aplicado correctamente y se explican.
- [ ] Los valores proceden de F1 o de una fuente citada.
- [ ] El dossier es legible y está ordenado.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 2 · Potencias para describir el mundo

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Dossier de órdenes de magnitud**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 2 · Potencias para describir el mundo

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé escribir cantidades extremas en notación científica y operar con ellas sin perder la coma.	◯	◯	◯	◯
Sé calcular e interpretar el error absoluto y relativo de una aproximación.	◯	◯	◯	◯
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	◯	◯	◯	◯
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	◯	◯	◯	◯
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	◯	◯	◯	◯
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	◯	◯	◯	◯

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 2 · Potencias para describir el mundo

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Potencias con exponentes enteros sencillos y radicales con cuadrados perfectos o parciales. Sigue el ejemplo modelado.

Ejemplo modelado

Potencias: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$. **Producto:** $10^4 \cdot 10^{-2} = 10^{4+(-2)} = 10^2 = 100$. **Radical:** $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$ (el par $2 \cdot 2$ sale de la raíz).

Glosario y símbolos

Base y **exponente** de $a^n \cdot a^0 = 1 \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^n} \cdot$

Cuadrado perfecto: $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 \ldots \cdot \sqrt{a^2} = a \cdot$

Notación científica: $a \cdot 10^n$ con $1 \leq a < 10$.

1 **Completa.**

Potencia	Como fracción o desarrollo	Valor
3^2	$3 \cdot 3$	
2^{-1}		
10^{-2}		
5^0		
$10^3 \cdot 10^2$		

2 **Calcula cada raíz o simplifica:** $\sqrt{36}; \sqrt{81}; \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3}; \sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5}; \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2}$.

3 **Escribe en notación científica:** $5\,000\,000; 0{,}0004; 72\,000$.

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 2 · Potencias para describir el mundo

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

¿Qué error pesa más: el absoluto o el relativo?

Un panadero pesa 1 kg de pan y se equivoca en 50 g. Una farmacia pesa 2 g de un medicamento y se equivoca en 0,5 g. ¿Quién se equivoca más? Depende de cómo se mida el error. Vais a comparar los dos tipos de error y a encontrar una regla general.

Pasos

1. Calcula el error absoluto y relativo del panadero y de la farmacia, y decide quién se equivoca más en proporción.
2. Aproxima la distancia Tierra–Sol ($1{,}496 \cdot 10^{11}$ m) por $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m y el radio de la Tierra ($6{,}371 \cdot 10^{6}$ m) por $6{,}4 \cdot 10^{6}$ m. Calcula los dos errores en cada caso.
3. Compara: ¿en cuál de las dos es mayor el error absoluto? ¿Y el relativo? Explica por qué pueden dar conclusiones contrarias.
4. Generaliza: al redondear $a \cdot 10^{n}$ ($1 \leq a < 10$) a 2 cifras significativas, el error absoluto es como mucho $0{,}05 \cdot 10^{n}$. Justifica que el error relativo es siempre menor que $5\ \%$. ¿Y con 3 cifras significativas?

1 **Tabla de comparación.**

Caso	Error absoluto	Error relativo
Panadero (1 kg, error 50 g)		
Farmacia (2 g, error 0,5 g)		
Distancia Tierra–Sol		
Radio de la Tierra		

Entrega

La tabla completa, una frase que explique qué error conviene usar para comparar aproximaciones de distinto tamaño y la justificación de la cota del 5 %.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 2 · Potencias para describir el mundo

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: 8; 1; $0{,}01$.
2. $10^4 = 10\,000$; $10^1 = 10$; $10^0 = 1$; $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$; $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$; $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.
3. 10^6; 10^{-4}; 10^1; 10^{-3}.
4. a) El cabello ($8 \cdot 10^{-5}$ m) es unas 10 veces más grueso que un glóbulo rojo ($7 \cdot 10^{-6}$ m): están a algo más de una potencia de 10 de distancia (en F2, entre $-5{,}15$ y $-4{,}1$). b) De 10^{-10} a 10^0 hay 10 potencias de 10 (la persona es unas 10^{10} veces mayor). c) 11 dobleces: $2^{11} = 2048$ capas; 12 dobleces: 4096 capas (cada doblez duplica).

Ficha 2

1. $2^3 \cdot 2^5 = 2^8 = 256$; $3^7 : 3^4 = 3^3 = 27$; $(5^2)^3 = 5^6 = 15\,625$; $10^{-2} \cdot 10^5 = 10^3 = 1\,000$; $\dfrac{2^5 \cdot 2^{-3}}{2^4} = \dfrac{2^2}{2^4} = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$.
2. F ($2^3 \cdot 2^2 = 2^5 = 32$, no 4^5); F ($(a^2)^3 = a^6$); F ($5^0 = 1$); F ($2^{-3} = \frac{1}{8}$); V ($6^4 : 3^4 = (6:3)^4 = 2^4$).
3. Personas: $1, 3, 9, 27, 81, 243$; para n horas, 3^n. $3^6 = 729 < 1000 < 3^7 = 2187$: pasan 7 horas (a las 16:00).
4. 1 MiB $= 2^{10} \cdot 2^{10} = 2^{20} = 1\,048\,576$ bytes. 2^3 MiB $= 2^{23} = 8\,388\,608$ bytes.

Ficha 3

1. $\sqrt{7} = 7^{1/2}$; $\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5^2} = 5^{2/3}$; $\sqrt[4]{3^2} = 3^{2/4} = 3^{1/2}$; $\sqrt[3]{2^3} = 2$.
2. $\sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$; $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2}$; $\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$; $\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$.
3. a) $7\sqrt{2}$; b) $\sqrt{16} = 4$; c) $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ y $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, suma $5\sqrt{2}$; d) $\sqrt{9} = 3$.
4. Lado: $\sqrt{72} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49$ m. Perímetro: $4 \cdot 6\sqrt{2} = 24\sqrt{2} \approx 33{,}94$ m. Coste: $24\sqrt{2} \cdot 12 = 288\sqrt{2} \approx 407{,}29$ €.

Ficha 4

1. $384\,400\,000 = 3{,}844 \cdot 10^8$ m; $0{,}000\,007 = 7 \cdot 10^{-6}$ m; $4{,}2 \cdot 10^5 = 420\,000$; $6{,}5 \cdot 10^{-4} = 0{,}00065$.
2. a) $7{,}5 \cdot 10^{11}$; b) $(6{,}4 : 3{,}2) \cdot 10^{6-(-3)} = 2 \cdot 10^9$; c) $3{,}2 \cdot 10^5 + 0{,}4 \cdot 10^5 = 3{,}6 \cdot 10^5$; d) $20 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^5$.
3. $t = \dfrac{1{,}496 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^8} \approx 0{,}4987 \cdot 10^3 = 4{,}99 \cdot 10^2$ s ≈ 499 s; $499 : 60 \approx 8{,}3$ min. (Con $2{,}998 \cdot 10^8$ m/s sale $499{,}0$ s, casi igual.)
4. Estimación: $1{,}7 : 7 \approx 0{,}24$ y $10^0 : 10^{-6} = 10^6$, luego unos $2 \cdot 10^5$. Exacto: $\dfrac{1{,}7}{7 \cdot 10^{-6}} \approx 2{,}43 \cdot 10^5$ glóbulos (unos $243\,000$).

Ficha 5

1. $4 \cdot 10^5$: error absoluto $15\,600$ km, relativo $4{,}06\ \%$; $3{,}8 \cdot 10^5$: $4\,400$ km, $1{,}14\ \%$; $3{,}84 \cdot 10^5$: 400 km, $0{,}10\ \%$.
2. a) $1{,}5 \cdot 10^{11}$: error absoluto $4 \cdot 10^8$ m, relativo $\dfrac{4 \cdot 10^8}{1{,}496 \cdot 10^{11}} \approx 0{,}27\ \%$. b) $6 \cdot 10^6$: error absoluto $3{,}71 \cdot 10^5$ m, relativo $\approx 5{,}82\ \%$.
3. $2^{42} \cdot 10^{-4} = 4{,}4 \cdot 10^{12} \cdot 10^{-4} = 4{,}4 \cdot 10^8$ m. La distancia a la Luna es $3{,}844 \cdot 10^8$ m: la pila sería algo más alta ($\approx 1{,}14$ veces).
4. Con 41 dobleces: $2{,}2 \cdot 10^8$ m, no llega; con 42 dobleces supera la Luna. No es realista: el papel se vuelve demasiado grueso y el pliegue consume material; en la práctica no se pasa de 7-8 dobleces. Se valora cualquier razonamiento sobre los límites del modelo.

Ficha 6

1. Respuesta abierta. Orden de magnitud (exponente) de F1: átomo -10; virus -7; glóbulo rojo -6; cabello -5; persona 0; Everest 3; radio de la Tierra 6; Tierra–Luna 8; Tierra–Sol 11; año luz 15.
2. Ejemplos de comparaciones: Tierra–Sol : Tierra–Luna $= \dfrac{1{,}496 \cdot 10^{11}}{3{,}844 \cdot 10^8} \approx 3{,}89 \cdot 10^2 \approx 389$ veces. Radio de la Tierra : persona $= \dfrac{6{,}371 \cdot 10^6}{1{,}7} \approx 3{,}7 \cdot 10^6$. Masa del Sol : masa de la Tierra $= \dfrac{1{,}989 \cdot 10^{30}}{5{,}97 \cdot 10^{24}} \approx 3{,}33 \cdot 10^5$ (unas $333\,000$ veces).
3. La escala debe tener marcas uniformes en el exponente y los puntos colocados por su exponente (la posición de $7 \cdot 10^{-6}$ está entre -6 y -5, más cerca de -5).
4. Se acepta cualquier selección de magnitudes de F1 si está bien convertida y comprobada.

Ficha 7

1. a) $3^{5+(-2)-2} = 3^1 = 3$. b) $2^6 \cdot 2^{-4} = 2^2 = 4$.
2. a) $\sqrt{98} = \sqrt{2 \cdot 7^2} = 7\sqrt{2}$. b) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ y $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, suma $5\sqrt{3}$.
3. a) $(4{,}5 \cdot 2) \cdot 10^{-3+7} = 9 \cdot 10^4$. b) $(7{,}2 : 9) \cdot 10^{9-4} = 0{,}8 \cdot 10^5 = 8 \cdot 10^4$.
4. 1 cm $= 10^{-2}$ m. $\dfrac{10^{-2}}{2 \cdot 10^{-6}} = 0{,}5 \cdot 10^4 = 5 \cdot 10^3$ bacterias.
5. Error absoluto: $|149\,597\,871 - 150\,000\,000| = 402\,129$ km $\approx 4 \cdot 10^5$ km. Error relativo: $\dfrac{402\,129}{149\,597\,871} \approx 0{,}0027 = 0{,}27\ \%$. Es una buena aproximación (error relativo inferior al $1\ \%$) aunque el error absoluto parezca enorme.

Refuerzo

1. $3^2 = 9$; $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$; $5^0 = 1$; $10^3 \cdot 10^2 = 10^5 = 100\,000$.
2. $\sqrt{36} = 6$; $\sqrt{81} = 9$; $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
3. $5 \cdot 10^6$; $4 \cdot 10^{-4}$; $7{,}2 \cdot 10^4$.

Ampliación

1. Panadero: error absoluto 50 g, relativo $\frac{50}{1000} = 5\ \%$. Farmacia: absoluto $0{,}5$ g, relativo $\frac{0{,}5}{2} = 25\ \%$. En proporción se equivoca más la farmacia.
2. Tierra–Sol: error absoluto $4 \cdot 10^8$ m; relativo $\approx 0{,}27\ \%$. Radio de la Tierra: error absoluto $2{,}9 \cdot 10^4$ m ($|6{,}371 \cdot 10^6 - 6{,}4 \cdot 10^6| = 29\,000$); relativo $\approx 0{,}46\ \%$ ($29\,000 : 6\,371\,000 \approx 0{,}00455$).
3. El error absoluto es mucho mayor en la distancia al Sol, pero el relativo es menor: el error absoluto depende del tamaño de la cantidad y el relativo lo compara con ella. Para valorar si una aproximación es buena conviene el relativo.
4. Con 2 cifras significativas se redondea a la centésima de a: error absoluto $\leq 0{,}05 \cdot 10^n$; como $a \geq 1$, el error relativo $\leq \dfrac{0{,}05 \cdot 10^n}{a \cdot 10^n} = \dfrac{0{,}05}{a} \leq 0{,}05 = 5\ \%$ (la igualdad exacta no se alcanza, por eso es menor). Con 3 cifras: $\leq 0{,}005/a \leq 0{,}5\ \%$.

Errores frecuentes

- Multiplicar las bases en lugar de sumar los exponentes: $2^3 \cdot 2^2 = 4^5$.
- Pensar que a^{-n} es negativo o que $a^0 = 0$.
- Sumar radicales con distinto radicando: $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$.
- En notación científica, olvidar normalizar ($20 \cdot 10^4$) o sumar con exponentes distintos sin igualarlos.
- Confundir error absoluto con relativo y concluir que «un error de 4·10^8 m es enorme» sin compararlo con la magnitud.
- Contar mal los ceros al pasar de potencia de 10 a decimal con exponente negativo.

Criterios para valorar respuestas abiertas

- Se aceptan resultados con distinto número de cifras si el redondeo está indicado y el error relativo es coherente.
- En el dossier se valora la elección razonada de las magnitudes y la comprobación por órdenes de magnitud más que la cantidad de datos.
- La calculadora científica es válida para comprobar, pero cada paso con propiedades debe aparecer escrito.

03

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

¿Cuánto crecerá?

PREGUNTA GUÍA

¿Por qué dos crecimientos con el mismo porcentaje pueden producir resultados muy distintos?

CURSO
3.º ESO

SESIONES
7 sesiones · 1.º trimestre

SENTIDOS PRIORITARIOS
A · Sentido numérico · D · Sentido algebraico

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE2, CE3, CE6

PRODUCTO FINAL
Simulador de crecimiento y decisiones financieras

CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 1.2, 2.2, 3.1, 6.1

Contexto, reto y sentido

La cooperativa escolar del instituto ha cerrado el curso con **2 000 €** de beneficios y el consejo de estudiantes debe decidir dónde guardarlos. Una entidad ficticia, «Ahorro Joven», ofrece varios planes: uno paga un 4 % anual de interés simple y otro un 3 % anual que se suma cada año al capital. Todos los carteles hablan de porcentajes, pero ningún cartel dice cuál conviene, ni cuánto dinero habrá dentro de 5, 10 o 20 años.

La situación moviliza el sentido numérico y el algebraico en 3.º ESO: variaciones absolutas y relativas, porcentajes sucesivos con índices de variación, interés simple, tablas de crecimiento y su representación gráfica. Lo esencial es entender que dos crecimientos con el mismo porcentaje no dan lo mismo si uno se aplica siempre sobre el capital inicial y el otro sobre el capital que ya ha crecido. Todas las entidades y ofertas son ficticias y se simulan sin comisiones ni impuestos.

Reto

Construir un simulador de crecimiento (tabla, gráfica y fórmulas) para comparar los planes de ahorro de «Ahorro Joven» y recomendar justificadamente dónde colocar 2 000 € según el plazo.

Producto final

Simulador de crecimiento y decisiones financieras.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- **1.1** Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.
- **1.2** Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.
- **2.2** Comprobar la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, evaluando su alcance y repercusión desde diferentes perspectivas.
- **3.1** Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.
- **6.1** Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.

Saberes básicos prioritarios

A
Sentido numérico

- Variación absoluta y variación relativa (en tanto por ciento) de una cantidad.
- Porcentajes sucesivos: índices de variación y aumentos o descuentos encadenados.
- Proporcionalidad directa: cálculo del valor inicial a partir del valor final y del porcentaje.
- Interés simple: capital, tasa, tiempo e interés; capital final.

D
Sentido algebraico

- Modelización de un crecimiento mediante tablas y expresiones sencillas: $C_f = C \cdot (1 + r \cdot t)$ y $C_f = C \cdot (1 + r)^t$.
- Representación gráfica de dos planes y lectura del punto en el que uno supera al otro.

F
Sentido socioafectivo

- Toma de decisiones informada y valoración crítica de las ofertas financieras, reconociendo los límites del modelo.

Objetivos didácticos

- Resolver variaciones porcentuales sucesivas.
- Modelizar crecimiento mediante tablas y expresiones sencillas.
- Diferenciar variación absoluta y relativa.
- Tomar decisiones financieras básicas justificadas.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Cambios absolutos y relativos

Evidencia: Ficha 1: tabla de variaciones absolutas y relativas y comparación de cambios con distinto punto de partida.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Porcentajes sucesivos

Evidencia: Ficha 2: cálculos con índices de variación en aumentos, descuentos y porcentajes sucesivos, y cálculo de precios iniciales.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Interés simple y comparación de ofertas ficticias

Evidencia: Ficha 3: cálculo de intereses simples, capitales finales, tiempos y capitales necesarios con la fórmula $I = C \cdot r \cdot t$.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Tablas de crecimiento

Evidencia: Ficha 4: tabla año a año de los planes Verde y Azul, con variación anual y comparación del tipo de crecimiento.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Representación gráfica de dos planes

Evidencia: Ficha 5: gráfica de los dos planes sobre una cuadrícula, lectura del plazo en que se igualan y comparación entre recta y curva.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Simulador y recomendación

Evidencia: Ficha 6: simulador del equipo con cuatro plazos y recomendación escrita para dos perfiles de ahorrador.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Reto individual de decisión

Evidencia: Ficha 7: evidencia individual con dos planes nuevos, un caso de descuentos sucesivos y una recomendación según el plazo.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Calculadora/hoja de cálculo · contratos ficticios · tablas

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Porcentajes enteros y plantillas cantidad inicial-tasa-tiempo.

Ampliación

Anexo 9

Comparar una tasa fija con una bonificación escalonada y hallar el punto de cambio.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Interpretación de los datos del plan (capital, tasa, plazo, tipo de interés) y de la pregunta de cada situación, distinguiendo variación absoluta y relativa.	Fichas 1 y 3 / lista de cotejo
1.2	Uso de índices de variación, de la fórmula del interés simple y de tablas de crecimiento para obtener el capital final.	Fichas 2, 3 y 4 / escala de valoración
2.2	Valoración de la coherencia de las soluciones en el contexto (plazo, rentabilidad, límites del modelo: sin comisiones ni impuestos) y de su repercusión en la decisión.	Ficha 6 y simulador (Anexo 4) / rúbrica
3.1	Conjetura y comprobación sobre cuándo un crecimiento sobre el capital acumulado supera a otro sobre el capital inicial, con tabla y gráfica.	Ficha 5 y Ampliación / rúbrica
6.1	Traducción de situaciones financieras sencillas a operaciones con porcentajes y a expresiones del capital final.	Fichas 6 y 7 / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Simulador, tabla, gráfica y recomendación.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 3 · ¿Cuánto crecerá?

ALUMNADO

La cooperativa escolar ha ganado 2 000 € y el tesorero tiene dos folletos de «Ahorro Joven». El Plan Verde dice «4 % al año». El Plan Azul dice «3 % al año». Un compañero afirma: «Verde, que es más». Otra le contesta: «Eso depende de cuánto tiempo lo dejemos». ¿Quién tiene razón? Vais a construir un simulador para averiguar cuánto dinero habrá cada año, dibujaréis las dos evoluciones y daréis una recomendación que dependa del plazo. Cuidado: dos porcentajes iguales no siempre dan el mismo resultado.

> *¿Por qué dos crecimientos con el mismo porcentaje pueden producir resultados muy distintos?*

Vuestro reto

Construir un simulador de crecimiento (tabla, gráfica y fórmulas) para comparar los planes de ahorro de «Ahorro Joven» y recomendar justificadamente dónde colocar 2 000 € según el plazo.

Lo que vais a producir

Simulador de crecimiento y decisiones financieras.

Hoja de ruta · 7 sesiones

1. Comparamos cambios con variación absoluta y relativa.
2. Encadenamos porcentajes con índices de variación (rebajas, IVA, crecimientos).
3. Calculamos el interés simple y el capital final de un plan.
4. Construimos la tabla de crecimiento año a año de dos planes.
5. Representamos los dos planes en una gráfica y buscamos el punto de cambio.
6. Montamos el simulador del equipo y redactamos la recomendación.
7. Resolvemos de forma individual un reto de decisión.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Resolver variaciones porcentuales sucesivas.
- ✓ Modelizar crecimiento mediante tablas y expresiones sencillas.
- ✓ Diferenciar variación absoluta y relativa.
- ✓ Tomar decisiones financieras básicas justificadas.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 3 · ¿Cuánto crecerá?

ALUMNADO

Tabla de variaciones, esquema de variación absoluta y relativa, índices de variación, caso de rebajas encadenadas, planes de ahorro ficticios, gráfica de crecimiento, fórmulas clave y guía para construir el simulador en hoja de cálculo. Todas las entidades, planes y datos son ficticios (creados para el aula).

F1 Seis cambios para comparar

DATOS

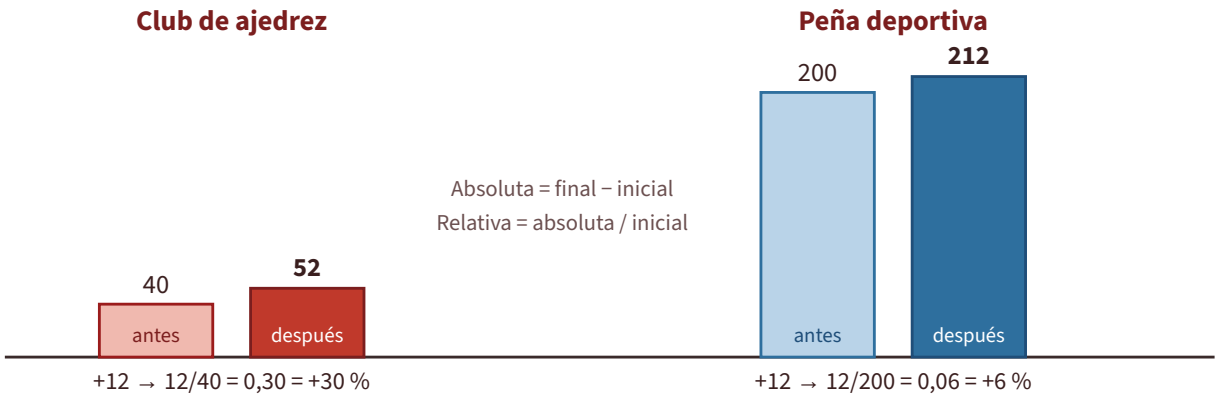
Caso	Antes	Después
Club de ajedrez (socios)	40	52
Club de teatro (socios)	120	150
Peña deportiva (socios)	200	212
Entrada del cine (€)	8	10
Tablet (€)	250	275
Factura de la luz (€)	80	68

Fuente: Datos ficticios creados para el aula.

¿En cuál de los casos hay un cambio mayor? Depende de qué se mide: la diferencia o la proporción.

F2 Misma variación absoluta, distinta variación relativa

ESQUEMA



Fuente: Esquema de elaboración propia con datos ficticios.

Ganar 12 socios es mucho para un club de 40 y poco para uno de 200: la variación relativa permite comparar.

F3 Índices de variación

DATOS

Cambio	Índice de variación	Ejemplo
Aumento del r %	$1 + \frac{r}{100}$	$+20\ \% \to 1{,}20$; $+7\ \% \to 1{,}07$
Disminución del r %	$1 - \frac{r}{100}$	$-15\ \% \to 0{,}85$; $-30\ \% \to 0{,}70$
Cambios sucesivos	se multiplican los índices	$+20\ \%$ y después $-20\ \% \to 1{,}20 \cdot 0{,}80 = 0{,}96$
Valor final	$V_f = V_i \cdot$ índice	$80 \cdot 1{,}21 = 96{,}80$
Valor inicial	$V_i = V_f$: índice	$96{,}80 : 1{,}21 = 80$

Fuente: Elaboración propia.

Un índice menor que 1 indica descenso; mayor que 1, aumento. El porcentaje de cambio total es (índice total -1) $\cdot 100$.

F4 Rebajas encadenadas

ESTUDIO DE CASO

Una tienda de ropa anuncia: «**30 % de descuento en todo y, además, un 10 % extra al pagar con la tarjeta de la tienda**». Una chaqueta cuesta 60 €.

Una persona piensa: «$30 + 10 = 40$ %, así que pago $60 \cdot 0{,}60 = 36$ €». Otra calcula: «Primero $60 \cdot 0{,}70 = 42$ €; luego $42 \cdot 0{,}90 = 37{,}80$ €».

¿Quién tiene razón? El segundo descuento se aplica sobre el precio **ya rebajado**, no sobre el original. El índice total es $0{,}70 \cdot 0{,}90 = 0{,}63$: el descuento real es del $37\ \%$, no del $40\ \%$.

Fuente: Caso ficticio creado para el aula.

Los porcentajes sucesivos no se suman: se multiplican sus índices.

F5 Planes de «Ahorro Joven» (entidad ficticia)

DATOS

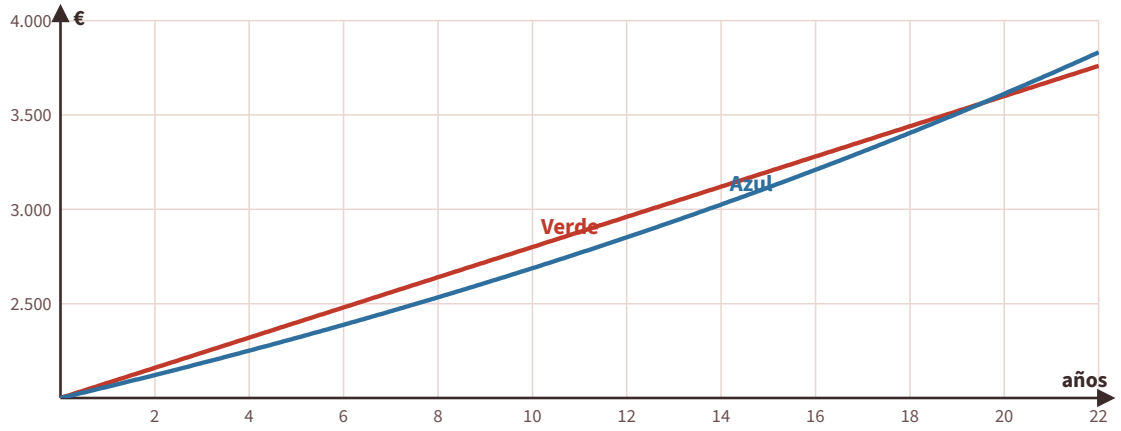
Plan	Cómo funciona	Capital final tras t años (con C = capital)
Verde	$4\ \%$ anual de interés **simple**: cada año se cobra el $4\ \%$ del capital inicial; los intereses no se reinvierten.	$C_f = C \cdot (1 + 0{,}04 \cdot t)$
Azul	$3\ \%$ anual **acumulado**: cada año los intereses se suman al capital y el año siguiente se calcula el $3\ \%$ sobre el nuevo total.	$C_f = C \cdot 1{,}03^{\,t}$
Naranja (ampliación)	Interés simple **escalonado**: $2\ \%$ anual los dos primeros años y $6\ \%$ anual desde el tercer año, siempre sobre el capital inicial.	Interés total $= C \cdot (0{,}02 \cdot 2 + 0{,}06 \cdot (t - 2))$ si $t \geq 2$

Fuente: Planes y condiciones ficticios creados para el aula. Se supone un tipo de interés constante, sin comisiones ni impuestos.

Capital de partida de la cooperativa: $2\,000$ €. Los planes se comparan con el mismo capital y el mismo plazo.

F6 Evolución de 2 000 € en los planes Verde y Azul

GRÁFICO



Fuente: Cálculos propios con las fórmulas de F5. La recta es el Plan Verde; la curva, el Azul.

¿Se cortan las dos líneas? ¿Cuántos años aproximadamente hacen falta?

F7 Fórmulas clave

DATOS

Idea	Fórmula	Ejemplo con $2\,000$ €
Interés simple	$I = C \cdot r \cdot t$	$2\,000 \cdot 0{,}04 \cdot 3 = 240$ €
Capital final (simple)	$C_f = C + I = C(1 + r \cdot t)$	$2\,000 + 240 = 2\,240$ €
Capital final (acumulado)	$C_f = C(1 + r)^t$	$2\,000 \cdot 1{,}03^3 \approx 2\,185{,}45$ €
Variación relativa	$\dfrac{V_f - V_i}{V_i}$	$\dfrac{2\,240 - 2\,000}{2\,000} = 0{,}12 = 12\,\%$

Fuente: Elaboración propia.

En el interés simple el capital crece lo mismo cada año (progresión aritmética); en el acumulado se multiplica por el mismo índice cada año.

F8 Guía para construir el simulador en hoja de cálculo

PROTOCOLO

- **Celdas de datos:** en B1 el capital ($2\,000$), en B2 la tasa del Plan Verde ($0{,}04$) y en B3 la del Plan Azul ($0{,}03$).
- **Columna A:** años $0, 1, 2, \ldots, 20$.
- **Columna B (Verde):** capital × (1 + tasa × años), es decir, =B1*(1+B2*A5). Fija B1 y B2 con la tecla F4 antes de arrastrar hacia abajo.
- **Columna C (Azul):** capital × (1 + tasa) elevado a los años, es decir, =B1*(1+B3)^A5, con B1 y B3 fijadas.
- **Columna D:** B menos C para ver la diferencia entre los dos planes y detectar el año en que cambia de signo.
- **Gráfica:** gráfico de líneas con las columnas B y C frente a la A; rotular ejes y unidades.
- **Comprobación:** el valor de B en el año 5 debe ser $2\,400$ y el de C, $2\,318{,}55$.

Fuente: Elaboración propia. Sirve también si se hace con calculadora y tabla en papel.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 3 · ¿Cuánto crecerá?

ALUMNADO

FICHA 1 Cambios absolutos y relativos

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Trabaja con F1 y F2. Variación absoluta = final − inicial; variación relativa = absoluta : inicial.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

El $25\ \%$ de 80 es…

☐ 20 ☐ 25 ☐ 32

Un precio pasa de 50 € a 60 €. El aumento es del…

☐ 10 % ☐ 20 % ☐ 60 %

$0{,}35$ expresado en porcentaje es…

☐ 0,35 % ☐ 3,5 % ☐ 35 %

2 **Completa la tabla con los datos de F1.**

Caso	Variación absoluta	Cálculo de la variación relativa	Variación relativa (%)
Ajedrez			
Teatro			
Peña deportiva			
Entrada del cine			
Tablet			
Factura de la luz			

3 **Ordena los seis casos de mayor a menor variación relativa. ¿Coincide con el orden de la variación absoluta? Explica la diferencia.**

4 Una entrada sube de 20 € a 25 €. Después baja de 25 € a 20 €. Calcula el porcentaje de la subida y el de la bajada. ¿Son iguales? ¿Por qué?

FICHA 2 Porcentajes sucesivos

Sesión 2

Usa F3 y F4. Escribe primero el índice de variación y después la operación.

1 Calcula con índices de variación.

Situación	Índice	Operación	Resultado
Un producto de 80 € sube un 21 % (IVA)			
Un precio de 120 € baja un 15 %			
Una población de $1\,200$ personas crece un 5 % al año durante 3 años			
Una tablet de 250 € sube un 10 %			

2 Una chaqueta cuesta 60 € y tiene un 30 % de descuento y luego otro 10 % extra (F4). Calcula el precio final y el descuento total en porcentaje. Después responde: ¿por qué subir un 20 % y bajar un 20 % no devuelve al precio inicial?

3 Una camiseta cuesta 45 € después de una rebaja del 25 %. ¿Cuánto costaba antes de la rebaja? Comprueba tu resultado.

4 Un producto sube un $10\ \%$ dos años seguidos. Un compañero dice que sube un $20\ \%$ en total. ¿Es cierto? Razona con índices.

FICHA 3 Interés simple

Sesión 3

Con F5 y F7. En interés simple, los intereses se calculan siempre sobre el capital inicial.

1 Calcula el interés y el capital final del Plan Verde ($4\ \%$ simple) con $2\,000$ €.

Años t	Interés $I = C \cdot r \cdot t$	Capital final
1		
3		
5		
8		

2 ¿Cuántos años hacen falta para ganar 400 € de interés con $2\,000$ € al $4\ \%$ simple?

3 ¿Qué capital hay que depositar al $4\ \%$ simple para ganar 120 € de interés en un año? ¿Y para ganar 120 € en 3 años?

4 Una persona dice: «El Plan Verde me da el $4\ \%$ cada año, así que en 10 años habré ganado el $40\ \%$ de lo que puse». ¿Es correcto? Calcula el capital final con $2\,000$ € y explica.

FICHA 4 Tablas de crecimiento

Sesión 4

Usa F5 y F7. En el Plan Azul, el índice de cada año es $1{,}03$: multiplica el capital del año anterior.

1 Completa la tabla (redondea a céntimos). Ya están rellenados los años 0 y 1.

Año	Verde: capital	Verde: variación anual	Azul: capital	Azul: variación anual
0	2 000 €	—	2 000 €	—
1	2 080 €	+80 €	2 060 €	+60 €
2				
3				
4				
5				
6				

2 Observa la variación anual de cada plan. ¿Cuál es constante? ¿Cuál va aumentando? Explica por qué ocurre.

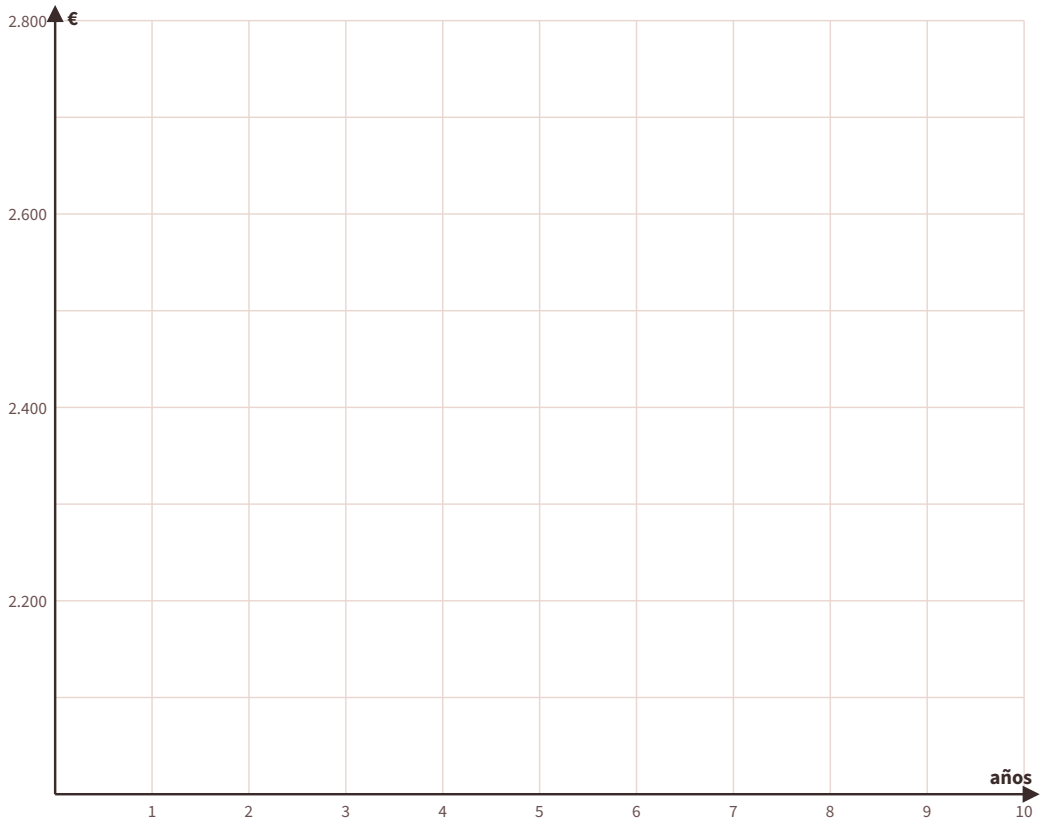
3 Con la tabla, ¿qué plan conviene si el dinero se necesita dentro de 5 años? ¿Y si pudiera dejarse mucho más tiempo? Formula una conjetura.

FICHA 5 Representar dos planes

Sesión 5

Usa los datos de la ficha 4 y F6. Dibuja cada plan con un color distinto y rotula las líneas.

1 **Representa los capitales de los años** $0, 2, 4, 6, 8$ **y** 10**. Verde:** $2\,000$; $2\,160$; $2\,320$; $2\,480$; $2\,640$; $2\,800$**. Azul:** $2\,000$; $2\,121{,}80$; $2\,251{,}02$; $2\,388{,}10$; $2\,533{,}54$; $2\,687{,}83$**. Une los puntos.**



2 **Con la gráfica de F6 (hasta 22 años): ¿en qué año aproximado se igualan los dos planes? Comprueba con la fórmula calculando los capitales de los años 19 y 20.**

3 **Describe la forma de las dos gráficas (recta o curva) y relaciónala con el tipo de crecimiento. ¿Qué plan recomendarías para 6 años? ¿Y para 25 años?**

FICHA 6 Simulador y recomendación

Sesión 6

Trabajo en equipo con la guía de F8. Roles: simulador (hoja o calculadora), comprobador, dibujante de la gráfica y portavoz.

1 **Completa el simulador para $2\,000$ € en cuatro plazos.**

Plazo	Verde (€)	Azul (€)	Diferencia	Mejor plan
3 años				
6 años				
12 años				
20 años				

2 **Redactad una recomendación para estos dos perfiles: (a) la cooperativa necesita el dinero para el viaje de fin de curso dentro de 2 años; (b) un fondo para becas que se mantendrá 25 años. Justificad con números.**

3 **Límites del modelo: indicad dos condiciones reales que el simulador no tiene en cuenta (comisiones, impuestos, cambios de tipo…) y cómo podrían cambiar la recomendación.**

4 **Revisión cruzada con otro equipo.**

- [ ] Los capitales de los años 5 y 20 coinciden con F8 y F6
- [ ] La tabla y la gráfica son coherentes
- [ ] La recomendación depende del plazo
- [ ] Las unidades (€, años) aparecen en tabla y ejes

FICHA 7 Reto individual de decisión

Sesión 7

Prueba individual: resuelve sin ayuda del equipo. Se puede usar calculadora.

1 **El Plan Rojo paga un $5\ \%$ anual de interés simple y el Plan Gris un $4\ \%$ anual acumulado. Con $1\,500$ € durante 8 años, calcula el capital final de cada uno y decide cuál es mejor.**

2 **Un abrigo cuesta 90 € y se rebaja un $20\ \%$; después, otro $15\ \%$ sobre el precio rebajado. Calcula el precio final y el descuento total en porcentaje.**

3 **El número de socios de una peña pasa de 250 a 275 y el de otra de 80 a 96. ¿Cuál crece más en proporción? Justifica con variaciones relativas.**

4 **Una persona quiere dejar $1\,500$ € solo 3 años. ¿Qué plan de los dos (Rojo o Gris) le conviene? Razona con números y menciona un límite del modelo.**

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 3 · ¿Cuánto crecerá?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Simulador de crecimiento y decisiones financieras de la cooperativa escolar. Todos los datos son ficticios.

Título y equipo

Nombre del simulador, integrantes y roles.

Datos y supuestos

Capital, tasas, tipo de interés y condiciones (sin comisiones ni impuestos).

Fórmulas usadas

Una fórmula por plan y un ejemplo numérico.

Tabla de crecimiento

Años · capital Verde · capital Azul · diferencia.

Gráfica de los dos planes

Ejes rotulados, escala y punto de cambio.

Comprobación

Segundo camino de cálculo y firma del equipo revisor.

Recomendación según el plazo

Para plazos cortos y largos; límites del modelo.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 3 · ¿Cuánto crecerá?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Simulador de crecimiento y decisiones financieras**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] Los datos y supuestos (capital, tasas, tipo de interés) están escritos y son coherentes con F5.
- [ ] Cada plan tiene su fórmula correcta y un ejemplo numérico.
- [ ] La tabla cubre varios años y los valores de los años 5 y 20 son correctos (2 400 € / 2 318,55 € y 3 600 € / 3 612,22 €).
- [ ] La gráfica tiene ejes rotulados con unidades, escala uniforme y los dos planes de distinto color.
- [ ] Se identifica el punto aproximado en que el Plan Azul supera al Verde (hacia los 20 años).
- [ ] La recomendación depende del plazo y se justifica con números.
- [ ] Se mencionan al menos dos límites del modelo.
- [ ] Se distingue claramente variación absoluta y relativa cuando se usan.
- [ ] Los resultados monetarios llevan unidades y dos decimales.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 3 · ¿Cuánto crecerá?

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Simulador de crecimiento y decisiones financieras**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 3 · ¿Cuánto crecerá?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé calcular un porcentaje de cambio y encadenar aumentos y descuentos con índices de variación.	◯	◯	◯	◯
Sé explicar por qué dos planes con tasas parecidas pueden dar resultados distintos según el plazo.	◯	◯	◯	◯
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	◯	◯	◯	◯
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	◯	◯	◯	◯
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	◯	◯	◯	◯
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	◯	◯	◯	◯

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 3 · ¿Cuánto crecerá?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Porcentajes enteros y plantillas de cantidad inicial, tasa y tiempo. Usa el ejemplo modelado para guiarte.

Plantillas para no perderse

Porcentaje de una cantidad: $10\ \% =: 10$; $50\ \% =: 2$; $25\ \% =: 4$. **Interés simple:** $C = \_\_$; $r = \_\_$; $t = \_\_ \to I = C \cdot r \cdot t \to C_f = C + I$. **Cambio con índice:** aumento $r\ \% \to 1 + r/100$; descuento $r\ \% \to 1 - r/100$.

Ejemplo modelado

500 € al $3\ \%$ simple durante 4 años. $C = 500$; $r = 0{,}03$; $t = 4$. $I = 500 \cdot 0{,}03 \cdot 4 = 60$ €. $C_f = 500 + 60 = 560$ €. Comprobación: $3\ \% \cdot 4 = 12\ \%$ y $12\ \%$ de 500 es 60 €. ✔

1 Calcula mentalmente.

Cálculo	Operación	Resultado
$10\ \%$ de 240		
$50\ \%$ de 90		
$25\ \%$ de 200		
$20\ \%$ de 150		

2 Completa la plantilla de interés simple.

Capital C	Tasa r	Tiempo t	Interés I	Capital final C_f
$1\,000$ €	$5\ \%$	2 años		
600 €	$2\ \%$	5 años		
$2\,000$ €	$4\ \%$	3 años		

3 Una bicicleta de 200 € sube un $10\ \%$. Escribe el índice, calcula el nuevo precio y comprueba que 20 € es el $10\ \%$ de 200.

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 3 · ¿Cuánto crecerá?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Tasa fija contra bonificación escalonada: el punto de cambio

El Plan Naranja de F5 paga poco al principio y más después: un $2\ \%$ anual los dos primeros años y un $6\ \%$ anual desde el tercero (interés simple, siempre sobre el capital inicial). El Plan Verde paga un $4\ \%$ anual fijo. ¿Cuándo compensa el Naranja?

Pasos

1. Calcula, para $2\,000$ €, el interés total acumulado de cada plan en los años $1, 2, 3, 4, 5$ y 6.
2. Encuentra el año a partir del cual el Naranja supera al Verde. ¿Hay un año en que son exactamente iguales?
3. Escribe, para $t \geq 2$, una expresión del interés total de cada plan y plantea la igualdad para hallar el punto de cambio con exactitud.
4. Generaliza: si el Verde pagase un $5\ \%$ fijo, ¿cambiaría el punto de cambio? Calcúlalo y explica qué ocurre con un plan escalonado que paga $2\ \%$ y después $6\ \%$.

1 **Tabla de intereses acumulados.**

Año	Interés Verde (€)	Interés Naranja (€)	¿Cuál es mayor?
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Entrega

La tabla completa, la ecuación del punto de cambio resuelta y una recomendación de qué plan elegir según el número de años.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 3 · ¿Cuánto crecerá?

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: 20; $20\ \%$ ($10 : 50 = 0{,}2$); $35\ \%$.
2. Ajedrez: $+12$; $12 : 40 = 0{,}30$; $+30\ \%$. Teatro: $+30$; $30 : 120 = 0{,}25$; $+25\ \%$. Peña: $+12$; $12 : 200 = 0{,}06$; $+6\ \%$. Entrada: $+2$ €; $2 : 8 = 0{,}25$; $+25\ \%$. Tablet: $+25$ €; $25 : 250 = 0{,}10$; $+10\ \%$. Luz: -12 €; $-12 : 80 = -0{,}15$; $-15\ \%$.
3. Por variación relativa: ajedrez ($30\ \%$) > teatro y entrada ($25\ \%$, empatan) > tablet ($10\ \%$) > peña ($6\ \%$) > luz ($-15\ \%$, un descenso). Por variación absoluta (en valor): teatro (30) > tablet (25) > ajedrez, peña y luz (12) > entrada (2). El orden difiere porque la absoluta depende del tamaño de la cantidad y no compara proporciones.
4. Subida: $5 : 20 = 25\ \%$. Bajada: $-5 : 25 = -20\ \%$. No son iguales porque el punto de partida (el 100 %) es distinto: 20 en la subida y 25 en la bajada.

Ficha 2

1. IVA: índice $1{,}21$; $80 \cdot 1{,}21 = 96{,}80$ €. Baja del $15\ \%$: índice $0{,}85$; $120 \cdot 0{,}85 = 102$ €. Población: índice $1{,}05$; $1\,200 \cdot 1{,}05^3 = 1\,389{,}15$ personas ($\approx 1\,389$; $1{,}05^3 = 1{,}157625$, aumento total $15{,}76\ \%$). Tablet: índice $1{,}10$; $250 \cdot 1{,}10 = 275$ €.
2. Índice total $0{,}70 \cdot 0{,}90 = 0{,}63$; precio final $60 \cdot 0{,}63 = 37{,}80$ €; descuento total $37\ \%$ (no $40\ \%$). $+20\ \%$ y $-20\ \%$: $1{,}20 \cdot 0{,}80 = 0{,}96$, es decir, $-4\ \%$; el $20\ \%$ de bajada se calcula sobre un precio mayor, por eso no se compensa.
3. Índice $0{,}75$: $V_i = 45 : 0{,}75 = 60$ €. Comprobación: $60 \cdot 0{,}75 = 45$ €.
4. No: $1{,}10 \cdot 1{,}10 = 1{,}21$, es decir, sube un $21\ \%$ en total (el segundo $10\ \%$ se aplica sobre un precio ya aumentado).

Ficha 3

1. $t = 1$: $I = 2\,000 \cdot 0{,}04 \cdot 1 = 80$ €; $C_f = 2\,080$ €. $t = 3$: 240 €; 2 240 €. $t = 5$: 400 €; 2 400 €. $t = 8$: 640 €; 2 640 €.
2. $400 = 2\,000 \cdot 0{,}04 \cdot t = 80t \to t = 5$ años.
3. En 1 año: $120 = C \cdot 0{,}04 \cdot 1 \to C = 120 : 0{,}04 = 3\,000$ €. En 3 años: $120 = C \cdot 0{,}04 \cdot 3 = 0{,}12C \to C = 1\,000$ €.
4. Es correcto: en interés simple, $4\ \% \cdot 10 = 40\ \%$ del capital inicial. $I = 2\,000 \cdot 0{,}04 \cdot 10 = 800$ € ($40\ \%$ de $2\,000$); $C_f = 2\,800$ €. (La confusión aparece si el interés fuese acumulado: entonces sería más del $40\ \%$.)

Ficha 4

1. Verde: $2\,160$; $2\,240$; $2\,320$; $2\,400$; $2\,480$ (variación $+80$ cada año). Azul: $2\,121{,}80$ ($+61{,}80$); $2\,185{,}45$ ($+63{,}65$); $2\,251{,}02$ ($\approx +65{,}56$); $2\,318{,}55$ ($+67{,}53$); $2\,388{,}10$ ($\approx +69{,}56$).
2. En el Verde la variación anual es constante (80 €) porque el interés se calcula siempre sobre $2\,000$ €; en el Azul aumenta porque cada año el $3\ \%$ se calcula sobre un capital mayor.
3. A 5 años conviene el Verde ($2\,400 > 2\,318{,}55$). Conjetura esperable: el Azul va ganando terreno cada año (la variación anual crece) y podría superar al Verde si se deja mucho tiempo.

Ficha 5

1. Puntos de las dos gráficas; Verde una recta que sube 80 € por año; Azul una curva ligeramente por debajo de la recta y cada vez más inclinada.
2. Se igualan entre los años 19 y 20. Año 19: Verde $2\,000 \cdot (1 + 0{,}04 \cdot 19) = 3\,520$ €; Azul $2\,000 \cdot 1{,}03^{19} \approx 3\,507{,}01$ €. Año 20: Verde $3\,600$ €; Azul $\approx 3\,612{,}22$ €. A partir del año 20 el Azul supera al Verde.
3. Recta (crecimiento constante) y curva (crecimiento cada vez mayor). Para 6 años, Verde ($2\,480$ frente a $2\,388{,}10$); para 25 años, Azul ($2\,000 \cdot 1{,}03^{25} \approx 4\,187{,}56$ frente a $4\,000$ del Verde).

Ficha 6

1. 3 años: Verde $2\,240$; Azul $2\,185{,}45$; diferencia $54{,}55$; mejor Verde. 6 años: $2\,480$; $2\,388{,}10$; $91{,}90$; Verde. 12 años: Verde $2\,000 \cdot (1 + 0{,}48) = 2\,960$; Azul $\approx 2\,851{,}52$; $108{,}48$; Verde. 20 años: $3\,600$; $\approx 3\,612{,}22$; $-12{,}22$ (gana el Azul).
2. (a) 2 años: Verde ($2\,160$ frente a $2\,121{,}80$). (b) 25 años: Azul ($\approx 4\,187{,}56$ € frente a $4\,000$ €). La recomendación debe depender del plazo y apoyarse en la tabla.
3. Respuesta abierta: comisiones de apertura o mantenimiento, impuestos sobre intereses, inflación, posibilidad de que los tipos cambien, penalizaciones por retirar el dinero antes.
4. La revisión debe confirmar las cifras: año 5 → $2\,400$ y $2\,318{,}55$; año 20 → $3\,600$ y $3\,612{,}22$.

Ficha 7

1. Rojo: $1\,500 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot 8) = 1\,500 \cdot 1{,}40 = 2\,100$ €. Gris: $1\,500 \cdot 1{,}04^{8} \approx 2\,052{,}85$ €. Mejor el Rojo a 8 años (diferencia $\approx 47{,}15$ €).
2. Índices $0{,}80$ y $0{,}85$: $90 \cdot 0{,}80 \cdot 0{,}85 = 61{,}20$ €. Índice total $0{,}68$: descuento total $32\ \%$ (no $35\ \%$).
3. Primera: $25 : 250 = 10\ \%$. Segunda: $16 : 80 = 20\ \%$. Crece más en proporción la segunda peña, aunque la primera gane más socios (25 frente a 16).
4. A 3 años: Rojo $1\,500 \cdot 1{,}15 = 1\,725$ €; Gris $1\,500 \cdot 1{,}04^{3} \approx 1\,687{,}30$ €. Le conviene el Rojo. Límite: no se incluyen comisiones ni impuestos, y se supone que el tipo no cambia.

Refuerzo

1. $10\ \%$ de $240 = 24$; $50\ \%$ de $90 = 45$; $25\ \%$ de $200 = 50$; $20\ \%$ de $150 = 30$.
2. $1\,000$ al $5\ \%$, 2 años: $I = 100$; $C_f = 1\,100$. 600 al $2\ \%$, 5 años: $I = 60$; $C_f = 660$. $2\,000$ al $4\ \%$, 3 años: $I = 240$; $C_f = 2\,240$.
3. Índice $1{,}10$; $200 \cdot 1{,}10 = 220$ €; $10\ \%$ de 200 es 20 ✔.

Ampliación

1. Interés acumulado (en €): Verde $80, 160, 240, 320, 400, 480$; Naranja $40, 80, 200, 320, 440, 560$.
2. El Naranja supera al Verde desde el año 5. En el año 4 son iguales (320 €).
3. Para $t \geq 2$: Verde $2\,000 \cdot 0{,}04\,t = 80t$; Naranja $2\,000 \cdot (0{,}04 + 0{,}06\,(t-2)) = 80 + 120\,(t-2) = 120t - 160$. Igualdad: $80t = 120t - 160 \to t = 4$.
4. Con Verde al $5\ \%$: $100t = 120t - 160 \to t = 8$ años. Cuanto más paga el plan fijo, más tarde compensa el escalonado; con los datos del Naranja solo compensa si el plazo supera ese punto.

⚠ Errores frecuentes

- Sumar porcentajes sucesivos ($30 + 10 = 40\ \%$) en lugar de multiplicar los índices.
- Calcular la variación relativa dividiendo por el valor final en lugar del inicial.
- Confundir el interés simple con el acumulado: aplicar el $3\ \%$ siempre sobre el capital inicial en el Plan Azul.
- Olvidar sumar el capital inicial al interés al pedir el capital final.
- Al calcular el precio inicial tras un descuento, restar el porcentaje en lugar de dividir entre el índice.
- Redondear demasiado pronto en la tabla del Plan Azul y arrastrar errores.

⚖ Criterios para valorar respuestas abiertas

- Se acepta cualquier recomendación coherente con los números: lo importante es que dependa del plazo y se justifique.
- Los resultados con decimales se aceptan con redondeo a céntimos y diferencias de un céntimo por redondeos intermedios.
- Se valoran los límites del modelo (comisiones, impuestos, inflación) aunque no sean exhaustivos.

04

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Patrones que permiten predecir

PREGUNTA GUÍA

¿Cómo pasamos de observar un patrón a predecir cualquier término?

CURSO 3.º ESO	**SESIONES** 7 sesiones · 1.º-2.º trimestre	**SENTIDOS PRIORITARIOS** D · Sentido algebraico
COMPETENCIAS ESPECÍFICAS CE3, CE4, CE5, CE7	**PRODUCTO FINAL** Informe de sucesiones y progresiones	**CRITERIOS DE EVALUACIÓN** 3.1, 3.2, 4.1, 5.2, 7.1

Contexto, reto y sentido

El ayuntamiento del barrio ha convocado un concurso de mosaicos para renovar los paseos del parque. Cada diseño se construye con un patrón que crece figura a figura: una pasarela de baldosas, un tramo de cuadrados, una serie de bancos. Antes de pedir el material, el concejal necesita saber cuántas piezas harán falta en la figura 10, en la 50 o en cualquier otra, sin tener que dibujarlas todas.

La situación moviliza el sentido algebraico en 3.º ESO: reconocer patrones en figuras y números, distinguir si una sucesión crece sumando siempre lo mismo (progresión aritmética) o multiplicando siempre por lo mismo (progresión geométrica), obtener el término general, representar los términos en una tabla y una gráfica y comparar ambos tipos de crecimiento. El informe final debe terminar en una conjetura que se pueda comprobar.

Reto

Redactar el informe de sucesiones y progresiones del concurso: describir tres patrones, hallar su término general, representarlos en tabla y gráfica, compararlos y formular y comprobar una conjetura.

Producto final

Informe de sucesiones y progresiones.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE4** Utilizar el pensamiento computacional: descomponer, reconocer patrones, generalizar y crear algoritmos.
- **CE5** Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

3.1 Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.

3.2 Plantear variantes de un problema dado modificando alguno de sus datos o alguna condición del problema.

4.1 Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación computacional.

5.2 Realizar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.

7.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales.

Saberes básicos prioritarios

D
Sentido algebraico

- Patrones, pautas y regularidades en figuras y en secuencias numéricas: descripción verbal, tabla y término general.
- Sucesiones: término general, término siguiente y obtención de términos concretos.
- Progresiones aritméticas: diferencia d y término general $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$.
- Progresiones geométricas: razón r y término general $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ (introductorio).
- Representación gráfica de sucesiones (puntos aislados) y comparación entre crecimiento lineal y exponencial.

A
Sentido numérico

- Potencias de exponente natural y cálculo con la calculadora de términos grandes.

F
Sentido socioafectivo

- Tolerar el ensayo y error al buscar una regla y valorar la comprobación como parte de la conjetura.

Objetivos didácticos

- ✓ Identificar patrones lineales y multiplicativos.
- ✓ Obtener términos y reglas generales.
- ✓ Representar una sucesión con tabla y gráfica.
- ✓ Comparar crecimiento aritmético y geométrico.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Patrones con figuras

Evidencia: Ficha 1: tabla de la pasarela de cerillas, regla explicada con palabras, figura 10 y 50 y conjetura sobre los cuadrados de puntos.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Diferencia constante: progresión aritmética

Evidencia: Ficha 2: clasificación de sucesiones por su diferencia, término general de dos situaciones aritméticas y búsqueda de un término concreto.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Razón constante: progresión geométrica

Evidencia: Ficha 3: clasificación de sucesiones por su razón, término general de dos situaciones geométricas (vídeo y rebotes) y cálculo de términos.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Término general en casos sencillos

Evidencia: Ficha 4: tabla de cinco sucesiones con tipo, diferencia o razón, término general y a_{10}, y pertenencia de un valor a una sucesión.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Tabla y representación gráfica

Evidencia: Ficha 5: tabla de valores y gráfica de puntos de una progresión aritmética y de una geométrica, con el término en que se cruzan.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Informe comparativo

Evidencia: Ficha 6: borrador del informe del equipo: tabla de tres patrones, gráfica, variante de un dato y descripción paso a paso del procedimiento.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Conjetura y transferencia individual

Evidencia: Ficha 7: evidencia individual con una progresión aritmética, una geométrica, una conjetura comprobada y una variante.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Mosaicos · tablas · calculadora/hoja de cálculo

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Sucesiones con reglas explícitas y tablas iniciadas.

Ampliación

Anexo 9

Encontrar dos sucesiones que coincidan en un término y comparar su crecimiento.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
3.1	Formulación de la regla de un patrón y de una conjetura (suma de los n primeros impares, crecimiento de cada tipo), con comprobación en términos concretos.	Fichas 1 y 7 / rúbrica
3.2	Planteamiento de una variante de un patrón cambiando un dato (primer término, diferencia o razón) y análisis de qué cambia.	Ficha 6 y Ampliación / rúbrica
4.1	Descomposición del problema en pasos (calcular términos, hallar diferencia o razón, escribir la regla, predecir) y descripción del procedimiento como algoritmo.	Fichas 4 y 6 / lista de cotejo
5.2	Conexión entre la figura, la tabla, la expresión algebraica y la gráfica de una misma sucesión.	Ficha 5 y informe (Anexo 4) / rúbrica
7.1	Representación de sucesiones mediante tablas, expresiones y gráficas de puntos con ejes rotulados.	Fichas 5 y 6 / escala de valoración

☆ Evidencias clave de esta SdA

Informe, reglas, tablas, gráficas y conjetura.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 4 · Patrones que permiten predecir

ALUMNADO

El concurso de mosaicos del barrio pide diseños que «crezcan solos». Un equipo propone una pasarela de baldosas con cerillas de madera para el borde: la figura 1 usa 4 cerillas, la 2 usa 7, la 3 usa 10. El concejal pregunta: «¿Cuántas cerillas necesito para la figura 50?». Otro equipo diseña una cadena de mensajes: cada día, el triple de personas que el anterior. ¿Cuál crece más deprisa? Vais a descubrir cómo pasar de observar un patrón a predecir cualquier término, y a comprobar que vuestra regla funciona.

> *¿Cómo pasamos de observar un patrón a predecir cualquier término?*

Vuestro reto

Redactar el informe de sucesiones y progresiones del concurso: describir tres patrones, hallar su término general, representarlos en tabla y gráfica, compararlos y formular y comprobar una conjetura.

Lo que vais a producir

Informe de sucesiones y progresiones.

Hoja de ruta · 7 sesiones

1. Observamos patrones con figuras y buscamos una regla.
2. Descubrimos las progresiones aritméticas: diferencia constante.
3. Descubrimos las progresiones geométricas: razón constante.
4. Escribimos el término general en casos sencillos.
5. Representamos las sucesiones con tablas y gráficas.
6. Redactamos el informe comparativo del equipo.
7. Formulamos una conjetura y la transferimos a un caso nuevo de forma individual.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Identificar patrones lineales y multiplicativos.
- ✓ Obtener términos y reglas generales.
- ✓ Representar una sucesión con tabla y gráfica.
- ✓ Comparar crecimiento aritmético y geométrico.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 4 · Patrones que permiten predecir

ALUMNADO

Patrones de cerillas y de puntos, resumen de los tipos de sucesión, tres situaciones con sus primeros términos, gráfica de puntos, esquema de las dos progresiones, ejemplo resuelto del término general y método del detective de patrones. Todos los datos son ficticios (creados para el aula).

F1 Pasarela de cerillas

ESQUEMA

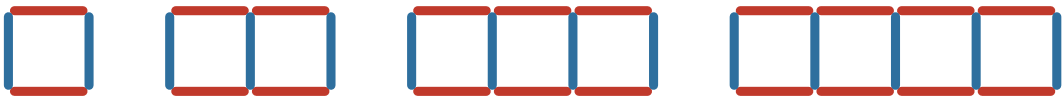


Figura 1
4 cerillas

Figura 2
7 cerillas

Figura 3
10 cerillas

Figura 4
13 cerillas

Rojo: cerillas horizontales. Azul: cerillas verticales. Cada figura añade un cuadrado a la derecha.

Fuente: Patrón figurativo de elaboración propia.

Cuenta las cerillas de cada figura. ¿Cómo has contado? ¿Cuántas habrá en la figura 5?

F2 Cuadrados de puntos

ESQUEMA

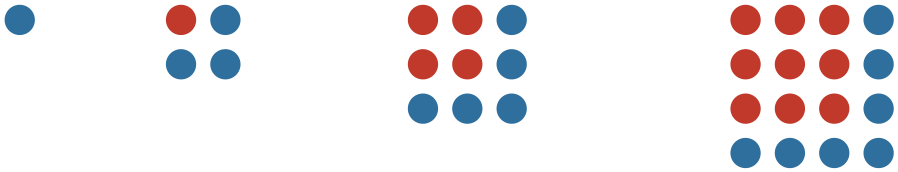


Figura 1
1 punto

Figura 2
4 puntos (+3)

Figura 3
9 puntos (+5)

Figura 4
16 puntos (+7)

Fuente: Patrón figurativo de elaboración propia. En azul, los puntos que se añaden a cada figura.

Cada figura añade una «L» de puntos azules. ¿Cuántos puntos añade la figura 5? ¿Y la 10?

F3 Resumen: tipos de sucesión

DATOS

Tipo	Del término a_n al siguiente	Término general	Ejemplo
Progresión aritmética	se suma siempre la misma **diferencia** d	$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$	$4, 7, 10, 13, \ldots$ con $d = 3$: $a_n = 3n + 1$
Progresión geométrica	se multiplica siempre por la misma **razón** r	$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$	$5, 15, 45, \ldots$ con $r = 3$: $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$
Ninguna de las dos	las diferencias y los cocientes no son constantes	depende del patrón	$1, 4, 9, 16, \ldots$: $a_n = n^2$

Fuente: Elaboración propia.

Para decidir: resta términos consecutivos (¿salen todas iguales?) y divide términos consecutivos (¿salen todos iguales?).

F4 Tres situaciones del concurso

DATOS

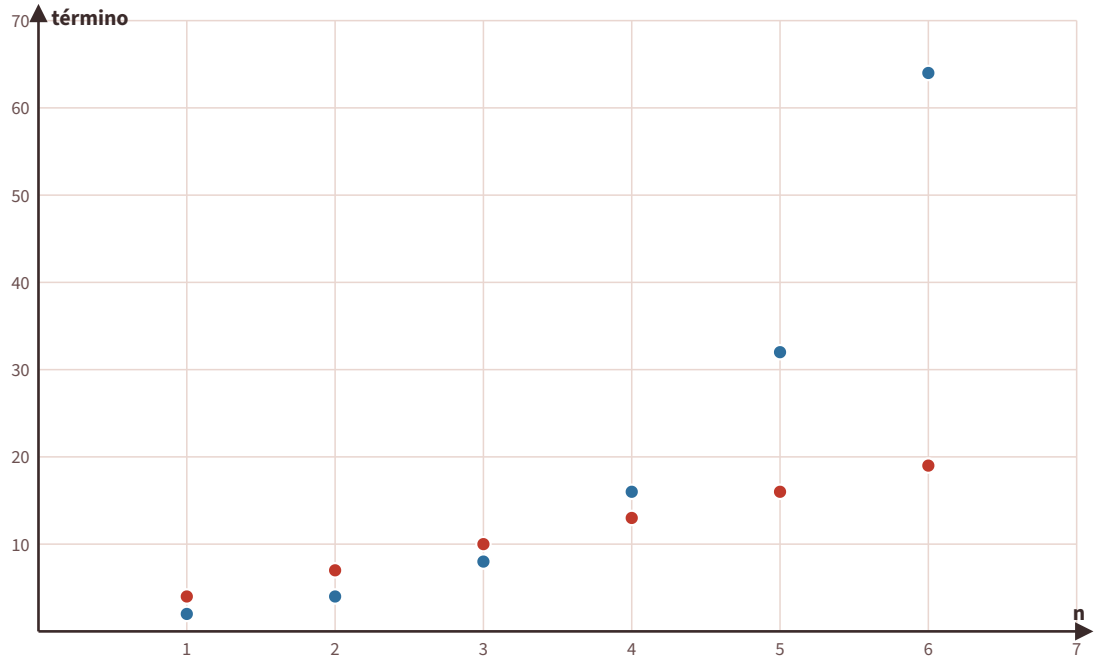
Situación	Descripción	Primeros términos
Hucha del club	Primera semana se ingresan 15 € y cada semana se ingresan 5 € más que la anterior.	$15, 20, 25, 30, \ldots$
Vídeo viral	El primer día lo ven 5 personas y cada día lo ve el triple de personas que el día anterior.	$5, 15, 45, 135, \ldots$
Pelota que rebota	Se suelta desde 2 m. Tras el primer bote sube 100 cm y en cada rebote sube la mitad que en el anterior (altura en cm).	$100, 50, 25, 12{,}5, \ldots$
Gradas del parque	La fila 1 tiene 12 asientos y cada fila tiene 2 más que la anterior.	$12, 14, 16, 18, \ldots$

Fuente: Situaciones ficticias creadas para el aula.

Decide cuáles son progresiones aritméticas y cuáles geométricas.

F5 Dos sucesiones en una gráfica de puntos

GRÁFICO



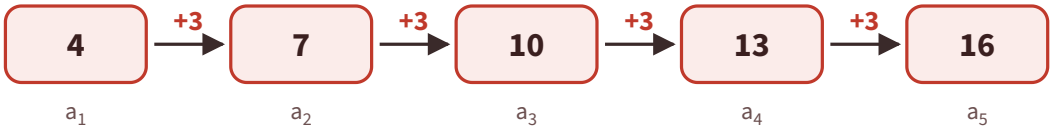
Fuente: Valores calculados con $a_n = 3n + 1$ (rojo) y $b_n = 2^n$ (azul), para $n = 1, \ldots, 6$.

Los puntos rojos están alineados; los azules no. ¿Qué indica cada forma?

F6 Dos formas de crecer

ESQUEMA

Progresión aritmética: se suma siempre la misma diferencia d



a_1 a_2 a_3 a_4 a_5

Progresión geométrica: se multiplica siempre por la misma razón r



a_1 a_2 a_3 a_4 a_5

Fuente: Esquema de elaboración propia.

La diferencia entre términos consecutivos es constante en la primera fila; el cociente, en la segunda.

F7 Ejemplo resuelto: hallar el término general

TEXTO

Sucesión aritmética $7, 11, 15, 19, \ldots$

- Diferencias: $11 - 7 = 4; 15 - 11 = 4; 19 - 15 = 4 \to d = 4$ y $a_1 = 7$.
- Término general: $a_n = 7 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 3$.
- Comprobación con $n = 3$: $4 \cdot 3 + 3 = 15$ ✔. Predicción: $a_{20} = 4 \cdot 20 + 3 = 83$.

Sucesión geométrica $2, 6, 18, 54, \ldots$

- Cocientes: $6 : 2 = 3; 18 : 6 = 3; 54 : 18 = 3 \to r = 3$ y $a_1 = 2$.
- Término general: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.
- Comprobación con $n = 4$: $2 \cdot 3^3 = 54$ ✔. Predicción: $a_{10} = 2 \cdot 3^9 = 39\,366$.

Fuente: Elaboración propia.

Primero se comprueba que hay diferencia o razón constante; después se escribe la regla; al final se comprueba con un término que ya conocemos.

F8 Método del detective de patrones

PROTOCOLO

- **1.º Observa y anota** los primeros términos en una tabla (n y a_n).
- **2.º Calcula diferencias y cocientes** entre términos consecutivos.
- **3.º Formula una conjetura**: «la regla es…» (con palabras y con fórmula).
- **4.º Comprueba** la regla con un término que no hayas usado para descubrirla.
- **5.º Predice** un término lejano (a_{10}, a_{50}) y verifica con otro método si puedes (calculadora, hoja de cálculo o dibujo).
- **6.º Comunica**: explica la regla con tus palabras, con la tabla y con la gráfica.

Fuente: Elaboración propia.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 4 · Patrones que permiten predecir

ALUMNADO

FICHA 1 Patrones con figuras

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Trabaja con F1 y F2. Antes de escribir la regla, cuenta de varias formas y compara con tu equipo.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

¿Qué número sigue? $2, 5, 8, 11, \ldots$

☐ 13 ☐ 14 ☐ 15

¿Qué número sigue? $3, 6, 12, 24, \ldots$

☐ 30 ☐ 36 ☐ 48

En n^2, si $n = 5$ el valor es…

☐ 10 ☐ 25 ☐ 32

2 **Completa la tabla de la pasarela de cerillas (F1).**

Figura n	Cerillas	Cómo lo has contado
1		
2		
3		
4		
5		
10		
50		

3 **Escribe con palabras la regla de la pasarela y después como expresión algebraica. Comprueba con la figura 4.**

4 Con F2: completa cuántos puntos tiene cada figura y cuántos se añaden. ¿Cuántos puntos se añaden en la figura 10? Formula una conjetura sobre la relación entre el número de puntos añadidos y n.

Figura n	Puntos totales	Puntos añadidos
1		
2		
3		
4		
5		
10		

FICHA 2 Diferencia constante

Sesión 2

Usa F3, F4 y F7. En una progresión aritmética la diferencia d entre términos consecutivos es siempre la misma.

1 Decide si cada sucesión es una progresión aritmética. Si lo es, escribe d.

Sucesión	¿Aritmética?	d
$3, 7, 11, 15, \ldots$		
$2, 4, 8, 16, \ldots$		
$20, 17, 14, 11, \ldots$		
$1, 4, 9, 16, \ldots$		

2 Hucha del club (F4): escribe el término general, calcula el ingreso de la semana 20 y la primera semana en que se ingresan 200 € o más.

3 **Gradas (F4): escribe el término general y calcula los asientos de la fila 25.**

4 **En una progresión aritmética $a_3 = 11$ y $a_7 = 23$. Halla d, a_1 y el término general.**

FICHA 3 Razón constante

Sesión 3

Usa F3, F4 y F7. En una progresión geométrica el cociente r entre términos consecutivos es siempre el mismo.

1 **Decide si cada sucesión es una progresión geométrica. Si lo es, escribe r.**

Sucesión	¿Geométrica?	r
$5, 15, 45, 135, \ldots$		
$3, 6, 9, 12, \ldots$		
$100, 50, 25, \ldots$		
$2, -4, 8, -16, \ldots$		

2 **Vídeo viral (F4): escribe el término general. ¿Cuántas personas lo ven el día 6? ¿En qué día lo ven por primera vez más de $10\,000$ personas?**

3 **Pelota (F4): escribe el término general de las alturas, calcula la altura del quinto rebote y el primer rebote que sube menos de 1 cm.**

4 **Escribe los cinco primeros términos de la progresión geométrica con $a_1 = 2$ y $r = 3$.**

FICHA 4 El término general

Sesión 4

Aplica el método del detective (F8). Escribe cada paso y comprueba la regla con un término distinto.

1 **Completa la tabla.**

Sucesión	Tipo (arit. / geom. / ninguna)	d o r	Término general	a_{10}
$7, 11, 15, 19, \ldots$				
$2, 6, 18, 54, \ldots$				
$1, 4, 9, 16, \ldots$				
$80, 40, 20, 10, \ldots$				
$10, 7, 4, 1, \ldots$				

2 **¿Es el 100 un término de $a_n = 3n + 1$? ¿Y de $a_n = 4n + 3$? Si lo es, ¿qué posición ocupa?**

3 **Explica por escrito el procedimiento paso a paso que sigue el equipo para obtener el término general de una sucesión (como si fuera una receta para otra persona).**

FICHA 5 Tabla y gráfica de dos sucesiones

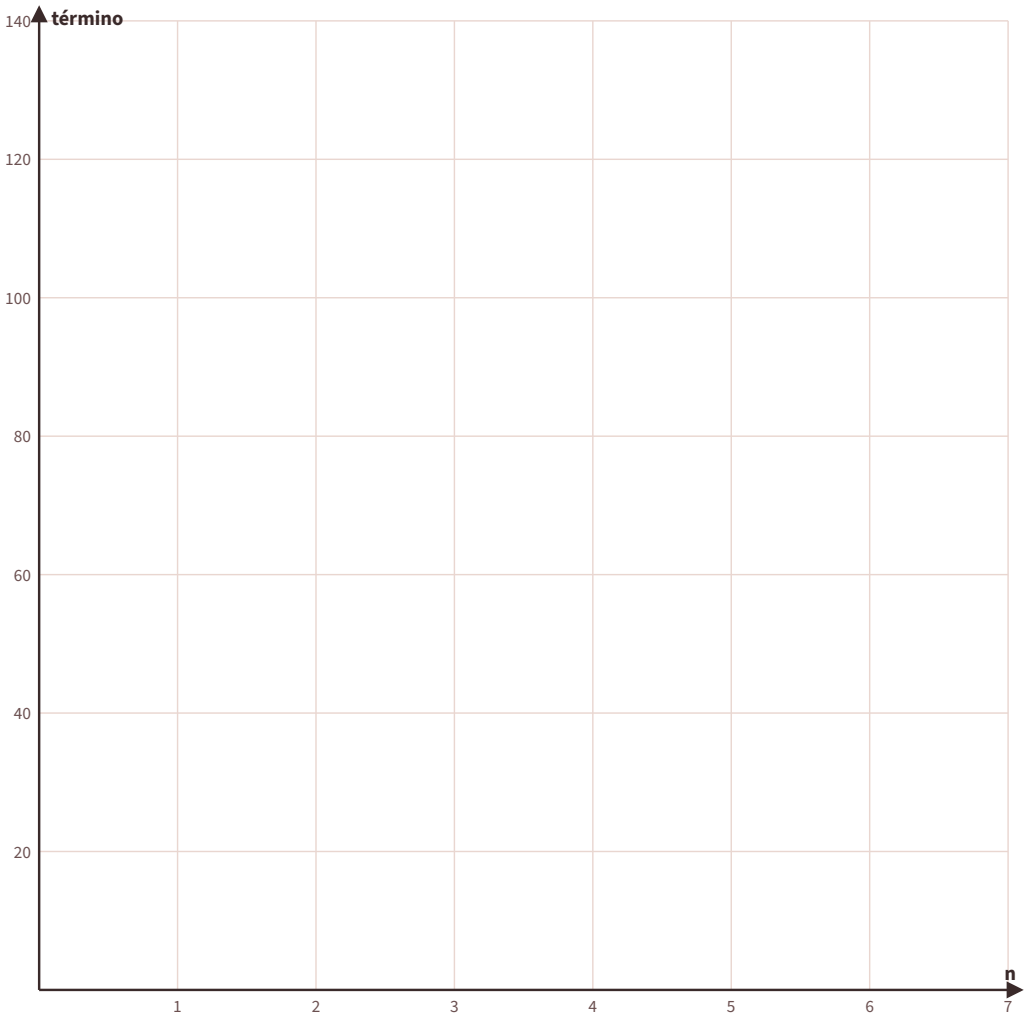
Sesión 5

Compara $a_n = 3n + 1$ (aritmética) con $b_n = 2^n$ (geométrica) usando F5.

1 **Completa la tabla de valores.**

n	1	2	3	4	5	6	7
$a_n = 3n + 1$							
$b_n = 2^n$							

2 **Representa los puntos (n, a_n) en rojo y (n, b_n) en azul.**



3 **¿Desde qué término b_n supera a a_n? Describe qué forma dibujan los puntos de cada sucesión y qué indica sobre cómo crece cada una.**

FICHA 6 Borrador del informe de sucesiones

Sesión 6

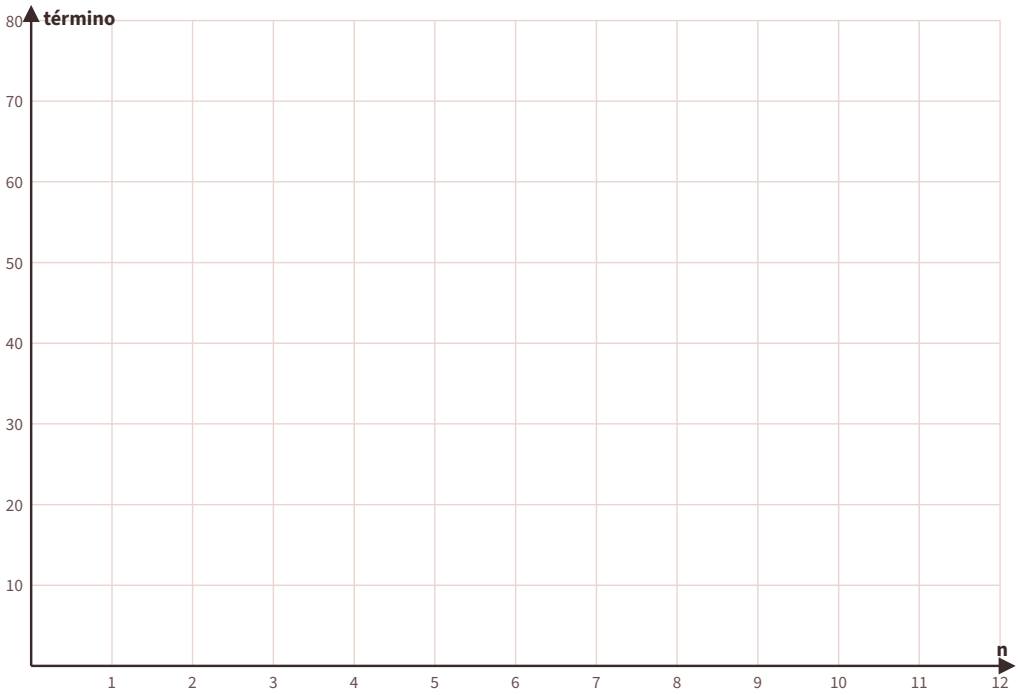
Trabajo en equipo. Roles: investigador (busca reglas), calculista, dibujante de la gráfica y portavoz. Usad tres patrones: cerillas, hucha y vídeo (F1, F4).

1 **Tabla comparativa.**

Patrón	Primeros términos	Tipo	Término general	a_{12}
Pasarela de cerillas				
Hucha del club				
Vídeo viral				

2 **Variante: cambiad un dato de la hucha (primer ingreso o aumento semanal), escribid el nuevo término general y explicad qué cambia en la tabla y en la gráfica.**

3 **Gráfica de los patrones elegidos (los doce primeros términos de la hucha y los seis primeros del vídeo, si cabe).**



4 **Revisión cruzada con otro equipo.**

- ☐ La regla funciona con un término no utilizado para descubrirla
- ☐ Las diferencias o las razones están calculadas y comprobadas
- ☐ La gráfica está rotulada y los puntos están en su lugar
- ☐ La variante está bien resuelta y explicada

FICHA 7 Conjetura y transferencia individual

Sesión 7

Prueba individual: resuelve sin ayuda del equipo. Se puede usar calculadora.

1 **En un salón la fila 1 tiene 7 sillas, la 2 tiene 11 y la 3 tiene 15. ¿Qué tipo de sucesión es? Escribe el término general, calcula las sillas de la fila 20 y decide si puede haber una fila con 99 sillas.**

2 Un cultivo tiene 3 bacterias y se duplica cada hora. Escribe el término general y calcula cuántas hay en la hora 8.

3 Conjetura: calcula $1; 1+3; 1+3+5; 1+3+5+7; 1+3+5+7+9$. ¿Qué observas? Formula la conjetura, compruébala con los seis primeros impares y explica con la figura F2 por qué es razonable.

4 Inventa una variante de la sucesión de las sillas cambiando un dato y escribe su nuevo término general.

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 4 · Patrones que permiten predecir

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Informe de sucesiones y progresiones para el concurso de mosaicos del barrio. Cada regla debe estar comprobada.

Título y equipo

Nombre del informe, integrantes y roles.

Tres patrones

Dibujo o descripción, primeros términos y tipo de cada patrón.

Términos generales

Regla con palabras y fórmula; comprobación con un término.

Predicciones

Un término lejano (a_{12}, a_{50}) de cada patrón.

Gráfica comparativa

Ejes rotulados y escala. Puntos de dos patrones.

Conjetura y comprobación

Enunciado, casos probados y explicación.

Variante

Qué dato cambiáis y qué efecto tiene.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 4 · Patrones que permiten predecir

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Informe de sucesiones y progresiones**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] Los tres patrones están descritos con sus primeros términos.
- [ ] Se indica el tipo de cada sucesión y la diferencia o la razón con su cálculo.
- [ ] El término general de cada patrón es correcto y se ha comprobado con un término.
- [ ] Hay una predicción de un término lejano por patrón.
- [ ] La gráfica de puntos tiene ejes rotulados, escala uniforme y puntos bien situados.
- [ ] Se compara el crecimiento aritmético con el geométrico con un argumento.
- [ ] Hay una conjetura enunciada y comprobada con al menos dos casos.
- [ ] La variante cambia un dato y se explica el efecto.
- [ ] El informe describe el procedimiento paso a paso (método del detective).

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 4 · Patrones que permiten predecir

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Informe de sucesiones y progresiones**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 4 · Patrones que permiten predecir

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé decidir si una sucesión es aritmética o geométrica y escribir su término general.	○	○	○	○
Sé comprobar una regla con un término distinto de los que he usado para encontrarla.	○	○	○	○
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	○	○	○	○
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	○	○	○	○
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	○	○	○	○
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	○	○	○	○

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 4 · Patrones que permiten predecir

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Sucesiones con reglas explícitas y tablas empezadas. Rellena primero la tabla y después contesta.

Ejemplo modelado

Regla $a_n = 4n - 1$. $a_1 = 4 \cdot 1 - 1 = 3$; $a_2 = 4 \cdot 2 - 1 = 7$; $a_3 = 11$; $a_{10} = 4 \cdot 10 - 1 = 39$. Los términos suben de 4 en 4: $d = 4$.

Glosario y símbolos

Sucesión: lista ordenada de números. **Término** a_n: el que ocupa el lugar n. **Diferencia** d: lo que se suma. **Razón** r: por lo que se multiplica. **Término general**: fórmula que da a_n para cualquier n.

1 **Completa la tabla con la regla indicada.**

n	$a_n = n + 4$	$b_n = 10 - 2n$	$c_n = 2^n$
1	5	8	2
2			
3			
4			
10			

2 **Completa y di si suma o multiplica:** $5, 8, 11, \_\_, \_\_$ y $2, 4, 8, \_\_, \_\_$.

3 **Con la regla** $a_n = 3n + 2$**, calcula** a_1, a_2, a_3 **y** a_{10}.

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 4 · Patrones que permiten predecir

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Dos sucesiones que se cruzan

La progresión aritmética $A_n = 6n$ y la geométrica $B_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ parecen crecer a ritmos distintos. ¿Se cortan? ¿Quién gana a la larga? Vais a investigar y a justificar vuestra respuesta.

Pasos

1. Calcula los siete primeros términos de A_n y de B_n y encuentra el término en que coinciden.
2. Describe quién es mayor antes y quién es mayor después del término común.
3. Justifica por qué B_n seguirá siendo mayor que A_n para todos los términos posteriores (pista: de un término al siguiente B_n se duplica y A_n solo aumenta 6).
4. Inventa tú dos sucesiones, una aritmética y otra geométrica, que coincidan exactamente en el tercer término. Demuestra que solo coinciden ahí.

1 **Tabla de comparación.**

n	1	2	3	4	5	6	7
$A_n = 6n$							
$B_n = 3 \cdot 2^{n-1}$							

Entrega

La tabla, el término en que coinciden, el argumento de por qué la geométrica gana a la larga y tu pareja de sucesiones con su demostración.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 4 · Patrones que permiten predecir

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: 14; 48; 25.
2. Cerillas: $4, 7, 10, 13, 16$; $n = 10$: 31; $n = 50$: 151. Formas de contar: $3n + 1$ (cada cuadrado nuevo añade 3 cerillas y la primera cerilla vertical) o $4 + 3(n - 1)$.
3. Regla: «cada figura tiene 3 cerillas más que la anterior; la primera tiene 4». $a_n = 3n + 1$. Con $n = 4$: 13 ✔ (coincide con el dibujo).
4. Puntos: $1, 4, 9, 16, 25$ y 100 en la figura 10. Añadidos: $-, 3, 5, 7, 9$ y en la figura 10 se añaden 19. Conjetura: en la figura n se añaden $2n - 1$ puntos y el total es n^2.

Ficha 2

1. $3, 7, 11, 15$: sí, $d = 4$. $2, 4, 8, 16$: no (es geométrica, $r = 2$). $20, 17, 14, 11$: sí, $d = -3$. $1, 4, 9, 16$: no (diferencias $3, 5, 7$).
2. Hucha: $a_n = 15 + 5(n - 1) = 5n + 10$; $a_{20} = 110$ €; $5n + 10 \geq 200 \to n \geq 38$: semana 38 ($5 \cdot 38 + 10 = 200$ exacto).
3. Gradas: $a_n = 12 + 2(n - 1) = 2n + 10$; $a_{25} = 60$ asientos.
4. $d = (23 - 11) : (7 - 3) = 3$; $a_1 = 11 - 2 \cdot 3 = 5$; $a_n = 5 + 3(n - 1) = 3n + 2$. Comprobación: $a_3 = 11$, $a_7 = 23$ ✔.

Ficha 3

1. $5, 15, 45, 135$: sí, $r = 3$. $3, 6, 9, 12$: no (aritmética, $d = 3$). $100, 50, 25$: sí, $r = \frac{1}{2}$. $2, -4, 8, -16$: sí, $r = -2$.
2. Vídeo: $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$; día 6: $5 \cdot 3^5 = 1\,215$ personas. $5 \cdot 3^{n-1} > 10\,000$: día $7 \to 3\,645$; día $8 \to 10\,935$. Primer día: el 8.
3. Rebotes: $a_n = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; quinto: $100 : 16 = 6{,}25$ cm. $100 : 2^{n-1} < 1 \to 2^{n-1} > 100 \to n - 1 = 7$ ($2^7 = 128$): rebote 8 ($0{,}78$ cm).
4. $2, 6, 18, 54, 162$.

Ficha 4

1. $7, 11, 15, 19$: aritmética, $d = 4$, $a_n = 4n + 3$, $a_{10} = 43$. $2, 6, 18, 54$: geométrica, $r = 3$, $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, $a_{10} = 39\,366$. $1, 4, 9, 16$: ninguna; $a_n = n^2$; $a_{10} = 100$. $80, 40, 20, 10$: geométrica, $r = \frac{1}{2}$, $a_n = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_{10} = 0{,}15625$. $10, 7, 4, 1$: aritmética, $d = -3$, $a_n = 13 - 3n$, $a_{10} = -17$.
2. $3n + 1 = 100 \to n = 33$: sí, es el término 33. $4n + 3 = 100 \to n = 24{,}25$: no es entero, luego el 100 no es término.
3. Respuesta abierta. Debe incluir: escribir los términos, calcular diferencias o cocientes, decidir el tipo, escribir la regla, comprobarla con otro término y predecir.

Ficha 5

1. a_n: $4, 7, 10, 13, 16, 19, 22$. b_n: $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$.
2. Puntos rojos alineados (suben 3 cada vez); puntos azules sobre una curva que se separa cada vez más del eje.
3. b_n supera a a_n desde $n = 4$ ($16 > 13$); en $n = 3$ aún es menor ($8 < 10$). La aritmética crece a ritmo constante (lineal); la geométrica a ritmo cada vez mayor (se duplica en cada paso).

Ficha 6

1. Cerillas: $4, 7, 10, 13$; aritmética; $3n + 1$; $a_{12} = 37$. Hucha: $15, 20, 25, 30$; aritmética; $5n + 10$; $a_{12} = 70$. Vídeo: $5, 15, 45, 135$; geométrica; $5 \cdot 3^{n-1}$; $a_{12} = 5 \cdot 3^{11} = 885\,735$.
2. Ejemplo de variante: primer ingreso 20 € y 4 € más por semana: $a_n = 20 + 4(n - 1) = 4n + 16$; los puntos siguen alineados pero con menos inclinación (aumento 4 en lugar de 5).
3. Gráfica: hucha $(1, 20), (2, 25), \ldots, (12, 70)$ con puntos alineados; el vídeo $(1, 5), (2, 15), (3, 45)$, y $(4, 135)$ ya queda fuera de la escala, lo que muestra su crecimiento rápido.
4. La revisión debe confirmar a_{12} con una segunda vía (calculadora o tabla).

Ficha 7

1. Aritmética, $d = 4$; $a_n = 7 + 4(n - 1) = 4n + 3$; $a_{20} = 83$. $4n + 3 = 99 \to n = 24$: sí hay una fila con 99 sillas (la 24).
2. $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$; $a_8 = 3 \cdot 2^7 = 384$ bacterias.
3. Sumas: $1, 4, 9, 16, 25$ = cuadrados perfectos. Conjetura: la suma de los n primeros impares es n^2. Con seis impares: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$ ✔. Con la figura F2: cada figura se obtiene de la anterior añadiendo una «L» de $2n - 1$ puntos, luego la suma acumulada es n^2.
4. Respuesta abierta: p. ej., fila 1 con 5 sillas y 6 más por fila: $a_n = 6n - 1$.

Refuerzo

1. $a_n = n + 4$: $5, 6, 7, 8, 14$. $b_n = 10 - 2n$: $8, 6, 4, 2, -10$. $c_n = 2^n$: $2, 4, 8, 16, 1\,024$.
2. $5, 8, 11, 14, 17$ (suma 3). $2, 4, 8, 16, 32$ (multiplica por 2).
3. $a_1 = 5$; $a_2 = 8$; $a_3 = 11$; $a_{10} = 32$.

Ampliación

1. A_n: $6, 12, 18, 24, 30, 36, 42$. B_n: $3, 6, 12, 24, 48, 96, 192$. Coinciden en $n = 4$ (24).
2. Para $n < 4$: $A_n > B_n$; para $n > 4$: $B_n > A_n$.
3. Argumento: en $n = 4$ son iguales (24). Si en un término $B_n \geq A_n$, entonces $B_{n+1} = 2B_n \geq 2A_n = A_n + A_n \geq A_n + 6 = A_{n+1}$ porque $A_n \geq 6$. Para $n = 5$, $B_5 = 48 > 30 = A_5$ y así sucesivamente.
4. Ejemplo: $a_n = 5n - 3$ ($2, 7, 12, 17, 22, \ldots$) y $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ($3, 6, 12, 24, 48, \ldots$): coinciden en $n = 3$ (12). En $n = 1, 2$ y $n \geq 4$ son distintos ($2 \neq 3$; $7 \neq 6$; $17 < 24$ y la geométrica seguirá por encima). Se acepta otra pareja correcta.

⚠ Errores frecuentes

- Confundir diferencia y razón: afirmar que $3, 6, 12, 24$ es aritmética con $d = 3$.
- Escribir el término general con n en lugar de $n - 1$: $a_n = a_1 + n \cdot d$.
- Dar la regla como «suma 3» sin expresarla en función de n, lo que impide calcular a_{50}.
- Comprobar la regla solo con los términos que se usaron para encontrarla.
- En $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, multiplicar $a_1 \cdot r$ y después elevar todo a $n - 1$.
- Concluir que un patrón con tres términos ya está demostrado: es solo una conjetura hasta comprobar más casos.

⚖ Criterios para valorar respuestas abiertas

- Se aceptan términos generales equivalentes ($a_n = 5 + 3(n - 1)$ y $a_n = 3n + 2$).
- En las respuestas abiertas se valora que la regla se comprueba con un término distinto y que se distingue conjetura de demostración.
- En la gráfica de puntos no se unen los puntos con una línea continua (la sucesión solo está definida para n natural); se acepta unirlos como ayuda visual si se indica.

05

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Álgebra para modelizar

PREGUNTA GUÍA

¿Cómo puede un polinomio representar una figura, un coste o una regularidad?

CURSO 3.º ESO	**SESIONES** 8 sesiones · 2.º trimestre	**SENTIDOS PRIORITARIOS** D · Sentido algebraico
COMPETENCIAS ESPECÍFICAS CE1, CE2, CE3, CE5, CE8	**PRODUCTO FINAL** Catálogo de modelos polinómicos	**CRITERIOS DE EVALUACIÓN** 1.1, 1.2, 2.1, 3.1, 5.2, 8.1

Contexto, reto y sentido

El taller de tecnología del instituto fabrica marcos para los murales de la Semana de la Ciencia, vallas para el huerto escolar y camisetas del club. Cada pedido llega con una medida distinta: marcos de 20 cm de ancho, de 35 cm, de 50 cm… Calcular la superficie o el coste una vez para cada medida es un trabajo interminable. El profesor de tecnología pide al alumnado de Matemáticas un catálogo de modelos: una expresión que, escrita una sola vez con una letra, valga para cualquier medida.

La situación moviliza el sentido algebraico en 3.º ESO: pasar de figuras y situaciones de coste a polinomios, operar con ellos (suma, resta, producto), reconocer las identidades notables a través de áreas, factorizar casos básicos y comprobar que dos expresiones son equivalentes. Una expresión algebraica no se da por buena porque «salga bien con un número»: hace falta comprobarla de otra manera.

Reto

Elaborar un catálogo de cuatro modelos polinómicos para el taller (marco, valla, camisetas y mosaico), con su figura, su expresión desarrollada y factorizada, su valor para una medida concreta y su comprobación.

Producto final

Catálogo de modelos polinómicos.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE5** Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- **1.1** Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.
- **1.2** Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.
- **2.1** Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.
- **3.1** Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.
- **5.2** Realizar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.
- **8.1** Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, oralmente y por escrito, al explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.

Saberes básicos prioritarios

D
Sentido algebraico

- Expresiones algebraicas y polinomios: monomio, coeficiente, grado, término independiente y valor numérico.
- Operaciones con polinomios: suma, resta y producto (propiedad distributiva), con apoyo en modelos de área.
- Identidades notables sencillas: cuadrado de una suma, cuadrado de una diferencia y suma por diferencia, interpretadas con áreas.
- Factorización básica: factor común, identidades notables y comprobación por producto.
- Modelización de situaciones de superficie y coste mediante polinomios de grado 1 y 2; equivalencia de expresiones.

F
Sentido socioafectivo

- Aceptar el error como información: revisar una expresión sustituyendo valores y buscando contraejemplos.
- Trabajo en equipo con revisión cruzada de las expresiones del catálogo.

Objetivos didácticos

- ✓ Operar con polinomios.
- ✓ Interpretar expresiones polinómicas en contextos.
- ✓ Reconocer y usar identidades notables sencillas como herramientas.
- ✓ Factorizar casos básicos y comprobar equivalencias.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

De figuras a expresiones

Evidencia: Ficha 1: expresiones algebraicas de áreas y perímetros de figuras, vocabulario de polinomios y valores numéricos.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Operaciones con polinomios

Evidencia: Ficha 2: suma y resta de polinomios con comprobación numérica, y perímetro de un triángulo con lados algebraicos.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Producto y distributiva

Evidencia: Ficha 3: productos con propiedad distributiva, modelo de área y detección de un error frecuente.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Identidades notables mediante áreas

Evidencia: Ficha 4: desarrollo de las identidades notables con áreas, cálculo mental con ellas y contraejemplo de una falsa identidad.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Factor común y factorización sencilla

Evidencia: Ficha 5: extracción de factor común y factorización de identidades notables con comprobación por producto.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Modelos de coste/superficie

Evidencia: Ficha 6: modelos de superficie y coste (marco, camisetas y valla) con valores numéricos y punto de equilibrio.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Catálogo de modelos

Evidencia: Ficha 7: borrador del catálogo de cuatro modelos con desarrollo, factorización, valor y comprobación.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

8

SESIÓN 8

Reto individual de equivalencia

Evidencia: Ficha 8: evidencia individual de equivalencia: operar, factorizar, justificar y modelar.

Ficha: Anexo 3 · ficha 8

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Tarjetas algebraicas · modelos de área · calculadora CAS solo para comprobación opcional

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Polinomios de grado 1-2 y código de colores.

Ampliación

Anexo 9

Crear dos modelos equivalentes en forma desarrollada y factorizada y explicar ventajas.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Identificación de la variable y de las medidas en cada figura y situación de coste, y traducción a una expresión algebraica.	Fichas 1 y 6 / lista de cotejo
1.2	Aplicación de la distributiva, de las identidades notables y del factor común para operar y factorizar polinomios.	Fichas 2, 3, 4 y 5 / escala de valoración
2.1	Comprobación de las expresiones sustituyendo valores, desarrollando un producto o factorizando una expresión ya desarrollada.	Fichas 3, 5 y 7 / rúbrica
3.1	Formulación de conjeturas sobre la equivalencia de dos expresiones y búsqueda de contraejemplos con valores numéricos.	Fichas 4 y 8 / rúbrica
5.2	Conexión entre el modelo de área, la expresión desarrollada, la factorizada y el valor numérico de un mismo polinomio.	Fichas 4 y 6 y catálogo (Anexo 4) / rúbrica
8.1	Explicación escrita y justificación de cada modelo del catálogo con lenguaje algebraico correcto.	Catálogo (Anexo 4) y Ficha 8 / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Catálogo, operaciones, modelos y comprobaciones.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 **Avanzado**	NIVEL 3 **Adecuado**	NIVEL 2 **En proceso**	NIVEL 1 **Inicial**
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 5 · Álgebra para modelizar

ALUMNADO

El taller de tecnología recibe tres pedidos a la vez: un marco para una foto de 10 cm de ancho, otro para una de 24 cm y otro para una de 38 cm. El técnico tarda un cuarto de hora en calcular cada superficie. Alguien dice: «Si llamamos x al ancho de la foto, una sola expresión sirve para todos». Vais a comprobar si es verdad y a construir el catálogo de modelos del taller: marcos, vallas, camisetas y mosaicos. Cada expresión que escribáis debe superar una comprobación: no basta con que «salga» para un número.

«¿Cómo puede un polinomio representar una figura, un coste o una regularidad?»

Vuestro reto

Elaborar un catálogo de cuatro modelos polinómicos para el taller (marco, valla, camisetas y mosaico), con su figura, su expresión desarrollada y factorizada, su valor para una medida concreta y su comprobación.

Lo que vais a producir

Catálogo de modelos polinómicos.

Hoja de ruta · 8 sesiones

1. Convertimos figuras en expresiones con una letra y aprendemos el vocabulario de los polinomios.
2. Sumamos y restamos polinomios y comprobamos con valores numéricos.
3. Multiplicamos polinomios con la propiedad distributiva y con modelos de área.
4. Descubrimos las identidades notables con áreas.
5. Sacamos factor común y factorizamos casos básicos.
6. Modelizamos superficies y costes: marco, camisetas y valla.
7. Montamos el catálogo de modelos del equipo.
8. Resolvemos de forma individual un reto de equivalencia.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Operar con polinomios.
- ✓ Interpretar expresiones polinómicas en contextos.
- ✓ Reconocer y usar identidades notables sencillas como herramientas.
- ✓ Factorizar casos básicos y comprobar equivalencias.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

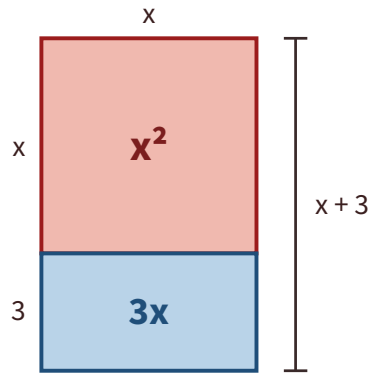
SdA 5 · Álgebra para modelizar

ALUMNADO

Rectángulo y cuadrado como modelos de área, vocabulario de polinomios, identidades notables, ejemplos resueltos de operaciones y factorización, marco de una foto, datos de costes del taller y errores frecuentes. Todos los datos del taller son ficticios (creados para el aula).

F1 Un rectángulo de lados x y $x + 3$

ESQUEMA



Área = x · (x + 3) = x² + 3x

Perímetro = 2x + 2(x + 3) = 4x + 6

Para x = 5 cm: área 40 cm², perímetro 26 cm

Fuente: Esquema de elaboración propia. x es una medida cualquiera en centímetros.

El mismo rectángulo se puede ver como producto $x(x + 3)$ o como suma $x^2 + 3x$.

F2 Vocabulario de los polinomios

DATOS

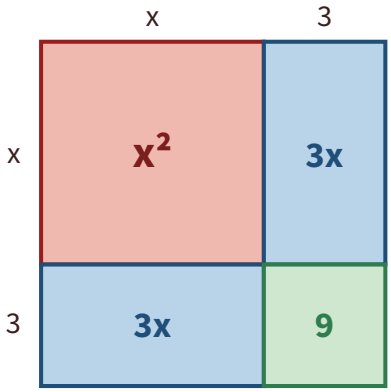
Término	Qué es	En $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$
Monomio	Producto de un número (coeficiente) por una potencia de x	$3x^2$, $-5x$ y 2
Coeficiente	El número que multiplica a la letra	3 y -5
Grado	Mayor exponente de x	2 (polinomio de segundo grado)
Término independiente	El término sin letra	2
Valor numérico	Resultado de sustituir x por un número	$P(2) = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 2 = 4$
Términos semejantes	Mismas letras y mismos exponentes: se pueden sumar	$3x$ y $-5x$ son semejantes; $3x^2$ y $3x$ no

Fuente: Elaboración propia.

Cuidado con el signo: $P(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 2 = 3 + 5 + 2 = 10$.

F3 $(x+3)^2$ con áreas

ESQUEMA



$(x+3)^2 = x^2 + 3x + 3x + 9$

$= x^2 + 6x + 9$

Rojo: x^2 · Azul: x · Verde: números

El «doble producto» 6x son los dos rectángulos azules.

Fuente: Esquema de elaboración propia. Código de colores: rojo para x^2, azul para x, verde para números.

Aquí $a = x$ y $b = 3$: el cuadrado grande se descompone en a^2, dos rectángulos ab y b^2.

F4 Identidades notables

DATOS

Nombre	Identidad	Con área / ejemplo
Cuadrado de una suma	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ (F3)
Cuadrado de una diferencia	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$
Suma por diferencia	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$(x+5)(x-5) = x^2 - 25$

Cálculo mental con identidades: $101^2 = (100+1)^2 = 10\,000 + 200 + 1 = 10\,201; 51 \cdot 49 = (50+1)(50-1) = 2\,500 - 1 = 2\,499$.

Fuente: Elaboración propia.

$(a+b)^2$ **no** es $a^2 + b^2$: falta el doble producto $2ab$.

F5 Operaciones con polinomios: ejemplos resueltos

TEXTO

Suma y resta. Con $P = 3x^2 + 2x - 1$ y $Q = x^2 - 5x + 4$:

- $P + Q = (3+1)x^2 + (2-5)x + (-1+4) = 4x^2 - 3x + 3$.
- $P - Q = (3-1)x^2 + (2+5)x + (-1-4) = 2x^2 + 7x - 5$ (al restar, cambian todos los signos de Q).
- Comprobación con $x = 1$: $P(1) = 4$ y $Q(1) = 0$; $P + Q = 4$ ✔ y $P - Q = 4$ ✔.

Producto. Se multiplica cada término del primero por cada término del segundo y se reducen los semejantes:

- $3x(x - 2) = 3x^2 - 6x$.
- $(2x - 1)(x + 4) = 2x^2 + 8x - x - 4 = 2x^2 + 7x - 4$.

Fuente: Elaboración propia.

Comprobar con un valor no garantiza que la expresión sea correcta, pero un valor que falle demuestra que hay un error.

F6 Factorizar paso a paso

TEXTO

Factor común. Se busca el mayor número y la mayor potencia de x que divide a todos los términos.

- $6x^2 + 9x = 3x \cdot 2x + 3x \cdot 3 = 3x(2x + 3)$.
- $4x^3 - 8x^2 = 4x^2(x - 2)$.

Identidades notables al revés.

- $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x - 4)(x + 4)$.
- $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$, porque $2 \cdot x \cdot 5 = 10x$ y $5^2 = 25$.

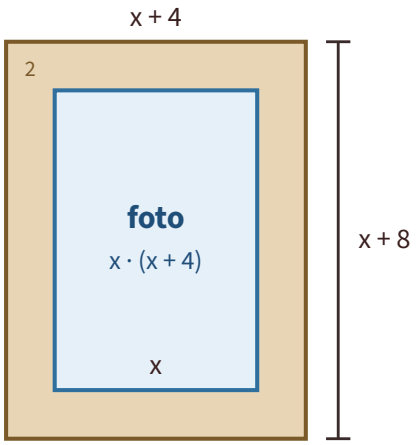
Comprobación: al multiplicar los factores debe aparecer de nuevo la expresión de partida: $3x(2x + 3) = 6x^2 + 9x$ ✔.

Fuente: Elaboración propia.

Factorizar es el camino inverso de multiplicar.

F7 Marco de una foto

ESQUEMA



Marco de 2 cm alrededor de una foto de x por (x + 4) cm

Medidas exteriores: (x + 4) por (x + 8)

Área del marco = área exterior − área de la foto

Fuente: Esquema de elaboración propia a escala (1 unidad = 12 unidades del dibujo; $x = 100$).

La anchura exterior es $x + 2 + 2 = x + 4$ y la altura exterior es $(x + 4) + 2 + 2 = x + 8$.

F8 Datos de los modelos del taller

DATOS

Modelo	Datos	Qué se pide
Marco (F7)	Foto de x por $(x + 4)$ cm con marco de 2 cm de ancho.	Área del marco en función de x.
Camisetas del club	Coste fijo (diseño y plancha) 200 €; cada camiseta cuesta fabricarla 4 €; se vende a 9 € la unidad.	Beneficio $B(x)$ al vender x camisetas y número a partir del cual hay beneficio.
Valla del huerto	Se dispone de 40 m de valla para un huerto rectangular de lados x e y.	Área del huerto en función de x y su mayor valor.
Mosaico	Cuadrado de lado $x + 6$ al que se le quita un cuadrado de 6×6 en una esquina.	Área del mosaico y su factorización.

Fuente: Datos ficticios creados para el aula.

Todos los modelos se escriben primero con la letra y después se sustituye por valores concretos.

F9 Errores frecuentes en álgebra

DATOS

Error	Por qué falla	Forma correcta
$(x+3)^2 = x^2 + 9$	Falta el doble producto	$x^2 + 6x + 9$
$3x \cdot x = 3x$	Los exponentes se suman	$3x^2$
$-(x-2) = -x - 2$	El signo menos cambia ambos términos	$-x + 2$
$2x + 3x = 5x^2$	Al sumar semejantes no cambia el exponente	$5x$
$(x+2)(x+3) = x^2 + 6$	Faltan los productos cruzados	$x^2 + 5x + 6$

Fuente: Elaboración propia.

Sustituye un valor (por ejemplo $x = 1$ o $x = 2$) en los dos lados: si no coinciden, hay error.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 5 · Álgebra para modelizar

ALUMNADO

FICHA 1 De figuras a expresiones

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Trabaja con F1, F2 y F8. Elige siempre qué representa la letra x antes de escribir.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

El valor de $3x + 2$ para $x = 4$ es…

☐ 14 ☐ 20 ☐ 9

$2x + 3x$ es igual a…

☐ 5x ☐ 6x ☐ $5x^2$

El área de un rectángulo de lados a y b es…

☐ a + b ☐ a · b ☐ 2a + 2b

2 **Con el rectángulo de F1 (x y $x + 3$): escribe el área y el perímetro como polinomios y calcula su valor para $x = 5$ y $x = 10$.**

	Expresión	$x = 5$	$x = 10$
Área			
Perímetro			

3 **Para $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$ indica el grado, los coeficientes y el término independiente, y calcula $P(2)$ y $P(-1)$.**

4 **Un técnico cobra 12 € por desplazarse y 3 € por cada metro de cable instalado. Escribe el coste en función de los metros x y calcula el coste de 8 m. ¿Es un polinomio? ¿De qué grado?**

FICHA 2 Suma y resta de polinomios

Sesión 2

Usa F2 y F5. Agrupa términos semejantes y cuida los signos en la resta.

1 Dados $P = 3x^2 + 2x - 1$ y $Q = x^2 - 5x + 4$, calcula.

Operación	Pasos	Resultado
$P + Q$		
$P - Q$		
$2P$		
$P + Q$ para $x = 1$ (comprobación)		

2 Los lados de un triángulo miden $x + 2$, $2x - 1$ y $3x + 4$ (cm). Escribe el perímetro como polinomio y calcúlalo para $x = 3$.

3 Corrige el error: «$(4x^2 + 3x) - (x^2 - 2x) = 3x^2 + x$». Escribe el resultado correcto y explica el fallo.

FICHA 3 Producto de polinomios

Sesión 3

Usa F1 y F5. El producto se puede ver como el área de un rectángulo dividido en partes.

1 Calcula y reduce.

Producto	Desarrollo	Resultado
$3x(x - 2)$		
$(x + 3)(x + 2)$		
$(2x - 1)(x + 4)$		
$(x^2 + 1)(x - 3)$		

2 Dibuja un rectángulo de lados $x+3$ y $x+2$ dividido en cuatro partes y escribe el área de cada una. Comprueba que su suma coincide con $(x+3)(x+2)$.

3 Marta escribe $(x+3)(x+2)=x^2+6$. Comprueba con $x=1$ si es correcto y explica qué falta.

FICHA 4 Identidades notables con áreas

Sesión 4

Usa F3 y F4. Dibuja el modelo de área antes de memorizar la identidad.

1 Desarrolla con la identidad adecuada.

Expresión	Identidad	Resultado
$(x+5)^2$		
$(x-4)^2$		
$(x+6)(x-6)$		
$(2x+3)^2$		

2 Calcula mentalmente usando identidades y escribe cómo lo has hecho: 99^2; 101^2; $51\cdot 49$.

3 Dibuja el modelo de área de $(x+2)^2$ y rotula las cuatro partes.

4 Un compañero dice que $(x+3)^2 = x^2 + 9$. Pruébalo con $x = 1$ y con $x = 0$. ¿Qué conclusión sacas? ¿Basta un solo valor para demostrar que dos expresiones son iguales? ¿Y para demostrar que no lo son?

FICHA 5 Factor común y factorización

Sesión 5

Usa F6. Comprueba cada factorización multiplicando de nuevo.

1 Extrae factor común.

Expresión	Factor común	Factorizada	Comprobación
$6x^2 + 9x$			
$4x^3 - 8x^2$			
$10x + 15$			

2 Factoriza con identidades notables y comprueba.

Expresión	Identidad que reconoces	Factorizada
$x^2 - 16$		
$x^2 + 10x + 25$		
$9x^2 - 1$		
$x^2 - 6x + 9$		

3 Explica cómo reconocer si $x^2 + 8x + 16$ es el cuadrado de una suma y factorízalo.

FICHA 6 Modelos de superficie y coste

Sesión 6

Usa F7 y F8. Escribe cada modelo con la letra y después sustituye valores.

1 Marco (F7). Escribe el área del marco como diferencia de áreas, desarrolla y simplifica. Calcula el área para $x = 10$ cm y comprueba contando con las medidas reales (exterior 14×18, foto 10×14).

2 Camisetas (F8). Escribe el coste $C(x)$, el ingreso $I(x)$ y el beneficio $B(x) = I(x) - C(x)$. Calcula $B(100)$ y el número mínimo de camisetas para tener beneficio.

3 Valla (F8). Con 40 m de valla, si un lado mide x, el otro mide $20 - x$. Escribe el área $A(x)$ y completa la tabla. ¿Para qué valor de x es máxima el área? ¿Qué figura es?

x (m)	5	10	12	15
$A(x)$ (m²)				

FICHA 7 Borrador del catálogo de modelos

Sesión 7

Trabajo en equipo. Roles: modelizador, calculista, comprobador y portavoz. Cada modelo debe tener desarrollo, factorización y comprobación.

1 **Completa la ficha de cada modelo del catálogo.**

Modelo	Expresión desarrollada	Forma factorizada	Valor para la medida elegida	Comprobación
Marco (x, $x+4$, borde 2)				
Valla de 40 m				
Camisetas del club				
Mosaico de lado $x+6$				

2 **Elegid un modelo y explicad con un dibujo y con palabras por qué su expresión es correcta.**

3 **Revisión cruzada con otro equipo.**

- ☐ Cada expresión se ha comprobado sustituyendo un valor
- ☐ La forma desarrollada y la factorizada son equivalentes
- ☐ Los signos de las restas están bien
- ☐ Las unidades (cm, cm², m², €) aparecen en los valores

FICHA 8 Reto individual de equivalencia

Sesión 8

Prueba individual: resuelve sin ayuda del equipo. Se puede usar calculadora para comprobar.

1 **Calcula y reduce: a)** $(5x^2 - 3x + 2) - (2x^2 + x - 6)$**; b)** $(x + 4)(x - 2)$**; c)** $(3x - 2)^2$.

2 **Factoriza y comprueba: a)** $8x^2 - 12x$**; b)** $x^2 - 49$**; c)** $x^2 + 12x + 36$.

3 **¿Son equivalentes** $3(x + 2)^2 - 3$ **y** $3x^2 + 12x + 9$**? Demuéstralo desarrollando. ¿Y** $(x - 1)^2$ **y** $x^2 - 1$**? Busca un valor que lo desmienta.**

4 **Se recorta un cuadrado de** 6×6 **cm en una esquina de un cuadrado de lado** $x + 6$**. Escribe el área restante, desarróllala y factorízala. Calcula el área para** $x = 4$.

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 5 · Álgebra para modelizar

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Catálogo de modelos polinómicos del taller de tecnología. Cada modelo lleva figura, expresión, factorización, valor y comprobación.

Título y equipo

Nombre del catálogo, integrantes y roles.

Modelo 1: marco

Figura, expresión desarrollada y factorizada, valor para $x = 10$.

Modelo 2: valla

Figura, área $A(x)$, tabla breve y valor máximo.

Modelo 3: camisetas

$C(x)$, $I(x)$, $B(x)$ *y punto de equilibrio.*

Modelo 4: mosaico

Figura, área desarrollada y factorizada, valor.

Comprobaciones

Para cada modelo, un valor sustituido y la expresión desarrollada de la factorizada.

Conclusión

Para qué sirve un polinomio como modelo; límites del modelo.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 5 · Álgebra para modelizar

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Catálogo de modelos polinómicos**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- ☐ Cada modelo indica qué representa la letra x y en qué unidades.
- ☐ La expresión desarrollada de cada modelo es correcta.
- ☐ Se ha escrito la forma factorizada de al menos tres modelos.
- ☐ Se ha comprobado cada expresión sustituyendo un valor y por otro camino (desarrollar o factorizar).
- ☐ Las identidades notables usadas aparecen identificadas y bien aplicadas.
- ☐ Las figuras están dibujadas con medidas rotuladas.
- ☐ Los valores numéricos llevan unidades.
- ☐ Cada modelo incluye una explicación escrita con lenguaje algebraico correcto.
- ☐ Se ha buscado al menos un contraejemplo para una igualdad falsa.

Calidad y rigor

- ☐ He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- ☐ He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- ☐ He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- ☐ He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- ☐ He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 5 · Álgebra para modelizar

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Catálogo de modelos polinómicos**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 5 · Álgebra para modelizar

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé desarrollar productos e identidades notables sin olvidar los términos cruzados.	○	○	○	○
Sé comprobar que dos expresiones son equivalentes y buscar un valor que muestre que no lo son.	○	○	○	○
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	○	○	○	○
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	○	○	○	○
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	○	○	○	○
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	○	○	○	○

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 5 · Álgebra para modelizar

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Polinomios de grado 1 y 2 con código de colores: rojo para x^2, azul para x y verde para los números. Sigue el ejemplo modelado.

Ejemplo modelado con colores

$(x+2)(x+1)$: un rectángulo de lados $x+2$ y $x+1$ se divide en 1 cuadrado rojo (x^2), 3 rectángulos azules ($x+x+x$) y 2 cuadrados verdes ($1+1$). Por tanto $(x+2)(x+1) = x^2+3x+2$. Comprobación con $x=1$: $3\cdot 2 = 6$ y $1+3+2 = 6$ ✔.

Glosario y símbolos

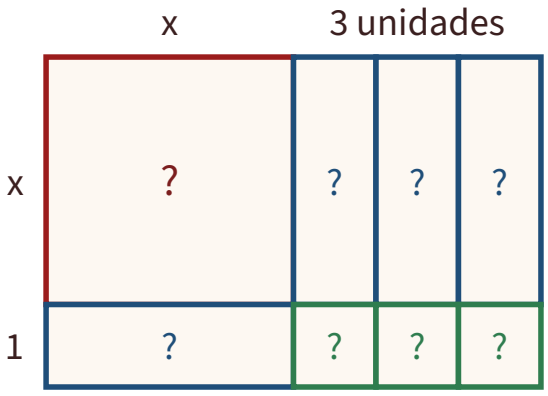
Coeficiente: número que multiplica a x. **Grado**: mayor exponente. **Semejantes**: mismos x^n. **Sustituir**: cambiar x por un número. **Factor**: lo que se multiplica. x^2 se lee «equis al cuadrado» y significa $x\cdot x$.

1 **Completa.**

Polinomio	Grado	Coeficientes	Valor para $x=2$
x^2+3x+1			
$2x-5$			
$4x^2-x$			

2 **Suma:** $(x^2+3x+1)+(2x^2-x+4)$. **Resta:** $(3x+5)-(x+2)$.

3 **Colorea y completa el modelo de área de** $(x+3)(x+1)$.



Resultado:

(x + 3)(x + 1) = ___

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 5 · Álgebra para modelizar

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Dos modelos equivalentes: ¿qué forma conviene?

Un mismo modelo puede escribirse desarrollado, como $x^2 + 6x + 8$, o factorizado, como $(x + 2)(x + 4)$. Cada forma sirve para una cosa distinta. Vais a crear dos modelos y a explicar cuándo conviene cada forma.

Pasos

1. Elige una situación de superficie o coste y escribe el modelo de dos maneras: desarrollada y factorizada.
2. Demuestra que son equivalentes desarrollando la factorizada y comprobando con dos valores.
3. Explica qué información se lee mejor en cada forma (por ejemplo, los lados de un rectángulo, el término independiente, los valores que anulan el polinomio).
4. Repite con un segundo modelo y compara: ¿qué forma usarías para calcular un valor numérico? ¿Y para saber cuánto vale el área cuando un lado vale cero?

1 **Tabla de los dos modelos.**

Modelo	Forma desarrollada	Forma factorizada	¿Qué se ve mejor?
Modelo 1			
Modelo 2			

Entrega

Los dos modelos con sus dos formas, la demostración de equivalencia y un párrafo que compare las ventajas de cada forma.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 5 · Álgebra para modelizar

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: 14; $5x$; $a \cdot b$.
2. Área $x(x+3) = x^2 + 3x$: para $x = 5$, $25 + 15 = 40$ cm²; para $x = 10$, $100 + 30 = 130$ cm². Perímetro $4x + 6$: 26 cm y 46 cm.
3. Grado 2; coeficientes 3 y -5; término independiente 2. $P(2) = 12 - 10 + 2 = 4$; $P(-1) = 3 + 5 + 2 = 10$.
4. $C(x) = 12 + 3x$; $C(8) = 36$ €. Es un polinomio de grado 1.

Ficha 2

1. $P + Q = 4x^2 - 3x + 3$; $P - Q = 2x^2 + 7x - 5$; $2P = 6x^2 + 4x - 2$; con $x = 1$: $P(1) = 4$, $Q(1) = 0$ y $P(1) + Q(1) = 4$, que coincide con $4 - 3 + 3 = 4$ ✔.
2. Perímetro $= (x + 2) + (2x - 1) + (3x + 4) = 6x + 5$; para $x = 3$: 23 cm.
3. Al restar hay que cambiar el signo de todo el segundo paréntesis: $4x^2 + 3x - x^2 + 2x = 3x^2 + 5x$. El error es restar $-2x$ como si fuera $-2x$ en vez de sumar $+2x$ (el signo menos cambia todos los signos del segundo paréntesis).

Ficha 3

1. $3x(x-2) = 3x^2 - 6x$; $(x+3)(x+2) = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6$; $(2x-1)(x+4) = 2x^2 + 8x - x - 4 = 2x^2 + 7x - 4$; $(x^2+1)(x-3) = x^3 - 3x^2 + x - 3$.
2. Partes: x^2, $2x$, $3x$ y 6; suma $x^2 + 5x + 6$.
3. Con $x = 1$: $(1+3)(1+2) = 12$ y $1^2 + 6 = 7$, no coinciden. Faltan los productos cruzados $2x$ y $3x$.

Ficha 4

1. $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$; $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$; $(x+6)(x-6) = x^2 - 36$; $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.
2. $99^2 = (100-1)^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801$; $101^2 = 10\,201$; $51 \cdot 49 = 50^2 - 1 = 2\,499$.
3. Cuadrado de lado $x + 2$ dividido en x^2, dos rectángulos $2x$ y un cuadrado 4: $x^2 + 4x + 4$.
4. Con $x = 1$: $(1+3)^2 = 16$ y $1 + 9 = 10$; con $x = 0$ sí coinciden (9). Por tanto no son iguales: un solo valor que falle demuestra que no son equivalentes, pero un valor que coincide no demuestra que lo sean.

Ficha 5

1. $6x^2 + 9x = 3x(2x+3)$; $4x^3 - 8x^2 = 4x^2(x-2)$; $10x + 15 = 5(2x+3)$. Comprobación: se multiplica de nuevo.
2. $x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$ (suma por diferencia); $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$; $9x^2 - 1 = (3x-1)(3x+1)$; $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.
3. Es cuadrado de una suma si el primer y último términos son cuadrados (x^2 y $16 = 4^2$) y el central es el doble producto ($2 \cdot x \cdot 4 = 8x$): $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$.

Ficha 6

1. Marco: $A = (x+4)(x+8) - x(x+4) = x^2 + 12x + 32 - x^2 - 4x = 8x + 32 = 8(x+4)$. Para $x = 10$: 112 cm². Comprobación: $14 \cdot 18 - 10 \cdot 14 = 252 - 140 = 112$ cm² ✔.
2. $C(x) = 200 + 4x$; $I(x) = 9x$; $B(x) = 9x - (200 + 4x) = 5x - 200$. $B(100) = 300$ €. $5x - 200 > 0 \rightarrow x > 40$: a partir de 41 camisetas hay beneficio (con 40 el beneficio es 0).
3. $A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$. Tabla: $x = 5$: 75; $x = 10$: 100; $x = 12$: 96; $x = 15$: 75. Máximo en $x = 10$: un cuadrado de 10×10 m (100 m²).

Ficha 7

1. Marco: $8x + 32 = 8(x+4)$; para $x = 10$: 112 cm². Valla: $20x - x^2 = x(20 - x)$; $x = 10$: 100 m². Camisetas: $B(x) = 5x - 200 = 5(x - 40)$; $B(100) = 300$ €. Mosaico: $(x+6)^2 - 36 = x^2 + 12x = x(x+12)$; para $x = 4$: 64 cm².
2. Se valoran el dibujo con medidas y la explicación (qué representa cada término) más que la cantidad de cálculo.
3. La revisión debe comprobar los valores con otra vía (calculadora o recuento de medidas).

Ficha 8

1. a) $5x^2 - 3x + 2 - 2x^2 - x + 6 = 3x^2 - 4x + 8$. b) $(x+4)(x-2) = x^2 + 2x - 8$. c) $(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$.
2. a) $8x^2 - 12x = 4x(2x - 3)$. b) $x^2 - 49 = (x-7)(x+7)$. c) $x^2 + 12x + 36 = (x+6)^2$.
3. $3(x+2)^2 - 3 = 3(x^2 + 4x + 4) - 3 = 3x^2 + 12x + 9$: sí son equivalentes. $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$, que no es $x^2 - 1$; con $x = 2$: 1 y 3, no coinciden.
4. Área $= (x+6)^2 - 36 = x^2 + 12x = x(x+12)$. Para $x = 4$: $16 + 48 = 64$ cm². Comprobación: $10^2 - 36 = 64$ ✔.

Refuerzo

1. $x^2 + 3x + 1$: grado 2, coeficientes 1 y 3, término independiente 1, valor $4 + 6 + 1 = 11$. $2x - 5$: grado 1, coeficientes 2 y -5, valor $4 - 5 = -1$. $4x^2 - x$: grado 2, coeficientes 4 y -1, valor $16 - 2 = 14$.
2. Suma: $3x^2 + 2x + 5$. Resta: $3x + 5 - x - 2 = 2x + 3$.
3. Modelo con x^2 (rojo), 4 rectángulos x (azules: tres de arriba y uno de la izquierda) y 3 cuadrados verdes: $(x+3)(x+1) = x^2 + 4x + 3$.

Ampliación

1. Ejemplo: marco con $(x+4)(x+8) - x(x+4) = 8(x+4) = 8x + 32$. Otro: $x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$. Se acepta cualquier par correcto con demostración.
2. La forma factorizada muestra las dimensiones de un rectángulo y los valores de x que anulan la expresión ($x = -2$ y $x = -4$ en el ejemplo); la desarrollada muestra el término independiente (8, el valor para $x = 0$) y es cómoda para sumar y restar polinomios.
3. Para calcular un valor numérico se puede usar cualquiera; la factorizada facilita ver cuándo vale cero.

⚠ Errores frecuentes

- Olvidar el doble producto: $(x+3)^2 = x^2 + 9$.
- No cambiar todos los signos al restar un polinomio entre paréntesis.
- Sumar términos no semejantes ($2x + 3x^2 = 5x^3$) o cambiar el exponente al sumar semejantes.
- Multiplicar solo el primer término del paréntesis con el factor exterior.
- Factorizar sin comprobar: dar $x^2 + 5x$ como $(x+5)^2$ sin multiplicar.
- Creer que una igualdad es cierta porque se cumple para un valor: puede ser una coincidencia ($x = 0$ en $(x+3)^2 = x^2 + 9$).

⚖ Criterios para valorar respuestas abiertas

- Se aceptan formas equivalentes de las expresiones (por ejemplo $8x + 32$ y $8(x+4)$).
- En las explicaciones se valora que se diga qué representa la letra y que se compruebe con otro camino.
- El catálogo puede incluir otros modelos si están bien justificados y comprobados.

06

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Resolver para decidir

PREGUNTA GUÍA

¿Cómo sabemos qué ecuación o sistema describe realmente una decisión?

CURSO
3.º ESO

SESIONES
8 sesiones · 2.º trimestre

SENTIDOS PRIORITARIOS
D · Sentido algebraico

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE2, CE4, CE6, CE8

PRODUCTO FINAL
Dossier de ecuaciones y sistemas contextualizados

CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 1.2, 2.1, 4.2, 6.1, 8.1

Contexto, reto y sentido

El Consejo de Estudiantes de 3.º ESO tiene que tomar cuatro decisiones antes de fin de curso: qué empresa de alquiler de bicicletas contratar para la excursión, cuánto dinero reunir para el viaje de fin de etapa, qué medidas dar a la cancha de petanca del patio y cuántas entradas de cada tipo hay que vender para la función de teatro. Nadie quiere decidir «a ojo»: cada decisión se puede escribir como una ecuación o como un sistema, y la solución matemática dice qué conviene.

La situación moviliza el sentido algebraico en 3.º ESO: plantear a partir de un enunciado, resolver ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores, ecuaciones de segundo grado (incompletas y completas) y sistemas lineales de dos ecuaciones. Pero resolver no es el final: una solución de la ecuación solo es solución del problema si tiene sentido en el contexto (una longitud no puede ser negativa, un número de entradas no puede ser 182,5). Por eso el dossier incluye siempre la comprobación en el enunciado y la decisión razonada.

Reto

Elaborar un dossier con cuatro decisiones del Consejo de Estudiantes (una ecuación lineal con fracciones, una cuadrática, un sistema y una comparación de tarifas), resolviendo cada una, comprobándola en el enunciado y descartando las soluciones que no valen en el contexto.

Producto final

Dossier de ecuaciones y sistemas contextualizados.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE4** Utilizar el pensamiento computacional: descomponer, reconocer patrones, generalizar y crear algoritmos.
- **CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- **1.1** Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.
- **1.2** Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.
- **2.1** Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.
- **4.2** Modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz interpretando y modificando algoritmos.
- **6.1** Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.
- **8.1** Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, oralmente y por escrito, al explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.

Saberes básicos prioritarios

D
Sentido algebraico

- Planteamiento de ecuaciones y sistemas a partir de enunciados, identificando la incógnita y las relaciones entre los datos.
- Ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores: resolución por transposición de términos y comprobación.
- Ecuaciones de segundo grado: incompletas (factor común y despeje) y completas (fórmula y discriminante).
- Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas: métodos de sustitución, igualación y reducción, e interpretación gráfica de la solución.
- Validez de las soluciones en el contexto: soluciones negativas, no enteras o que contradicen una restricción del enunciado.

F
Sentido socioafectivo

- Gestión de la frustración ante un planteamiento que no cuadra: releer, rehacer y comprobar antes de rendirse.
- Trabajo cooperativo con revisión cruzada y argumentación de las decisiones.

Objetivos didácticos

- ✓ Plantear ecuaciones y sistemas desde situaciones.
- ✓ Resolver ecuaciones lineales y cuadráticas sencillas.
- ✓ Resolver sistemas 2×2 y comprobar soluciones.
- ✓ Interpretar y descartar soluciones no válidas en contexto.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos
El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas
Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples
Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito
Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente
Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Planteamiento desde restricciones

Evidencia: Ficha 1: traducción de frases y enunciados a expresiones y ecuaciones, y resolución de una ecuación con la analogía de la balanza.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Ecuaciones lineales con fracciones sencillas

Evidencia: Ficha 2: resolución de ecuaciones lineales con paréntesis y fracciones con comprobación, problema del viaje y corrección de errores.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Cuadráticas por métodos adecuados

Evidencia: Ficha 3: ecuaciones de segundo grado por distintos métodos, problema de la cancha, tabla de valores con parábola y corrección de errores.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Sistemas: interpretación y métodos

Evidencia: Ficha 4: interpretación gráfica de un sistema, resolución por sustitución, igualación y reducción, problema de las entradas.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Problemas mixtos

Evidencia: Ficha 5: elección del tipo de ecuación o sistema en problemas mixtos y resolución por dos caminos.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Soluciones imposibles/no válidas en contexto

Evidencia: Ficha 6: análisis de soluciones válidas y no válidas en contexto y modificación de un dato del problema.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Dossier y revisión cruzada

Evidencia: Ficha 7: borrador del dossier de cuatro decisiones, decisión sobre las tarifas y revisión cruzada.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

8

SESIÓN 8

Reto individual

Evidencia: Ficha 8: reto individual con cuatro problemas (ecuación con fracciones, cuadrática, sistema y decisión).

Ficha: Anexo 3 · ficha 8

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

- Banco de problemas
- calculadora/GeoGebra opcional para comprobación

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Método indicado, coeficientes enteros y plantillas de planteamiento.

Ampliación

Anexo 9

Diseñar un problema con solución algebraica que deba rechazarse por el contexto.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial
Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa
Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final
Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Identificación de la incógnita, los datos y las relaciones del enunciado, y traducción a una ecuación o sistema en problemas de distinto tipo.	Fichas 1 y 5 / lista de cotejo
1.2	Elección y aplicación correcta del método adecuado: transposición, fórmula de segundo grado, sustitución, igualación o reducción.	Fichas 2, 3 y 4 / escala de valoración
2.1	Comprobación de cada solución sustituyendo en la ecuación y en el enunciado, y detección de errores en resoluciones ajenas.	Fichas 2, 6 y 7 / rúbrica
4.2	Interpretación y modificación de procedimientos: resolver el mismo sistema por otro método y cambiar un dato de un problema para obtener una solución prefijada.	Fichas 4, 5 y 6 / rúbrica
6.1	Conversión de las cuatro decisiones del Consejo (tarifas, viaje, cancha, entradas) en modelos algebraicos y respuesta a la decisión real.	Dossier (Anexo 4) / rúbrica
8.1	Redacción de la respuesta al problema en una frase con unidades y explicación de por qué se descarta una solución.	Fichas 6 y 8 y dossier (Anexo 4) / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA
Dossier, comprobaciones y justificación de validez.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 6 · Resolver para decidir

ALUMNADO

El Consejo de Estudiantes tiene cuatro decisiones pendientes y una discusión abierta. Lucía defiende la empresa de bicis que cobra poca fianza y mucho por hora; Mario, la que cobra más fianza pero menos por hora. Cada uno lo justifica «con su experiencia». Hoy no vale la experiencia: vais a escribir cada decisión como una ecuación o un sistema, a resolverla y a comprobar si la solución tiene sentido. Y cuidado: el cartel de la función de teatro anuncia 1 450 € de recaudación con 120 entradas… ¿es posible?

> *¿Cómo sabemos qué ecuación o sistema describe realmente una decisión?*

Vuestro reto

Elaborar un dossier con cuatro decisiones del Consejo de Estudiantes (una ecuación lineal con fracciones, una cuadrática, un sistema y una comparación de tarifas), resolviendo cada una, comprobándola en el enunciado y descartando las soluciones que no valen en el contexto.

Lo que vais a producir

Dossier de ecuaciones y sistemas contextualizados.

Hoja de ruta · 8 sesiones

1. Traducimos frases y enunciados a ecuaciones y resolvemos con la balanza.
2. Resolvemos ecuaciones con paréntesis y denominadores y las comprobamos.
3. Resolvemos ecuaciones de segundo grado e interpretamos sus dos soluciones.
4. Resolvemos sistemas de dos ecuaciones por tres métodos y los miramos en una gráfica.
5. Elegimos la herramienta adecuada para problemas mixtos.
6. Descubrimos cuándo una solución matemática no sirve en la realidad.
7. Montamos el dossier de decisiones y lo revisamos con otro equipo.
8. Resolvemos de forma individual un reto de cuatro problemas.

Al terminar seré capaz de…

- ✓ Plantear ecuaciones y sistemas desde situaciones.
- ✓ Resolver ecuaciones lineales y cuadráticas sencillas.
- ✓ Resolver sistemas 2×2 y comprobar soluciones.
- ✓ Interpretar y descartar soluciones no válidas en contexto.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 6 · Resolver para decidir

ALUMNADO

Banco de seis decisiones del Consejo, método de planteamiento, balanza, ecuaciones con fracciones, ecuaciones de segundo grado con su gráfica, tarifas de bicis en una gráfica, sistemas y un cuadro de resoluciones con errores. Todos los datos son ficticios (creados para el aula).

F1 Banco de decisiones del Consejo de Estudiantes

DATOS

Decisión	Situación y datos	Qué hay que decidir
D1 · Bicicletas	Ciclos Norte cobra 6 € de fianza y 2 € por hora. Ciclos Sur cobra 2 € de fianza y 3 € por hora.	Con cuántas horas cuestan lo mismo y cuál conviene según el tiempo de alquiler.
D2 · Viaje de fin de etapa	El curso reúne una cantidad total de dinero. Un tercio se gasta en transporte, un cuarto en alojamiento y quedan $1\,750$ € para comidas y actividades.	Cuánto dinero reúne el curso.
D3 · Cancha de petanca	Cancha rectangular cuyo largo mide 5 m más que su ancho y cuya superficie es de 150 m².	Qué medidas tiene.
D4 · Entradas de teatro	Se venden 120 entradas: generales a 10 € y reducidas a 6 €. La función del viernes recauda $1\,000$ €. El cartel de la del sábado anuncia $1\,450$ € con otras 120 entradas.	Cuántas entradas de cada tipo se vendieron cada día.
D5 · Mezcla de frutos secos	La cantina mezcla almendras (12 €/kg) y nueces (8 €/kg) para obtener 10 kg de mezcla a $9{,}60$ €/kg.	Cuántos kilos de cada fruto hay que mezclar.
D6 · Regalo de despedida	Un grupo de amigos paga a partes iguales un regalo de 60 €. Si fueran 2 más, cada uno pagaría 1 € menos.	Cuántos amigos son.

Fuente: Situaciones ficticias creadas para el aula.

En el dossier final elegiréis cuatro decisiones de tipos distintos: D1, D2, D3 y D4 son las obligatorias.

F2 Método para plantear y resolver un problema

TEXTO

1. Leer el enunciado dos veces y anotar qué se pregunta.

2. Elegir la incógnita: escribir qué representa x (con unidades). Si hay dos cantidades desconocidas, usar x e y.

3. Buscar las relaciones: ¿qué dos expresiones valen lo mismo? ¿qué se suma o se reparte?

4. Escribir la ecuación o el sistema.

5. Resolver con el método adecuado.

6. Comprobar en el enunciado (no solo en la ecuación) y **validar**: ¿tiene sentido en el contexto?

7. Responder con una frase y con unidades.

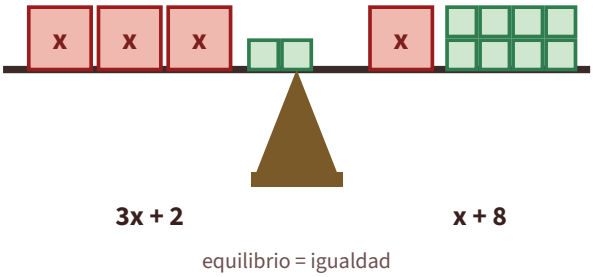
Ejemplo (D1 con una hora de alquiler desconocida). Si t son las horas, Ciclos Norte cuesta $6 + 2t$ y Ciclos Sur cuesta $2 + 3t$. Cuestan lo mismo cuando $6 + 2t = 2 + 3t$, es decir, $4 = t$: a las **4 horas** (14 € en ambas).

Fuente: Elaboración propia.

Una solución que cumple la ecuación pero no el enunciado no es solución del problema.

F3 La balanza de las ecuaciones: $3x + 2 = x + 8$

ESQUEMA



equilibrio = igualdad

Resolver = mantener el equilibrio

1. Quitamos una caja x de cada lado:
   2x + 2 = 8
2. Quitamos 2 unidades de cada lado:
   2x = 6
3. Repartimos en 2 partes iguales:
   x = 3

Comprobación: 3·3 + 2 = 11 y 3 + 8 = 11

Fuente: Esquema de elaboración propia. Cada caja x es un peso desconocido; cada cuadradito vale 1.

Lo que se hace en un lado de la ecuación se hace también en el otro.

F4 Ecuaciones con paréntesis y fracciones: ejemplos resueltos

TEXTO

Con paréntesis. $3(x-2)=2x+5$. Se aplica la propiedad distributiva: $3x-6=2x+5$; se pasan las x a un lado y los números al otro: $3x-2x=5+6$; $x=11$. Comprobación: $3\cdot 9=27$ y $2\cdot 11+5=27$ ✔.

Con denominadores (suma). $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=7$. Se multiplica todo por el m.c.m. de los denominadores, 12: $4x+3x=84$; $7x=84$; $x=12$. Comprobación: $4+3=7$ ✔.

Con denominadores y numeradores con suma. $\frac{x+1}{2}-\frac{x-1}{3}=2$. Se multiplica por 6: $3(x+1)-2(x-1)=12$. Cuidado con el signo menos: $3x+3-2x+2=12$; $x+5=12$; $x=7$. Comprobación: $\frac{8}{2}-\frac{6}{3}=4-2=2$ ✔.

Fuente: Elaboración propia.

Al multiplicar por el m.c.m. hay que multiplicar TODOS los términos, también los que no tienen denominador.

F5 Ecuaciones de segundo grado: tipos y métodos

TEXTO

Una ecuación de segundo grado se escribe $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$.

- **Sin término en** x ($bx=0$): se despeja. $x^2-49=0\Rightarrow x^2=49\Rightarrow x=7$ o $x=-7$.
- **Sin término independiente** ($c=0$): factor común. $2x^2-8x=0\Rightarrow 2x(x-4)=0\Rightarrow x=0$ o $x=4$.
- **Completa:** fórmula $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Ejemplo. $x^2+2x-8=0$, con $a=1, b=2, c=-8$. El discriminante es $\Delta=b^2-4ac=4+32=36$, luego $x=\frac{-2\pm 6}{2}$: $x=2$ o $x=-4$.

El discriminante dice cuántas soluciones hay: si $\Delta>0$, dos soluciones; si $\Delta=0$, una; si $\Delta<0$, ninguna (en los números reales).

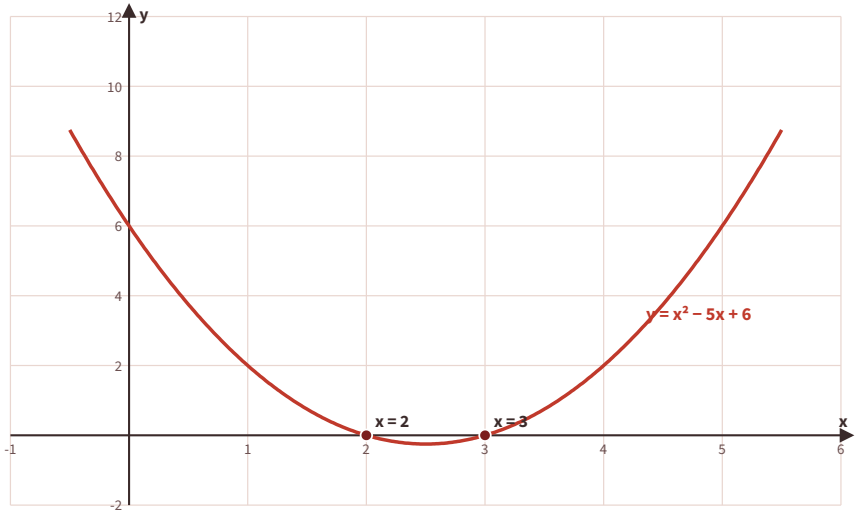
Cuidado: no se puede dividir entre x en $x^2-5x=0$, porque se pierde la solución $x=0$.

Fuente: Elaboración propia.

Una ecuación de segundo grado tiene hasta dos soluciones. En un problema real, hay que decidir cuáles valen.

F6 La parábola $y = x^2 - 5x + 6$ y sus puntos de corte

GRÁFICO

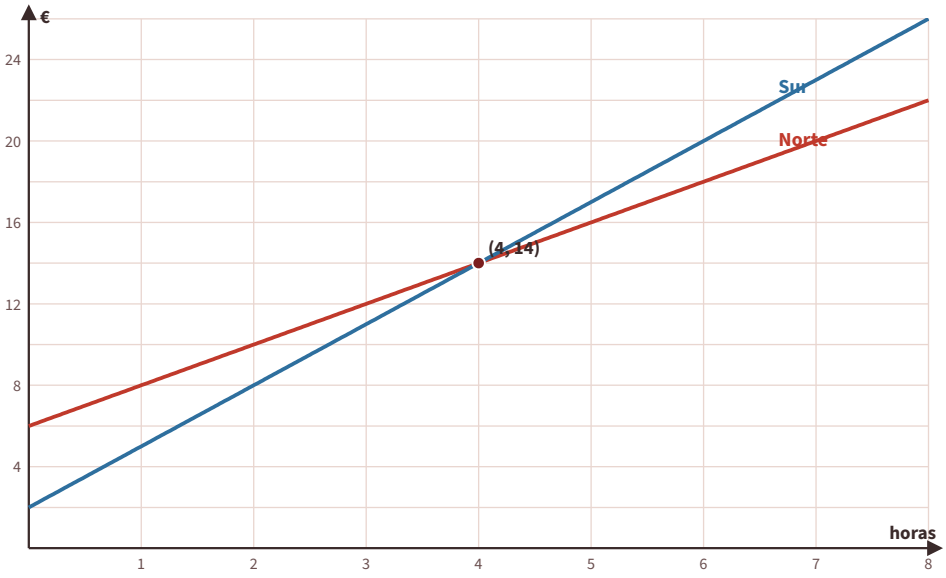


Fuente: Gráfica calculada para el aula. Los puntos de corte con el eje x son las soluciones de $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Comprueba: $2^2 - 10 + 6 = 0$ y $3^2 - 15 + 6 = 0$. Las dos soluciones aparecen donde la curva corta el eje horizontal.

F7 Tarifas de bicicletas (D1): dos rectas que se cruzan

GRÁFICO



Fuente: Gráfica calculada con los datos ficticios de D1: Norte $y = 6 + 2t$ y Sur $y = 2 + 3t$ (t en horas, y en euros).

El punto de corte es la solución del sistema $y = 6 + 2t, y = 2 + 3t$: a las 4 h cuestan 14 € cada una.

F8 Sistemas de dos ecuaciones: tres métodos

TEXTO

El sistema de D5 es $\begin{cases} x + y = 10 \\ 12x + 8y = 96 \end{cases}$ (kilos totales y coste total en euros).

Sustitución. De la primera, $y = 10 - x$. En la segunda: $12x + 8(10 - x) = 96; 12x + 80 - 8x = 96; 4x = 16; x = 4$ y $y = 6$.

Igualación. Se despeja la misma incógnita en las dos: $y = 10 - x$ e $y = \dfrac{96 - 12x}{8} = 12 - 1{,}5x$. Se igualan: $10 - x = 12 - 1{,}5x; 0{,}5x = 2; x = 4$.

Reducción. Se multiplica la primera por -8: $-8x - 8y = -80$. Se suma a la segunda: $4x = 16; x = 4; y = 6$.

Comprobación en el enunciado: $4 + 6 = 10$ kg; $12 \cdot 4 + 8 \cdot 6 = 48 + 48 = 96$ €; $96 : 10 = 9{,}60$ €/kg ✔.

Fuente: Elaboración propia con los datos de D5 (mezcla): x kg de almendras e y kg de nueces.

Gráficamente, resolver un sistema es encontrar el punto en el que se cortan dos rectas (F7).

F9 Resoluciones de compañeros: ¿dónde está el error?

DATOS

N.º	Ecuación o sistema	Resolución del compañero
1	$2(x - 3) = 10$	$2x - 3 = 10 \Rightarrow 2x = 13 \Rightarrow x = 6{,}5$
2	$\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} = 5$	$\dfrac{x}{5} = 5 \Rightarrow x = 25$
3	$x^2 - 5x = 0$	$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$
4	$x^2 + 2x - 8 = 0$	Con $a = 1, b = 2, c = 8$: $\Delta = 4 - 32 = -28 \Rightarrow$ «no tiene solución»
5	$x + y = 8, x - y = 2$	Sumando: $2x = 10 \Rightarrow x = 5$. «Entonces $y = 5$»

Fuente: Ejemplos ficticios elaborados para el aula a partir de errores habituales.

Busca el error de cada una antes de resolver: sustituir la solución en la ecuación original lo delata.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 6 · Resolver para decidir

ALUMNADO

FICHA 1 Del enunciado a la ecuación

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Trabaja con F1, F2 y F3. Antes de escribir una ecuación, di en una frase qué representa la incógnita.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

La solución de $3x - 5 = 10$ es…

☐ $x = 5$ ☐ $x = 15$ ☐ $x = \frac{5}{3}$

«El doble de un número aumentado en 3» se escribe…

☐ $2x + 3$ ☐ $2(x + 3)$ ☐ $2 + x + 3$

Los números cuyo cuadrado es 36 son…

☐ solo 6 ☐ solo -6 ☐ 6 y -6

2 **Relaciona cada frase con su expresión.**

1 El triple de un número menos 4 ●	● a $3x - 4$
2 Un número y su siguiente suman 25 ●	● b $x + (x + 1) = 25$
3 El cuadrado de un número más 5 unidades ●	● c $x^2 + 5$
4 La mitad de un número más su tercera parte ●	● d $\frac{x}{2} + \frac{x}{3}$

3 **Plantea la ecuación de cada situación (sin resolver todavía). Escribe primero qué es x.**

Situación	x es…	Ecuación
Un número y su siguiente suman 25.		
La tienda cobra 40 € por el diseño y 5 € por camiseta; el curso dispone de 215 €.		
Las dos empresas de D1 (F1) cuestan lo mismo tras t horas.		

4 **Resuelve $3x + 2 = x + 8$ con la balanza de F3, anotando en cada paso lo que haces en los dos lados, y comprueba el resultado.**

FICHA 2 Ecuaciones con paréntesis y fracciones

Sesión 2

Usa F4 y F9. Resuelve y comprueba siempre sustituyendo en la ecuación original.

1 **Resuelve paso a paso.**

Ecuación	Pasos	x	Comprobación
$3x + 2 = x + 8$			
$2(x - 3) = 10$			
$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 7$			
$\frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{3} = 2$			

2 **D2 (F1). Llama x al dinero total que reúne el curso. Escribe la ecuación «total menos transporte menos alojamiento es lo que queda», resuélvela y comprueba que las tres partes suman el total.**

3 **En F9, las resoluciones 1 y 2 tienen un error. Localiza dónde está, explica en qué consiste y resuelve bien.**

FICHA 3 Ecuaciones de segundo grado

Sesión 3

Usa F5, F6 y F9. Decide primero de qué tipo es la ecuación y qué método conviene.

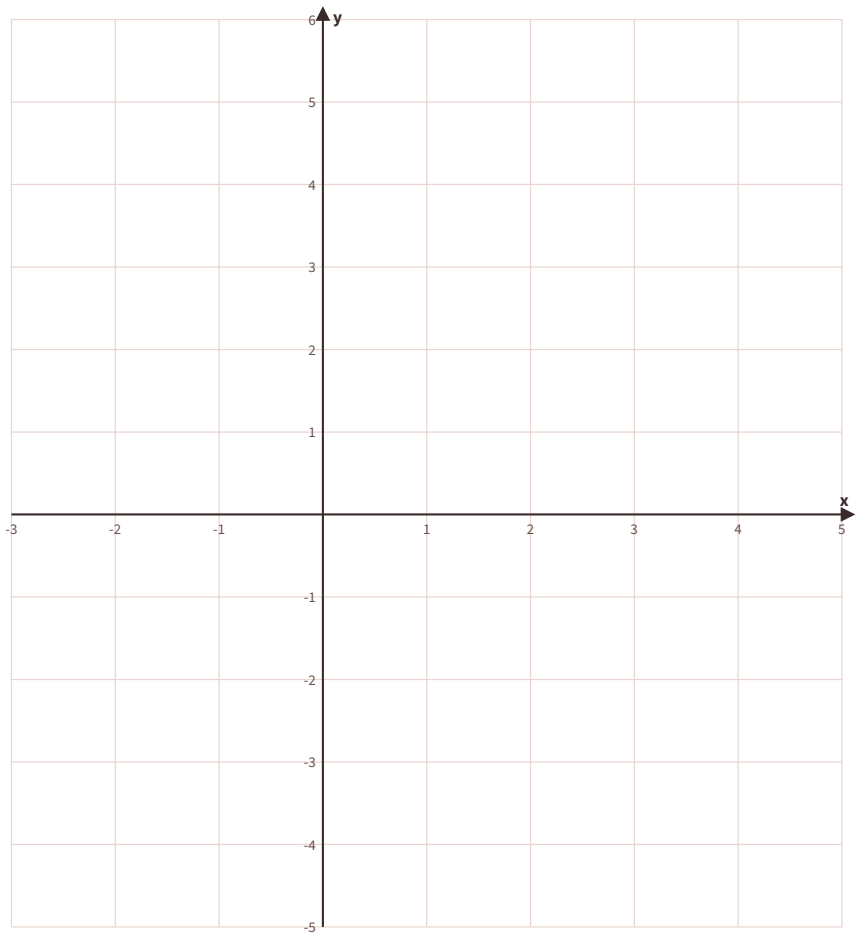
1 **Resuelve cada ecuación indicando su tipo y comprueba.**

Ecuación	Tipo y método	Soluciones
$x^2 - 49 = 0$		
$2x^2 - 8x = 0$		
$x^2 - 5x + 6 = 0$		
$x^2 + 2x - 8 = 0$		
$x^2 + x + 3 = 0$		

2 **D3 (F1). Si el ancho de la cancha es x, el largo es $x + 5$. Escribe la ecuación del área, ponla en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, resuélvela y escribe las medidas de la cancha.**

3 Completa la tabla de valores de $y = x^2 - 2x - 3$, dibuja la parábola y marca sus puntos de corte con el eje x. ¿Qué ecuación resuelven esos puntos?

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y							



4 En F9, las resoluciones 3 y 4 son incorrectas. Encuentra el error de cada una y corrígela.

FICHA 4 Sistemas de ecuaciones

Sesión 4

Usa F7 y F8. Un sistema se puede mirar en una gráfica y se puede resolver por tres métodos.

1 **Con la gráfica F7, completa la tabla de costes y responde: ¿en qué punto se cortan las rectas? ¿Qué significan sus dos coordenadas? ¿Qué empresa es más barata para 3 h? ¿Y para 6 h?**

Horas t	1	2	3	4	5	6
Norte: $6 + 2t$						
Sur: $2 + 3t$						

2 **Resuelve cada sistema con el método indicado y comprueba.**

Sistema	Método	Resolución	(x, y)
$x + y = 10, x - y = 2$	Reducción		
$y = 2x - 1, 3x + y = 14$	Sustitución		
$2x + 3y = 12, 4x - 3y = 6$	Reducción		
$y = 3x - 4, y = x + 2$	Igualación		

3 **D4, función del viernes (F1). Llama x a las entradas generales e y a las reducidas. Escribe el sistema, resuélvelo y responde con una frase.**

4 En F9, la resolución 5 tiene un error. ¿Cuál? Corrígela y comprueba la solución en las dos ecuaciones.

FICHA 5 Problemas mixtos: ¿qué herramienta uso?

Sesión 5

Trabajad por parejas. En cada problema, decidid primero si necesita una ecuación de primer grado, una de segundo grado o un sistema, y justificadlo.

1 Resuelve los tres problemas y completa la tabla. a) D5 (F1): mezcla de almendras y nueces. b) Ana tiene el triple de edad que su hijo; dentro de 10 años tendrá solo el doble. ¿Qué edad tiene cada uno ahora? c) Un cartel rectangular tiene perímetro 34 dm y área 60 dm². ¿Cuáles son sus lados?

Problema	Tipo y por qué	Planteamiento	Solución y comprobación
a) Mezcla			
b) Edades			
c) Cartel			

2 Resuelve la mezcla de D5 con un método distinto del que has usado antes (sustitución, igualación o reducción) y comprueba que sale lo mismo.

3 **Reto (D6, F1). Con x amigos, cada uno paga $\frac{60}{x}$ €. Si fueran $x+2$, pagaría $\frac{60}{x+2}$ €, que es 1 € menos. Escribe la ecuación, quita denominadores, resuélvela y decide qué solución vale.**

FICHA 6 ¿Tiene sentido la solución?

Sesión 6

Una ecuación puede tener soluciones que el problema no admite. Comprueba siempre en el enunciado.

1 **Se han resuelto cuatro ecuaciones. Completa la tabla indicando qué soluciones valen y escribe la respuesta en una frase.**

Problema	Soluciones de la ecuación	¿Cuáles valen y por qué?	Respuesta en una frase
a) Cancha: largo $= x+5$, área 150 m² (D3)	$x=10$ y $x=-15$		
b) Entradas: 120 entradas y $1\,450$ € (sábado, D4)	$x=182{,}5$ generales; $y=-62{,}5$ reducidas		
c) Camisetas: $40+5x=207$ €	$x=33{,}4$		
d) Dorsales: dos números consecutivos con producto 30	$x=5$ y $x=-6$		

2 **Sin resolver el sistema, explica por qué es imposible que el sábado (b) se recauden $1\,450$ € con 120 entradas de 10 € y 6 €. Pista: calcula la recaudación máxima posible.**

3 **Marca verdadero o falso y corrige las falsas.**

	V	F
Si una solución cumple la ecuación, siempre es solución del problema.	☐	☐
Una ecuación de segundo grado con dos soluciones obliga a usar las dos en la respuesta.	☐	☐
Comprobar en la ecuación no basta: hay que volver al enunciado.	☐	☐
Una longitud o un número de personas pueden salir negativos si la ecuación está bien resuelta.	☐	☐

4 **Modifica solo el área de la cancha de D3 (largo $= x + 5$) para que el ancho sea exactamente 12 m. ¿Qué área hay que poner? Comprueba que la otra solución de la ecuación es negativa.**

FICHA 7 Borrador del dossier de decisiones

Sesión 7

Trabajo en equipo. Roles: planteador, calculista, comprobador y portavoz. Cada decisión lleva planteamiento, resolución, comprobación en el enunciado y respuesta con unidades.

1 **Completa el borrador de las cuatro decisiones obligatorias.**

Decisión	Incógnita y planteamiento	Resolución	Comprobación en el enunciado	Respuesta
D1 · Tarifas de bicis (ecuación lineal)				
D2 · Viaje (con fracciones)				
D3 · Cancha (segundo grado)				
D4 · Entradas (sistema)				

2 **Con F7: el Consejo quiere alquilar bicis una mañana de 3 h y otra excursión de 6 h. ¿Qué empresa recomendáis en cada caso y por qué? ¿A partir de qué duración conviene Norte?**

3 **Revisión cruzada: otro equipo comprueba vuestro dossier.**

- [ ] Cada incógnita está definida con unidades
- [ ] Todas las soluciones se han sustituido en el enunciado
- [ ] Se descartan por escrito las soluciones sin sentido
- [ ] Cada respuesta es una frase con unidades
- [ ] El método elegido es el adecuado al tipo de ecuación

FICHA 8 Reto individual

Sesión 8

Prueba individual: resuelve sin ayuda del equipo. Se puede usar calculadora para comprobar, pero hay que escribir los pasos.

1 **Resuelve y comprueba:** $\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{1}{6}$.

2 **Un jardín rectangular tiene un largo 3 m mayor que su ancho y una superficie de 88 m². Calcula sus medidas y su perímetro. ¿Qué haces con la solución negativa?**

3 En la cantina, 2 cafés y 3 bocadillos cuestan $10{,}50$ € y 3 cafés y 1 bocadillo cuestan 7 €. Calcula el precio de cada cosa.

4 Una empresa de alquiler de furgonetas cobra 20 € fijos más $0{,}50$ € por km (tarifa A); otra cobra $0{,}90$ € por km sin cuota fija (tarifa B). Calcula con cuántos km cuestan lo mismo y recomienda una tarifa para un trayecto de 30 km y otro de 80 km.

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 6 · Resolver para decidir

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Dossier de ecuaciones y sistemas contextualizados del Consejo de Estudiantes. Cada decisión lleva planteamiento, resolución, comprobación y respuesta.

Título y equipo

Nombre del dossier, integrantes y roles.

Decisión 1: tarifas de bicis

Incógnita, ecuación, solución, gráfica y recomendación.

Decisión 2: viaje de fin de etapa

Ecuación con fracciones, resolución y comprobación.

Decisión 3: cancha de petanca

Ecuación de segundo grado, dos soluciones y cuál vale.

Decisión 4: entradas de teatro

Sistema, método elegido y comprobación en el enunciado.

Soluciones descartadas

Qué soluciones no valen y por qué.

Errores corregidos

Un error del equipo y cómo se detectó.

Conclusión

Qué decide el Consejo y qué método ha sido más útil.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 6 · Resolver para decidir

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Dossier de ecuaciones y sistemas contextualizados**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] Cada decisión indica qué representa la incógnita, con unidades.
- [ ] La ecuación o el sistema de cada decisión está bien planteado.
- [ ] Se identifica el tipo de ecuación y se elige un método adecuado.
- [ ] Los pasos de resolución son correctos y están escritos.
- [ ] Cada solución se ha comprobado sustituyendo en el enunciado.
- [ ] Se ha descartado por escrito alguna solución sin sentido y se explica por qué.
- [ ] La gráfica de las tarifas está rotulada y su punto de corte se interpreta.
- [ ] Cada respuesta es una frase completa con unidades.
- [ ] El dossier incluye un error corregido o una comparación de dos métodos.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 6 · Resolver para decidir

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Dossier de ecuaciones y sistemas contextualizados**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 6 · Resolver para decidir

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé traducir un enunciado a una ecuación o a un sistema y decir qué es la incógnita.	○	○	○	○
Compruebo cada solución en el enunciado y descarto las que no tienen sentido.	○	○	○	○
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	○	○	○	○
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	○	○	○	○
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	○	○	○	○
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	○	○	○	○

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 6 · Resolver para decidir

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Ecuaciones y sistemas con coeficientes enteros y un método indicado. Sigue el ejemplo modelado y las plantillas de planteamiento.

Ejemplo modelado: plantillas de planteamiento

Problema: «Pablo tiene 4 € más que Lía y entre los dos tienen 20 €». **Incógnita:** x = euros de Lía. **Relaciones:** Pablo tiene $x+4$. **Ecuación:** $x+(x+4)=20$. **Resolución:** $2x+4=20$; $2x=16$; $x=8$. **Respuesta:** Lía tiene 8 € y Pablo 12 €. **Comprobación:** $8+12=20$ ✔.

Glosario y símbolos

Incógnita: valor que buscamos (x). **Ecuación**: igualdad con una incógnita. **Solución**: valor que cumple la igualdad. **Transponer**: pasar un término al otro lado cambiándole el signo (o la operación). **Sistema**: dos ecuaciones que se cumplen a la vez. **Discriminante** $\Delta=b^2-4ac$. El símbolo $\pm$ significa «más y menos»: dos soluciones.

1 **Completa el planteamiento de cada situación. Sigue el ejemplo.**

Situación	x es…	Ecuación
Un número más su doble suman 27.		
Una cantina cobra 2 € de menú y 3 € por cada refresco; pagas 14 €.		
Una pizza y una bebida cuestan 9 €; la pizza cuesta 5 € más que la bebida.		

2 **Completa los pasos.**

$3x-4=x+8$ → restamos x en los dos lados: _____ $=8+4$ → _____ $=12$ → dividimos entre 2: $x=$ _____

Comprobación: $3\cdot$ _____ $-4=$ _____ y _____ $+8=$ _____.

3 **Resuelve por reducción:** $x+y=9$ y $x-y=3$.

Sumamos las dos ecuaciones: _____ $x=12$ → $x=$ _____

De la primera: $y=9-$ _____ $=$ _____

Comprobación: _____ $+$ _____ $=9$ y _____ $-$ _____ $=3$.

4 **Un cuadrado tiene 25 m² de área. Escribe la ecuación, resuélvela y explica por qué solo vale una de las soluciones. Después resuelve $x^2 - 3x = 0$ con factor común.**

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 6 · Resolver para decidir

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Un problema que miente: solución algebraica, respuesta imposible

Algunos problemas tienen una solución algebraica perfectamente correcta que la realidad rechaza. Vais a diseñar uno, resolverlo y explicar con precisión por qué hay que descartar esa solución. Además, descubriréis cómo construir ecuaciones con soluciones que vosotros elegís.

Pasos

1. Elige un contexto (superficies, edades, precios, reparto) y fija dos números que serán las soluciones de la ecuación, uno de ellos negativo o no entero.
2. Construye la ecuación de segundo grado con esas soluciones: si las soluciones son a y b, la ecuación es $(x - a)(x - b) = 0$. Desarróllala.
3. Redacta el enunciado de forma que la ecuación salga de él de forma natural.
4. Resuélvelo con la fórmula y comprueba las dos soluciones. Explica con una frase cuál se descarta y por qué.
5. Generaliza: ¿qué signo tienen que tener b y c en $x^2 + bx + c = 0$ para que haya una solución positiva y otra negativa? Pruébalo con tres ejemplos.

1 **Tabla de diseño.**

Soluciones elegidas	Ecuación $(x - a)(x - b) = 0$	Ecuación desarrollada	Contexto y solución descartada
Ejemplo 1			
Ejemplo 2			
Ejemplo 3			

Entrega

El enunciado de un problema, su resolución completa, la justificación de la solución descartada y una regla general sobre los signos de las soluciones.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 6 · Resolver para decidir

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: $3x = 15 \Rightarrow x = 5$; $2x + 3$; 6 y -6.
2. $3x - 4$; $x + (x + 1) = 25$; $x^2 + 5$; $\frac{x}{2} + \frac{x}{3}$ (las parejas coinciden con el orden de la columna de la izquierda).
3. Planteamientos: número $x \rightarrow x + (x + 1) = 25$ (da $x = 12$); x = camisetas $\rightarrow 40 + 5x = 215$ (da $x = 35$); t = horas $\rightarrow 6 + 2t = 2 + 3t$ (da $t = 4$).
4. $3x + 2 = x + 8$; restamos x: $2x + 2 = 8$; restamos 2: $2x = 6$; dividimos entre 2: $x = 3$. Comprobación: $3 \cdot 3 + 2 = 11$ y $3 + 8 = 11$ ✔.

Ficha 2

1. $3x + 2 = x + 8 \Rightarrow x = 3$. $2(x - 3) = 10 \Rightarrow 2x - 6 = 10 \Rightarrow x = 8$ (comprobación: $2 \cdot 5 = 10$). $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 7 \Rightarrow 4x + 3x = 84 \Rightarrow x = 12$. $\frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{3} = 2 \Rightarrow 3(x + 1) - 2(x - 1) = 12 \Rightarrow x + 5 = 12 \Rightarrow x = 7$.
2. $x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 1\,750$; multiplicando por 12: $12x - 4x - 3x = 21\,000$; $5x = 21\,000$; $x = 4\,200$ €. Comprobación: transporte $1\,400$ €, alojamiento $1\,050$ €, quedan $4\,200 - 1\,400 - 1\,050 = 1\,750$ € ✔.
3. Error 1: $2(x - 3) = 2x - 6$ (no $2x - 3$); la distributiva afecta a los dos términos; $2x - 6 = 10 \Rightarrow x = 8$. Error 2: no se suman numeradores y denominadores; hay que reducir a común denominador: $3x + 2x = 30 \Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow x = 6$ (comprobación: $3 + 2 = 5$ ✔).

Ficha 3

1. $x^2 - 49 = 0$: despeje, $x = \pm 7$. $2x^2 - 8x = 0$: factor común, $2x(x - 4) = 0$, $x = 0$ o $x = 4$. $x^2 - 5x + 6 = 0$: fórmula, $\Delta = 25 - 24 = 1$, $x = \frac{5 \pm 1}{2}$, $x = 3$ o $x = 2$. $x^2 + 2x - 8 = 0$: $\Delta = 36$, $x = 2$ o $x = -4$. $x^2 + x + 3 = 0$: $\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$, no tiene solución real.
2. $x(x + 5) = 150 \Rightarrow x^2 + 5x - 150 = 0$; $\Delta = 25 + 600 = 625$; $x = \frac{-5 \pm 25}{2}$: $x = 10$ o $x = -15$. Vale $x = 10$: ancho 10 m, largo 15 m. Comprobación: $10 \cdot 15 = 150$ ✔.
3. Tabla: $y = 5, 0, -3, -4, -3, 0, 5$. Puntos de corte: $x = -1$ y $x = 3$, soluciones de $x^2 - 2x - 3 = 0$. El vértice está en $(1, -4)$.
4. Resolución 3: se ha dividido entre x y se ha perdido $x = 0$; correcto: $x(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 5$. Resolución 4: $c = -8$, no 8; con el signo correcto $\Delta = 4 + 32 = 36$ y las soluciones son 2 y -4.

Ficha 4

1. Norte: $8, 10, 12, 14, 16, 18$. Sur: $5, 8, 11, 14, 17, 20$. Se cortan en $(4, 14)$: a las 4 h las dos cuestan 14 €. A las 3 h, Sur es más barata (11 € frente a 12 €); a las 6 h, Norte (18 € frente a 20 €).
2. (6, 4): sumando $2x = 12, x = 6, y = 4$. (3, 5): $3x + 2x - 1 = 14, x = 3, y = 5$. (3, 2): sumando $6x = 18, x = 3$; $6 + 3y = 12, y = 2$. (3, 5): igualando $3x - 4 = x + 2, 2x = 6, x = 3, y = 5$.
3. $x + y = 120$ y $10x + 6y = 1\,000$. Sustitución: $y = 120 - x$; $10x + 720 - 6x = 1\,000$; $4x = 280$; $x = 70$; $y = 50$. Se vendieron 70 entradas generales y 50 reducidas. Comprobación: $700 + 300 = 1\,000$ € ✔.
4. Error: al sustituir se obtuvo $y = 5$ sin usar la primera ecuación; $y = 8 - 5 = 3$. Solución $(5, 3)$: $5 + 3 = 8$ y $5 - 3 = 2$ ✔.

Ficha 5

1. a) Sistema: $x + y = 10, 12x + 8y = 96$; $x = 4$ kg de almendras e $y = 6$ kg de nueces. b) Primer grado: hijo x, Ana $3x$; $3x + 10 = 2(x + 10)$; $x = 10$: hijo 10 años, Ana 30. Comprobación: dentro de 10 años $40 = 2 \cdot 20$ ✔. c) Segundo grado (o sistema no lineal): un lado x, el otro $17 - x$ (semiperímetro 17); $x(17 - x) = 60 \Rightarrow x^2 - 17x + 60 = 0$; $\Delta = 289 - 240 = 49$; $x = \dfrac{17 \pm 7}{2}$: 12 o 5. Los lados miden 12 dm y 5 dm (las dos soluciones dan el mismo rectángulo).
2. Por reducción: $-8\cdot$ (primera) $+$ segunda: $4x = 16, x = 4$. Por sustitución: $12x + 8(10 - x) = 96, x = 4$. Se debe llegar al mismo resultado.
3. $\dfrac{60}{x} - \dfrac{60}{x + 2} = 1$. Multiplicando por $x(x + 2)$: $60(x + 2) - 60x = x(x + 2)$; $120 = x^2 + 2x$; $x^2 + 2x - 120 = 0$; $\Delta = 4 + 480 = 484$; $x = \dfrac{-2 \pm 22}{2}$: $x = 10$ o $x = -12$. Vale $x = 10$ amigos. Comprobación: $60 : 10 = 6$ € y $60 : 12 = 5$ €.

Ficha 6

1. a) Vale $x = 10$; -15 m no puede ser un ancho. Respuesta: la cancha mide 10 m de ancho y 15 m de largo. b) Ninguna: el número de entradas no puede ser decimal ni negativo. No existe esa función con esos datos. c) Ninguna exacta: no se pueden comprar $33{,}4$ camisetas; con 207 € se pueden comprar como máximo 33 camisetas (coste 205 €, sobran 2 €). d) Valen $x = 5$ (dorsales 5 y 6); $x = -6$ no, porque un dorsal no es negativo (los números -6 y -5 también tienen producto 30, pero no son dorsales).
2. Si todas las entradas fueran generales se recaudarían como máximo $120 \cdot 10 = 1\,200$ €, que es menos que $1\,450$ €. Por eso es imposible: el cartel contiene un error.
3. F; F (hay que usar solo las que valen en el contexto); V; F. Correcciones: una solución de la ecuación puede no servir (longitud negativa, personas decimales); una longitud o un número de personas no pueden ser negativos.
4. $x(x + 5) =$ área con $x = 12$: $12 \cdot 17 = 204$ m². La ecuación $x^2 + 5x - 204 = 0$ tiene $\Delta = 25 + 816 = 841 = 29^2$ y $x = \dfrac{-5 \pm 29}{2}$: 12 o -17 (negativa).

Ficha 7

1. D1: $6 + 2t = 2 + 3t \Rightarrow t = 4$ h, 14 €. D2: $x - \dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{4} = 1\,750 \Rightarrow x = 4\,200$ €. D3: $x^2 + 5x - 150 = 0 \Rightarrow x = 10$ (se descarta -15): 10×15 m. D4: $x + y = 120, 10x + 6y = 1\,000 \Rightarrow x = 70, y = 50$.
2. A las 3 h, Sur (11 € frente a 12 €); a las 6 h, Norte (18 € frente a 20 €). Norte conviene a partir de más de 4 h (a las 4 h son iguales).
3. La revisión debe comprobar que cada solución se sustituye en el enunciado, no solo en la ecuación.

Ficha 8

1. Multiplicando por 6: $2(x+2)-3(x-1)=1$; $2x+4-3x+3=1$; $-x+7=1$; $x=6$. Comprobación: $\frac{8}{3}-\frac{5}{2}=\frac{16-15}{6}=\frac{1}{6}$ ✔.
2. Ancho x, largo $x+3$: $x^2+3x-88=0$; $\Delta=9+352=361$; $x=\frac{-3\pm 19}{2}$: $x=8$ o $x=-11$. Se descarta -11. El jardín mide 8×11 m, perímetro $2(8+11)=38$ m. Comprobación: $8\cdot 11=88$ ✔.
3. $2c+3b=10{,}5$ y $3c+b=7$. De la segunda $b=7-3c$: $2c+21-9c=10{,}5$; $-7c=-10{,}5$; $c=1{,}5$ €; $b=2{,}5$ €. Comprobación: $3+7{,}5=10{,}5$ y $4{,}5+2{,}5=7$ ✔.
4. $20+0{,}5k=0{,}9k \Rightarrow 20=0{,}4k \Rightarrow k=50$ km (45 € en ambas). Para 30 km: A cuesta 35 € y B 27 €, conviene B. Para 80 km: A cuesta 60 € y B 72 €, conviene A.

Refuerzo

1. x = el número: $x+2x=27$ ($x=9$). x = refrescos: $2+3x=14$ ($x=4$). x = precio de la bebida: $x+(x+5)=9$ ($x=2$; pizza 7 €).
2. $2x=12$; $x=6$. Comprobación: $3\cdot 6-4=14$ y $6+8=14$. (La primera línea: $3x-x=8+4$, es decir $2x=12$.)
3. $2x=12$; $x=6$; $y=9-6=3$. Comprobación: $6+3=9$ y $6-3=3$.
4. $x^2=25$; $x=\pm 5$; solo vale 5 m porque un lado no es negativo. $x^2-3x=x(x-3)=0$: $x=0$ o $x=3$.

Ampliación

1. Ejemplo: soluciones 5 y -8; $(x-5)(x+8)=x^2+3x-40=0$. Enunciado: «un rectángulo tiene un largo 3 m mayor que el ancho y área 40 m²». Se descarta $x=-8$ porque un ancho no puede ser negativo; el rectángulo mide 5×8 m.
2. Regla: si $c<0$, el producto de las soluciones es negativo (una positiva y una negativa). Si además $b>0$, la positiva es la de menor valor absoluto. Con $c>0$ y $b>0$ las dos soluciones son negativas; con $c>0$ y $b<0$, las dos son positivas. Se acepta cualquier ejemplo correcto con la comprobación.

Errores frecuentes

- Aplicar la distributiva solo al primer término del paréntesis: $2(x-3)=2x-3$.
- Al quitar denominadores, no multiplicar todos los términos por el m.c.m. (o sumar numeradores y denominadores por separado).
- Dividir entre x en una ecuación de segundo grado y perder la solución $x=0$.
- Equivocar el signo de c en la fórmula o escribir $\pm$ solo con una raíz.
- Dar como respuesta ambas soluciones de una cuadrática sin comprobar que valen en el contexto.
- Resolver un sistema y dar solo el valor de x, sin calcular y ni comprobar en las dos ecuaciones.

Criterios para valorar respuestas abiertas

- Se aceptan planteamientos equivalentes (otra elección de la incógnita) si están bien definidos y la respuesta final es la misma.
- En las respuestas abiertas se valora que se mencione el contexto (por qué no vale una solución) más que el cálculo.
- La calculadora se admite para comprobar y para la raíz del discriminante, pero los pasos de transposición deben aparecer escritos.
- En el dossier, una decisión cuenta como correcta si tiene incógnita, ecuación o sistema, resolución, comprobación y respuesta con unidades.

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

07 El mundo cambia: las funciones lo cuentan

PREGUNTA GUÍA

¿Qué podemos deducir de un fenómeno sin conocer todos sus valores?

CURSO
3.º ESO

SESIONES
8 sesiones · 2.º-3.º trimestre

SENTIDOS PRIORITARIOS
D · Sentido algebraico · B · Sentido de la medida

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE3, CE5, CE6, CE7, CE8

PRODUCTO FINAL
Atlas de funciones y fenómenos

CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 3.1, 5.1, 6.1, 7.1, 8.1

Contexto, reto y sentido

Para la Semana de la Ciencia, el instituto quiere un **atlas de funciones y fenómenos**: una colección de fichas donde cada fenómeno del mundo (una batería que se agota, un balón lanzado desde un balcón, un puesto de bocadillos, el crecimiento de dos planes de seguidores) se describe con una tabla, una gráfica y una fórmula, y se estudia qué se puede deducir de él sin conocer todos sus valores: cuándo es máximo, cuándo se anula, a qué ritmo cambia y dónde deja de tener sentido el modelo.

La situación moviliza el sentido algebraico y el de la medida: funciones lineales y cuadráticas, pendiente y tasa de variación media, dominio contextual, crecimiento y decrecimiento, vértice y puntos de corte con los ejes, ajuste de una recta a datos reales y comparación de modelos. Cada ficha del atlas debe responder a una pregunta: ¿qué podemos afirmar, y hasta dónde?

Reto

Elaborar un atlas de funciones y fenómenos con una ficha por fenómeno (tabla, gráfica, expresión, dominio, puntos relevantes y tasas de cambio) y un comentario que indique qué se puede deducir del modelo y cuáles son sus límites.

Producto final

Atlas de funciones y fenómenos.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE5** Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.
- **CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- **1.1** Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.
- **3.1** Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.
- **5.1** Reconocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente.
- **6.1** Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.
- **7.1** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales.
- **8.1** Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, oralmente y por escrito, al explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.

Saberes básicos prioritarios

D
Sentido algebraico

- Funciones lineales $y = mx + n$: pendiente, ordenada en el origen, puntos de corte con los ejes y obtención de la expresión a partir de dos puntos.
- Funciones cuadráticas $y = ax^2 + bx + c$: parábola, vértice, eje de simetría, puntos de corte y signo de a.
- Interpretación de gráficas: dominio contextual, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.
- Modelización lineal a partir de datos: ajuste visual, predicción y límites del modelo.
- Comparación de modelos lineales y cuadráticos y puntos de corte entre dos funciones (resolución de $f(x) = g(x)$).

B
Sentido de la medida

- Tasa de variación media en un intervalo como medida del cambio y su interpretación con unidades.
- Estimación y error absoluto entre un valor medido y el predicho por un modelo.

F
Sentido socioafectivo

- Pensamiento crítico: no extrapolar un modelo más allá de donde tiene sentido.
- Trabajo en equipo con roles, argumentación y revisión por iguales.

Objetivos didácticos

- ✓ Interpretar dominio contextual, crecimiento y puntos relevantes.
- ✓ Relacionar tabla, gráfica y expresión.
- ✓ Analizar funciones lineales y cuadráticas.
- ✓ Comparar modelos según su forma y cambio.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Historias y gráficas

Evidencia: Ficha 1: variables y dominio contextual de tres fenómenos, lectura de la gráfica del balón y dibujo de la descarga de una batería.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Rectas: pendiente e intersecciones

Evidencia: Ficha 2: pendiente desde dos puntos, expresión de una recta, cortes con los ejes y ritmo de descarga de la batería.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Modelos lineales a partir de datos

Evidencia: Ficha 3: ajuste visual de una recta a los datos del calentamiento, expresión, tabla de errores, predicciones y límites del modelo.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Parábolas desde tablas y gráficas

Evidencia: Ficha 4: tabla y gráfica de una parábola, vértice y cortes, modelo del balón y test de signo, vértice y ordenada.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Comparación lineal-cuadrática

Evidencia: Ficha 5: tasas de variación media de los dos planes de seguidores, tabla de valores, comparación en dos momentos y reflexión a largo plazo.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Puntos de corte y significado

Evidencia: Ficha 6: resolución de $f(x) = g(x)$ para los planes, interpretación de los puntos de corte y estudio de los ingresos del puesto.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Atlas de funciones

Evidencia: Ficha 7: planificación del atlas, modelización de un jardín con 40 m de valla y revisión cruzada de las fichas.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

8

SESIÓN 8

Reto individual de modelización

Evidencia: Ficha 8: reto individual con un dron, un ajuste lineal a datos, la comparación de dos tarifas y las tasas de variación del balón.

Ficha: Anexo 3 · ficha 8

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

GeoGebra/hoja de cálculo opcional · tablas ficticias · gráficas

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Ejes y tablas preparados, funciones con coeficientes sencillos.

Ampliación

Anexo 9

Ajustar visualmente dos modelos distintos a un conjunto de datos y discutir límites.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Interpretación de cada fenómeno: identificación de variables, unidades, dominio contextual y qué se pide deducir.	Ficha 1 / lista de cotejo
3.1	Formulación y comprobación de conjeturas sobre qué modelo (lineal o cuadrático) describe unos datos y cuándo un plan supera a otro.	Fichas 5 y 6 y Anexo 9 / rúbrica
5.1	Conexión entre tabla, gráfica, expresión y significado (pendiente, vértice, cortes) y entre las ecuaciones y las gráficas.	Fichas 2, 4 y 6 / escala de valoración
6.1	Modelización de fenómenos reales (descarga, lanzamiento, ingresos, jardín) con funciones y uso del modelo para predecir y decidir.	Fichas 3, 6 y 7 / rúbrica
7.1	Tablas, gráficas con escala y expresiones de cada ficha del atlas, y representación de rectas y parábolas.	Atlas (Anexo 4) y Ficha 7 / rúbrica

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
8.1	Comentario escrito de cada ficha y defensa oral con lenguaje matemático (vértice, tasa de variación, dominio, corte) y mención de los límites del modelo.	Ficha 8 y presentación del atlas / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Atlas, gráficas, expresiones y comentario.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 7 · El mundo cambia: las funciones lo cuentan

ALUMNADO

Un balón sale despedido desde un balcón a 20 metros y nadie sabe cuánto subirá ni cuándo tocará el suelo. Un móvil marca el 100 % de batería y baja ocho puntos cada hora: ¿cuánto durará? Dos cuentas del instituto ganan seguidores con ritmos distintos, una de forma regular y otra cada vez más deprisa. ¿Qué podéis deducir de cada fenómeno sin conocer todos sus valores? Vais a construir un atlas con una ficha por fenómeno: su gráfica, su fórmula, sus puntos clave y, sobre todo, hasta dónde se puede fiar uno del modelo.

> *¿Qué podemos deducir de un fenómeno sin conocer todos sus valores?*

Vuestro reto

Elaborar un atlas de funciones y fenómenos con una ficha por fenómeno (tabla, gráfica, expresión, dominio, puntos relevantes y tasas de cambio) y un comentario que indique qué se puede deducir del modelo y cuáles son sus límites.

Lo que vais a producir

Atlas de funciones y fenómenos.

Hoja de ruta · 8 sesiones

1. Leemos fenómenos en gráficas: dominio, crecimiento y puntos relevantes.
2. Estudiamos las rectas: pendiente, ordenada y cortes con los ejes.
3. Ajustamos una recta a unos datos y la usamos para predecir.
4. Descubrimos la parábola: vértice, eje y cortes.
5. Comparamos lo lineal y lo cuadrático con tasas de variación.
6. Hallamos y interpretamos los puntos de corte entre dos funciones.
7. Montamos el atlas de funciones y fenómenos.
8. Resolvemos un reto individual de modelización.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Interpretar dominio contextual, crecimiento y puntos relevantes.
- ✓ Relacionar tabla, gráfica y expresión.
- ✓ Analizar funciones lineales y cuadráticas.
- ✓ Comparar modelos según su forma y cambio.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 7 · El mundo cambia: las funciones lo cuentan

ALUMNADO

Cinco fenómenos, datos de calentamiento, gráficas de un balón y de dos planes de seguidores, una tabla de ingresos, un esquema de la parábola, un cuadro de fórmulas con ejemplo resuelto y un protocolo de ficha del atlas. Los datos son ficticios o aproximados, creados para el aula.

F1 Cinco fenómenos para el atlas

DATOS

Nº	Fenómeno	Variables	Modelo	Dominio contextual
1	Batería de un móvil que se descarga	t (horas), B (% de carga)	$B = 100 - 8t$	$0 \leq t \leq 12{,}5$
2	Calentamiento de agua	t (minutos), T (°C)	Se ajusta a partir de datos (F2)	$0 \leq t \leq 20$
3	Balón lanzado desde un balcón de 20 m	t (s), h (m)	$h = -5t^2 + 15t + 20$	$0 \leq t \leq 4$
4	Puesto de bocadillos: ingresos según el precio	p (€), I (€)	$I = -5p^2 + 100p$	$0 \leq p \leq 20$
5	Dos planes de crecimiento de seguidores (en cientos)	t (semanas), S	Plan A: $4 + 10t$; Plan B: $20 + t^2$	$t \geq 0$

Fuente: Situaciones ficticias creadas para el aula.

Q El **dominio contextual** es el conjunto de valores de la variable independiente que tienen sentido en la historia. ¿Por qué el balón solo se estudia hasta $t = 4$?

F2 Calentamiento de agua: datos medidos

DATOS

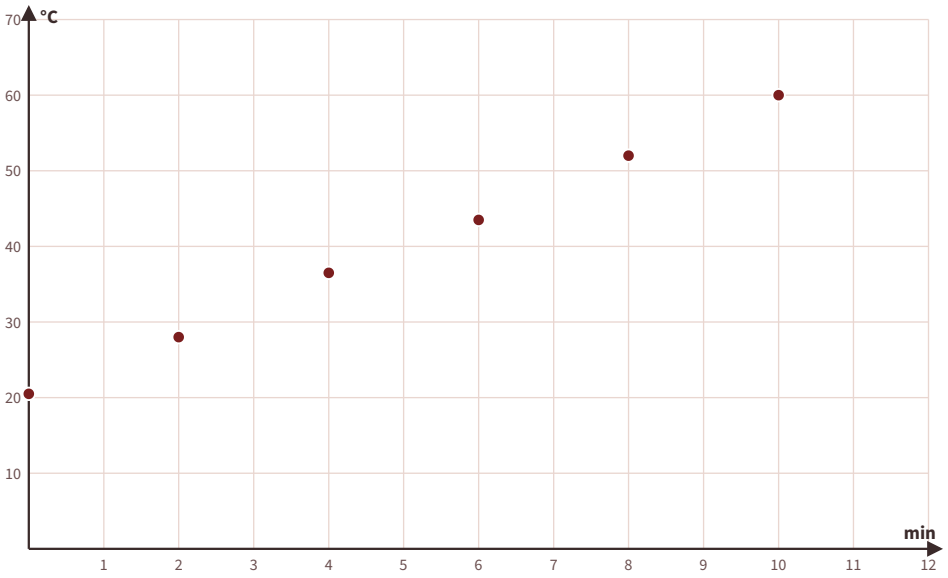
Tiempo t (min)	0	2	4	6	8	10
Temperatura T (°C)	20,5	28	36,5	43,5	52	60

Fuente: Datos ficticios creados para el aula: temperatura de un cazo con agua al fuego, medida cada 2 minutos con un termómetro.

Q Las medidas tienen pequeños errores, así que los puntos no quedan exactamente alineados. ¿Se pueden aproximar con una recta?

F3 Los datos del calentamiento, representados

GRÁFICO

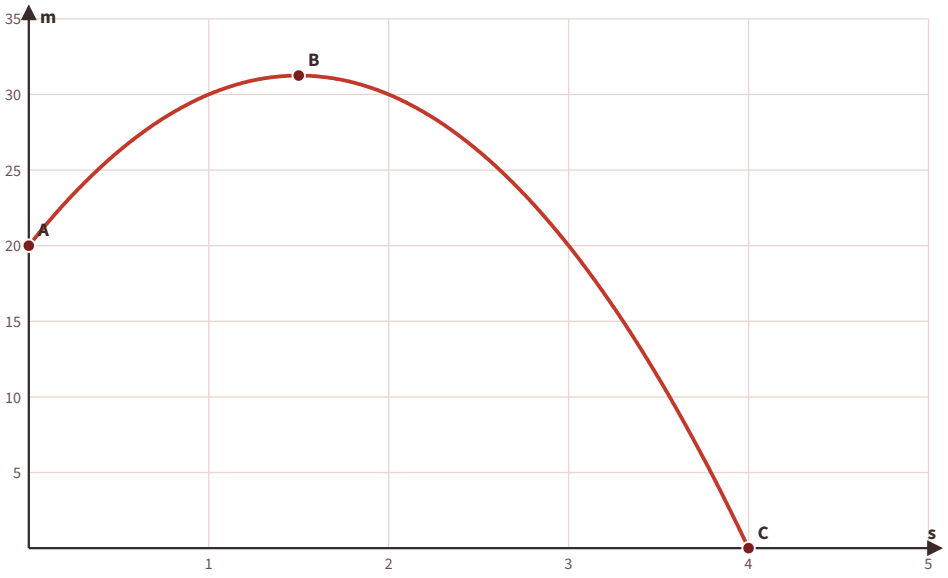


Fuente: Gráfica elaborada con los datos de F2.

Con una regla, ¿por dónde pasaría la recta que mejor se ajusta a los puntos? Será la tarea de la ficha 3.

F4 El balón lanzado desde el balcón

GRÁFICO



Fuente: Gráfica calculada para el aula con el modelo $h = -5t^2 + 15t + 20$ (se toma $g \approx 10$ m/s² y se desprecia el rozamiento).

¿Qué representan los puntos A, B y C? ¿Cuándo crece la altura y cuándo decrece?

F5 Puesto de bocadillos: ingresos según el precio

DATOS

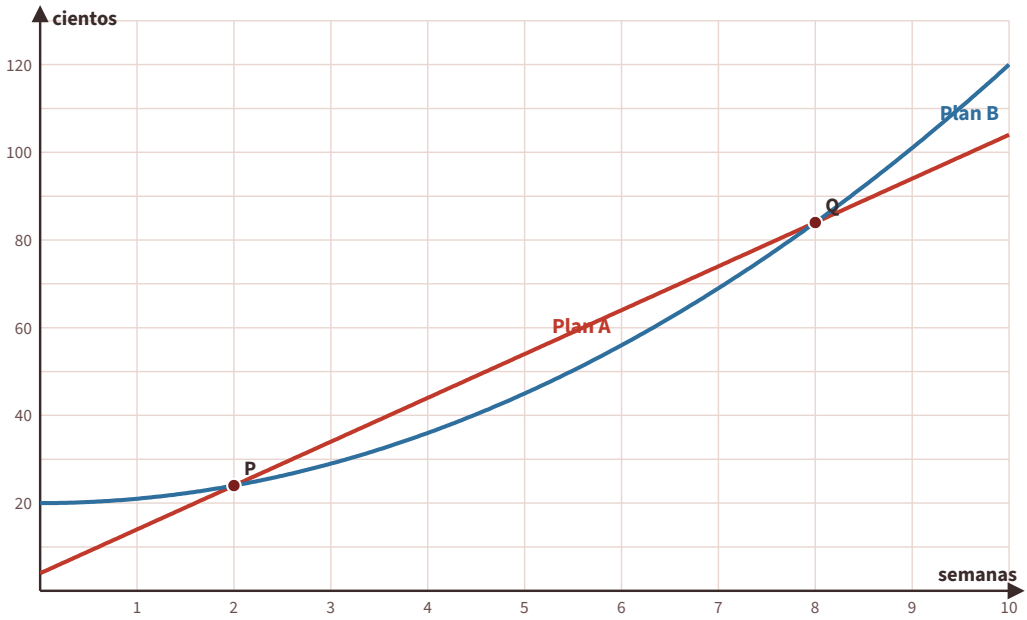
Precio p (€)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Vendidos n	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
Ingresos I (€)	0	180	320	420	480	500	480	420	320	180	0

Fuente: Datos ficticios creados para el aula: si el precio es p €, se venden $n = 100 - 5p$ bocadillos y los ingresos son $I = p \cdot n$.

¿Por qué suben los ingresos al principio y bajan después? ¿Hay un precio óptimo?

F6 Dos planes de seguidores: lineal frente a cuadrático

GRÁFICO

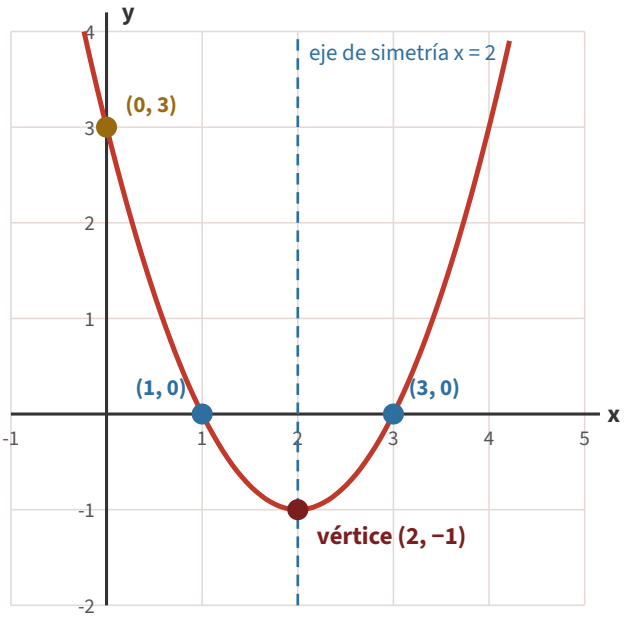


Fuente: Gráfica calculada para el aula con $A = 4 + 10t$ y $B = 20 + t^2$ (S en cientos de seguidores, t en semanas).

Las dos curvas se cortan en P y en Q. ¿Qué plan va por delante antes de P, entre P y Q, y después de Q?

F7 Anatomía de una parábola

ESQUEMA



y = x² − 4x + 3
forma y = ax² + bx + c
a = 1 > 0: abre hacia arriba
(tiene un mínimo)

Vértice: x = −b / (2a) = 4 / 2 = 2
y = 4 − 8 + 3 = −1

Cortes con el eje x:
x² − 4x + 3 = 0 → x = 1 y x = 3

Corte con el eje y: c = 3

Fuente: Esquema de elaboración propia con $y = x^2 - 4x + 3$.

Comprueba los tres puntos con la expresión: $2^2 - 8 + 3 = -1; 1 - 4 + 3 = 0; 9 - 12 + 3 = 0$.

F8 Fórmulas y ejemplo resuelto

TEXTO

Recta $y = mx + n$: pendiente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; ordenada n (corte con el eje y); corte con el eje x: se resuelve $mx + n = 0$.

Parábola $y = ax^2 + bx + c$: si $a > 0$ abre hacia arriba (mínimo); si $a < 0$, hacia abajo (máximo). Vértice en $x_v = \dfrac{-b}{2a}$. Corte con el eje y: c. Cortes con el eje x: soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$.

Tasa de variación media en $[a, b]$: $\mathrm{TVM} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (con unidades). En una recta es siempre m.

Ejemplo (balón). $h = -5t^2 + 15t + 20$: $a = -5 < 0$, máximo. $t_v = \dfrac{-15}{2 \cdot (-5)} = 1{,}5$ s y $h(1{,}5) = -11{,}25 + 22{,}5 + 20 = 31{,}25$ m. Cortes con el eje t: $-5t^2 + 15t + 20 = 0 \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = 4$ o $t = -1$; solo vale $t = 4$ (dominio contextual).

Fuente: Elaboración propia.

Una solución matemática puede no tener sentido en la historia: siempre hay que mirar el dominio.

F9 Cómo se hace una ficha del atlas

PROTOCOLO

Cada ficha del atlas ocupa media página y contiene:

- **1. Fenómeno** y pregunta que responde.
- **2. Variables** con unidades y **dominio contextual**.
- **3. Tabla** con al menos cinco valores.
- **4. Gráfica** con ejes rotulados y escala.
- **5. Expresión** y tipo (lineal o cuadrática).
- **6. Puntos relevantes**: cortes con los ejes, vértice (si hay) y máximo o mínimo.
- **7. Tasa de variación media** en un intervalo, con su interpretación.
- **8. Límites del modelo**: dónde deja de tener sentido.

Fuente: Elaboración propia.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 7 · El mundo cambia: las funciones lo cuentan

ALUMNADO

FICHA 1 Historias y gráficas

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Usa F1 y F4. Lo primero en un fenómeno: qué variables hay y para qué valores tiene sentido.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

La pendiente de la recta que pasa por $(0, 1)$ y $(2, 5)$ es…

☐ 2 ☐ 4 ☐ $\frac{1}{2}$

La gráfica de $y = x^2$ es…

☐ una recta ☐ una parábola ☐ una línea quebrada

Si $f(x) = 3x - 2$, entonces $f(4)$ vale…

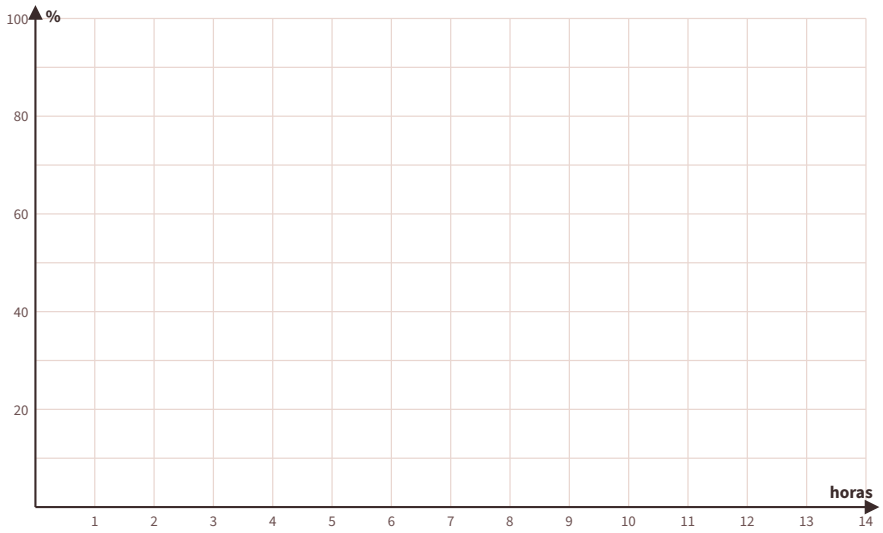
☐ 14 ☐ 12 ☐ 10

2 **Completa para los fenómenos 1, 3 y 4 de F1.**

Fenómeno	Variable independiente (unidad)	Variable dependiente (unidad)	Dominio contextual
1. Batería			
3. Balón			
4. Bocadillos			

3 **Con la gráfica del balón (F4): a) ¿a qué altura sale? b) ¿cuál es la altura máxima y cuándo se alcanza? c) ¿cuándo llega al suelo? d) ¿en qué intervalo crece la altura y en cuál decrece?**

4 **Dibuja la gráfica de la descarga de la batería $B = 100 - 8t$ marcando dos puntos (cuando $t = 0$ y cuando $B = 0$) y únelos con un segmento solo en su dominio contextual.**



FICHA 2 Rectas: pendiente e intersecciones

Sesión 2

Usa F8. La pendiente mide el ritmo de cambio y los cortes con los ejes marcan puntos clave.

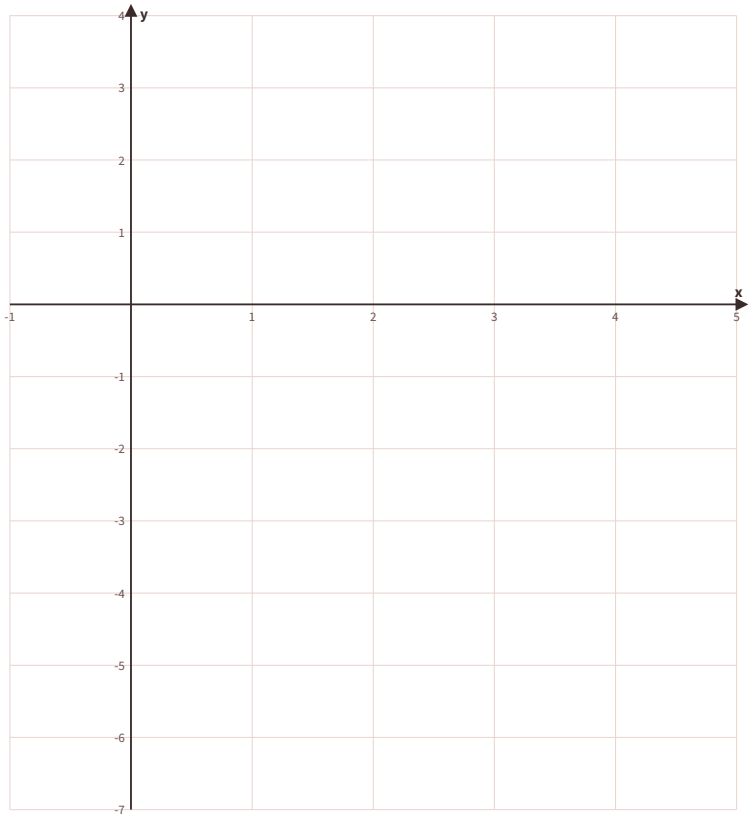
1 **Calcula la pendiente de la recta que pasa por cada pareja de puntos e indica si crece, decrece o es horizontal.**

Puntos	Cálculo	Pendiente	Comportamiento
$(0, 1)$ y $(2, 5)$			
$(1, 7)$ y $(4, 1)$			
$(-2, 3)$ y $(3, 3)$			
$(2, -1)$ y $(6, 5)$			

2 **Halla la expresión de la recta que pasa por $(1, 7)$ y $(4, 1)$ y comprueba con el otro punto.**

3 Para la batería $B = 100 - 8t$ (F1): di la pendiente y la ordenada, calcula el corte con el eje t e interprétalos. ¿Cuántos puntos pierde en 90 minutos? ¿Cuánto tarda en bajar del 100 % al 40 %?

4 Dibuja $y = 3x - 6$ calculando antes sus cortes con los ejes.

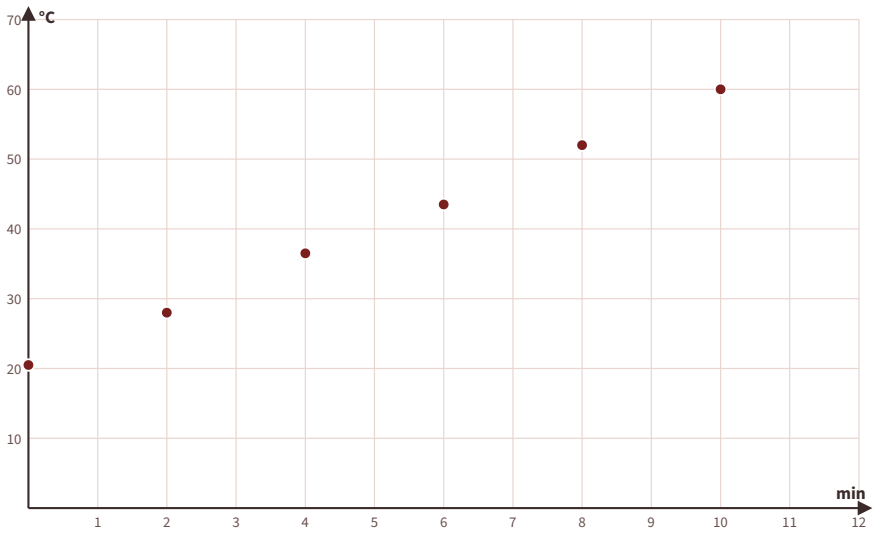


FICHA 3 Modelos lineales a partir de datos

Sesión 3

Usa F2 y F3. Un modelo no tiene por qué pasar por todos los puntos, pero sí acercarse a ellos.

1 **Dibuja con regla la recta que mejor se ajuste a los puntos del calentamiento (deja aproximadamente los mismos puntos por encima y por debajo).**



2 **Elige dos puntos de tu recta y calcula su pendiente y su ordenada. Escribe la expresión $T = mt + n$ e interpreta m y n con sus unidades.**

3 **Evalúa tu modelo: completa la tabla con las predicciones y los errores (dato − predicción).**

t (min)	Dato T (°C)	Predicción del modelo	Error
0	20,5		
2	28		
4	36,5		
6	43,5		
8	52		
10	60		

4 **Usa tu modelo: a) ¿qué temperatura habrá a los 7 minutos? b) ¿cuándo llegará a 100 °C? c) ¿tiene sentido el modelo a los 30 minutos? Razona con el dominio.**

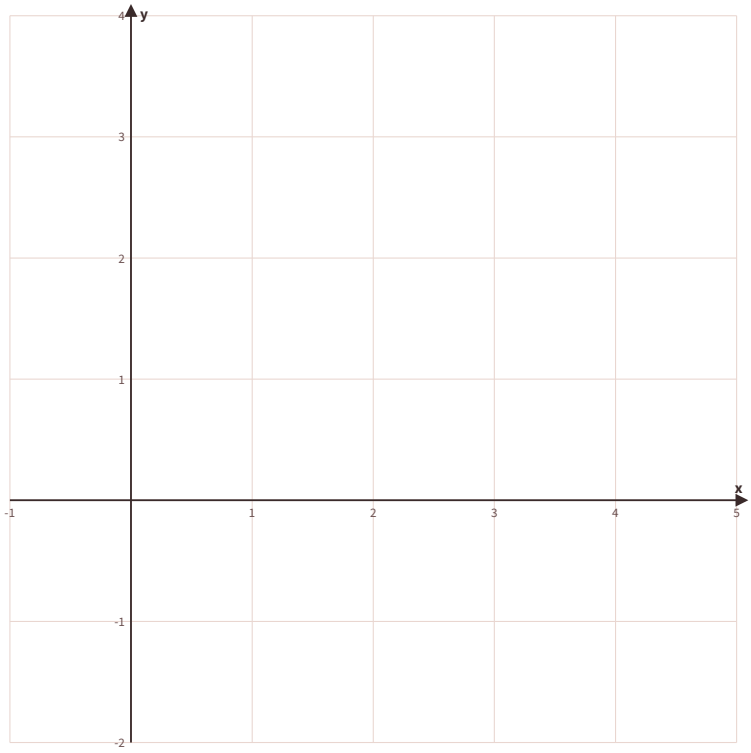
FICHA 4 Parábolas desde tablas y gráficas

Sesión 4

Usa F7 y F8. Para una parábola, busca el vértice, el eje de simetría y los cortes.

1 **Completa la tabla de $y = x^2 - 4x + 3$ y dibuja su parábola en los ejes.**

x	0	1	2	3	4
y					



2 **Con F7, indica el vértice, el eje de simetría, los cortes con ambos ejes y si hay máximo o mínimo.**

3 **Completa la tabla del balón $h = -5t^2 + 15t + 20$ y comprueba en F4 que coincide con la gráfica. Calcula el vértice con $t_v = -b/(2a)$.**

t (s)	0	1	2	3	4
h (m)					

4 **Marca la respuesta correcta.**

La parábola $y = -2x^2 + 3$…
☐ abre hacia arriba ☐ abre hacia abajo ☐ es una recta

El vértice de $y = x^2 - 6x + 5$ está en $x =$…
☐ -3 ☐ 6 ☐ 3

La ordenada en el origen de $y = 2x^2 - 5x + 7$ es…
☐ 7 ☐ -5 ☐ 2

FICHA 5 Comparación lineal y cuadrática

Sesión 5

Usa F6 y F8. La tasa de variación media dice cuánto cambia S por cada semana en un intervalo.

1 **Completa la tabla de valores de los dos planes de F6 ($A = 4 + 10t$, $B = 20 + t^2$).**

t (semanas)	0	2	4	6	8	10
A						
B						

2 **Calcula la TVM de cada plan en intervalos de dos semanas, con unidades.**

Intervalo	TVM plan A	TVM plan B
$[0, 2]$		
$[2, 4]$		
$[4, 6]$		
$[6, 8]$		
$[8, 10]$		

3 ¿Qué plan tiene más seguidores a las 5 semanas? ¿Y a las 9? Calcula cada valor.

4 Observa cómo cambian las TVM de cada plan. ¿Qué plan crecerá más a largo plazo? Explica por qué sin hacer más cálculos.

FICHA 6 Puntos de corte y su significado

Sesión 6

Usa F5, F6 y F8. Un punto de corte entre dos funciones es una solución de $f(x) = g(x)$.

1 Calcula cuándo los dos planes tienen los mismos seguidores resolviendo $4 + 10t = 20 + t^2$ y comprueba con la tabla.

2 Interpreta los puntos P y Q de F6: qué ocurre antes de P, entre P y Q y después de Q, y qué plan elegirías para una campaña de 6 semanas y para otra de 12 semanas.

3 **Ingresos del puesto (F5) con $I = -5p^2 + 100p$: calcula los cortes con el eje p y el vértice, e interpreta cada uno. ¿A qué precio son máximos los ingresos?**

4 **Calcula entre qué precios los ingresos son de 420 € o más resolviendo $-5p^2 + 100p \geq 420$ y comprueba con la tabla de F5.**

FICHA 7 Construimos el atlas

Sesión 7

Trabajad en equipo con roles: redactor, calculista, dibujante y portavoz. Seguid los ocho elementos de F9.

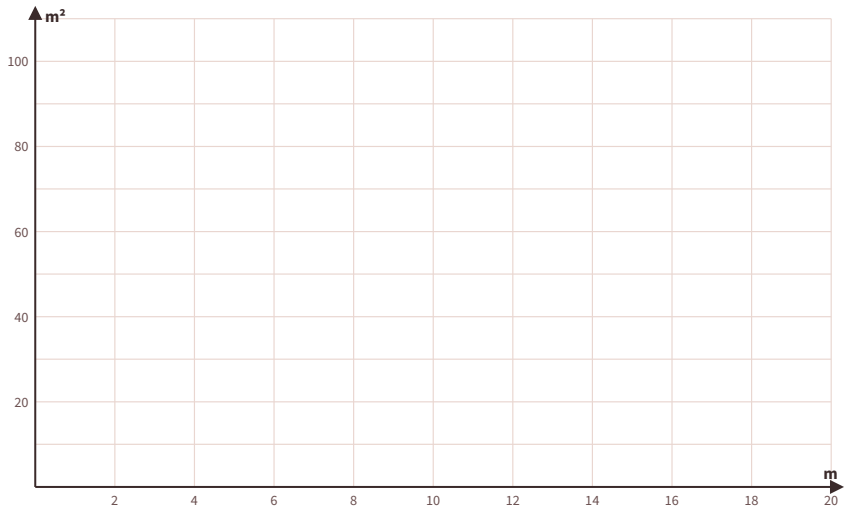
1 **Planificad las fichas del atlas con los fenómenos de F1.**

Fenómeno	Tipo	Expresión	Dominio	Puntos relevantes
1. Batería				
2. Calentamiento				
3. Balón				
4. Bocadillos				
5. Seguidores				

2 **Fenómeno propio. Un jardín rectangular se cerca con 40 m de valla; un lado mide x m. Escribe el otro lado, el área $A(x)$ y su dominio. Completa la tabla, halla el vértice e interpreta.**

x (m)	0	5	10	15	20
A (m²)					

3 **Dibuja la gráfica del jardín y rotula sus puntos relevantes.**



4 **Revisión cruzada: otro equipo revisa vuestras fichas.**

- ☐ Cada ficha indica variables con unidades y dominio contextual
- ☐ La expresión coincide con la tabla y con la gráfica
- ☐ Los puntos relevantes (cortes, vértice) están bien calculados
- ☐ La TVM lleva unidades y se interpreta
- ☐ Se señalan los límites de cada modelo

FICHA 8

Reto individual de modelización

Sesión 8

Resuelve sin ayuda del equipo. Escribe cada paso y comprueba tus resultados.

1 **Un dron sube y baja siguiendo $h = -2t^2 + 12t$ (m, con t en s). Calcula sus cortes con el eje t, su altura máxima y cuándo la alcanza, el dominio contextual y el intervalo en el que está a 16 m o más de altura.**

2 **Estos datos miden el área de una mancha de moho: x (días) 0, 2, 4, 6, 8 → y (cm²) 5,2; 9,1; 12,8; 17,1; 20,9. Ajusta una recta, escribe su expresión, predice y para $x = 10$ y di si extrapolarías hasta $x = 100$.**

3 **Un plan A cobra 12 € fijos más 3 € por hora y un plan B cobra 5 € por hora. ¿Cuándo cuestan lo mismo? ¿Cuál conviene para 4 horas y cuál para 10?**

4 **Para el balón $h = -5t^2 + 15t + 20$ calcula la TVM en $[0, 1]$ y en $[3, 4]$ e interpreta los signos y las unidades.**

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 7 · El mundo cambia: las funciones lo cuentan

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Atlas de funciones y fenómenos. Cada ficha lleva fenómeno, variables, tabla, gráfica, expresión, puntos relevantes, TVM y límites del modelo (F9).

Título del atlas, equipo y roles

Nombre del atlas, integrantes y roles.

Ficha A: fenómeno lineal

Variables · dominio · tabla · expresión · cortes · TVM.

Ficha B: fenómeno cuadrático

Variables · dominio · tabla · expresión · vértice · cortes.

Modelo ajustado a datos

Datos, recta, expresión y tabla de errores.

Comparación de dos modelos

Gráfica conjunta, puntos de corte y su significado.

Comentario: qué deducimos

Qué se puede afirmar sin conocer todos los valores.

Límites de los modelos

Dónde dejan de tener sentido y por qué.

Revisión

Firma del equipo revisor y mejoras.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 7 · El mundo cambia: las funciones lo cuentan

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Atlas de funciones y fenómenos**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] Cada ficha indica el fenómeno, las variables con unidades y el dominio contextual.
- [ ] Las tablas tienen al menos cinco valores y coinciden con la expresión.
- [ ] Las gráficas tienen ejes rotulados, escala y puntos relevantes marcados.
- [ ] La pendiente, la ordenada, los cortes y el vértice están bien calculados y se interpretan.
- [ ] La tasa de variación media lleva unidades y se interpreta.
- [ ] El ajuste lineal incluye una tabla de errores y una predicción razonada.
- [ ] La comparación de los dos modelos indica los puntos de corte y su significado.
- [ ] Se señalan los límites de cada modelo.
- [ ] El lenguaje matemático es correcto y se ha hecho la revisión cruzada.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 7 · El mundo cambia: las funciones lo cuentan

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Atlas de funciones y fenómenos**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 7 · El mundo cambia: las funciones lo cuentan

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé obtener la expresión de una recta o de una parábola y calcular su pendiente, su vértice y sus cortes con los ejes.	○	○	○	○
Sé interpretar una función en su contexto (dominio, tasa de variación, máximo) y reconocer hasta dónde sirve un modelo.	○	○	○	○
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	○	○	○	○
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	○	○	○	○
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	○	○	○	○
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	○	○	○	○

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 7 · El mundo cambia: las funciones lo cuentan

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Ejes y tablas preparados, y funciones con coeficientes sencillos, con los pasos señalados.

Ejemplo modelado: una recta y una parábola

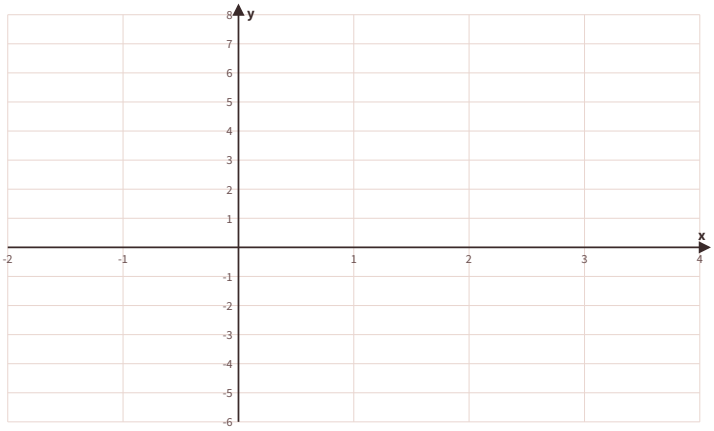
Recta $y = 2x - 1$**:** tabla $x = 0, 1, 2, 3 \to y = -1, 1, 3, 5$; pendiente $m = 2$ (sube 2 por cada 1), ordenada $n = -1$, corte con el eje x: $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0{,}5$. **Parábola** $y = x^2 - 2x$**:** tabla $x = -1, 0, 1, 2, 3 \to y = 3, 0, -1, 0, 3$; vértice en $x = -b/(2a) = 2/2 = 1, y = -1$; cortes: $x = 0$ y $x = 2$.

Glosario y símbolos esenciales

Pendiente m: cambio de y por cada unidad de x. **Ordenada** n: valor de y para $x = 0$. **Vértice**: punto más alto o más bajo de la parábola. **Dominio contextual**: valores de x que tienen sentido en la historia. **TVM** $= \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

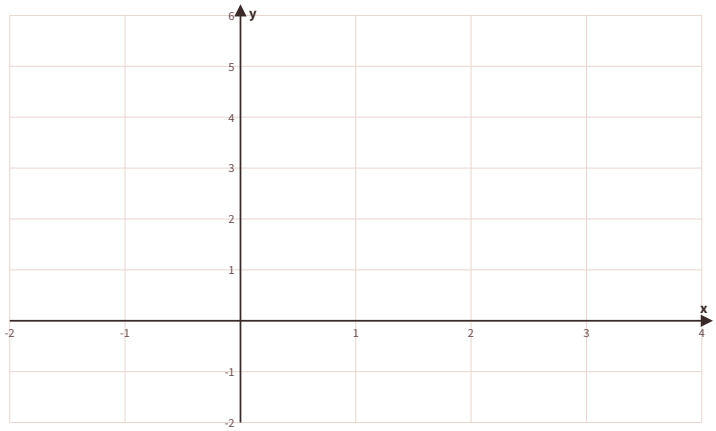
1 **Completa la tabla de $y = 3x - 2$ y dibuja su recta en los ejes preparados. Di su pendiente y su ordenada.**

x	-1	0	1	2	3
y					



2 Completa la tabla de $y = x^2 - 2x$ y dibuja su parábola. Marca el vértice y los cortes con el eje x.

x	-1	0	1	2	3
y					



3 Una recta pasa por $(0, 2)$ y $(3, 8)$. Calcula su pendiente con $m = \Delta y / \Delta x$ y escribe su expresión.

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 7 · El mundo cambia: las funciones lo cuentan

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Dos modelos para unos mismos datos: ¿cuál elegir y hasta dónde?

El área de una mancha de moho en una placa se mide cada día: día 0: 2,0 cm²; día 1: 3,4 cm²; día 2: 5,1 cm²; día 3: 7,5 cm²; día 4: 10,2 cm²; día 5: 13,6 cm². Se pueden ajustar a ojo una recta y una parábola, que dan predicciones muy distintas más allá de los datos.

Pasos

1. Representa los datos y ajusta visualmente una recta. Escribe su expresión a partir de dos puntos.
2. Prueba una parábola de la forma $y = 2 + x + 0{,}25x^2$ (o ajusta otra tuya). Compara los errores de las dos con una tabla.
3. Predice el área de los dos modelos para el día 10 y para el día 100. ¿Cuál te parece más realista y por qué?
4. Escribe en cuatro frases los límites de cada modelo: qué suponen y dónde dejarían de valer.

1 **Tabla de errores de los dos modelos.**

Día	Dato (cm²)	Recta	Error recta	Parábola	Error parábola
0	2,0				
1	3,4				
2	5,1				
3	7,5				
4	10,2				
5	13,6				

Entrega

La gráfica con los datos y los dos modelos, la tabla de errores, las predicciones para los días 10 y 100 y los límites de cada modelo escritos con tus palabras.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 7 · El mundo cambia: las funciones lo cuentan

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: $m = (5-1)/(2-0) = 2$; una parábola; $3 \cdot 4 - 2 = 10$.
2. Batería: t (h), B (%), $[0; 12{,}5]$. Balón: t (s), h (m), $[0, 4]$. Bocadillos: p (€), I (€), $[0, 20]$.
3. a) 20 m (punto A). b) Máxima en B: 31,25 m a los 1,5 s. c) A los 4 s (punto C). d) Crece en $[0; 1{,}5]$ y decrece en $[1{,}5; 4]$.
4. Puntos $(0, 100)$ y $(12{,}5; 0)$; segmento solo entre $t = 0$ y $t = 12{,}5$ (la carga no puede ser negativa).

Ficha 2

1. $(0, 1), (2, 5)$: $m = 4/2 = 2$, crece. $(1, 7), (4, 1)$: $m = -6/3 = -2$, decrece. $(-2, 3), (3, 3)$: $m = 0$, horizontal. $(2, -1), (6, 5)$: $m = 6/4 = 1{,}5$, crece.
2. $m = -2$; $7 = -2 \cdot 1 + n \Rightarrow n = 9$; $y = -2x + 9$. Comprobación: $-2 \cdot 4 + 9 = 1$ ✔.
3. Pendiente -8 (pierde 8 puntos por hora); ordenada 100 (carga inicial). Corte con el eje t: $100 - 8t = 0 \Rightarrow t = 12{,}5$ h (se agota). En 90 min (1,5 h): $8 \cdot 1{,}5 = 12$ puntos. De 100 % a 40 %: $60 : 8 = 7{,}5$ h.
4. Cortes de $y = 3x - 6$: con el eje y: $(0, -6)$; con el eje x: $3x = 6 \Rightarrow (2, 0)$. Recta que pasa por esos dos puntos.

Ficha 3

1. Recta orientativa por $(0, 20)$ y $(10, 60)$ (se aceptan rectas razonables).
2. Con $(0, 20)$ y $(10, 60)$: $m = 40/10 = 4$ °C/min, $n = 20$ °C (temperatura inicial). $T = 4t + 20$.
3. Predicciones $20, 28, 36, 44, 52, 60$; errores $0{,}5;\ 0;\ 0{,}5;\ -0{,}5;\ 0;\ 0$. Todos pequeños: el modelo es bueno en $[0, 10]$.
4. a) $T(7) = 4 \cdot 7 + 20 = 48$ °C. b) $4t + 20 = 100 \Rightarrow t = 20$ min. c) A los 30 min saldría 140 °C, imposible porque el agua hierve a 100 °C: el modelo solo vale hasta $t = 20$ (dominio $[0, 20]$).

Ficha 4

1. $y = 3, 0, -1, 0, 3$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4$. Parábola que abre hacia arriba.
2. Vértice $(2, -1)$; eje $x = 2$; cortes con el eje x: $(1, 0)$ y $(3, 0)$; con el eje y: $(0, 3)$; mínimo en el vértice.
3. $h = 20, 30, 30, 20, 0$. Vértice: $t_v = -15/(2 \cdot (-5)) = 1{,}5$ s; $h = 31{,}25$ m (coincide con el punto B).
4. Abre hacia abajo ($a = -2 < 0$); $x = 6/2 = 3$; 7.

Ficha 5

1. A: $4, 24, 44, 64, 84, 104$. B: $20, 24, 36, 56, 84, 120$.
2. Plan A: TVM $= 10$ cientos/semana en todos los intervalos. Plan B: $\frac{24-20}{2} = 2$; $\frac{36-24}{2} = 6$; $\frac{56-36}{2} = 10$; $\frac{84-56}{2} = 14$; $\frac{120-84}{2} = 18$.
3. A las 5 semanas: $A = 54, B = 45$: va por delante el A. A las 9 semanas: $A = 94, B = 101$: va por delante el B.
4. La TVM del A es constante (10) y la del B aumenta en 4 cada dos semanas; antes o después el B alcanza y supera al A para siempre: a largo plazo gana el cuadrático.

Ficha 6

1. $t^2 - 10t + 16 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \dfrac{10 \pm 6}{2} \Rightarrow t = 2$ o $t = 8$. Con 24 y 84 cientos en cada plan: ✔ (tabla de F6).
2. Antes de la semana 2 va por delante B (por poco); entre las semanas 2 y 8, A; después de la 8, B. Para 6 semanas conviene A; para 12 semanas, B.
3. Cortes: $-5p^2 + 100p = 0 \Rightarrow p = 0$ (no se vende nada) o $p = 20$ (nadie compra); vértice: $p = -100/(2 \cdot (-5)) = 10$ y $I = 500$ €: ingresos máximos a 10 €.
4. $-5p^2 + 100p - 420 \geq 0 \Rightarrow p^2 - 20p + 84 \leq 0$; raíces $p = \dfrac{20 \pm \sqrt{400 - 336}}{2} = \dfrac{20 \pm 8}{2} = 6, 14$. Ingresos de 420 € o más para $6 \leq p \leq 14$ (en F5: 420 € a 6 € y a 14 €).

Ficha 7

1. Se acepta cualquier planificación coherente. Ejemplo: batería, lineal, $B = 100 - 8t$, $[0; 12{,}5]$, corte $(12{,}5; 0)$; calentamiento, lineal, $T = 4t + 20$, $[0, 20]$; balón, cuadrática, $h = -5t^2 + 15t + 20$, vértice $(1{,}5; 31{,}25)$, corte en $t = 4$; bocadillos, cuadrática, vértice $(10, 500)$, cortes $p = 0, 20$; seguidores: lineal y cuadrática que se cortan en $t = 2$ y $t = 8$.
2. Otro lado: $20 - x$ (semiperímetro 20). $A(x) = x(20 - x) = -x^2 + 20x$, dominio $[0, 20]$. $A = 0, 75, 100, 75, 0$. Vértice: $x = 10$, $A = 100$ m² (el cuadrado, máxima área).
3. Parábola que abre hacia abajo con cortes en $x = 0$ y $x = 20$ y vértice $(10, 100)$.

Ficha 8

1. Cortes: $-2t^2 + 12t = 0 \Rightarrow t = 0$ o $t = 6$. Vértice: $t = -12/(2 \cdot (-2)) = 3$ s, $h = -18 + 36 = 18$ m. Dominio $[0, 6]$. $h \geq 16$: $-2t^2 + 12t - 16 \geq 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 \leq 0 \Rightarrow 2 \leq t \leq 4$ (con $h(2) = h(4) = 16$).
2. Recta aproximada por $(0, 5)$ y $(8, 21)$ (o similar): $m \approx 2$, $y \approx 2x + 5$ (los errores de los datos son menores que 0,3 cm²). $x = 10$: $y \approx 25$ cm². Extrapolar hasta $x = 100$ (205 cm²) no es razonable: la mancha no puede crecer indefinidamente a ritmo constante (el espacio de la placa es finito).
3. $12 + 3h = 5h \Rightarrow h = 6$ horas, 30 € en los dos. Para 4 horas: A $= 24$ €, B $= 20$ €: conviene B. Para 10 horas: A $= 42$ €, B $= 50$ €: conviene A.
4. En $[0, 1]$: $\dfrac{30 - 20}{1} = +10$ m/s (sube 10 m cada segundo en media). En $[3, 4]$: $\dfrac{0 - 20}{1} = -20$ m/s (baja 20 m cada segundo en media, cae más deprisa).

Refuerzo

1. $y = 3x - 2$: $-5, -2, 1, 4, 7$. Pendiente 3; ordenada -2.
2. $y = x^2 - 2x$: $3, 0, -1, 0, 3$ (para $x = -1, 0, 1, 2, 3$). Vértice $(1, -1)$; cortes $x = 0$ y $x = 2$.
3. $m = (8 - 2)/(3 - 0) = 2$; $y = 2x + 2$.

Ampliación

1. Recta por $(0, 2)$ y $(5, 13{,}6)$: $m = 2{,}32$; $y = 2 + 2{,}32x$ (o $2 + 2{,}3x$). Errores de la recta hasta $\approx 1{,}5$ cm² en el día 2.
2. Parábola $2 + x + 0{,}25x^2$: predicciones 2; $3{,}25$; 5; $7{,}25$; 10; $13{,}25$; errores menores que $0{,}35$ cm². La parábola se ajusta mejor.
3. Día 10: recta ≈ 25 cm²; parábola $2 + 10 + 25 = 37$ cm². Día 100: recta ≈ 234 cm²; parábola $2 + 100 + 2\,500 = 2\,602$ cm². Ninguna es realista para 100 días (la placa es finita); la parábola es razonable a corto plazo.
4. Se valoran respuestas que expliquen: la recta supone ritmo constante; la parábola supone ritmo creciente; ambas dejan de valer cuando se agota el espacio o los nutrientes.

Errores frecuentes

- Calcular la pendiente al revés ($\Delta x/\Delta y$) o con una resta de coordenadas en distinto orden en numerador y denominador.
- Confundir la ordenada con el corte con el eje x, o dar el corte como un solo número sin decir con qué eje.
- Calcular mal el vértice (olvidar el signo en $-b/(2a)$) o dar solo la coordenada x sin calcular la y.
- Aceptar soluciones que no están en el dominio contextual (por ejemplo, $t = -1$ en el balón).
- Ajustar una recta que pasa por el primer y el último dato sin mirar los demás, o extrapolar muy lejos de los datos.
- Interpretar la TVM sin unidades o confundir su signo (negativo = decrece).

Criterios para valorar respuestas abiertas

- En las fichas del atlas se valora que cada resultado esté interpretado en su contexto, con unidades y dominio.
- En el ajuste de datos se acepta cualquier recta razonable si los errores son pequeños y se explica cómo se ha elegido.
- En los límites del modelo se valora que se justifique con la situación real (agua que hierve, espacio finito…), no solo con la fórmula.
- GeoGebra o una hoja de cálculo pueden usarse para comprobar gráficas y ajustes, pero los cálculos clave deben aparecer escritos por el alumnado.

08

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Medir sin poder medir directamente

PREGUNTA GUÍA

¿Cómo podemos calcular una distancia inaccesible usando relaciones geométricas?

CURSO
3.º ESO

SESIONES
8 sesiones · 3.º trimestre

SENTIDOS PRIORITARIOS
B · Sentido de la medida · C · Sentido espacial

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE3, CE6, CE7

PRODUCTO FINAL
Informe de medida indirecta

CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 1.2, 3.1, 6.1, 7.1

Contexto, reto y sentido

El instituto prepara una salida a un pueblo con una torre del reloj, un río y una ruta de montaña, y el profesorado de Matemáticas lanza un reto: ¿cómo se mide la altura de la torre sin subirse a ella?, ¿qué anchura tiene el río sin cruzarlo?, ¿qué distancia hay entre el refugio y el mirador si el camino da un rodeo? Ninguna de estas medidas se puede tomar directamente con una cinta, pero todas se pueden **calcular** si se reconoce la geometría escondida: triángulos semejantes, rectas paralelas, triángulos rectángulos y coordenadas.

La situación moviliza el sentido de la medida y el espacial: semejanza y razón de semejanza, teorema de Tales, teorema de Pitágoras, distancia entre puntos en un sistema de coordenadas y modelización geométrica de una situación real. Y no solo se calcula: se valora cuánto se puede fiar uno del resultado, con errores absolutos y relativos y sensibilidad a la imprecisión de las medidas.

Reto

Elaborar un informe de medida indirecta que calcule una distancia o una altura inaccesible con un modelo geométrico, indique qué medidas se han tomado y con qué precisión, y valore el error del resultado.

Producto final

Informe de medida indirecta.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

1.1 Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.

1.2 Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.

3.1 Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.

6.1 Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.

7.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales.

Saberes básicos prioritarios

B
Sentido de la medida

- Medida indirecta de longitudes mediante semejanza, Tales y Pitágoras.
- Estimación, redondeo y error absoluto y relativo; fuentes de error en la toma de datos.
- Precisión de los instrumentos y sensibilidad del resultado a los errores de medida.

C
Sentido espacial

- Figuras semejantes: razón de semejanza, criterios de semejanza de triángulos y relación entre razones de longitudes, áreas y volúmenes.
- Teorema de Tales: rectas paralelas cortadas por secantes y proporcionalidad de segmentos.
- Teorema de Pitágoras y su aplicación a distancias en el plano y en el espacio cercano.
- Coordenadas cartesianas y distancia entre dos puntos.
- Modelización geométrica de situaciones reales con esquemas rotulados.

F
Sentido socioafectivo

- Planificación, reparto de roles y trabajo en equipo en una toma de datos.
- Aceptación de la incertidumbre y del error experimental como parte del proceso científico.

Objetivos didácticos

- ✓ Aplicar semejanza y teorema de Tales.
- ✓ Usar Pitágoras y coordenadas en problemas.
- ✓ Construir un modelo geométrico de una medida indirecta.
- ✓ Valorar precisión y fuentes de error.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Situaciones inaccesibles y dibujo del modelo

Evidencia: Ficha 1: tabla de cuatro situaciones inaccesibles, esquema geométrico del río y estimación previa de la altura de la torre.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Semejanza y razones

Evidencia: Ficha 2: razones entre lados de triángulos, ampliación con k = 2,5 (lados, perímetro y área), maqueta a escala 1:200 y verdadero o falso.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Tales y sombras simuladas

Evidencia: Ficha 3: Tales con rectas paralelas, altura de la torre y de un árbol por sombras y anchura del río con triángulos semejantes.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Pitágoras y distancias

Evidencia: Ficha 4: cable de teleférico, distancias del mapa con coordenadas, comprobación de un triángulo rectángulo y visual hasta el árbol del río.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Coordenadas y distancia gráfica

Evidencia: Ficha 5: puntos en una cuadrícula, fórmula de la distancia, puntos alineados y distancia real sobre un mapa con desnivel.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Toma de datos real o simulada

Evidencia: Ficha 6: alturas calculadas por cuatro equipos, errores absoluto y relativo, sensibilidad a la medida y plan de toma de datos.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Informe de medida indirecta

Evidencia: Ficha 7: informe guiado de la altura de un pino con esquema, cálculo, intervalo de error y revisión cruzada.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

8

SESIÓN 8

Defensa y error experimental

Evidencia: Ficha 8: reto individual con el río, un mástil, una distancia entre puntos y el análisis del error de dos medidas.

Ficha: Anexo 3 · ficha 8

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Cinta métrica · regla · fotografías/diagramas · GeoGebra opcional

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Diagramas ya trazados y triángulos con números sencillos.

Ampliación

Anexo 9

Comparar dos métodos de medida indirecta y analizar sensibilidad al error.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Interpretación de la situación inaccesible: qué se pide, qué se puede medir, qué datos son útiles y cuál es el esquema geométrico.	Ficha 1 / lista de cotejo
1.2	Elección de la herramienta adecuada (semejanza, Tales, Pitágoras o distancia entre puntos) y ejecución correcta de los cálculos.	Fichas 2, 3, 4 y 5 / escala de valoración
3.1	Formulación y comprobación de conjeturas sobre si dos triángulos son semejantes o rectángulos y sobre qué medida afecta más al error.	Fichas 2, 4 y 6 y Anexo 9 / rúbrica
6.1	Modelización de torre, río y ruta con triángulos y coordenadas, y uso del modelo para obtener una medida real con su error.	Fichas 6 y 7 e informe (Anexo 4) / rúbrica
7.1	Esquemas rotulados, tablas de datos y de errores, y representaciones en coordenadas de la medida indirecta.	Fichas 1, 5 y 7 e informe (Anexo 4) / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Informe, modelo, cálculos y análisis de error.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 8 · Medir sin poder medir directamente

ALUMNADO

La torre del reloj del pueblo tiene una sombra enorme a las doce, pero nadie sabe cuánto mide. El río, tranquilo, separa el camino del árbol centenario: ¿cuántos metros hay de orilla a orilla? Y la ruta al mirador da un rodeo, pero ¿cuánto se ahorraría yendo en línea recta? Nadie puede subir a la torre ni cruzar el río. Sin embargo, con una estaca, una cinta métrica y un poco de geometría se puede saber. Vais a ser un equipo de topógrafos: elegir el método, tomar medidas, calcular y, sobre todo, decir cuánto os fiáis del resultado.

> *¿Cómo podemos calcular una distancia inaccesible usando relaciones geométricas?*

Vuestro reto

Elaborar un informe de medida indirecta que calcule una distancia o una altura inaccesible con un modelo geométrico, indique qué medidas se han tomado y con qué precisión, y valore el error del resultado.

Lo que vais a producir

Informe de medida indirecta.

Hoja de ruta · 8 sesiones

1. Identificamos situaciones inaccesibles y dibujamos su modelo geométrico.
2. Estudiamos la semejanza y las razones entre longitudes, áreas y volúmenes.
3. Aplicamos Tales para calcular alturas con sombras y anchuras.
4. Usamos Pitágoras para calcular distancias.
5. Llevamos las distancias a un sistema de coordenadas.
6. Tomamos datos, reales o simulados, y analizamos sus errores.
7. Redactamos el informe de medida indirecta.
8. Defendemos el informe y analizamos el error experimental.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Aplicar semejanza y teorema de Tales.
- ✓ Usar Pitágoras y coordenadas en problemas.
- ✓ Construir un modelo geométrico de una medida indirecta.
- ✓ Valorar precisión y fuentes de error.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

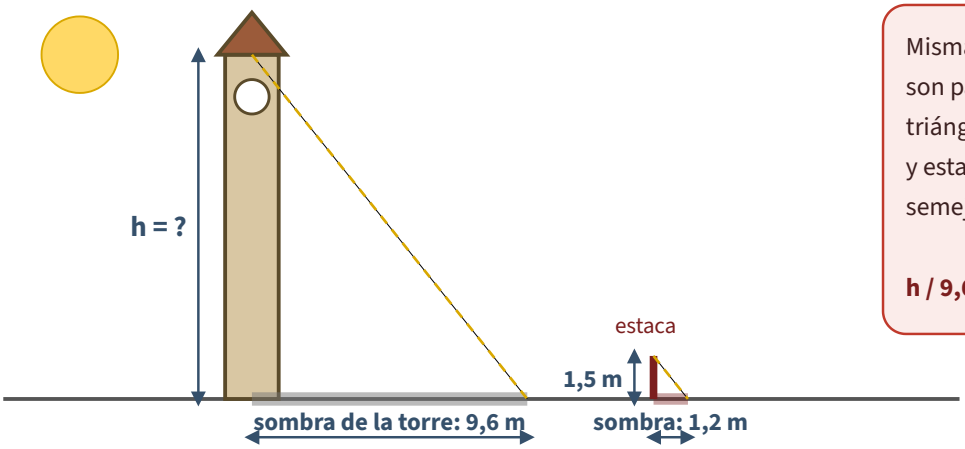
SdA 8 · Medir sin poder medir directamente

ALUMNADO

Esquemas de la torre, del río y de un mapa con coordenadas, datos simulados de cuatro equipos, el teorema de Tales, un cuadro de fórmulas y la tabla de precisión de los instrumentos. Los datos y lugares son ficticios, creados para el aula.

F1 La torre del reloj y su sombra

ESQUEMA



Misma hora: los rayos son paralelos, y los triángulos torre-sombra y estaca-sombra son semejantes:

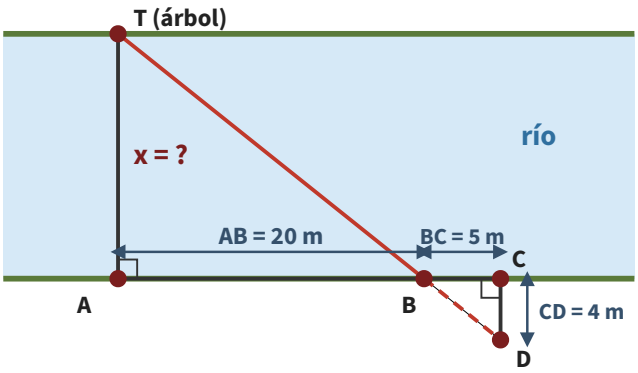
h / 9,6 = 1,5 / 1,2

Fuente: Esquema de elaboración propia; las proporciones respetan las medidas de la torre (12 m) y de las sombras.

Una estaca vertical de 1,5 m proyecta 1,2 m de sombra a la misma hora en que la torre proyecta 9,6 m. ¿Cuántas veces es mayor la sombra de la torre? ¿Qué te dice eso de su altura?

F2 La anchura del río con triángulos semejantes

ESQUEMA



Los triángulos TAB y DCB:

· ángulos rectos en A y en C

· ángulos iguales en B (opuestos por el vértice)

→ son semejantes.

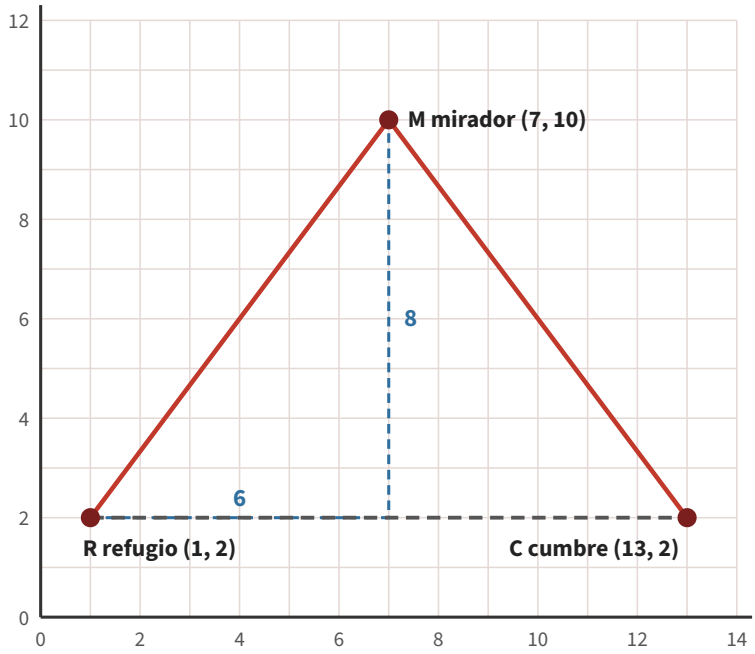
x / 4 = 20 / 5

Fuente: Esquema de elaboración propia con medidas ficticias (A y T están enfrentados; D está en la prolongación de TB).

Se miden solo distancias en la orilla accesible. ¿Cuáles son las medidas conocidas y cuál es la incógnita?

F3 Mapa de la ruta con coordenadas

ESQUEMA



Distancia entre dos puntos

$A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$:

$$\mathbf{d = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}}$$

(es el teorema de Pitágoras con los catetos Δx y Δy)

Ejemplo: R(1, 2) y M(7, 10)

$\Delta x = 6$, $\Delta y = 8$

$d = \sqrt{(6^2 + 8^2)} = 10$ km

1 cuadro = 1 km

Línea gris: atajo R → C

Fuente: Mapa ficticio creado para el aula; 1 cuadro de la cuadrícula equivale a 1 km.

La ruta pasa del refugio R al mirador M y a la cumbre C. ¿Cuánto ahorra el atajo R-C respecto al rodeo por M?

F4 Hoja de datos de cuatro equipos (torre del reloj)

DATOS

Equipo	Altura de la estaca (m)	Sombra de la estaca (m)	Sombra de la torre (m)
1	1,50	1,20	9,50
2	1,50	1,20	9,60
3	1,50	1,25	9,80
4	1,48	1,20	9,70

Fuente: Datos simulados creados para el aula: medidas tomadas a la misma hora por cuatro equipos. La altura oficial de la torre es 12,00 m (plano del ayuntamiento, ficticio).

Cada equipo debería obtener la misma altura. ¿Lo hacen? ¿A qué se deben las diferencias?

F5 Fórmulas y ejemplo resuelto

TEXTO

Semejanza de triángulos. Dos triángulos son semejantes si tienen los tres ángulos iguales (basta con dos) o los lados proporcionales. La razón $k = \dfrac{\text{lado del grande}}{\text{lado correspondiente del pequeño}}$. Las longitudes se multiplican por k; las áreas, por k^2; los volúmenes, por k^3.

Tales. Si $AA' \parallel BB'$ y las secantes parten de O: $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OA'}{OB'} = \dfrac{AA'}{BB'}$.

Pitágoras. En un triángulo rectángulo, $c^2 = a^2 + b^2$. **Distancia entre dos puntos:** $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Errores. Error absoluto $= |\text{valor medido} - \text{valor real}|$. Error relativo $= \dfrac{\text{error absoluto}}{\text{valor real}}$ (en %).

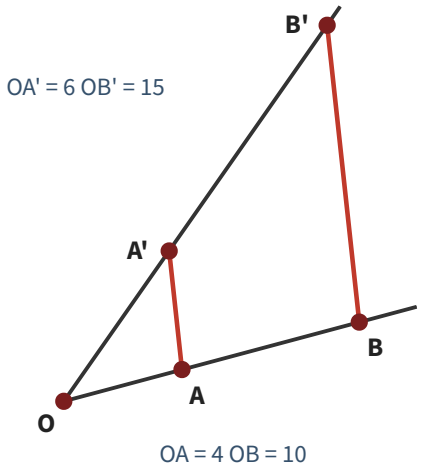
Ejemplo (río). $\dfrac{x}{CD} = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow x = \dfrac{20 \cdot 4}{5} = 16$ m.

Fuente: Elaboración propia.

Antes de calcular, escribe qué triángulos son semejantes y por qué.

F6 El teorema de Tales

ESQUEMA



Teorema de Tales

Si AA' ∥ BB' (rectas paralelas cortadas por dos secantes desde O):

OA / OB = OA' / OB' = AA' / BB'

Aquí: 4 / 10 = 6 / 15 = 0,4

y los triángulos OAA' y OBB' son semejantes con razón 2,5.

Fuente: Esquema de elaboración propia; las medidas se dan en unidades de longitud.

Calcula OB' si $OA = 4, OB = 10$ y $OA' = 6$ sin medir en el dibujo.

F7 Instrumentos de medida y su precisión

DATOS

Instrumento	División o precisión	Error habitual al medir	Uso en este proyecto
Regla de 30 cm	1 mm	± 1 mm	Planos y maquetas
Cinta métrica de 5 m	1 mm	± 1 cm	Sombras y distancias cortas
Cinta métrica de 30 m	1 cm	± 2 cm	Distancias en la orilla
Pasos (estimación)	aprox. 70 cm por paso	± 10 %	Estimación previa
GPS del móvil	metros	± 5 m	Posición sobre el mapa

Fuente: Valores orientativos de elaboración propia.

Un instrumento preciso no basta: también influyen el pulso, la verticalidad de la estaca o la hora.

F8 Cómo se redacta un informe de medida indirecta

PROTOCOLO

- **1. Situación y pregunta:** qué se quiere medir y por qué no se puede medir directamente.
- **2. Esquema geométrico** rotulado, con los triángulos, los ángulos rectos y las medidas.
- **3. Datos medidos** con su instrumento y su precisión.
- **4. Método y cálculo** con la propiedad usada (semejanza, Tales, Pitágoras).
- **5. Resultado** con unidades y redondeo razonable.
- **6. Comprobación** por otro camino o con una estimación.
- **7. Análisis del error:** error absoluto o relativo y cómo cambia el resultado si las medidas varían.
- **8. Conclusión** con el resultado y su margen de confianza.

Fuente: Elaboración propia.

F9 Vocabulario esencial

GLOSARIO

Medida indirecta	Se obtiene calculando a partir de otras medidas, sin medir directamente.
Razón de semejanza k	Cociente entre lados correspondientes de dos figuras semejantes.
Lados correspondientes	Los que están opuestos a ángulos iguales.
Cateto e hipotenusa	Catetos: lados del ángulo recto; hipotenusa: el lado opuesto (el mayor).
Error absoluto	Diferencia (sin signo) entre el valor medido y el real.
Error relativo	Error absoluto dividido entre el valor real (se suele dar en %).
Sensibilidad	Cuánto cambia el resultado final cuando cambia un poco una medida.

Fuente: Elaboración propia.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 8 · Medir sin poder medir directamente

ALUMNADO

FICHA 1 Situaciones inaccesibles

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Usa F1, F2 y F3. Lo primero: qué sí se puede medir y qué triángulos hay escondidos.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

Dos triángulos semejantes tienen…

☐ los lados iguales ☐ los ángulos iguales y los lados proporcionales ☐ la misma área

En un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4, la hipotenusa mide…

☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

Una estaca de 2 m proyecta 1 m de sombra. Un árbol que proyecta 5 m a la vez mide…

☐ 2,5 m ☐ 7 m ☐ 10 m

2 **Completa la tabla de situaciones.**

Situación	¿Qué no puedo medir directamente?	¿Qué sí puedo medir?	Modelo geométrico
Altura de la torre del reloj			
Anchura del río			
Distancia refugio-mirador			
Cable de un teleférico (desnivel conocido)			

3 **Dibuja el esquema geométrico de la medida de la anchura del río (F2): los dos triángulos, los ángulos rectos, las medidas y la incógnita.**

4 **Estima, sin calcular con exactitud, la altura de la torre de F1: ¿cuántas veces es mayor la sombra de la torre que la de la estaca? ¿Qué altura se espera?**

FICHA 2 Semejanza y razones

Sesión 2

Usa F5 y F6. La razón de semejanza multiplica longitudes; las áreas y los volúmenes se multiplican por potencias de k.

1 **Calcula las razones entre lados correspondientes y decide si los triángulos son semejantes.**

Triángulos (lados)	Razones	¿Semejantes?	k
$(3, 4, 5)$ y $(9, 12, 15)$			
$(2, 3, 4)$ y $(4, 6, 9)$			
$(5, 12, 13)$ y $(10, 24, 26)$			
$(6, 8, 10)$ y $(3, 4, 5)$			

2 **Un triángulo de lados 6, 8 y 10 cm se amplía con razón $k = 2{,}5$. Calcula los lados, el perímetro y el área del grande, y compara con los del pequeño.**

3 **Una maqueta de la torre a escala 1:200 mide 6 cm de alto. ¿Cuánto mide la torre? Su base es un cuadrado de 4 m de lado: calcula el lado y el área de la base en la maqueta.**

4 **Verdadero o falso. Corrige las falsas.**

	V	F
Dos triángulos con los tres ángulos iguales son semejantes.	☐	☐
Dos triángulos con la misma área son semejantes.	☐	☐
Si $k = 3$, el área del triángulo grande es 3 veces la del pequeño.	☐	☐
Dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo igual son semejantes.	☐	☐
Todos los rectángulos son semejantes.	☐	☐

FICHA 3 Tales y sombras

Sesión 3

Usa F1, F2, F4 y F6. Escribe siempre qué triángulos son semejantes y por qué.

1 **En la figura de Tales (F6): $OA = 4, OB = 10, OA' = 6$. Calcula OB'. Si $AA' = 3{,}2$ cm, ¿cuánto mide BB'?**

2 **Con los datos del equipo 2 (F4), plantea la proporción y calcula la altura de la torre.**

3 **Una estaca de 1 m proyecta 0,8 m de sombra y un árbol del patio proyecta 10 m a la misma hora. ¿Qué altura tiene el árbol? ¿Qué pasaría con el resultado si la estaca estuviera inclinada?**

4 Con las medidas de F2 ($AB = 20$ m, $BC = 5$ m, $CD = 4$ m), explica por qué TAB y DCB son semejantes y calcula la anchura x del río.

FICHA 4 Pitágoras y distancias

Sesión 4

Usa F3 y F5. En el mapa, un cuadro es un kilómetro.

1 Un cable de teleférico une dos estaciones con 120 m de distancia horizontal y 50 m de desnivel. ¿Cuánto mide el cable?

2 Con F3, calcula $d(R, M)$, $d(M, C)$ y $d(R, C)$ y la longitud de la ruta por el mirador. ¿Cuántos kilómetros se ahorran con el atajo $R \to C$?

3 ¿Es rectángulo el triángulo RMC? Compruébalo con Pitágoras y clasifícalo según sus lados.

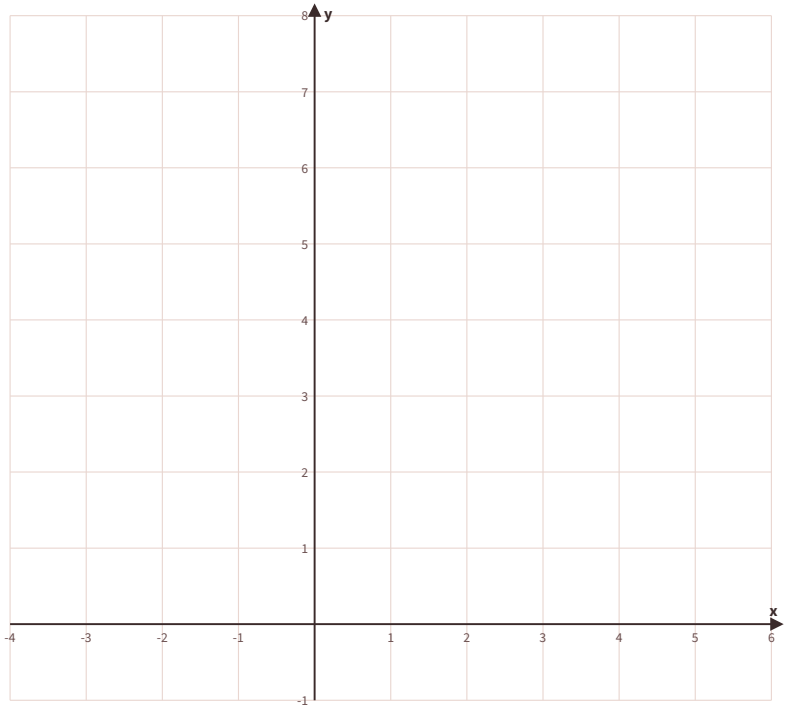
4 En el río de F2, calcula la longitud de la visual BT (usa $AB = 20$ m y $x = 16$ m). Da el resultado con dos decimales y explica el redondeo.

FICHA 5 Coordenadas y distancia gráfica

Sesión 5

Usa F3 y F5. La distancia entre dos puntos es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son Δx y Δy.

1 Dibuja los puntos $A(-3, 1)$, $B(5, 7)$ y $C(5, 1)$, une los tres y calcula las distancias AC, BC y AB.



2 Calcula la distancia entre cada pareja de puntos.

Puntos	Δx	Δy	Distancia
$(2, 3)$ y $(8, 11)$			
$(-4, -1)$ y $(4, 5)$			
$(0, 0)$ y $(5, 12)$			
$(-2, 6)$ y $(3, -6)$			

3 Calcula AB, BC y AC para $A(1, 1)$, $B(4, 5)$ y $C(10, 13)$. ¿Forman un triángulo? Razónalo con las distancias.

4 En un mapa a escala 1:25 000 dos puntos distan 4,8 cm en línea recta y tienen un desnivel de 0,5 km. ¿Cuál es la distancia horizontal real? ¿Y la distancia real en línea recta entre los puntos?

FICHA 6 Toma de datos y error

Sesión 6

Usa F4 y F7. En medidas reales ningún resultado es exacto: lo importante es saber cuánto se puede fiar uno.

1 Calcula la altura de la torre con los datos de cada equipo (F4).

Equipo	Proporción	Altura calculada (m)
1		
2		
3		
4		

2 Si la altura oficial es 12,00 m, calcula el error absoluto y el relativo de cada equipo y la media de las cuatro alturas. ¿Qué equipo se equivoca más?

Equipo	Altura (m)	Error absoluto (m)	Error relativo (%)
1			
2			
3			
4			
Media			

3 **Sensibilidad. Con los datos del equipo 2, ¿cuánto cambia la altura si la sombra de la torre se mide 10 cm de más? ¿Y si la sombra de la estaca se mide 1,22 m en lugar de 1,20 m? ¿Qué medida es más delicada?**

4 **Diseña el plan de toma de datos de tu equipo.**

Medida	Instrumento (F7)	Precisión	Nº de repeticiones	Cómo reduzco el error
Altura de la estaca				
Sombra de la estaca				
Sombra del objeto				

FICHA 7 El informe de medida indirecta

Sesión 7

Trabajad en equipo con roles: dibujante, calculista, redactor y revisor. Seguid el protocolo de F8 con este caso: una persona de 1,70 m proyecta 1,36 m de sombra y a la vez un pino del patio proyecta 6,8 m.

1 **Esquema geométrico del pino con los dos triángulos, las medidas y la incógnita.**

2 **Plantea la proporción y calcula la altura del pino. Comprueba el resultado con una estimación.**

3 **Análisis del error. Si cada sombra puede estar mal medida en ±5 cm, ¿entre qué valores puede estar la altura del pino? Escribe el intervalo y cuál de las dos medidas influye más.**

4 **Revisión cruzada: otro equipo revisa vuestro informe.**

- [ ] El esquema indica los triángulos, los ángulos rectos y las medidas
- [ ] La proporción está bien planteada (lados correspondientes)
- [ ] El resultado lleva unidades y un redondeo razonable
- [ ] Hay una comprobación por otro camino o una estimación
- [ ] Se analiza el error con un intervalo o con errores absoluto y relativo

FICHA 8 Defensa y error experimental

Sesión 8

Resuelve sin ayuda del equipo. Escribe esquema, planteamiento, cálculo y resultado con unidades.

1 **En un río (como en F2) se miden $AB = 24$ m, $BC = 6$ m y $CD = 5$ m. Dibuja el esquema y calcula la anchura del río.**

2 Una estaca de 2 m proyecta 1,6 m de sombra y a la vez un mástil proyecta 12 m. ¿Qué altura tiene el mástil? Si la sombra del mástil se midiera 12,3 m, ¿cuánto cambiaría el resultado?

3 Calcula la distancia entre $P(-2, -1)$ y $Q(4, 7)$ y explica qué relación tiene con el teorema de Pitágoras.

4 Dos equipos miden el mástil (altura real 15,0 m) y obtienen 14,8 m y 15,3 m. Calcula el error absoluto y el relativo de cada uno, di cuál ha medido mejor y nombra dos fuentes de error posibles.

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 8 · Medir sin poder medir directamente

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Informe de medida indirecta. Debe incluir esquema, datos con su precisión, cálculo, comprobación y análisis del error (F8).

Título, equipo y roles

Qué se mide, integrantes y roles.

Situación y pregunta

Qué se quiere medir y por qué no se puede medir directamente.

Esquema geométrico

Triángulos, ángulos rectos, medidas e incógnita.

Datos medidos

Medida · instrumento · precisión · repeticiones.

Método y cálculo

Propiedad usada (semejanza, Tales, Pitágoras) y operaciones.

Resultado y comprobación

Resultado con unidades y comprobación por otro camino.

Análisis del error

Error absoluto y relativo, sensibilidad e intervalo.

Representación en coordenadas

Puntos y distancias en una cuadrícula (si procede).

Conclusión y revisión

Resultado con su margen; firma del equipo revisor.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 8 · Medir sin poder medir directamente

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Informe de medida indirecta**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] La pregunta indica con claridad qué se quiere medir y por qué no se puede medir directamente.
- [ ] El esquema geométrico está rotulado con triángulos, ángulos rectos y medidas.
- [ ] Se justifica la semejanza o la aplicación de Pitágoras con los ángulos o los lados correspondientes.
- [ ] La proporción relaciona lados correspondientes en el orden correcto.
- [ ] Las medidas llevan unidades, instrumento y precisión.
- [ ] Hay una comprobación por otro camino o una estimación previa.
- [ ] El resultado tiene un redondeo razonable según la precisión de los datos.
- [ ] Se calcula el error (absoluto, relativo o intervalo) y se explica qué medida influye más.
- [ ] La conclusión incluye el resultado y su margen de confianza.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 8 · Medir sin poder medir directamente

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Informe de medida indirecta**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 8 · Medir sin poder medir directamente

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé elegir entre semejanza, Tales, Pitágoras o distancia entre puntos para calcular una medida inaccesible.	○	○	○	○
Sé calcular errores absoluto y relativo y explicar cómo afecta una medida imprecisa al resultado.	○	○	○	○
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	○	○	○	○
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	○	○	○	○
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	○	○	○	○
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	○	○	○	○

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 8 · Medir sin poder medir directamente

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Diagramas ya trazados y triángulos con números sencillos, con los pasos señalados.

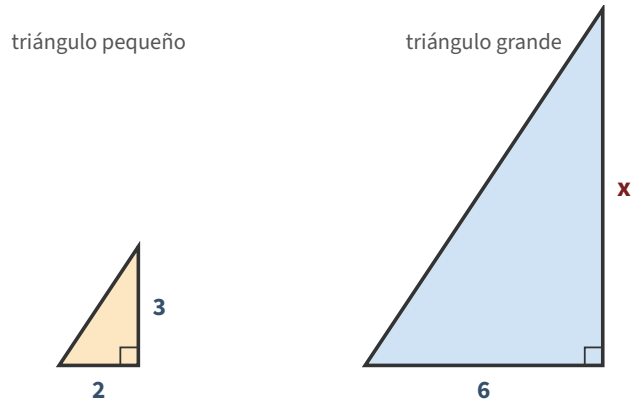
Ejemplo modelado: la sombra de un árbol

Una estaca de 1 m proyecta 0,5 m y un árbol proyecta 4 m. **1.** Triángulos semejantes: estaca-sombra y árbol-sombra. **2.** Proporción: $\frac{h}{4} = \frac{1}{0{,}5}$. **3.** $h = 4 \cdot 2 = 8$ m. **4.** Comprobación: la sombra del árbol es 8 veces la de la estaca (4 : 0,5 = 8), luego el árbol es 8 veces la estaca ✔. **Pitágoras:** catetos 6 y 8 → $\sqrt{36 + 64} = 10$.

Glosario y símbolos esenciales

Semejantes ($\sim$): misma forma, lados proporcionales.
Razón k: cociente entre lados correspondientes.
Cateto / hipotenusa: lados del ángulo recto / lado opuesto. **Ternas útiles:** $3, 4, 5$; $6, 8, 10$; $5, 12, 13$.
Distancia entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2): $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

1 **Los dos triángulos del dibujo son semejantes. Escribe la proporción entre sus lados y calcula x.**



2 **Un poste de 12 m se sujeta con un cable que llega al suelo a 5 m de su base. Calcula la longitud del cable (terna 5, 12, 13).**

3 **Calcula la distancia entre $(0, 0)$ y $(3, 4)$ y entre $(0, 0)$ y $(6, 8)$. ¿Qué relación hay entre las dos?**

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 8 · Medir sin poder medir directamente

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Dos métodos para una misma torre: ¿cuál es más sensible al error?

La altura de la torre (12 m) se puede medir con dos métodos: **sombras** (estaca de 1,5 m con 1,2 m de sombra y torre con 9,6 m de sombra) y **espejo en el suelo** (ojos a 1,6 m del suelo, a 2,0 m del espejo, y el espejo a 15 m de la torre: se cumple $\frac{h}{15} = \frac{1{,}6}{2}$). Ambos dan 12 m, pero no todos los errores pesan igual.

Pasos

1. Escribe la fórmula de cada método y comprueba que dan 12 m.
2. Con el método de las sombras, calcula cuánto cambia h si la sombra de la estaca se mide 1,21 m, y si la sombra de la torre se mide 9,7 m.
3. Con el espejo, calcula cuánto cambia h si la distancia ojos-espejo se mide 2,05 m, si la distancia espejo-torre se mide 15,05 m y si la altura de los ojos se mide 1,62 m.
4. Calcula el error relativo de cada medida alterada y el error relativo de h. ¿Qué observas? Generaliza: si una medida tiene un error relativo del 1 %, ¿cuánto cambia el error relativo de h?

1 **Tabla de sensibilidad.**

Método	Medida alterada	Error relativo de la medida (%)	Nueva altura (m)	Error relativo de h (%)
Sombras	Sombra estaca 1,21 m			
Sombras	Sombra torre 9,7 m			
Espejo	Distancia ojos-espejo 2,05 m			
Espejo	Distancia espejo-torre 15,05 m			
Espejo	Altura de los ojos 1,62 m			

Entrega

La tabla completa, una conclusión escrita sobre qué método y qué medida son más delicados, y una regla general justificada sobre la relación entre el error relativo de una medida y el de la altura.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 8 · Medir sin poder medir directamente

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: los ángulos iguales y los lados proporcionales; 5; $5 \cdot 2 = 10$ m.
2. Torre: no puedo medir la altura; sí la sombra y la estaca; triángulos semejantes (sombras). Río: no puedo medir la anchura; sí distancias en mi orilla; triángulos semejantes. Refugio-mirador: no puedo medir la distancia recta si hay montaña; sí las coordenadas (o del mapa); Pitágoras. Cable: no puedo medir el cable; sí la distancia horizontal y el desnivel; Pitágoras.
3. Esquema con dos triángulos rectángulos TAB (recto en A) y DCB (recto en C), ángulos iguales en B (opuestos por el vértice) y medidas $AB = 20, BC = 5, CD = 4$, incógnita $x = AT$.
4. $9{,}6 : 1{,}2 = 8$: la sombra de la torre es 8 veces la de la estaca; la torre será unas 8 veces la estaca: $8 \cdot 1{,}5 = 12$ m.

Ficha 2

1. $(3, 4, 5)$-$(9, 12, 15)$: razones $3, 3, 3$, semejantes, $k = 3$. $(2, 3, 4)$-$(4, 6, 9)$: $2, 2, 2{,}25$, no. $(5, 12, 13)$-$(10, 24, 26)$: $2, 2, 2$, semejantes, $k = 2$. $(6, 8, 10)$-$(3, 4, 5)$: $2, 2, 2$, semejantes, $k = 2$ (o $\frac{1}{2}$).
2. Lados: $15, 20, 25$ cm. Perímetro: $24 \to 60$ cm (× 2,5). Área: $\dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24 \to \dfrac{15 \cdot 20}{2} = 150$ cm² (× 6,25 = $2{,}5^2$).
3. Altura real: $6 \cdot 200 = 1\,200$ cm = 12 m. Base: lado $400 : 200 = 2$ cm; área $2 \cdot 2 = 4$ cm² (real: 16 m² $= 160\,000$ cm²; $160\,000 : 200^2 = 4$ ✔).
4. V; F (misma área no implica misma forma); F (es 9 veces: k^2); V (los tres ángulos coinciden); F (un rectángulo 1 × 2 no es semejante a uno 1 × 3).

Ficha 3

1. $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OA'}{OB'} \Rightarrow \dfrac{4}{10} = \dfrac{6}{OB'} \Rightarrow OB' = 15$. Como $\dfrac{AA'}{BB'} = \dfrac{4}{10}, BB' = \dfrac{3{,}2 \cdot 10}{4} = 8$ cm.
2. Equipo 2: $\dfrac{h}{9{,}6} = \dfrac{1{,}5}{1{,}2} \Rightarrow h = 9{,}6 \cdot 1{,}25 = 12$ m.
3. $\dfrac{h}{10} = \dfrac{1}{0{,}8} = 1{,}25 \Rightarrow h = 12{,}5$ m. Si la estaca está inclinada, el triángulo de la estaca ya no es rectángulo con el suelo ni semejante al de la torre: la proporción no vale y el resultado sale mal.
4. TAB y DCB: ángulos rectos en A y en C, y ángulos iguales en B por ser opuestos por el vértice; con dos ángulos iguales basta. $\dfrac{x}{CD} = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow x = \dfrac{20 \cdot 4}{5} = 16$ m.

Ficha 4

1. Cable: $\sqrt{120^2 + 50^2} = \sqrt{14\,400 + 2\,500} = \sqrt{16\,900} = 130$ m.
2. $d(R, M) = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ km; $d(M, C) = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ km; $d(R, C) = 12$ km. Ruta por M: 20 km. Ahorro: $20 - 12 = 8$ km.
3. $10^2 + 10^2 = 200 \neq 12^2 = 144$: no es rectángulo. Es isósceles (dos lados de 10 km).
4. $BT = \sqrt{20^2 + 16^2} = \sqrt{656} \approx 25{,}61$ m. Se redondea a centímetros porque la cinta mide con una precisión de unos centímetros (no tiene sentido dar más decimales).

Ficha 5

1. $AC = 8$, $BC = 6$ (catetos) y $AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. El triángulo ABC es rectángulo en C.
2. $\sqrt{36 + 64} = 10$; $\sqrt{64 + 36} = 10$; $\sqrt{25 + 144} = 13$; $\sqrt{25 + 144} = 13$ (Δx, Δy: $6, 8$; $8, 6$; $5, 12$; $5, -12$).
3. $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$; $AC = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$. Como $AB + BC = AC$ ($5 + 10 = 15$), los puntos están alineados: no forman un triángulo.
4. Horizontal: $4{,}8 \cdot 25\,000 = 120\,000$ cm $= 1{,}2$ km. Real: $\sqrt{1{,}2^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{1{,}69} = 1{,}3$ km.

Ficha 6

1. Equipo 1: $\dfrac{1{,}5}{1{,}2} \cdot 9{,}5 = 11{,}875 \approx 11{,}88$ m. Equipo 2: $12{,}00$ m. Equipo 3: $\dfrac{1{,}5}{1{,}25} \cdot 9{,}8 = 11{,}76$ m. Equipo 4: $\dfrac{1{,}48}{1{,}2} \cdot 9{,}7 \approx 11{,}96$ m.
2. Errores absolutos: $0{,}125$; 0; $0{,}24$; $0{,}037$ m. Errores relativos: $1{,}0\ \%$; $0\ \%$; $2{,}0\ \%$; $0{,}3\ \%$. Media de las alturas: $11{,}90$ m (error absoluto $0{,}10$ m, $0{,}8\ \%$). El equipo 3 es el que más se equivoca.
3. Sombra de la torre +10 cm: h cambia $1{,}25 \cdot 0{,}10 = 0{,}125$ m (a $12{,}125$). Sombra de la estaca 1,22 m: $h = \dfrac{1{,}5}{1{,}22} \cdot 9{,}6 \approx 11{,}80$ m (cambia $-0{,}20$ m). Una diferencia de 2 cm en la sombra pequeña pesa más que 10 cm en la grande: la medida más pequeña es más delicada porque el mismo error es relativamente mayor.
4. Plan orientativo: altura de la estaca (cinta de 5 m, ±1 cm, 3 repeticiones, colocar vertical con plomada); sombras (cinta, ±1 cm, 3 repeticiones y hacer la media, medir a la vez); se valora que el plan mencione medir a la misma hora, la verticalidad y la repetición.

Ficha 7

1. Esquema con dos triángulos rectángulos semejantes: persona-sombra y pino-sombra.
2. $\dfrac{h}{6{,}8} = \dfrac{1{,}70}{1{,}36} = 1{,}25 \Rightarrow h = 8{,}5$ m. Estimación: la sombra del pino es $6{,}8 : 1{,}36 = 5$ veces la de la persona, luego el pino mide unas 5 veces $1{,}7$ m $= 8{,}5$ m ✔.
3. Valor máximo: sombra de la persona mínima y del pino máxima: $\dfrac{1{,}70 \cdot 6{,}85}{1{,}31} \approx 8{,}89$ m. Valor mínimo: $\dfrac{1{,}70 \cdot 6{,}75}{1{,}41} \approx 8{,}14$ m. La altura está entre $8{,}14$ m y $8{,}89$ m. La sombra de la persona (1,36 m) influye más, porque un error de 5 cm es relativamente mayor ($3{,}7\ \%$) que en la del pino ($0{,}7\ \%$).

Ficha 8

1. $\dfrac{x}{5} = \dfrac{24}{6} \Rightarrow x = \dfrac{24 \cdot 5}{6} = 20$ m.
2. $\dfrac{h}{12} = \dfrac{2}{1{,}6} = 1{,}25 \Rightarrow h = 15$ m. Con 12,3 m: $h = 1{,}25 \cdot 12{,}3 = 15{,}375$ m: cambia $0{,}375$ m.
3. $d = \sqrt{(4 + 2)^2 + (7 + 1)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$. Es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos $\Delta x = 6$ y $\Delta y = 8$.
4. Equipo 1: error absoluto $0{,}2$ m, relativo $\dfrac{0{,}2}{15} \approx 1{,}3\ \%$. Equipo 2: $0{,}3$ m, $2\ \%$. Ha medido mejor el equipo 1. Fuentes de error: estaca inclinada, medir las sombras a horas distintas, bordes de sombra difusos, cinta mal tensada.

Refuerzo

1. $\dfrac{x}{3} = \dfrac{6}{2} = 3 \Rightarrow x = 9$.
2. $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ m.
3. $d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ y $d = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$: el segundo punto es el doble del primero, por eso la distancia se duplica.

Ampliación

1. Sombras: $h = \dfrac{1{,}5 \cdot 9{,}6}{1{,}2} = 12$ m. Espejo: $h = \dfrac{1{,}6 \cdot 15}{2} = 12$ m.
2. Sombra de la estaca 1,21 m: $h = \dfrac{1{,}5 \cdot 9{,}6}{1{,}21} \approx 11{,}90$ m (error relativo de la medida $0{,}83\ \%$; de h, $0{,}83\ \%$). Sombra de la torre 9,7 m: $h = 12{,}125$ m (medida $1{,}04\ \%$; h, $1{,}04\ \%$).
3. Espejo: distancia ojos-espejo 2,05 m: $h \approx 11{,}71$ m (medida $2{,}5\ \%$; h, $2{,}4\ \%$). Distancia espejo-torre 15,05 m: $h = 12{,}04$ m (medida $0{,}33\ \%$; h, $0{,}33\ \%$). Altura de los ojos 1,62 m: $h = 12{,}15$ m (medida $1{,}25\ \%$; h, $1{,}25\ \%$).
4. En todos los casos el error relativo de h coincide con el de la medida alterada (porque h es producto o cociente de las medidas): un 1 % de error en una medida produce un 1 % en h. La medida pequeña es más delicada porque el mismo error absoluto es un error relativo mayor. Si hay varias medidas con error, los errores relativos se suman (como máximo).

Errores frecuentes

- Plantear la proporción con lados que no se corresponden (poner la sombra de un objeto con la altura del otro).
- Aplicar Pitágoras para buscar un cateto sumando los cuadrados, o no reconocer la hipotenusa.
- Dar resultados con demasiados decimales sin relación con la precisión de las medidas.
- Confundir error absoluto con error relativo, o dividir por el valor medido en lugar de por el valor real.
- Medir las sombras a horas distintas, con la estaca inclinada o con unidades mezcladas (cm y m).
- Calcular la razón de semejanza entre lados no correspondientes o creer que las áreas se multiplican por k.

Criterios para valorar respuestas abiertas

- En los informes se valora más el planteamiento (triángulos, justificación de la semejanza) y el análisis del error que el valor exacto del resultado.
- En los datos reales se aceptan resultados con diferencias razonables respecto al valor esperado si se explican las fuentes de error.
- Se aceptan otros métodos de medida indirecta si el esquema y la justificación son correctos.
- La calculadora y GeoGebra pueden usarse para comprobar, pero el planteamiento y los pasos deben aparecer escritos.

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

09 ¿Qué población representa mejor los datos?

PREGUNTA GUÍA

¿Puede la misma media esconder dos grupos completamente distintos?

CURSO 3.º ESO	**SESIONES** 7 sesiones · 3.º trimestre	**SENTIDOS PRIORITARIOS** E · Sentido estocástico
COMPETENCIAS ESPECÍFICAS CE1, CE2, CE3, CE6, CE7, CE8	**PRODUCTO FINAL** Estudio estadístico comparativo	**CRITERIOS DE EVALUACIÓN** 1.1, 2.1, 3.1, 6.1, 7.1, 8.1

Contexto, reto y sentido

En el pueblo hay dos zonas, **Valle** y **Cerro**, y el ayuntamiento afirma: «el alumnado de las dos zonas tarda de media 20 minutos en llegar al instituto, así que no hace falta cambiar las líneas de autobús». Pero un grupo de 3.º ESO sospecha que la media está tapando algo: en Cerro casi nadie parece tardar 20 minutos. Para comprobarlo hay que decidir qué población se estudia, qué muestra puede representarla, cómo se organizan los datos, qué resumen es honesto y cómo se compara con otro grupo.

La situación moviliza el sentido estocástico: población y muestra, sesgo en el muestreo, tablas de frecuencias y gráficos adecuados (y engañosos), medidas de centralización (media, mediana, moda) y de dispersión (rango y desviación media) y comparación de dos distribuciones. El estudio final debe responder con datos si la misma media puede esconder dos grupos distintos.

Reto

Elaborar un estudio estadístico comparativo de dos grupos con la misma media, que justifique la elección de muestra, represente los datos con gráficos honestos, calcule medidas de centralización y de dispersión y concluya con una revisión crítica de sus límites.

Producto final

Estudio estadístico comparativo.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- **CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

1.1 Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.

2.1 Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.

3.1 Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.

6.1 Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.

7.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales.

8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, oralmente y por escrito, al explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.

Saberes básicos prioritarios

E
Sentido estocástico

- Población, muestra y variable estadística; sesgo de selección y representatividad de una muestra.
- Tablas de frecuencias (absolutas, relativas, por intervalos) y gráficos (barras, histograma, diagrama de puntos); gráficos engañosos.
- Medidas de centralización: media, mediana y moda; sensibilidad a los valores extremos.
- Medidas de dispersión: rango y desviación media; interpretación conjunta con las medidas de centralización.
- Comparación de dos distribuciones y comunicación de conclusiones estadísticas con sus límites.

F
Sentido socioafectivo

- Pensamiento crítico ante gráficos y afirmaciones basadas en una sola medida.
- Trabajo en equipo con roles y respeto a las conclusiones que se apoyan en datos.

Objetivos didácticos

- ✓ Diseñar una pregunta estadística.
- ✓ Organizar datos y elegir representaciones.
- ✓ Calcular e interpretar medidas de centralización y dispersión sencillas.
- ✓ Valorar representatividad y límites de una muestra.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Pregunta y población/muestra

Evidencia: Ficha 1: identificación de población, muestra y variable en cinco casos, valoración de tres muestras de conveniencia y formulación de la pregunta estadística.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Recogida o uso de datos ficticios

Evidencia: Ficha 2: medias de cuatro muestras de Cerro, muestras aleatorias de tamaño 5 y 10 en las dos zonas y conclusión sobre sesgo y tamaño.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Tablas y gráficos

Evidencia: Ficha 3: tablas de frecuencias por intervalos de Valle y Cerro, histogramas, análisis de un gráfico engañoso y elección de gráficos.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Media, mediana y moda

Evidencia: Ficha 4: media, mediana y moda de Valle y Cerro, valoración de qué medida representa mejor y efecto de un valor extremo.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Rango y dispersión

Evidencia: Ficha 5: rango y desviación media de Valle y Cerro con tablas de frecuencias, interpretación y comparación de dos conjuntos con la misma media.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Comparación de dos grupos

Evidencia: Ficha 6: comparación de dos clases con la misma media (notas), gráfico de barras, redacción de la comparación y decisión razonada.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Informe y revisión crítica

Evidencia: Ficha 7: reto individual con dos conjuntos de horas de móvil, un gráfico engañoso, una crítica de muestra y la respuesta a la pregunta guía.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Datos ficticios · hoja de cálculo opcional · plantillas

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Muestras pequeñas, datos ordenados y fórmulas visibles.

Ampliación

Anexo 9

Crear dos conjuntos con igual media y diferente mediana/rango y explicar el efecto.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial
Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa
Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final
Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Interpretación del problema: identificación de población, muestra y variable, y traducción de la afirmación del ayuntamiento a una pregunta estadística.	Ficha 1 / lista de cotejo
2.1	Comprobación de la corrección de los cálculos (frecuencias que suman 20, medias por otro camino) y de la coherencia de las conclusiones con los datos.	Fichas 2, 4 y 5 / escala de valoración
3.1	Formulación y contraste de conjeturas sobre el efecto de los valores extremos, el tamaño de la muestra y la misma media en grupos distintos.	Fichas 4 y 5 y Anexo 9 / rúbrica
6.1	Modelización de la situación del transporte con datos: elección de muestra, medidas y gráficos que respondan a la pregunta del ayuntamiento.	Fichas 2 y 6 y estudio (Anexo 4) / rúbrica
7.1	Tablas de frecuencias, histogramas y diagramas de puntos con ejes y escala correctos, y resumen estadístico en tabla.	Ficha 3 y estudio (Anexo 4) / rúbrica
8.1	Redacción y defensa oral de la conclusión comparativa con lenguaje estadístico preciso y mención de los límites del estudio.	Ficha 7 y presentación del estudio / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA
Estudio, gráficos, medidas y conclusión.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 9 · ¿Qué población representa mejor los datos?

ALUMNADO

El ayuntamiento anuncia en una nota de prensa: «El alumnado de Valle y el de Cerro tarda, de media, 20 minutos en llegar al instituto. No hace falta cambiar el autobús». Ese mismo día, Irene, que vive en Cerro, comenta: «Pues yo no conozco a nadie de mi zona que tarde 20 minutos: o tardamos cinco o tardamos más de media hora». ¿Puede la misma media esconder dos grupos completamente distintos? Vais a ser el equipo de estadística del instituto: elegir muestras, organizar los datos, calcular medidas y averiguar si la media cuenta toda la historia.

> *¿Puede la misma media esconder dos grupos completamente distintos?*

Vuestro reto

Elaborar un estudio estadístico comparativo de dos grupos con la misma media, que justifique la elección de muestra, represente los datos con gráficos honestos, calcule medidas de centralización y de dispersión y concluya con una revisión crítica de sus límites.

Lo que vais a producir

Estudio estadístico comparativo.

Hoja de ruta · 7 sesiones

1. Definimos la pregunta, la población y la muestra, y detectamos muestras sesgadas.
2. Recogemos o usamos los datos de Valle y Cerro y comprobamos cómo influye la muestra.
3. Organizamos los datos en tablas y gráficos honestos y vemos gráficos engañosos.
4. Calculamos media, mediana y moda y vemos cuál representa mejor.
5. Medimos la dispersión con el rango y la desviación media.
6. Comparamos dos grupos con las medidas y los gráficos.
7. Redactamos el estudio y lo sometemos a revisión crítica.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Diseñar una pregunta estadística.
- ✓ Organizar datos y elegir representaciones.
- ✓ Calcular e interpretar medidas de centralización y dispersión sencillas.
- ✓ Valorar representatividad y límites de una muestra.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 9 · ¿Qué población representa mejor los datos?

ALUMNADO

El caso de las dos zonas, las fichas de muestreo, la base de datos de 20 alumnos de Valle y de Cerro, diagramas de puntos, histogramas, un gráfico engañoso frente a uno honesto, números aleatorios y un cuadro de fórmulas. Todos los datos son ficticios, creados para el aula.

F1 La nota de prensa del ayuntamiento

ESTUDIO DE CASO

Nota de prensa. «El alumnado de Valle y el de Cerro tarda, de media, 20 minutos en llegar al instituto. No es necesario modificar las líneas de autobús escolar.»

Lo que dice Irene (Cerro). «Yo no conozco a nadie de mi zona que tarde 20 minutos. O tardamos 5, o tardamos más de media hora.»

Lo que se sabe. Hay 20 alumnos y alumnas de 3.º ESO de cada zona. El ayuntamiento tiene el tiempo de cada uno, pero el instituto solo puede entrevistar a una muestra pequeña para preparar el debate.

Fuente: Situación y notas de prensa ficticias creadas para el aula.

¿Qué quiere averiguar el estudio? ¿Cuál es la población? ¿Y la variable?

F2 Fichas de muestreo

TEXTO

Población: todo el grupo que se quiere estudiar. **Muestra**: parte de la población que se observa. Una muestra es **representativa** si se parece a la población, y está **sesgada** si favorece a unos individuos sobre otros.

Cuatro muestras de 5 personas de Cerro (los números son los identificadores de F3):

- **Muestra A (parada del autobús):** 2, 5, 8, 11, 14.
- **Muestra B (puerta de la calle, van a pie):** 1, 3, 4, 6, 7.
- **Muestra C (sistemática: una de cada cuatro):** 4, 8, 12, 16, 20.
- **Muestra D (aleatoria con la lista de F8):** las 5 primeras de la lista: 9, 18, 20, 1, 7.

Fuente: Elaboración propia con las cuatro muestras de Cerro que se discuten en el instituto.

Observa cómo se ha elegido cada muestra: ¿alguna favorece a un tipo de alumnado?

F3 Base de datos: tiempo (min) de 20 alumnos de cada zona

DATOS

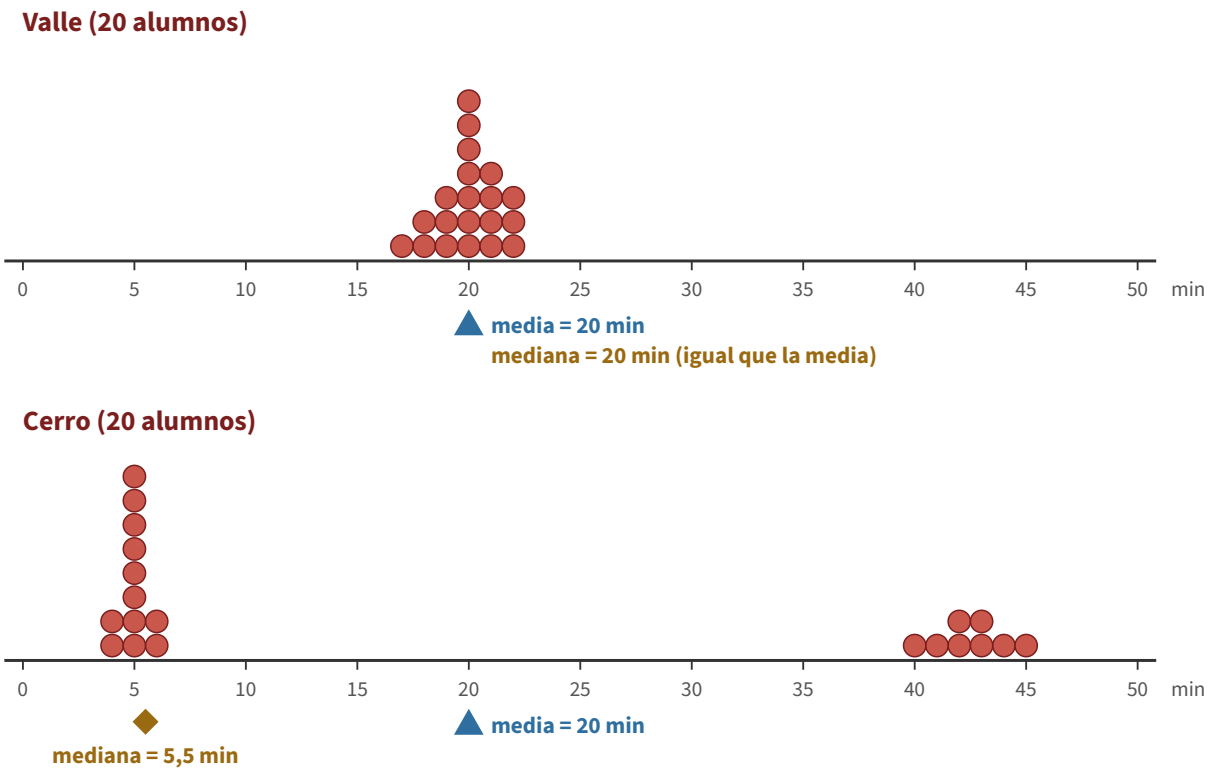
Id	Valle	Cerro	Id	Valle	Cerro
1	19	5	11	20	44
2	20	42	12	19	4
3	20	4	13	20	5
4	19	5	14	20	41
5	21	40	15	21	5
6	22	5	16	17	42
7	22	6	17	21	6
8	18	43	18	20	45
9	18	5	19	20	5
10	21	5	20	22	43

Fuente: Datos ficticios creados para el aula.

La suma de los 20 tiempos es 400 en las dos zonas. ¿Cuánto vale la media de cada zona?

F4 Diagramas de puntos: Valle y Cerro

ESQUEMA

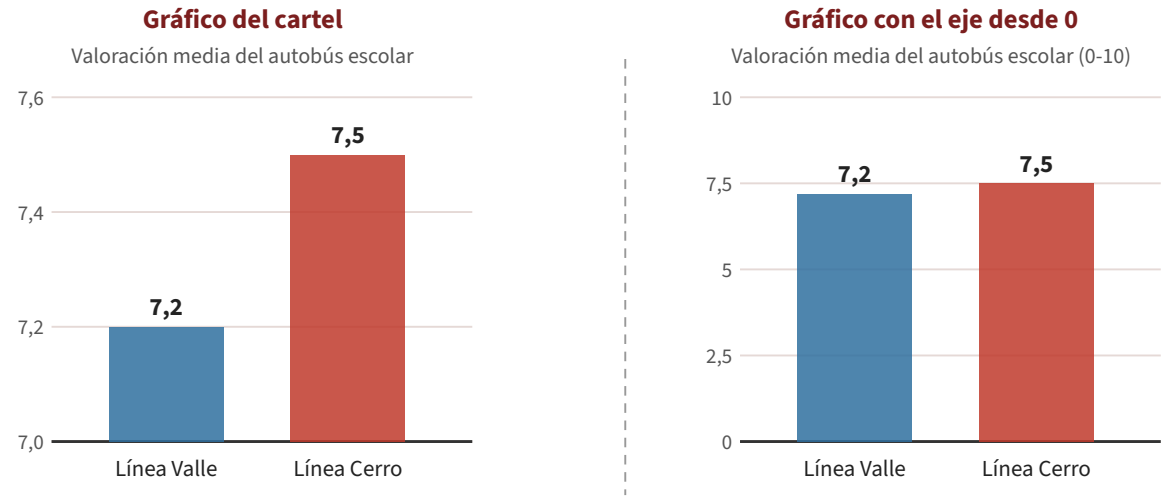


Fuente: Gráficos elaborados con los datos de F3: cada punto es un alumno.

Las dos zonas tienen la misma media, pero ¿se parecen? ¿Hay alguien en Cerro que tarde cerca de 20 minutos?

F5 Un gráfico engañoso y uno honesto

ESQUEMA



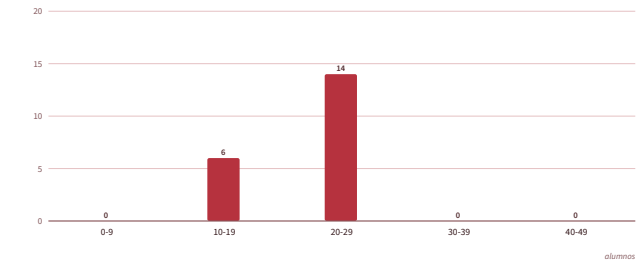
Fuente: Esquema de elaboración propia con datos ficticios de valoración del autobús (0 a 10).

Los dos gráficos tienen los mismos datos. ¿Qué cambia? ¿Por cuánto parece mayor la barra de Cerro en el primero? ¿Y en el segundo?

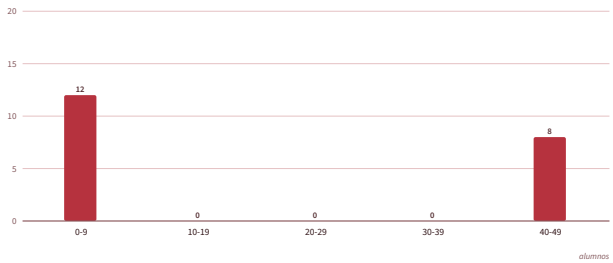
F6 Histogramas de los tiempos (intervalos de 10 minutos)

GRÁFICO

VALLE



CERRO



Fuente: Gráficos elaborados con los datos de F3.

Fíjate en las barras vacías de Cerro. ¿Qué significan?

F7 Fórmulas y ejemplo resuelto

TEXTO

Media $\bar{x} = \dfrac{\text{suma de los datos}}{n}$. **Mediana**: dato central de los datos ordenados (si n es par, la media de los dos centrales). **Moda**: el dato más frecuente. **Rango**: máximo $-$ mínimo. **Desviación media**: $DM = \dfrac{\sum |x - \bar{x}|}{n}$ (cuánto se alejan los datos de la media, en promedio).

Con frecuencias: $\bar{x} = \dfrac{\sum x \cdot f}{n}$ y $DM = \dfrac{\sum |x - \bar{x}| \cdot f}{n}$.

Ejemplo. Datos $3, 5, 5, 6, 9$ ($n = 5$): $\bar{x} = \dfrac{28}{5} = 5{,}6$; mediana 5; moda 5; rango $9 - 3 = 6$. Desviaciones $|x - 5{,}6|$: $2{,}6;\ 0{,}6;\ 0{,}6;\ 0{,}4;\ 3{,}4$; suma $7{,}6$; $DM = \dfrac{7{,}6}{5} = 1{,}52$.

Fuente: Elaboración propia.

Una medida de centralización sola no basta: hay que mirar también cuánto se dispersan los datos.

F8 Lista de números aleatorios

DATOS

Orden	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Id	9	18	20	1	7	2	13	10	5	12
Orden	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Id	3	16	4	19	6	8	11	14	15	17

Fuente: Lista generada con un ordenador: los números del 1 al 20 en orden aleatorio, sin repetir.

Para una muestra de tamaño n se toman los n primeros números de la lista.

F9 Vocabulario esencial

GLOSARIO

Población	Conjunto de individuos que se quiere estudiar.
Muestra	Parte de la población que se observa realmente.
Sesgo	Error sistemático que hace que la muestra no represente a la población.
Frecuencia absoluta / relativa	Número de veces que aparece un dato / esa cantidad dividida entre el total.
Valor extremo	Dato muy alejado del resto (también llamado atípico).
Dispersión	Cuánto se separan los datos entre sí o de su media.
Desviación media	Promedio de las distancias de los datos a la media.

Fuente: Elaboración propia.

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 9 · ¿Qué población representa mejor los datos?

ALUMNADO

FICHA 1 Pregunta, población y muestra

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Usa F1, F2 y F9. Antes de calcular, decide qué se pregunta y a quién.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

La mediana de 3, 5, 9 es…

☐ 5 ☐ 6 ☐ 9

Una muestra es…

☐ toda la población ☐ una parte de la población que se observa ☐ la media de los datos

Si un dato muy grande se añade a un conjunto, la media…

☐ sube mucho ☐ no cambia ☐ baja

2 **Identifica en cada caso la población, la muestra y la variable, y di si la variable es cualitativa o cuantitativa.**

Caso	Población	Muestra	Variable y tipo
Nota de prensa de F1: tiempo hasta el instituto			
Encuesta a 30 alumnos del instituto sobre su deporte favorito			
Peso de las mochilas de 3.º A medidas en el patio			
Color de los coches de una calle, mirando 20 coches			

3 **Para entrevistar a 5 personas de Cerro, el instituto discute las muestras A, B y C de F2. Valora cada una: ¿puede estar sesgada y por qué?**

4 Escribe la pregunta estadística de vuestro estudio (qué variable, qué dos poblaciones, qué se va a comparar) y una hipótesis sobre la afirmación del ayuntamiento.

FICHA 2 Datos y muestras

Sesión 2

Usa F2, F3 y F8. La media de una muestra debe parecerse a la de la población (20 min).

1 Calcula la media de cada muestra de Cerro (F2, con los datos de F3) y compárala con la media de la población, que es 20.

Muestra	Valores de los 5 tiempos	Suma	Media	Diferencia con 20
A (parada del autobús)				
B (puerta de la calle)				
C (una de cada cuatro)				
D (aleatoria)				

2 Con la lista de F8, toma una muestra aleatoria de 5 y otra de 10 en cada zona (Valle y Cerro) y calcula sus medias.

Muestra	Valle: tiempos	Valle: media	Cerro: tiempos	Cerro: media
5 primeros de F8				
10 primeros de F8				

3 ¿Qué muestra representa mejor a la población? ¿Qué pasa con el tamaño? ¿Basta la media de la muestra para concluir algo sobre la dispersión de Cerro?

FICHA 3 Tablas y gráficos

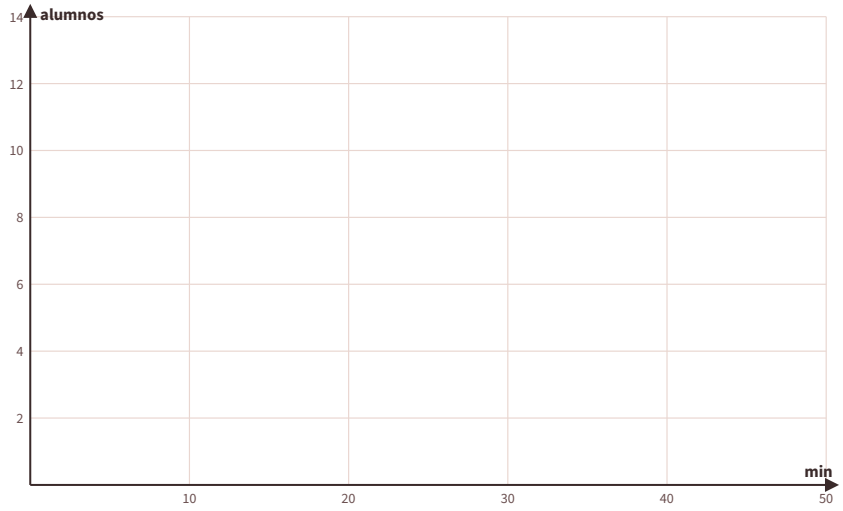
Sesión 3

Usa F3, F5 y F6. Un gráfico honesto empieza el eje en cero y rotula las unidades.

1 **Completa la tabla de frecuencias por intervalos de F3 y comprueba que cada columna suma 20.**

Intervalo (min)	Valle: frecuencia	Valle: frec. relativa (%)	Cerro: frecuencia	Cerro: frec. relativa (%)
0-9				
10-19				
20-29				
30-39				
40-49				
Total				

2 **Dibuja el histograma de Cerro con tu tabla (compáralo con F6).**



3 **Con F5: ¿por cuánto parece mayor la barra de Cerro en el gráfico del cartel y por cuánto en el gráfico con el eje desde 0? ¿Cómo se consigue el engaño?**

4 Elige el gráfico más adecuado (diagrama de barras, histograma, sectores o diagrama de puntos) y explica por qué.

Situación	Gráfico	Por qué
Comparar la forma de los 20 tiempos de cada zona		
Mostrar qué parte del alumnado de Cerro va a pie		
Agrupar los tiempos en intervalos de 10 minutos		

FICHA 4 Media, mediana y moda

Sesión 4

Usa F3, F4 y F7. Ordena los datos antes de buscar la mediana.

1 Calcula las medidas de centralización de cada zona con F3.

Medida	Cálculo en Valle	Valle	Cálculo en Cerro	Cerro
Media				
Mediana				
Moda				

2 En Cerro, ¿cuántos alumnos tardan entre 15 y 25 minutos? ¿Qué medida representa mejor el tiempo «típico» en cada zona? ¿Qué decisión tomarías con la media sola y cuál con todos los datos?

3 **A Valle llega un alumno nuevo que tarda 60 minutos. Recalcula la media y la mediana con 21 datos. ¿Cuál de las dos cambia más? ¿Por qué?**

4 **Marca la respuesta correcta.**

Si hay un dato extremo muy grande, la medida que más se altera es…

☐ la media ☐ la mediana ☐ la moda

En Cerro, la media (20 min) representa bien a…

☐ la mayoría ☐ casi nadie ☐ a todos

FICHA 5 Rango y dispersión

Sesión 5

Usa F3, F4 y F7. La desviación media mide cuánto se alejan los datos de la media.

1 **Calcula el rango de cada zona.**

2 Completa las tablas de desviaciones (la media es 20 en las dos) y calcula la desviación media de cada zona.

Valle: tiempo x	Frecuencia f	$\lvert x-20\rvert$	$f\cdot\lvert x-20\rvert$
17	1		
18	2		
19	3		
20	7		
21	4		
22	3		
Suma			

Cerro: tiempo x	Frecuencia f	$\lvert x-20\rvert$	$f\cdot\lvert x-20\rvert$
4	2		
5	8		
6	2		
40	1		
41	1		
42	2		
43	2		
44	1		
45	1		
Suma			

3 Interpreta el rango y la desviación media de las dos zonas y relaciónalos con lo que viste en F4.

4 Los conjuntos X: 8, 9, 10, 11, 12 e Y: 2, 6, 10, 14, 18 tienen la misma media. Calcula su media, su mediana, su rango y su desviación media y explica la diferencia.

FICHA 6 Comparación de dos grupos

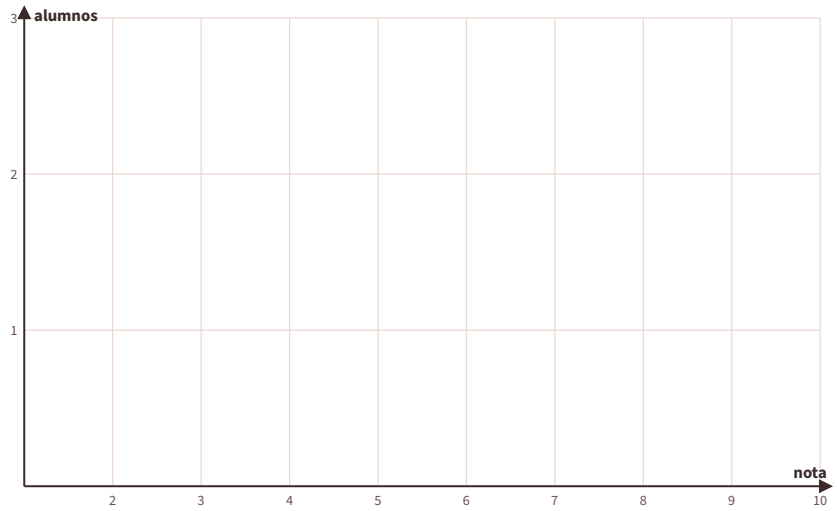
Sesión 6

Trabajad en equipo con roles: analista, dibujante, redactor y revisor. Datos nuevos: notas de dos clases en un examen. Clase A: 4, 5, 6, 6, 7, 8. Clase B: 2, 3, 5, 8, 9, 9.

1 Completa la tabla resumen de las dos clases.

Medida	Clase A	Clase B
Media		
Mediana		
Moda		
Rango		
Desviación media		

2 Dibuja el diagrama de barras de las notas de las dos clases (usa dos colores).



3 **Redacta la comparación con estas frases: «Las dos clases tienen la misma… pero…», «La clase … es más…», «Si el profesor quisiera… elegiría…».**

4 **Revisión cruzada: otro equipo revisa vuestra comparación.**

- [ ] Las medidas de las dos clases están calculadas y comprobadas
- [ ] Se comparan centralización y dispersión, no solo la media
- [ ] El gráfico tiene eje desde cero, ejes rotulados y leyenda
- [ ] La conclusión se apoya en los datos y no exagera
- [ ] Se mencionan los límites (pocos datos)

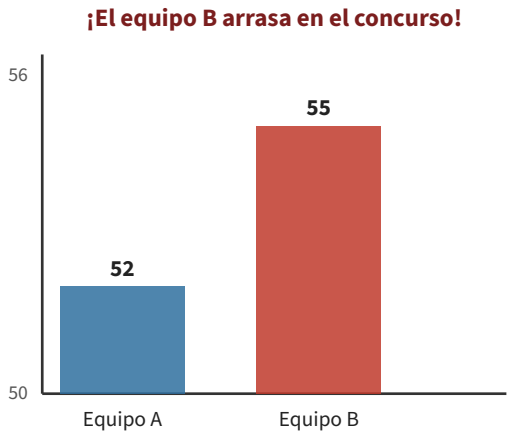
FICHA 7 Reto individual y revisión crítica

Sesión 7

Resuelve sin ayuda del equipo. Escribe los cálculos y justifica con datos.

1 **Horas de móvil al día de dos grupos de 6 personas: A: 2, 3, 3, 3, 3, 4; B: 0, 1, 1, 2, 7, 7. Calcula media, mediana, moda, rango y desviación media de cada grupo y explica qué grupo es más homogéneo.**

2 Observa el gráfico. Señala tres razones por las que puede engañar y di cómo lo corregirías.



3 Para saber cuántas horas de deporte hace el alumnado del instituto, se pregunta a 10 personas a la salida del gimnasio municipal. Identifica la población y la muestra, explica qué sesgo hay y propón una muestra mejor.

4 Responde a la pregunta guía: ¿puede la misma media esconder dos grupos completamente distintos? Usa un ejemplo de este estudio y dos medidas que lo demuestren.

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 9 · ¿Qué población representa mejor los datos?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Estudio estadístico comparativo de dos grupos con la misma media. Cada afirmación debe apoyarse en un dato o en un gráfico.

Título, equipo y roles

Nombre del estudio, integrantes y roles.

Pregunta, población y muestra

Variable, poblaciones, hipótesis y cómo se elige la muestra.

Datos y tabla de frecuencias

Frecuencias absolutas y relativas de los dos grupos.

Gráfico del grupo 1

Diagrama de puntos o histograma rotulado.

Gráfico del grupo 2

Mismo tipo de gráfico y misma escala.

Medidas de los dos grupos

Media · mediana · moda · rango · desviación media.

Comparación

Qué se parece y qué difiere, con datos.

Conclusión y respuesta a la pregunta

¿La media cuenta toda la historia?

Revisión crítica

Límites del estudio (muestra, datos) y firma del equipo revisor.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 9 · ¿Qué población representa mejor los datos?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Estudio estadístico comparativo**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] La pregunta estadística indica la variable, las poblaciones y lo que se va a comparar.
- [ ] Se justifica la elección de la muestra y se señalan los posibles sesgos.
- [ ] Las tablas de frecuencias son correctas y las frecuencias suman el total.
- [ ] Los gráficos son honestos: ejes desde cero cuando procede, rotulados y con la misma escala en los dos grupos.
- [ ] Media, mediana y moda están bien calculadas y se interpretan.
- [ ] Rango y desviación media están calculados y se usan para comparar la dispersión.
- [ ] La comparación no se limita a la media e incluye centralización y dispersión.
- [ ] La conclusión responde a la pregunta con datos y sin exagerar.
- [ ] Se incluye una revisión crítica con los límites del estudio y se ha revisado con otro equipo.

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 9 · ¿Qué población representa mejor los datos?

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Estudio estadístico comparativo**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 9 · ¿Qué población representa mejor los datos?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé elegir una muestra razonable, organizar datos y calcular media, mediana, moda, rango y desviación media.	○	○	○	○
Sé comparar dos grupos con varias medidas y detectar gráficos o afirmaciones que engañan.	○	○	○	○
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	○	○	○	○
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	○	○	○	○
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	○	○	○	○
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	○	○	○	○

Dos aprendizajes que he logrado

_____

_____

_____

Una dificultad que he tenido

_____

_____

_____

Una mejora que haré la próxima vez

_____

_____

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

_____

_____

Fortaleza 2

_____

_____

Propuesta de mejora

_____

_____

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 9 · ¿Qué población representa mejor los datos?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Muestras pequeñas, datos ordenados y fórmulas visibles, con los pasos señalados.

Ejemplo modelado: datos 3, 5, 5, 6, 9

Media: $3+5+5+6+9=28$; $28:5=5{,}6$.
Mediana: los datos están ordenados y el central es 5.
Moda: 5. **Rango:** $9-3=6$. **Desviación media:** $|3-5{,}6|=2{,}6$; $|5-5{,}6|=0{,}6$ (dos veces); $|6-5{,}6|=0{,}4$; $|9-5{,}6|=3{,}4$; suma $7{,}6$; $7{,}6:5=1{,}52$.

Glosario y símbolos esenciales

$\bar{x}$: media. n: número de datos. f: frecuencia. **Rango** = máximo − mínimo. **DM** $=\dfrac{\sum|x-\bar{x}|}{n}$. Antes de la mediana, **ordena** los datos. Si n es par, la mediana es la media de los dos centrales.

1 Calcula las medidas de los dos conjuntos pequeños, que tienen la misma media: P: 2, 4, 4, 6, 9 y Q: 4, 5, 5, 5, 6.

Medida	Conjunto P	Conjunto Q
Media		
Mediana		
Moda		
Rango		

2 Calcula la desviación media de P (media 5) completando la tabla.

x	2	4	4	6	9	Suma
$\lvert x-5\rvert$						

3 Una muestra de 4 personas se toma a la salida de una pastelería para preguntar si les gustan los dulces. ¿Es representativa? Explica tu respuesta con una frase.

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 9 · ¿Qué población representa mejor los datos?

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Crear dos conjuntos con la misma media y diferente mediana y rango

Dos conjuntos pueden tener la misma media y ser muy distintos. Vas a fabricarlos tú: dos conjuntos de 7 números enteros con media 6, el primero con mediana 6 y rango 2 como máximo, y el segundo con mediana 3 o menos y rango 9 o más.

Pasos

1. Construye el primer conjunto y comprueba su media (suma 42), su mediana y su rango.
2. Construye el segundo conjunto con la misma media: ¿qué tipo de datos necesitas para que la mediana baje y el rango sea grande?
3. Calcula la desviación media de los dos y explica el efecto de los valores extremos sobre la media y sobre la mediana.
4. Generaliza: si a un conjunto de n datos con media m se añade un dato x, demuestra que la nueva media es $\dfrac{n \cdot m + x}{n + 1}$ y úsalo para explicar por qué un valor extremo mueve tanto la media.

1 Tabla de tus dos conjuntos.

Conjunto	Datos	Media	Mediana	Rango	Desviación media
1 (mediana 6)					
2 (mediana ≤ 3)					

Entrega

Los dos conjuntos con todos los cálculos, una explicación escrita del efecto de los valores extremos y la demostración de la fórmula de la nueva media.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 9 · ¿Qué población representa mejor los datos?

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: mediana de 3, 5, 9 = 5; una parte de la población que se observa; sube mucho.
2. Caso 1: población: alumnado de 3.º ESO de Valle y Cerro (20 de cada zona); muestra: los que se estudien; variable: tiempo en minutos (cuantitativa). Caso 2: población: alumnado del instituto; muestra: 30 alumnos; deporte favorito (cualitativa). Caso 3: población: mochilas de 3.º A; muestra: las medidas en el patio (si se miden todas, es la población); peso en kg (cuantitativa). Caso 4: población: coches de la calle; muestra: 20 coches; color (cualitativa).
3. A (parada del autobús): sesgada, solo recoge a quienes viven lejos y usan el autobús. B (puerta de la calle): sesgada, solo recoge a quienes van a pie. C (una de cada cuatro): sistemática, puede ser razonable pero depende del orden de la lista (si el orden se repite con periodicidad, puede sesgar).
4. Respuesta abierta: por ejemplo, «¿cuánto tardan en llegar al instituto el alumnado de 3.º de Valle y el de Cerro?»; hipótesis: «la media coincide, pero la distribución es distinta».

Ficha 2

1. A: $42, 40, 43, 44, 41$ → suma 210, media 42, diferencia $+22$. B: $5, 4, 5, 5, 6$ → suma 25, media 5, diferencia -15. C: $5, 43, 4, 42, 43$ → suma 137, media $27{,}4$, diferencia $+7{,}4$. D: $5, 45, 43, 5, 6$ → suma 104, media $20{,}8$, diferencia $+0{,}8$.
2. Cinco primeros de F8 (ids 9, 18, 20, 1, 7): Valle $18, 20, 22, 19, 22$ → suma 101, media $20{,}2$; Cerro $5, 45, 43, 5, 6$ → suma 104, media $20{,}8$. Diez primeros (ids 9, 18, 20, 1, 7, 2, 13, 10, 5, 12): Valle $18, 20, 22, 19, 22, 20, 20, 21, 21, 19$ → suma 202, media $20{,}2$; Cerro $5, 45, 43, 5, 6, 42, 5, 5, 40, 4$ → suma 200, media $20{,}0$.
3. Las muestras A y B están sesgadas (medias 42 y 5); C se aleja (27,4); D (aleatoria) se parece a la población (20,8). Con más tamaño la media de la muestra tiende a parecerse más a la de la población. La media de la muestra no dice nada sobre la dispersión: hay que mirar los datos.

Ficha 3

1. Valle: 0, 6, 14, 0, 0 (0 %, 30 %, 70 %, 0 %, 0 %). Cerro: 12, 0, 0, 0, 8 (60 %, 0 %, 0 %, 0 %, 40 %). Cada columna suma 20.
2. Histograma de Cerro: barra de altura 12 en 0-9, barra de altura 8 en 40-49 y nada en medio.
3. Cartel: la barra de Cerro parece $\dfrac{0{,}5}{0{,}2} = 2{,}5$ veces la de Valle; con el eje desde 0, $\dfrac{7{,}5}{7{,}2} \approx 1{,}04$ (solo un 4 % mayor). El engaño es empezar el eje en 7,0 (eje truncado).
4. Diagrama de puntos (forma de cada zona); sectores (parte del total); histograma (intervalos).

Ficha 4

1. Valle: media $400 : 20 = 20$; mediana: los dos datos centrales (10.º y 11.º) son 20 y 20 → 20; moda 20. Cerro: media $400 : 20 = 20$; mediana: los dos centrales (10.º y 11.º) son 5 y 6 → $5{,}5$; moda 5.
2. En Cerro nadie tarda entre 15 y 25 minutos (0 alumnos). En Valle son representativas la media, la mediana y la moda (20). En Cerro, la mediana (5,5) y la moda (5) describen al 60 %; la media no representa a nadie. Con la media sola se concluiría que no hace falta cambiar el autobús; con todos los datos se ve que 8 alumnos de Cerro tardan más de 40 minutos.
3. Con 60: suma 460; media $460 : 21 \approx 21{,}90$ (sube 1,90); mediana: el 11.º de 21 datos ordenados es 20 (no cambia). Cambia más la media porque cada dato cuenta en ella, mientras que la mediana solo depende de la posición central.
4. La media; casi nadie.

Ficha 5

1. Rango Valle: $22 - 17 = 5$. Rango Cerro: $45 - 4 = 41$.
2. Valle: $|x - 20| \cdot f$: $3, 4, 3, 0, 4, 6$; suma 20; $DM = 20 : 20 = 1$. Cerro: $16 \cdot 2 = 32$; $15 \cdot 8 = 120$; $14 \cdot 2 = 28$; 20; 21; $22 \cdot 2 = 44$; $23 \cdot 2 = 46$; 24; 25; suma 360; $DM = 360 : 20 = 18$.
3. En Valle los datos se alejan de la media 1 minuto de promedio y el rango es 5: grupo muy homogéneo. En Cerro se alejan 18 minutos y el rango es 41: grupo muy disperso (dos subgrupos), lo que coincide con los dos montones de puntos de F4.
4. X: media 10, mediana 10, rango 4, $DM = (2 + 1 + 0 + 1 + 2)/5 = 1{,}2$. Y: media 10, mediana 10, rango 16, $DM = (8 + 4 + 0 + 4 + 8)/5 = 4{,}8$. La misma media y mediana, pero Y está mucho más dispersa.

Ficha 6

1. Clase A: media $36 : 6 = 6$; mediana 6; moda 6; rango 4; $DM = (2 + 1 + 0 + 0 + 1 + 2)/6 = 1$. Clase B: media $36 : 6 = 6$; mediana $(5 + 8)/2 = 6{,}5$; moda 9; rango 7; $DM = (4 + 3 + 1 + 2 + 3 + 3)/6 \approx 2{,}67$.
2. Barras: A: nota 4 (1), 5 (1), 6 (2), 7 (1), 8 (1); B: nota 2 (1), 3 (1), 5 (1), 8 (1), 9 (2).
3. Respuesta modelo: «Las dos clases tienen la misma media (6), pero la clase B es mucho más dispersa (rango 7 frente a 4). La clase A es más homogénea. Si el profesor quisiera que nadie se quedase muy atrás, elegiría la clase A; si valorase tener más notas altas, la B tiene dos 9».
4. Se valora que se comparen centralización y dispersión.

Ficha 7

1. A: media $18 : 6 = 3$, mediana 3, moda 3, rango 2, $DM = (1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1)/6 \approx 0{,}33$. B: media $18 : 6 = 3$, mediana $(1 + 2)/2 = 1{,}5$, modas 1 y 7 (bimodal), rango 7, $DM = (3 + 2 + 2 + 1 + 4 + 4)/6 \approx 2{,}67$. El grupo A es mucho más homogéneo.
2. Engaños: el eje empieza en 50 (truncado); no hay título del eje ni unidades; el titular exagera una diferencia de solo 3 puntos (52 frente a 55). Corrección: eje desde 0, indicar unidades y titular neutro.
3. Población: el alumnado del instituto; muestra: 10 personas a la salida del gimnasio. Sesgo de selección: quienes van al gimnasio hacen más deporte. Mejor: una muestra aleatoria de la lista de alumnado, de mayor tamaño.
4. Sí: en Cerro la media es 20 min igual que en Valle, pero la mediana es 5,5 y el rango es 41 frente a 20 y 5 en Valle; hay dos subgrupos (los que van a pie y los que viajan más de 40 min).

Refuerzo

1. P: media 5, mediana 4, moda 4, rango 7. Q: media 5, mediana 5, moda 5, rango 2.
2. $|x - 5|$: $3, 1, 1, 1, 4$; suma 10; $DM = 10 : 5 = 2$ (en Q sería $0{,}4$).
3. No es representativa (sesgo): quienes están en una pastelería probablemente son quienes más dulces comen.

Ampliación

1. Ejemplo conjunto 1: $5, 6, 6, 6, 6, 6, 7$ (suma 42, media 6, mediana 6, rango 2, $DM = (1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1)/7 \approx 0{,}29$).
2. Ejemplo conjunto 2: $1, 1, 1, 2, 3, 12, 22$? (suma 42, media 6, mediana 2, rango 21). Necesita valores extremos altos que compensen muchos datos bajos. Se acepta cualquier conjunto que cumpla las condiciones.
3. El valor extremo (22) sube mucho la media pero no mueve la mediana (que es el dato central).
4. Nueva media: $\dfrac{S + x}{n + 1}$ con $S = n \cdot m$, luego $\dfrac{n \cdot m + x}{n + 1}$. El cambio es $\dfrac{x - m}{n + 1}$: cuanto más lejos está x de m y menos datos hay, más se mueve la media.

Errores frecuentes

- Calcular la mediana sin ordenar los datos, o no promediar los dos centrales cuando n es par.
- Concluir que dos grupos son iguales porque tienen la misma media sin mirar la dispersión.
- Elegir una muestra por comodidad (los que están a mano) y generalizar sin considerar el sesgo.
- Hacer un gráfico con el eje truncado, sin unidades, o con escalas distintas para los dos grupos.
- Olvidar el valor absoluto en la desviación media o dividir por el número de datos distintos y no por n.
- Calcular la media de intervalos con los extremos en lugar de la marca de clase (o confundir frecuencia absoluta y relativa).

Criterios para valorar respuestas abiertas

- En el estudio se valora más la justificación de la muestra y de las medidas elegidas que el resultado numérico.
- Se aceptan otras muestras razonables si se explica por qué no están sesgadas y se calculan bien sus medidas.
- En la respuesta a la pregunta guía debe aparecer al menos una medida de centralización y una de dispersión de cada grupo.
- Las hojas de cálculo pueden usarse para comprobar, pero el alumnado debe escribir las fórmulas y la interpretación.

10

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Tomar decisiones bajo incertidumbre

PREGUNTA GUÍA

¿Cómo cambia una decisión cuando conocemos la probabilidad de cada resultado?

CURSO
3.º ESO

SESIONES
8 sesiones · 3.º trimestre

SENTIDOS PRIORITARIOS
E · Sentido estocástico

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE2, CE3, CE6, CE8

PRODUCTO FINAL
Laboratorio de probabilidad y decisiones

CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 1.2, 2.2, 3.1, 6.1, 8.1

Contexto, reto y sentido

Cada junio, el instituto organiza la **Feria de las Probabilidades** para recaudar dinero para el viaje de fin de curso. Cada caseta cobra **1 € por partida** y paga un premio a quien gana. El comité de la feria ha recibido cuatro propuestas de juego con dados, monedas, ruleta y bolsa de bolas, y solo puede abrir una caseta. Si el juego es demasiado difícil, nadie querrá jugar; si es demasiado fácil o el premio es demasiado alto, la caseta perderá dinero y habrá que pagarlo de la caja del viaje.

La situación moviliza el sentido estocástico de 3.º ESO: describir experimentos aleatorios, construir espacios muestrales, calcular probabilidades con la regla de Laplace, usar tablas de doble entrada y diagramas de árbol en experimentos de dos etapas y contrastar la probabilidad teórica con la frecuencia que sale al experimentar. Con todo ello se calcula la **ganancia media** de la caseta por partida y se decide con argumentos, no con corazonadas. Los juegos y las reglas son ficticios; los datos de las monedas históricas son reales y las simulaciones están generadas con ordenador para el aula.

Reto

Elaborar el laboratorio de probabilidad de la feria: calcular y comprobar con experimentos la probabilidad de ganar de cuatro juegos, hallar la ganancia media de la caseta en cada uno y recomendar —y diseñar— el juego que cumpla los criterios del comité.

Producto final

Laboratorio de probabilidad y decisiones.

Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- **CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- **CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- **CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- **CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- **CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- **1.1** Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.
- **1.2** Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.
- **2.2** Comprobar la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, evaluando su alcance y repercusión desde diferentes perspectivas.
- **3.1** Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.
- **6.1** Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.
- **8.1** Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, oralmente y por escrito, al explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.

Saberes básicos prioritarios

E
Sentido estocástico

- Experimentos aleatorios y deterministas; espacio muestral y sucesos: elementales, compuestos, seguro, imposible y contrario.
- Probabilidad como medida de la incertidumbre entre 0 y 1; regla de Laplace con sucesos equiprobables.
- Frecuencia absoluta y relativa; estabilización de la frecuencia relativa y probabilidad experimental (ley de los grandes números, de forma intuitiva).
- Experimentos en dos etapas, con y sin reemplazamiento: tablas de doble entrada y diagramas de árbol; probabilidad por multiplicación a lo largo de las ramas.
- Toma de decisiones con incertidumbre: ganancia media por partida y comparación de juegos con criterios explícitos.

F
Sentido socioafectivo

- Aceptación de la incertidumbre y del error: un resultado experimental distinto del teórico no es un fallo, es azar.
- Trabajo en equipo con roles (lanzador, anotador, calculista, portavoz) y revisión cruzada de resultados.

Objetivos didácticos

- ✓ Construir espacios muestrales.
- ✓ Calcular probabilidades simples y compuestas sencillas.
- ✓ Usar diagramas de árbol/tablas.
- ✓ Comparar probabilidad teórica y experimental para decidir.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos
El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas
Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples
Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito
Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente
Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Azar, experimento y suceso

Evidencia: Ficha 1: diagnóstico, clasificación de experimentos aleatorios y deterministas y sucesos seguros, imposibles y posibles de la ruleta de F3.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Espacio muestral y Laplace

Evidencia: Ficha 2: espacios muestrales, regla de Laplace con la ruleta y conteo en la tabla de dos dados (F4).

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Frecuencia experimental

Evidencia: Ficha 3: frecuencias absolutas y relativas de la simulación de F7, experimento propio con dos monedas y análisis de F9.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Experimentos en dos etapas

Evidencia: Ficha 4: lista de resultados de dos monedas, recuento con y sin devolución en la bolsa del juego C y pares ordenados con dos dados.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Árbol y tabla

Evidencia: Ficha 5: árbol del juego C completado, probabilidades por multiplicación y suma, y sucesos con la tabla de F4.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Comparación de juegos

Evidencia: Ficha 6: tabla comparativa de los cuatro juegos con ganancia media, previsión para 300 partidas, premio justo y recomendación.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Diseño de una decisión con riesgo

Evidencia: Ficha 7: diseño en equipo de un juego propio que cumpla los criterios, con árbol o tabla, premio y prueba piloto.

Ficha: Anexo 3 · ficha 7

8

SESIÓN 8

Informe y reto individual

Evidencia: Ficha 8: reto individual con un juego nuevo (árbol, probabilidad, ganancia media y decisión) y explicación del papel del azar.

Ficha: Anexo 3 · ficha 8

Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Dados · monedas · cartas simplificadas · simulador opcional

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo

Anexo 8

Espacios muestrales pequeños y árboles parcialmente dibujados.

Ampliación

Anexo 9

Diseñar un juego con valor esperado intuitivo favorable/desfavorable y justificar.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial
Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa
Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final
Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Lectura de las reglas de los juegos (F1), identificación del experimento, del suceso ganador y de los casos posibles y favorables en cada uno.	Fichas 1 y 2 / lista de cotejo
1.2	Elección y aplicación de la herramienta adecuada a cada juego: listado, tabla de doble entrada, regla de Laplace o diagrama de árbol con multiplicación de probabilidades.	Fichas 4 y 5 / escala de valoración
2.2	Comprobación de la coherencia de los resultados (las probabilidades del árbol suman 1, la estimación experimental se acerca a la teórica) y valoración de la decisión desde la perspectiva de la caseta y de quien juega.	Fichas 3 y 6 / rúbrica
3.1	Formulación y comprobación de la conjetura «el premio justo es 1/P» y de la condición «premio · P menor que 1» para que la caseta gane.	Fichas 6 y 7 / rúbrica
6.1	Modelización de una feria real mediante experimentos aleatorios y cálculo de la ganancia media por partida y para 300 partidas.	Laboratorio (Anexo 4) y Ficha 6 / rúbrica
8.1	Redacción de la recomendación con lenguaje probabilístico preciso (probabilidad, frecuencia, ganancia media) y exposición oral razonada.	Laboratorio (Anexo 4) y Ficha 8 / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Laboratorio, simulaciones, cálculos y recomendación.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

Variantes de aplicación

Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

ANEXO 1

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 10 · Tomar decisiones bajo incertidumbre

ALUMNADO

La feria del instituto abre dentro de tres semanas y el comité no se pone de acuerdo. Una compañera defiende el «Siete de la suerte»: «con dos dados el 7 sale un montón». Otro prefiere «Bolas rojas» porque paga 10 €. Alguien propone «Suma baja», que parece muy fácil de ganar. ¿Cuál deja dinero en la caja y cuál lo hace desaparecer? Vais a convertiros en el laboratorio de probabilidad de la feria: calcularéis, experimentaréis, compararéis las cuentas con lo que sale en la mesa y presentaréis una recomendación que se pueda defender con números.

> *¿Cómo cambia una decisión cuando conocemos la probabilidad de cada resultado?*

Vuestro reto

Elaborar el laboratorio de probabilidad de la feria: calcular y comprobar con experimentos la probabilidad de ganar de cuatro juegos, hallar la ganancia media de la caseta en cada uno y recomendar —y diseñar— el juego que cumpla los criterios del comité.

Lo que vais a producir

Laboratorio de probabilidad y decisiones.

Hoja de ruta · 8 sesiones

1. Distinguimos azar y certeza y describimos sucesos con la ruleta de la feria.
2. Construimos espacios muestrales y calculamos probabilidades con la regla de Laplace.
3. Experimentamos y comparamos la frecuencia relativa con la probabilidad teórica.
4. Estudiamos experimentos en dos etapas: con y sin devolución.
5. Dibujamos árboles y tablas y calculamos probabilidades compuestas.
6. Comparamos los cuatro juegos con la ganancia media de la caseta.
7. Diseñamos el juego propio del equipo y lo probamos con una prueba piloto.
8. Cerramos el informe del laboratorio y resolvemos el reto individual.

Al terminar seré capaz de...

- ✓ Construir espacios muestrales.
- ✓ Calcular probabilidades simples y compuestas sencillas.
- ✓ Usar diagramas de árbol/tablas.
- ✓ Comparar probabilidad teórica y experimental para decidir.

¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO 2

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 10 · Tomar decisiones bajo incertidumbre

ALUMNADO

Reglas de los cuatro juegos y criterios del comité, vocabulario del azar, ruleta y bolsa, tabla de doble entrada de dos dados, un árbol resuelto, fórmulas clave, simulación de 360 lanzamientos y la evolución de la frecuencia de caras. Los juegos son ficticios; las monedas históricas son datos reales y la simulación está generada con ordenador.

F1 Los cuatro juegos de la feria y los criterios del comité

DATOS

Juego	Cómo se juega	Gana quien…	Premio
A · Cara a cara	Se lanzan 2 monedas	obtiene 2 caras	3 €
B · Siete de la suerte	Se lanzan 2 dados de 6 caras	obtiene suma 7	5 €
C · Bolas rojas	Se sacan 2 bolas, una tras otra y sin devolver la primera, de la bolsa de F3	saca las 2 rojas	10 €
D · Suma baja	Se lanzan 2 dados de 6 caras	obtiene suma 8 o menos	2 €

Cada partida cuesta **1 €**. El premio es lo que la caseta paga a quien gana; el euro de la entrada no se devuelve.

Criterios del comité. C1: la probabilidad de ganar debe ser al menos $\frac{1}{6}$. **C2:** la ganancia media de la caseta por partida debe ser positiva. **C3:** el premio debe ser de 3 € o más.

Fuente: Reglas y criterios ficticios creados para el aula.

Antes de calcular nada: ¿qué juego te parece el más fácil de ganar? Anota tu intuición para compararla después.

F2 Vocabulario del azar

GLOSARIO

Experimento aleatorio	Experimento cuyo resultado no se puede predecir con certeza aunque se repita en las mismas condiciones.
Espacio muestral E	Conjunto de todos los resultados posibles. Para una moneda, $E = \{C, X\}$.
Suceso	Subconjunto del espacio muestral. Es **elemental** si tiene un solo resultado, **seguro** si es todo E e **imposible** si no tiene ninguno.
Suceso contrario	El que ocurre cuando no ocurre el suceso S. Se escribe $\overline{S}$ y $P(\overline{S}) = 1 - P(S)$.
Frecuencia relativa	Frecuencia absoluta (veces que ocurre) dividida entre el número de repeticiones del experimento.
Con / sin reemplazamiento	Con reemplazamiento: se devuelve la bola antes de la segunda extracción. Sin reemplazamiento: no se devuelve.
Ganancia media	Lo que se gana o se pierde por partida, como promedio, si se juega muchísimas veces.

Fuente: Elaboración propia.

F3 La ruleta y la bolsa de bolas

ESQUEMA

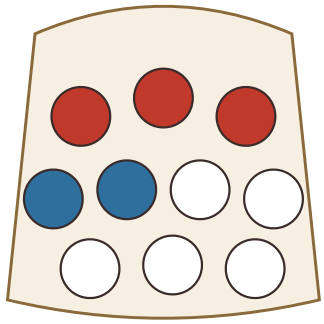
Ruleta de la feria



- 1 sector dorado
- 2 sectores rojos
- 2 sectores azules
- 3 sectores verdes

8 sectores iguales

Bolsa del juego C



3 rojas · 2 azules · 5 blancas

Fuente: Esquema de elaboración propia.

La ruleta se usa en las fichas 1 y 2. La bolsa es la del juego C.

F4 Tabla de doble entrada: suma de dos dados

DATOS

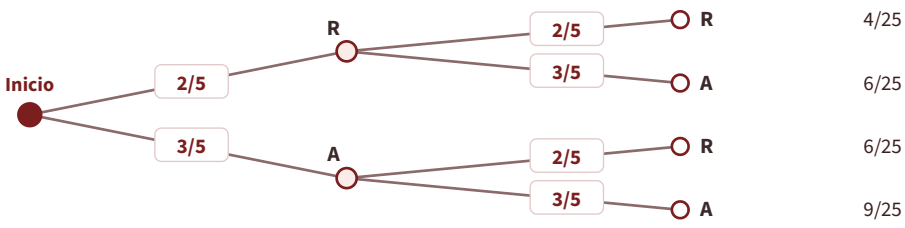
1.er dado ↓ · 2.º dado →	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Fuente: Elaboración propia. Filas: resultado del primer dado; columnas: resultado del segundo.

Hay 36 casillas, todas con la misma probabilidad. ¿Cuántas valen 7? ¿Cuántas valen 8 o menos?

F5 Ejemplo resuelto: árbol con reemplazamiento

ESQUEMA



Bolsa con 2 bolas rojas (R) y 3 azules (A). Se saca una bola, **se devuelve** y se saca otra. En cada rama está su probabilidad; la de un camino completo se calcula **multiplicando** las probabilidades de sus ramas: $P(R,R) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$. Las cuatro probabilidades finales suman $\frac{4+6+6+9}{25} = 1$.

Fuente: Ejemplo de elaboración propia.

Si la bola **no** se devolviera, la segunda extracción cambiaría: quedarían 4 bolas y las probabilidades de las ramas serían otras.

F6 Fórmulas y reglas clave

TEXTO

- **Regla de Laplace** (casos igual de probables): $P(S) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$, siempre entre 0 y 1.
- **Suceso contrario:** $P(\overline{S}) = 1 - P(S)$.
- **Árbol:** se **multiplica** a lo largo de un camino y se **suma** cuando varios caminos llevan al mismo suceso. Las probabilidades de las ramas que salen de un mismo nodo suman 1.
- **Ganancia media de la caseta por partida** $= 1 - (\text{premio} \cdot P(\text{ganar}))$. Es la entrada (1 €) menos el pago medio.
- **Juego justo:** ganancia media 0, es decir, premio $\cdot P = 1$ y por tanto $\text{premio} = \frac{1}{P}$.

Ejemplo. Un juego con $P(\text{ganar}) = \frac{1}{5}$ y premio de 4 € paga de media $4 \cdot \frac{1}{5} = 0{,}80$ € por partida: la caseta gana $1 - 0{,}80 = 0{,}20$ € por partida y, en 300 partidas, unos $300 \cdot 0{,}20 = 60$ €.

Fuente: Elaboración propia.

F7 Simulación: 360 lanzamientos de dos dados

DATOS

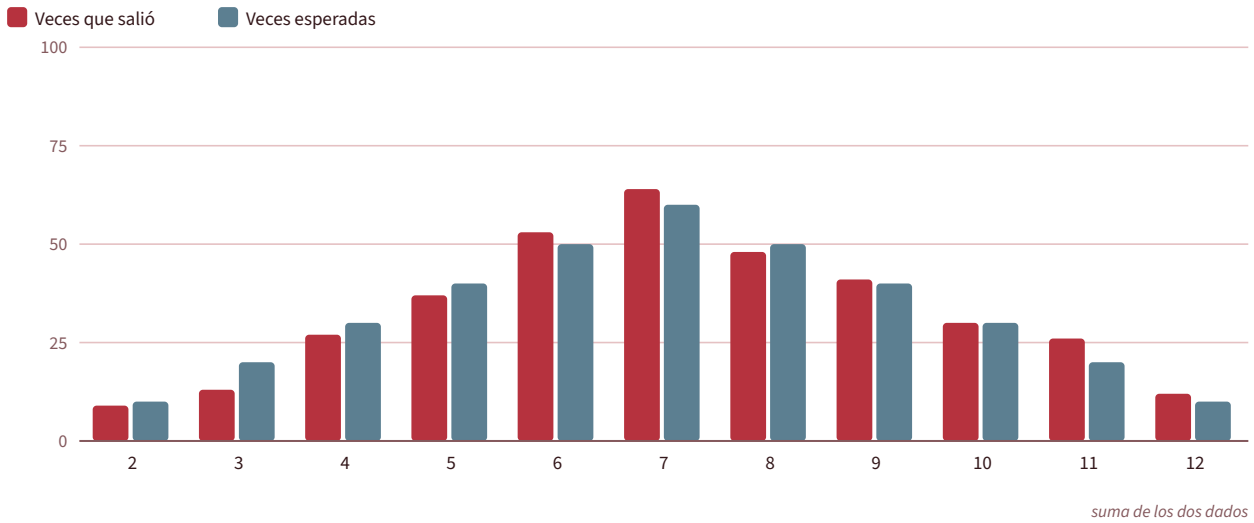
Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Veces que salió	9	13	27	37	53	64	48	41	30	26	12
Veces esperadas (teoría)	10	20	30	40	50	60	50	40	30	20	10

Fuente: Simulación generada con ordenador para el aula (360 lanzamientos).

Las veces esperadas son $360 \cdot \frac{\text{casos}}{36}$. Calcula la frecuencia relativa de cada suma en la ficha 3.

F8 Simulación frente a teoría

GRÁFICO

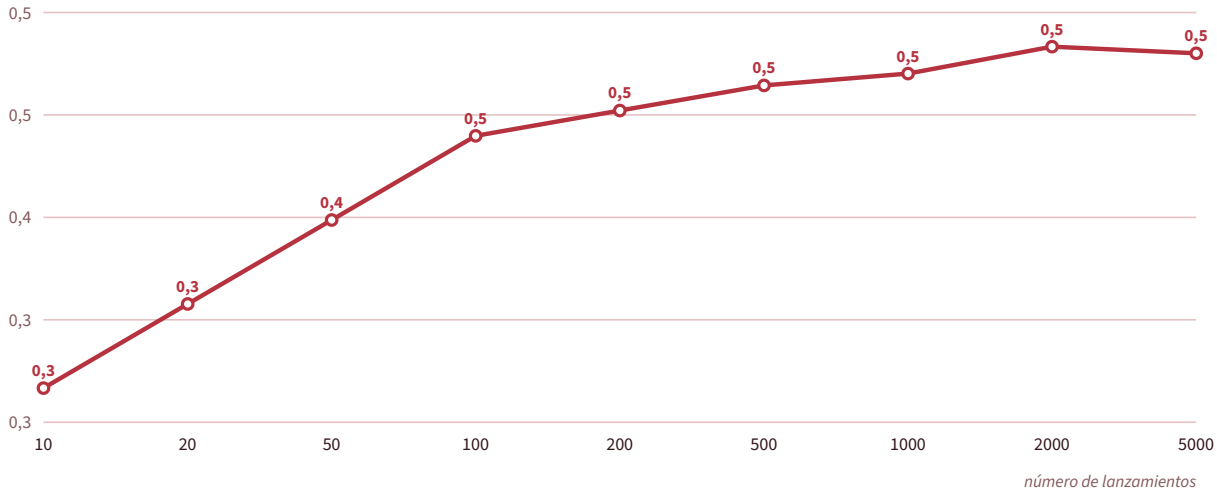


Fuente: Datos de F7.

¿Coinciden exactamente? ¿Se parece la forma de las dos series?

F9 ¿Qué pasa con la frecuencia de caras si lanzamos muchas veces?

GRÁFICO



Experimentos históricos reales con monedas: **Buffon** obtuvo 2 048 caras en 4 040 lanzamientos; **Pearson**, 12 012 caras en 24 000 lanzamientos; **Kerrich** (prisionero de guerra en Dinamarca durante la Segunda Guerra Mundial), 5 067 caras en 10 000. Las cifras se citan habitualmente en manuales de probabilidad.

Fuente: Simulación de 5 000 lanzamientos de una moneda generada para el aula. Eje horizontal no proporcional (número de lanzamientos). Datos históricos reales en el texto.

¿Hacia qué valor parece acercarse la frecuencia relativa?

ANEXO 3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 10 · Tomar decisiones bajo incertidumbre

ALUMNADO

FICHA 1 Azar, experimento y suceso

Sesión 1

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Lee F1, F2 y F3 antes de empezar.

1 **Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.**

Al lanzar un dado de 6 caras, el número de resultados posibles es…

☐ 1 ☐ 6 ☐ 12

La probabilidad de un suceso imposible es…

☐ 0 ☐ 0,5 ☐ 1

En una bolsa hay 3 bolas rojas y 1 azul. Sacar una bola roja es…

☐ menos probable que sacar azul ☐ igual de probable ☐ más probable que sacar azul

2 **Clasifica cada experimento como aleatorio o determinista y explica por qué.**

Experimento	¿Aleatorio o determinista?	Porque…
Lanzar una moneda y ver qué cara sale		
Sumar $3 + 4$		
Sacar una bola de la bolsa del juego C		
Soltar una piedra desde 2 m y medir cuánto tarda en caer		

3 **Con la ruleta de F3, completa la tabla.**

Suceso	¿Seguro, imposible o posible?	Nº de sectores favorables
Sale dorado		
Sale un color distinto de dorado		
Sale morado		
Sale rojo, azul, verde o dorado		

4 **Sin calcular nada, ¿en cuál de los juegos de F1 crees que se gana más a menudo? ¿Y en cuál menos? Explica tu intuición.**

FICHA 2 Espacio muestral y regla de Laplace

Sesión 2

Usa F3, F4 y la regla de Laplace de F6.

1 **Escribe el espacio muestral de cada experimento y el número de resultados.**

Experimento	Espacio muestral	Nº de resultados
Lanzar un dado		
Girar la ruleta de F3 (por colores)		
Lanzar dos monedas (C = cara, X = cruz)		

2 **Calcula con la regla de Laplace, en fracción simplificada y en porcentaje, las probabilidades en la ruleta de F3.**

Suceso	Casos favorables	Casos posibles	Probabilidad
Dorado			
Rojo			
No verde			
Rojo o azul			

3 **Con la tabla de F4 completa.**

Hay _____ casos posibles. La suma 7 aparece _____ veces, luego $P(\text{suma } 7) =$ _____. La suma 8 o menos aparece _____ veces, luego su probabilidad es _____.

4 **¿Por qué la suma 7 sale más veces que la suma 2? Explícalo con ayuda de F4.**

FICHA 3 Frecuencia y probabilidad experimental

Sesión 3

Usa F7, F8 y F9. Para la tarea 2 necesitáis dos monedas por equipo.

1 **Con los datos de F7 completa la tabla (porcentajes con un decimal).**

Suma	Veces que salió	Frecuencia relativa	Probabilidad teórica
5	37		
6	53		
7	64		
8	48		

2 **Laboratorio. Lanzad dos monedas 40 veces, anotad cuántas caras salen y completad la tabla. Roles: lanzador, anotador, calculista y portavoz.**

Resultado	Marcas	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Probabilidad teórica
2 caras				
1 cara				
0 caras				

3 **Con F9, di si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).**

	V	F
Con 10 lanzamientos, la frecuencia relativa de caras es siempre exactamente 0,5.	☐	☐
Al aumentar el número de lanzamientos, la frecuencia relativa de caras se acerca a la probabilidad teórica.	☐	☐
Si salen 5 caras seguidas, en el siguiente lanzamiento es más probable que salga cruz.	☐	☐
Buffon obtuvo una frecuencia relativa de caras de aproximadamente 0,507.	☐	☐

4 **Según F8, la suma 7 salió 64 veces y se esperaban 60. ¿Significa que el dado está trucado? Razona tu respuesta.**

FICHA 4 Experimentos en dos etapas

Sesión 4

*Usa F1, F3 y F4. Una **etapa** es cada acción del experimento (cada moneda, cada extracción).*

1 **Juego A. Escribe todos los resultados posibles al lanzar dos monedas ordenados (CC, CX…). Calcula la probabilidad de 2 caras, de exactamente 1 cara y de ninguna cara.**

2 **Bolsa del juego C (10 bolas). Completa el recuento de casos para sacar dos bolas rojas.**

	Con devolución	Sin devolución
Casos posibles (parejas ordenadas)		
Casos favorables (2 rojas)		
Probabilidad		

3 Explica por qué, sin devolución, hay $10 \cdot 9$ casos posibles y no $10 \cdot 10$.

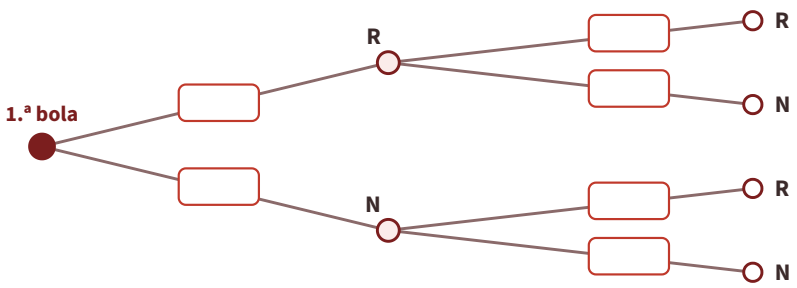
4 Juego B. ¿Cuántos resultados posibles hay con dos dados? ¿Por qué el resultado (3, 4) y el (4, 3) cuentan como distintos aunque sumen lo mismo?

FICHA 5 Árbol y tabla

Sesión 5

Usa F5 y F6. Recuerda: se multiplica a lo largo del camino y se suma entre caminos.

1 Juego C (sin devolución). R = bola roja y N = no roja. Escribe en cada recuadro la probabilidad de la rama.



2 Calcula con el árbol anterior.

Suceso	Cálculo	Probabilidad
Las dos bolas son rojas		
Exactamente una roja		
Ninguna roja		

3 Comprueba tu árbol: ¿cuánto deben sumar las tres probabilidades anteriores? ¿Por qué?

4 Con la tabla de F4 calcula la probabilidad de cada suceso del juego B.

Suceso	Casos favorables	Probabilidad (fracción simplificada)
Suma 7		
Suma mayor que 9		
Suma múltiplo de 3		
Suma mayor que 8 (contrario de «8 o menos»)		

FICHA 6 Comparamos los juegos

Sesión 6

Usa F1 y F6. Un equipo calcula cada juego y otro lo revisa.

1 Completa la tabla de los cuatro juegos. Escribe las probabilidades en fracción simplificada y marca con ✓ o ✗ los criterios del comité.

Juego	$P(\text{ganar})$	Premio	Pago medio	Ganancia media de la caseta	C1	C2	C3
A		3 €					
B		5 €					
C		10 €					
D		2 €					

2 Si cada juego se jugara 300 veces, ¿cuánto dinero esperarías que ganara o perdiera la caseta?

3 Conjetura. Para cada juego calcula el premio que lo haría justo (ganancia media 0) y escribe una regla general que relacione ese premio con la probabilidad de ganar.

Juego	$P(\text{ganar})$	Premio justo
A		
B		
C		
D		

4 **Recomienda un juego para la feria y justifícalo con C1, C2 y C3.**

FICHA 7 Diseñamos un juego con riesgo

Sesión 7

Trabajad en equipo. Vuestro juego debe usar solo dados, monedas, ruleta o bolsa, y cumplir C1, C2 y C3 de F1.

1 **Describid vuestro juego.**

Nombre	Material	Reglas	Suceso ganador

2 **Calculad la probabilidad de ganar con una tabla o un árbol (dibujadlo aquí).**

3 **Elegid un premio entero y comprobad los criterios.**

$P(\text{ganar})$	Premio	Pago medio	Ganancia media de la caseta

- ☐ $P(\text{ganar}) \geq \frac{1}{6}$ (C1)
- ☐ Ganancia media de la caseta positiva (C2)
- ☐ Premio de 3 € o más (C3)

4 **Prueba piloto. Jugad 30 partidas (o simuladlas) y comparad la frecuencia relativa de ganar con la probabilidad teórica.**

Partidas	Veces que se ganó	Frecuencia relativa	Probabilidad teórica

FICHA 8 Informe y reto individual

Sesión 8

Resuelve sin ayuda del equipo. Puedes usar calculadora.

1 **Una bolsa tiene 4 bolas verdes y 6 amarillas. Se sacan 2 bolas sin devolver. Gana quien saca 2 verdes y el premio es de 6 € (entrada: 1 €). Dibuja el árbol y calcula $P(\text{ganar})$.**

2 **Calcula la ganancia media de la caseta por partida y la ganancia esperada en 300 partidas.**

3 **¿Cumple este juego los criterios C1, C2 y C3 del comité? ¿Qué premio entero lo haría cumplir C2 sin romper C3?**

4 **En 40 partidas de otro juego la caseta ganó 18 € y esperabas 10 €. Explica por qué eso no demuestra que el cálculo estaba mal.**

ANEXO 4

Plantilla del producto final

SdA 10 · Tomar decisiones bajo incertidumbre

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Informe del laboratorio de probabilidad de la feria: el juego de la caseta, sus cálculos y la recomendación.

Título y equipo

Los cuatro juegos

Probabilidad de ganar y ganancia media de A, B, C y D.

Espacio muestral y tabla de dos dados

Resultados posibles y casos favorables.

Árbol del juego C

Con probabilidades en cada rama.

Experimento

Frecuencia relativa frente a probabilidad teórica.

Nuestro juego diseñado

Reglas, probabilidad, premio y ganancia media.

Recomendación

Juego elegido, criterios C1-C3 y límites.

ANEXO 5

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 10 · Tomar decisiones bajo incertidumbre

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Antes de entregar **Laboratorio de probabilidad y decisiones**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- [ ] Se han identificado el experimento y el suceso ganador de cada juego.
- [ ] Los espacios muestrales y los casos posibles están bien contados (36 con dos dados, 90 sin devolución en la bolsa C).
- [ ] Las probabilidades están en fracción simplificada y también en porcentaje.
- [ ] El árbol tiene las probabilidades de todas las ramas y las probabilidades finales suman 1.
- [ ] La ganancia media de cada juego se calcula como 1 menos premio por probabilidad.
- [ ] Se compara la frecuencia relativa de un experimento con la probabilidad teórica.
- [ ] Se comprueban C1, C2 y C3 para el juego recomendado y para el juego diseñado.
- [ ] La recomendación se justifica con datos y se señalan los límites del azar (no hay garantía en pocas partidas).

Calidad y rigor

- [ ] He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- [ ] He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- [ ] He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- [ ] He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- [ ] He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

ANEXO 6

Rúbrica imprimible

SdA 10 · Tomar decisiones bajo incertidumbre

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Rúbrica para valorar **Laboratorio de probabilidad y decisiones**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

ANEXO 7

Autoevaluación y coevaluación

SdA 10 · Tomar decisiones bajo incertidumbre

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé construir el espacio muestral de un experimento de una o dos etapas y calcular probabilidades.	○	○	○	○
Sé usar la ganancia media para decidir si un juego conviene y explicar por qué el resultado de pocas partidas puede variar.	○	○	○	○
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	○	○	○	○
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	○	○	○	○
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	○	○	○	○
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	○	○	○	○

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

ANEXO 8

Material de apoyo y refuerzo

SdA 10 · Tomar decisiones bajo incertidumbre

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Espacios muestrales pequeños y árboles parcialmente dibujados con experimentos de resultados equiprobables.

Ejemplo modelado

Se lanza una moneda y después un dado. Espacio muestral: C1, C2, C3, C4, C5, C6, X1, X2, X3, X4, X5, X6 (12 resultados). La probabilidad de «cara y número par» es $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, porque hay 3 casos favorables (C2, C4, C6).

Glosario y símbolos

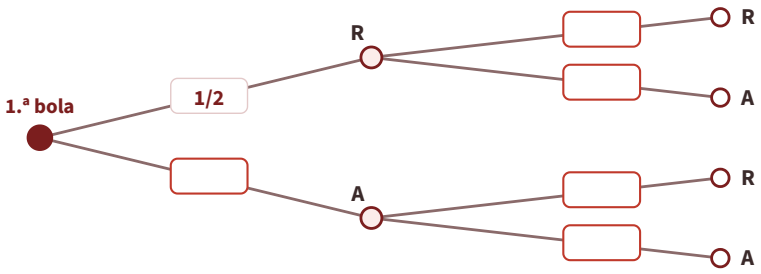
E: espacio muestral. $P(S)$: probabilidad del suceso S (entre 0 y 1). $\overline{S}$: suceso contrario. Casos favorables / casos posibles. R = roja, A = azul. Ramas: se multiplica; caminos: se suma.

1 **Se lanzan una moneda y una ruleta con 3 sectores iguales (1, 2 y 3). Completa el espacio muestral y calcula $P(\text{cara y } 3)$.**

Espacio muestral: C1, C2, C3, _____, _____, _____ (_____ resultados).

Casos favorables: _____. $P(\text{cara y } 3) =$ _____.

2 **Bolsa con 2 bolas rojas y 2 azules; se saca una bola, se devuelve y se saca otra. Completa el árbol (la probabilidad de la primera rama ya está escrita).**



3 **Con tu árbol calcula $P(\text{dos rojas})$ y $P(\text{dos bolas de colores distintos})$.**

ANEXO 9

Actividad de ampliación

SdA 10 · Tomar decisiones bajo incertidumbre

ALUMNADO

Nombre: Curso/grupo: Fecha:

Diseñar un juego favorable o desfavorable

En un juego con entrada de 1 €, probabilidad de ganar P y premio q, la persona que juega gana de media $q \cdot P - 1$ euros por partida. Si es positivo, el juego favorece a quien juega; si es negativo, favorece a la caseta. Vais a descubrir cuándo cambia el signo y a diseñar dos juegos que parecen iguales pero no lo son.

Pasos

1. Calcula, para $P = \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$, el premio que hace justo el juego y propón un premio menor (favorable a la caseta) y otro mayor (favorable a quien juega).
2. Diseña dos juegos con la misma probabilidad de ganar pero uno favorable a la caseta y otro favorable a quien juega, variando solo el premio.
3. Comprueba cada juego con 50 partidas simuladas o reales y explica si el resultado confirma el cálculo.
4. Generaliza: escribe una regla que diga para qué premios el juego favorece a la caseta si la probabilidad de ganar es P.

1 Tabla de premios.

$P(\text{ganar})$	Premio justo	Un premio favorable a la caseta	Un premio favorable al jugador
$\frac{1}{6}$			
$\frac{1}{4}$			
$\frac{1}{3}$			
$\frac{1}{2}$			

Entrega

Dos juegos descritos con árbol o tabla, sus ganancias medias, la prueba de 50 partidas y la regla general escrita con tus palabras y con una desigualdad.

ANEXO 10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 10 · Tomar decisiones bajo incertidumbre

DOCENTE

Ficha 1

1. Diagnóstico: 6; 0; «más probable que sacar azul» (3 de 4 frente a 1 de 4).
2. Aleatorio: lanzar la moneda; sacar una bola. Determinista: $3 + 4 = 7$ siempre; la piedra tarda siempre lo mismo en las mismas condiciones . Se acepta una justificación sobre si el resultado se puede predecir o no.
3. Sale dorado: posible, 1 sector. Color distinto de dorado: posible, 7. Sale morado: imposible, 0. Sale rojo, azul, verde o dorado: seguro, 8.
4. Respuesta abierta. Intuición razonable: C y D son los extremos (C, muy difícil; D, muy fácil). Se valora que expliquen con casos posibles y favorables aunque no calculen.

Ficha 2

1. Dado: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 6 resultados. Ruleta: $\{\text{dorado, rojo, azul, verde}\}$, 4 resultados distintos (aunque no son equiprobables: 8 sectores). Dos monedas: $\{CC, CX, XC, XX\}$, 4 resultados.
2. Dorado: $\frac{1}{8} = 12{,}5\,\%$. Rojo: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 25\,\%$. No verde: $\frac{5}{8} = 62{,}5\,\%$. Rojo o azul: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 50\,\%$.
3. 36; 6; $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; 26 (1+2+3+4+5+6+5); $\frac{26}{36} = \frac{13}{18} \approx 72{,}2\,\%$.
4. Porque hay muchas formas de sumar 7 (1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1: 6 casillas) y una sola de sumar 2 (1+1). Todas las casillas de F4 son igual de probables.

Ficha 3

1. Suma 5: $\frac{37}{360} \approx 10{,}3\,\%$ frente a $\frac{4}{36} \approx 11{,}1\,\%$. Suma 6: $\frac{53}{360} \approx 14{,}7\,\%$ frente a $\frac{5}{36} \approx 13{,}9\,\%$. Suma 7: $\frac{64}{360} \approx 17{,}8\,\%$ frente a $\frac{6}{36} \approx 16{,}7\,\%$. Suma 8: $\frac{48}{360} \approx 13{,}3\,\%$ frente a $\frac{5}{36} \approx 13{,}9\,\%$.
2. Resultados propios. Probabilidades teóricas: 2 caras $\frac{1}{4} = 25\,\%$ (≈10 de 40), 1 cara $\frac{1}{2} = 50\,\%$ (≈20), 0 caras $\frac{1}{4} = 25\,\%$ (≈10). Se acepta una desviación de unas pocas unidades; lo importante es compararla y comentar que no coincide exactamente.
3. F, V, F, V. (Con 10 lanzamientos puede salir 3/10, como en F9. Los lanzamientos son independientes: no hay «compensación». $\frac{2048}{4040} \approx 0{,}507$.)
4. No. La diferencia (64 frente a 60, un 7 % más) es pequeña y normal en 360 lanzamientos; con pocos datos las frecuencias fluctúan. La probabilidad teórica $\frac{1}{6}$ da 60 esperadas de media, no exactamente 60.

Ficha 4

1. Resultados: CC, CX, XC, XX. $P(\text{2 caras}) = \frac{1}{4}$; $P(\text{exactamente 1 cara}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (CX y XC); $P(\text{ninguna cara}) = \frac{1}{4}$. Suman 1.
2. Con devolución: 100 casos posibles, 9 favorables ($3 \cdot 3$), $P = \frac{9}{100} = 0{,}09$. Sin devolución: 90 casos posibles, 6 favorables ($3 \cdot 2$), $P = \frac{6}{90} = \frac{1}{15} \approx 0{,}067$.
3. Porque en la segunda extracción la bola de la primera ya no está: quedan 9 bolas, así que para cada una de las 10 primeras hay 9 segundas.
4. $6 \cdot 6 = 36$ resultados. (3, 4) significa 3 en el primer dado y 4 en el segundo; (4, 3) es otra situación distinta. Si se contaran como una sola, los casos no serían igual de probables.

Ficha 5

1. Ramas: R $\frac{3}{10}$, N $\frac{7}{10}$; tras R: R $\frac{2}{9}$, N $\frac{7}{9}$; tras N: R $\frac{3}{9}$ (= $\frac{1}{3}$), N $\frac{6}{9}$ (= $\frac{2}{3}$). Árbol completo en la figura de la guía.
2. Dos rojas: $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$. Exactamente una roja: $\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{21}{90} + \frac{21}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$. Ninguna roja: $\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$.
3. Deben sumar 1 porque son todos los casos posibles: $\frac{1}{15} + \frac{7}{15} + \frac{7}{15} = \frac{15}{15} = 1$.
4. Suma 7: 6 casos, $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Suma mayor que 9 (10, 11 y 12): $3 + 2 + 1 = 6$ casos, $\frac{1}{6}$. Múltiplo de 3 (3, 6, 9, 12): $2 + 5 + 4 + 1 = 12$ casos, $\frac{1}{3}$. Mayor que 8 (9 a 12): $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ casos, $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$; es el contrario de $\frac{13}{18}$.

Ficha 6

1. A: $P = \frac{1}{4}$, pago medio $3 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}75$ €, ganancia $+0{,}25$ €; C1 ✓ (0,25 > 0,167), C2 ✓, C3 ✓. B: $P = \frac{1}{6}$, pago $\frac{5}{6} \approx 0{,}83$ €, ganancia $+\frac{1}{6} \approx 0{,}17$ €; C1 ✓ (igual a $\frac{1}{6}$), C2 ✓, C3 ✓. C: $P = \frac{1}{15}$, pago $\frac{10}{15} \approx 0{,}67$ €, ganancia $+\frac{1}{3} \approx 0{,}33$ €; C1 ×, C2 ✓, C3 ✓. D: $P = \frac{13}{18} \approx 0{,}72$, pago $\frac{26}{18} \approx 1{,}44$ €, ganancia $-\frac{4}{9} \approx -0{,}44$ €; C1 ✓, C2 ×, C3 ×.
2. A: $300 \cdot 0{,}25 = +75$ €. B: $300 \cdot \frac{1}{6} = +50$ €. C: $300 \cdot \frac{1}{3} = +100$ €. D: $300 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) \approx -133$ € (pierde 133 €).
3. Premio justo: A 4 €, B 6 €, C 15 €, D $\frac{18}{13} \approx 1{,}38$ €. Regla: premio justo $= \frac{1}{P}$; si el premio es menor, la caseta gana de media; si es mayor, pierde.
4. Se aceptan A o B si se justifica. Con la regla «mayor ganancia media entre los que cumplen todo»: A (0,25 €) supera a B (0,17 €). Argumento a favor de B: premio más atractivo (5 €). C incumple C1 y D incumple C2 y C3 (D «parece fácil» pero el premio de 2 € es mayor que 1/P = 1,38 €).

Ficha 7

1. Respuesta abierta; cada juego debe tener un suceso ganador bien definido y espacio muestral equiprobable. Ejemplo válido: lanzar 2 dados, gana quien obtiene dos números iguales: $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, premio de 5 € (ganancia media $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ €).
2. Cálculo con tabla de 36 casillas o árbol; se revisa que las probabilidades finales sumen 1.
3. Condiciones: C1 $P \geq \frac{1}{6}$; C2 premio $< \frac{1}{P}$; C3 premio ≥ 3. Por tanto, el premio entero debe cumplir $3 \leq \text{premio} < \frac{1}{P}$, lo que exige $P < \frac{1}{3}$. Para $P = \frac{1}{6}$: premio 3, 4 o 5 (con 6 sería justo). Para $P = \frac{1}{4}$: premio 3. Para $P = \frac{5}{18}$: premio 3 (pues $\frac{18}{5} = 3{,}6$).
4. Resultados propios. Con 30 partidas es normal que la frecuencia se desvíe varios puntos de la teórica; el equipo debe comentarlo y no «corregir» el cálculo por ello.

Ficha 8

1. Árbol: V $\frac{4}{10}$, A $\frac{6}{10}$; tras V: V $\frac{3}{9}$, A $\frac{6}{9}$; tras A: V $\frac{4}{9}$, A $\frac{5}{9}$. $P(\text{VV}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15} \approx 0{,}133$.
2. Pago medio: $6 \cdot \frac{2}{15} = \frac{12}{15} = 0{,}80$ €. Ganancia de la caseta: $1 - 0{,}80 = 0{,}20$ € por partida. En 300 partidas: $300 \cdot 0{,}20 = 60$ €.
3. C1: $\frac{2}{15} \approx 0{,}133 < \frac{1}{6} \approx 0{,}167$: no cumple. C2: sí (+0,20 €). C3: sí (6 €). Para cumplir C2 el premio debe ser menor que $\frac{1}{P} = \frac{15}{2} = 7{,}5$ €, y para C3 al menos 3 €: sirven 3, 4, 5, 6 o 7 €. (C1 sigue sin cumplirse con cualquier premio, porque depende solo de P.)
4. Con pocas partidas el azar produce desviaciones grandes: la ganancia media (10 €) es un promedio a largo plazo, no una garantía. Con 40 partidas una diferencia de 8 € es normal. Habría que repetir muchas más veces para comprobar el cálculo.

Refuerzo

1. Espacio muestral: C1, C2, C3, X1, X2, X3 (6 resultados). Casos favorables: C3 (1). $P = \frac{1}{6}$.
2. Árbol: R $\frac{1}{2}$, A $\frac{1}{2}$; tras R: R $\frac{1}{2}$, A $\frac{1}{2}$; tras A: R $\frac{1}{2}$, A $\frac{1}{2}$ (con devolución las probabilidades no cambian).
3. $P(\text{RR}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Colores distintos: RA y AR: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Ampliación

1. Premio justo $\frac{1}{P}$: 6 €, 4 €, 3 € y 2 €. Favorable a la caseta (menor que el justo), por ejemplo: 5, 3, 2 y 1,50 €. Favorable a quien juega (mayor), por ejemplo: 7, 5, 4 y 3 €.
2. Ejemplo: gana quien saca cara con dos monedas al menos una ($P = \frac{3}{4}$) pagando 1,20 € (caseta gana $1 - 0{,}9 = 0{,}10$ €) o 1,50 € (caseta pierde $1 - 1{,}125 = -0{,}125$ €).
3. Regla: si el premio es q, la caseta gana de media cuando $q \cdot P < 1$, es decir, $q < \frac{1}{P}$; el juego es justo si $q = \frac{1}{P}$ y favorece al jugador si $q > \frac{1}{P}$. En 50 partidas se esperan desviaciones: se valora la comparación razonada, no que coincida.

Errores frecuentes

- Contar (3, 4) y (4, 3) como un solo resultado al lanzar dos dados, o creer que todas las sumas son igual de probables.
- Confundir «sin devolución» con «con devolución» y usar 10 · 10 en lugar de 10 · 9, o dejar el denominador 10 en la segunda rama.
- Sumar las probabilidades a lo largo de una rama en vez de multiplicarlas (y multiplicar cuando hay que sumar caminos).
- Pensar que, tras una racha, el azar «se compensa» (falacia del jugador) o que la frecuencia experimental debe coincidir con la teórica.
- Calcular la ganancia media del jugador en vez de la de la caseta (signo cambiado) o olvidar restar la entrada de 1 €.

Criterios para valorar respuestas abiertas

- En las tareas abiertas se acepta cualquier juego o recomendación que esté bien calculado, cumpla (o justifique que no cumple) los criterios del comité y se apoye en probabilidades.
- Las tablas de frecuencia de la ficha 3 y la prueba piloto de la ficha 7 dependen del azar: se valoran la comparación con la teoría y el comentario sobre la variabilidad, no los valores concretos.
- Se puede usar la calculadora, pero cada probabilidad debe aparecer como fracción con su cálculo escrito. Un simulador (hoja de cálculo o web) es válido para la prueba piloto, indicando que es una simulación.

Créditos, fuentes y condiciones de uso

Edición revisada: octubre de 2026

Situaciones de aprendizaje · Matemáticas · 3.º ESO. Material elaborado y editado por **recursoseso.com**.

Normativa de referencia

- Ley Orgánica 2/2006, de Educación, modificada por la Ley Orgánica 3/2020 (LOMLOE).
- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la ESO.
- Currículos autonómicos correspondientes, a los que debe adaptarse esta propuesta.

Gráficos, esquemas y fórmulas

Gráficas, diagramas, planos y esquemas de elaboración propia. Fórmulas compuestas con **KaTeX** (licencia MIT). Los mapas, cuando aparecen, se elaboran con datos de **Natural Earth** (dominio público).

Datos y contextos

Los problemas usan datos reales cuando se indica su fuente (INE, Eurostat, Banco de España, AEMET, organismos oficiales y similares), redondeados con fines didácticos. Los catálogos de precios, tarifas, empresas, personajes y conjuntos de datos señalados como ficticios han sido creados para el aula. Las cifras económicas y tarifas deben actualizarse cuando se trabajen problemas del presente.

Herramientas digitales

Las referencias a calculadora, hoja de cálculo o geometría dinámica (por ejemplo, GeoGebra) son orientativas: todas las actividades pueden resolverse también con lápiz, papel y los datos del dossier.

Condiciones de uso

© 2026 recursoseso.com. Todos los derechos reservados. Se autoriza la reproducción de las páginas de este cuaderno para su uso en el aula por parte del docente o del centro educativo que lo ha adquirido u obtenido legítimamente. No está permitida su redistribución, venta, publicación en otras webs o plataformas ni su modificación para uso comercial sin autorización expresa de recursoseso.com.

Si detectas algún error o quieres proponer una mejora, puedes comunicarlo a través de **recursoseso.com**. Este material se revisa y actualiza periódicamente.