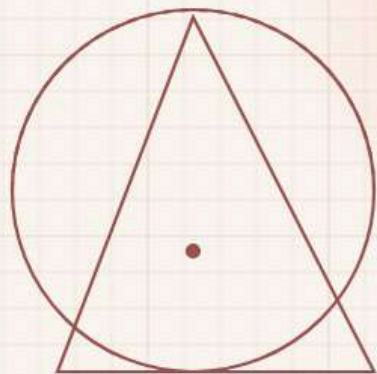
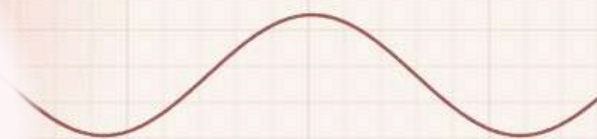




$3/4$



$\bar{x}$



$f(x)$

$P(A \cap B)$

SITUACIONES DE APRENDIZAJE

$\Sigma x_i / n$

Matemáticas

2.º ESO

%

$\Delta = b^2 - 4ac$

10 situaciones de aprendizaje completas

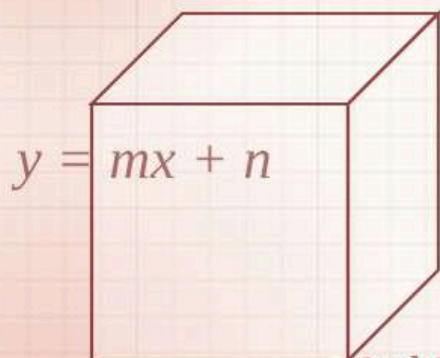
Con secuencia didáctica, evaluación, rúbricas y anexos listos para usar



∞

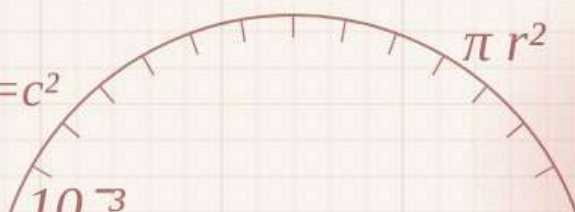
$\angle ABC$

2^n



$a^2 + b^2 = c^2$

πr^2



10^{-3}

$\text{sen } \alpha$



Índice

Presentación del cuaderno	3
Plan general	5
SdA 01 Números enormes y números diminutos	6
Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente	12
SdA 02 Fracciones que compiten	34
Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente	40
SdA 03 ¿Cuánto ha cambiado el precio?	62
Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente	68
SdA 04 Descubrimos patrones	89
Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente	95
SdA 05 Álgebra que simplifica problemas	116
Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente	122
SdA 06 Encontrar lo desconocido	145
Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente	151
SdA 07 Dos incógnitas, una decisión	175
Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente	181
SdA 08 La matemática de los planos	204
Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente	211
SdA 09 Cuando una cantidad depende de otra	236
Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente	242
SdA 10 ¿Azar o patrón?	268
Anexos 1-10 · fichas, dossier, plantillas, evaluación y guía docente	275
Créditos, fuentes y condiciones de uso	297

PRESENTACIÓN

Un cuaderno para pensar con las matemáticas

Este cuaderno reúne **10 situaciones de aprendizaje** completas de Matemáticas para 2.º ESO, con un total de **70 sesiones**. Cada situación parte de un reto con sentido y culmina en un producto final en el que el alumnado interpreta, modeliza, resuelve, comprueba y comunica.



Sobre este volumen

El RD 217/2022 formula conjuntamente para 1.º-3.º los criterios y saberes de Matemáticas. Este volumen propone una progresión propia para 2.º ESO, reforzando el razonamiento numérico y proporcional y aumentando la formalización algebraica, funcional, geométrica y estocástica.

Criterio de uso curricular. La concreción y secuenciación propuestas son orientativas. Deben adaptarse al currículo de la comunidad autónoma, a la programación del departamento, al número real de sesiones y al punto de partida del alumnado.



Criterios metodológicos comunes

- ✓ Resolución de problemas como eje de aprendizaje, evitando reducir las situaciones a una sucesión de ejercicios rutinarios.
- ✓ Conexión entre representaciones numéricas, algebraicas, gráficas, geométricas y verbales.
- ✓ Uso razonado de calculadora, hoja de cálculo, geometría dinámica u otras herramientas cuando mejoran la comprensión o la comprobación.
- ✓ Evaluación continua y formativa mediante producciones de proceso, producto final y evidencia individual.
- ✓ Trabajo explícito del sentido socioafectivo: perseverancia, revisión del error, comunicación, cooperación e inclusión.



Cómo está organizada cada situación



Contexto y reto

Pregunta guía, reto y producto final.



Currículo

Competencias, criterios, saberes y objetivos.



Sesiones

Secuencia con una evidencia por sesión.



DUA

Medidas de inclusión, refuerzo y ampliación.



Evaluación

Instrumentos, rúbrica y variantes.



Los diez anexos de cada situación

Cada situación incluye anexos listos para imprimir o proyectar: dossier con datos, tablas, gráficas y esquemas, fichas de trabajo, plantillas, instrumentos de evaluación y una guía docente con todas las soluciones. Los del alumnado llevan cabecera para nombre, grupo y fecha.

1 Ficha de lanzamiento del reto

2 Dossier de fuentes y materiales base

- 3 Fichas de actividades del alumnado
- 4 Plantilla del producto final
- 5 Lista de cotejo para el proceso y la entrega
- 6 Rúbrica imprimible
- 7 Autoevaluación y coevaluación
- 8 Material de apoyo y refuerzo
- 9 Actividad de ampliación
- 10 Guía docente de respuestas y orientaciones



Claves de lectura: competencias y sentidos

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICAS (SÍNTESIS)

- CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- CE4** Utilizar el pensamiento computacional: descomponer, reconocer patrones, generalizar y crear algoritmos.
- CE5** Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.
- CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.
- CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.
- CE9** Gestionar emociones, aceptar el error y perseverar en el aprendizaje de las matemáticas.
- CE10** Trabajar en equipo con respeto, asumiendo roles y valorando la diversidad.

SENTIDOS DE LOS SABERES BÁSICOS

- A** Sentido numérico
- B** Sentido de la medida
- C** Sentido espacial
- D** Sentido algebraico
- E** Sentido estocástico
- F** Sentido socioafectivo



Base normativa: LOMLOE y Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo. La secuenciación es orientativa y debe adaptarse al currículo autonómico. En cada situación, los criterios de evaluación se presentan en síntesis operativa; su formulación literal figura en el anexo II del real decreto.



Plan general · 2.º ESO

1.º trimestre

3 situaciones · 21 sesiones

1.º-2.º trimestre

1 situación · 6 sesiones

2.º trimestre

3 situaciones · 21 sesiones

2.º-3.º trimestre

1 situación · 8 sesiones

3.º trimestre

2 situaciones · 14 sesiones

1

Números enormes y números diminutos

7 sesiones · 1.º trimestre

🕒 Infografía de escalas del mundo real

2

Fracciones que compiten

7 sesiones · 1.º trimestre

🕒 Comparador de planes de reparto y consumo

3

¿Cuánto ha cambiado el precio?

7 sesiones · 1.º trimestre

🕒 Observatorio de variaciones porcentuales

4

Descubrimos patrones

6 sesiones · 1.º-2.º trimestre

🕒 Catálogo de sucesiones y reglas

5

Álgebra que simplifica problemas

7 sesiones · 2.º trimestre

🕒 Manual de expresiones y polinomios para modelizar

6

Encontrar lo desconocido

7 sesiones · 2.º trimestre

🕒 Expediente de ecuaciones resueltas y verificadas

7

Dos incógnitas, una decisión

7 sesiones · 2.º trimestre

🕒 Informe comparativo de dos planes

8

La matemática de los planos

8 sesiones · 2.º-3.º trimestre

🕒 Plano técnico simplificado y memoria de medidas

9

Cuando una cantidad depende de otra

7 sesiones · 3.º trimestre

🕒 Panel de funciones cotidianas

10

¿Azar o patrón?

7 sesiones · 3.º trimestre

🕒 Informe estadístico y auditoría de un juego

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

01 Números enormes y números diminutos

PREGUNTA GUÍA

? ¿Cómo escribimos y comparamos cantidades demasiado grandes o demasiado pequeñas para manejarlas cómodamente?



CURSO
2.º ESO



SESIONES
7 sesiones · 1.º trimestre



SENTIDOS PRIORITARIOS
A · Sentido numérico



COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE2, CE5, CE7



PRODUCTO FINAL
Infografía de escalas del mundo real



CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 1.2, 2.1, 5.1, 7.1



Contexto, reto y sentido

Un virus mide una diezmilésima de milímetro; la estrella más cercana al Sol está a más de cuarenta billones de kilómetros. Escritas con todas sus cifras, estas cantidades ocupan una línea entera, son difíciles de leer y fáciles de copiar mal: basta un cero de más o de menos para equivocarse en un factor diez. Los científicos, los ingenieros y los médicos necesitan una forma compacta y fiable de escribirlas y de compararlas.

La situación moviliza el sentido numérico con potencias de exponente entero, raíces cuadradas, notación científica y estimación. El alumnado ordena objetos de escalas muy distintas, descubre las propiedades de las potencias a partir de patrones, aprende a leer el display de la calculadora, compara cantidades por su orden de magnitud y comprueba cada resultado con una estimación. Todo ello se integra en una infografía de escalas que debe ser precisa y revisable por otro equipo.

Reto

Diseñar una infografía que sitúe seis objetos del mundo real, del más pequeño al más grande, en una recta de potencias de 10, con sus medidas en notación científica, dos comparaciones razonadas y una estimación propia comprobada.

Producto final

Infografía de escalas del mundo real.



Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- CE5** Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.
- CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- 1.1** Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.
- 1.2** Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.
- 2.1** Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.
- 5.1** Reconocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente.
- 7.1** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales.

Saberes básicos prioritarios

A

Sentido numérico

- Potencias de base entera y exponente entero (positivo, cero y negativo); propiedades del producto, el cociente y la potencia de una potencia.
- Raíz cuadrada exacta y aproximada como operación inversa del cuadrado; estimación entre dos enteros consecutivos.
- Notación científica: escritura, lectura en la calculadora y operaciones (producto, cociente y suma con igual exponente).
- Orden de magnitud y estimación de cantidades muy grandes o muy pequeñas; comparación mediante cocientes.
- Comprobación de la razonabilidad de un resultado y uso razonado de la calculadora.

F

Sentido socioafectivo

- Gestión del error: revisión cruzada de cálculos con otro equipo.
- Trabajo en equipo con roles (calculista, revisor, diseñador, portavoz).



Objetivos didácticos

- ✓ Interpretar potencias y raíces como operaciones relacionadas.
- ✓ Usar notación científica en cantidades grandes y pequeñas.
- ✓ Estimar órdenes de magnitud y comprobar resultados.
- ✓ Elegir una representación numérica útil según el contexto.



Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.



Secuencia de sesiones y actividades

-  Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Escalas extremas: del virus a la distancia planetaria con datos didácticos

 **Evidencia:** Ficha 1: tabla de siete objetos pasados a metros y ordenados, y reflexión sobre la incomodidad de los ceros.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Potencias y propiedades a partir de patrones

 **Evidencia:** Ficha 2: patrón de potencias de 10, simplificación con las propiedades y verdadero/falso sobre errores típicos.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Raíz cuadrada y relación inversa con el cuadrado

 **Evidencia:** Ficha 3: raíces exactas, relación lado-área en cuadrados y estimación de raíces no exactas entre dos enteros.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Notación científica y calculadora

 **Evidencia:** Ficha 4: paso a notación científica y a número decimal, lectura de la calculadora y operaciones con la velocidad de la luz.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Orden de magnitud y estimación

 **Evidencia:** Ficha 5: orden de magnitud de cinco cantidades, comparación por cocientes y estimación de los latidos de una vida.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Infografía comparativa

 **Evidencia:** Ficha 6: tabla de seis objetos con medida, notación científica y orden de magnitud; boceto de la recta y dos comparaciones.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Reto individual de transferencia

 **Evidencia:** Ficha 7: reto individual con operaciones en notación científica, raíz, estimación y detección de un error.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 7

**Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad** **Recursos**

Tarjetas de magnitudes ficticias/estables

calculadora

recta logarítmica simplificada

hoja de cálculo opcional

 Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.



DUA y atención a la diversidad

🔥 Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

👁️ Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

🗨️ Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

🔍 Refuerzo Anexo 8

Potencias de base 10, tabla de prefijos y calculadora con ejemplos modelados.

🔗 Ampliación Anexo 9

Comparar dos formas de aproximar una magnitud y acotar el error relativo de forma intuitiva.



Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1 Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).



FASE 2 Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).



FASE 3 Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Conversión de unidades a metros y selección de los datos necesarios para ordenar siete escalas muy distintas.	Ficha 1 / lista de cotejo
1.2	Elección de la estrategia adecuada (propiedades de las potencias, raíz, notación científica, cociente de órdenes de magnitud) en cada tarea.	Fichas 2, 3 y 4 / escala de valoración
2.1	Comprobación de cada resultado con una estimación, con la calculadora o por la operación inversa, y detección de errores en notación y cálculo.	Fichas 4, 5 y 7 y revisión cruzada de la infografía / rúbrica
5.1	Conexión entre potencias, raíces, notación científica y orden de magnitud al comparar dos objetos de escalas distintas.	Fichas 3 y 5 y comparaciones de la infografía / rúbrica
7.1	Representación de seis magnitudes en la recta de exponentes, en tabla y en notación científica, con rótulos y unidades.	Infografía (Anexo 4) y Ficha 6 / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Infografía, cálculos, estimaciones y reto individual.

+ Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

🔗 Variantes de aplicación

↗ Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

↘ Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 1 · Números enormes y números diminutos

ALUMNADO

Un virus, un cabello, un glóbulo rojo, vuestro propio cuerpo, el Everest, la Luna, el Sol y la estrella más cercana. Todos son «cosas reales», pero entre el más pequeño y el más grande hay una diferencia de 26 ceros. ¿Cabrían en un mismo póster? Si lo dibujáis a escala, el virus desaparece; si escribís los números con todas sus cifras, la página no basta. Vais a ser el equipo de diseño de una infografía de escalas: aprenderéis a manejar potencias, raíces y notación científica, a comparar con orden de magnitud y a comprobar cada dato como lo haría un científico.

“¿Cómo escribimos y comparamos cantidades demasiado grandes o demasiado pequeñas para manejarlas cómodamente?”

🎯 Vuestro reto

Diseñar una infografía que sitúe seis objetos del mundo real, del más pequeño al más grande, en una recta de potencias de 10, con sus medidas en notación científica, dos comparaciones razonadas y una estimación propia comprobada.

📦 Lo que vais a producir

Infografía de escalas del mundo real.

📍 Hoja de ruta · 7 sesiones

- 1 Ordenamos objetos de tamaños extremos y descubrimos por qué hacen falta nuevas formas de escribir.
- 2 Descubrimos las potencias y sus propiedades a partir de patrones.
- 3 Relacionamos el cuadrado y la raíz cuadrada con áreas y lados.
- 4 Escribimos cantidades en notación científica y las leemos en la calculadora.
- 5 Comparamos cantidades por su orden de magnitud y estimamos.
- 6 Diseñamos la infografía de escalas del equipo.
- 7 Resolvemos un reto individual de transferencia.

📖 Al terminar seré capaz de...

- ✓ Interpretar potencias y raíces como operaciones relacionadas.
- ✓ Usar notación científica en cantidades grandes y pequeñas.
- ✓ Estimar órdenes de magnitud y comprobar resultados.
- ✓ Elegir una representación numérica útil según el contexto.

📝 ¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 1 · Números enormes y números diminutos

ALUMNADO

Tabla de magnitudes reales, prefijos, mapa de escalas, patrón y propiedades de las potencias, cuadrados y raíces, ejemplos de notación científica correcta e incorrecta, un ejemplo resuelto de estimación y un glosario. Los valores son aproximados y están redondeados para el aula.

F1 Tarjetas de magnitudes reales

DATOS

Objeto	Medida con las unidades habituales
Átomo de hidrógeno (diámetro)	0,0000000001 m (una décima de nanómetro)
Virus SARS-CoV-2 (diámetro)	100 nm
Glóbulo rojo (diámetro)	8 μ m
Grosor de un cabello	70 μ m
Hormiga (longitud)	5 mm
Persona adulta (altura)	1,7 m
Monte Everest (altura)	8 849 m
Radio de la Tierra	6 371 km
Distancia media Tierra-Luna	384 400 km
Distancia media Tierra-Sol	149 600 000 km
Distancia a Próxima Centauri (la estrella más cercana tras el Sol)	$4,0 \cdot 10^{16}$ m (unos 4,2 años luz)

Fuente: Valores aproximados de uso habitual en divulgación científica (NASA, ESA, OMS), redondeados para el aula.

🔍 Casi ninguna medida está en metros. Antes de comparar, hay que unificar las unidades (F2).

F2

Prefijos del Sistema Internacional

DATOS

Prefijo	Símbolo	Potencia de 10	Ejemplo
nano	n	10^{-9}	$1\text{ nm} = 10^{-9}\text{ m}$
micro	μ	10^{-6}	$1\text{ }\mu\text{m} = 10^{-6}\text{ m}$
mili	m	10^{-3}	$1\text{ mm} = 10^{-3}\text{ m}$
(unidad)	—	10^0	1 m
kilo	k	10^3	$1\text{ km} = 10^3\text{ m}$
mega	M	10^6	$1\text{ Mm} = 10^6\text{ m}$
giga	G	10^9	$1\text{ Gm} = 10^9\text{ m}$
tera	T	10^{12}	$1\text{ Tm} = 10^{12}\text{ m}$

Fuente: Sistema Internacional de Unidades (BIPM).

Q

Ejemplo: $8\text{ }\mu\text{m} = 8 \cdot 10^{-6}\text{ m} = 0,000008\text{ m}$.

F3

Mapa de escalas: una recta de exponentes

ESQUEMA

Diagrama de una recta de exponentes (escala logarítmica simplificada) que muestra la magnitud de diferentes objetos y distancias en metros, expresados como potencias de 10.

Objeto	Medida (m)	Exponente (n)
Átomo de H	10^{-10} m	-10
Virus	10^{-7} m	-7
Glóbulo rojo	$8 \cdot 10^{-6}\text{ m}$	-5,5
Cabello	$7 \cdot 10^{-5}\text{ m}$	-4,5
Hormiga	$5 \cdot 10^{-3}\text{ m}$	-2,5
Persona	1,7 m	0
Everest	$8,8 \cdot 10^3\text{ m}$	3,5
Radio Tierra	$6,4 \cdot 10^6\text{ m}$	6,5
Tierra-Luna	$3,8 \cdot 10^8\text{ m}$	8,5
Tierra-Sol	$1,5 \cdot 10^{11}\text{ m}$	11,5
Próxima Centauri	$4,0 \cdot 10^{16}\text{ m}$	16,5

Fuente: Esquema de elaboración propia con las medidas de F1. Cada marca es una potencia de 10 distinta (escala logarítmica simplificada).

Q

Cada paso hacia la derecha multiplica la medida por 10. ¿Cuántas veces es mayor la distancia a Próxima Centauri que la altura de una persona?

F4 Potencias de 10 y sus propiedades

DATOS

Potencia	Producto o fracción	Número
10^4	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$	10 000
10^3	$10 \cdot 10 \cdot 10$	1 000
10^2	$10 \cdot 10$	100
10^1	10	10
10^0	se define así	1
10^{-1}	$\frac{1}{10}$	0,1
10^{-2}	$\frac{1}{10^2}$	0,01
10^{-3}	$\frac{1}{10^3}$	0,001

Al bajar una fila, el resultado se divide entre 10. Este patrón obliga a definir $a^0 = 1$ y $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (con $a \neq 0$).

Propiedades (misma base): $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Ejemplos. $10^3 \cdot 10^4 = 10^7$, $10^9 : 10^6 = 10^3$, $(10^2)^3 = 10^6$, $2^5 \cdot 2^{-2} = 2^3 = 8$.

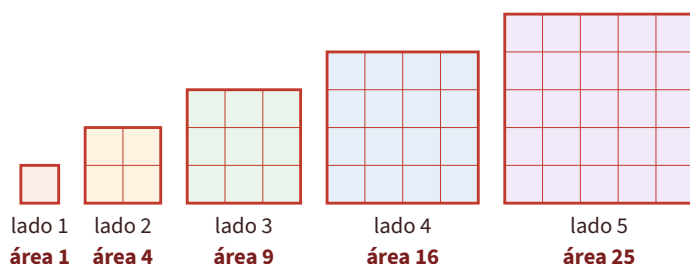
¡Cuidado! $10^3 \cdot 10^4$ no es 10^{12} : los exponentes se suman, no se multiplican. Y 10^{-2} no es negativo: vale 0,01.

Fuente: Elaboración propia.

🔍 Las propiedades solo valen cuando las bases son iguales: $2^3 \cdot 5^2$ no se puede reducir a una sola potencia.

F5 El cuadrado y la raíz cuadrada

ESQUEMA



Elevar al cuadrado y hacer la raíz son operaciones inversas.

lado 4 → área $4^2 = 16$

área 16 → lado $\sqrt{16} = 4$

$\sqrt{16} = 4$ porque $4^2 = 16$

Cuadrados perfectos:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

¿ $\sqrt{20}$? Está entre $\sqrt{16} = 4$ y $\sqrt{25} = 5$.

Fuente: Esquema de elaboración propia.

🔍 Si un cuadrado tiene área 49 m^2 , ¿cuánto mide su lado? ¿Y su perímetro?

F6 Notación científica: correcta e incorrecta

DATOS

Escritura	¿Es notación científica?	Motivo y forma correcta
$3,5 \cdot 10^4$	Sí	Una cifra entera distinta de 0 antes de la coma, por una potencia de 10.
$35 \cdot 10^3$	No	La parte decimal es mayor o igual que 10. Correcto: $3,5 \cdot 10^4$.
$0,35 \cdot 10^5$	No	La parte decimal es menor que 1. Correcto: $3,5 \cdot 10^4$.
$7,2 \cdot 10^{-3}$	Sí	Exponente negativo para números menores que 1: vale 0,0072.
$4,5 \cdot 3^2$	No	La base de la potencia debe ser 10.
$1 \cdot 10^6$	Sí	Un millón; basta escribir 10^6 .

Forma general: $a \cdot 10^n$ con $1 \leq a < 10$ y n entero.

Calculadora. El display muestra 9.46E15 cuando el número es $9,46 \cdot 10^{15}$, y 3.2E-5 cuando es $3,2 \cdot 10^{-5}$. La «E» significa «por 10 elevado a».

Operaciones. $(3 \cdot 10^4) \cdot (2 \cdot 10^5) = 6 \cdot 10^9 \cdot (8 \cdot 10^9) : (4 \cdot 10^3) = 2 \cdot 10^6$ · para sumar, mismo exponente:
 $6,4 \cdot 10^3 + 3,6 \cdot 10^3 = 10 \cdot 10^3 = 1 \cdot 10^4$.

Fuente: Elaboración propia.

🔍 Tras multiplicar, revisa que la parte decimal siga entre 1 y 10; si no, ajusta el exponente.

F7 Ejemplo resuelto: ¿cuántos granos de arroz hay en un kilo?

ESTUDIO DE CASO

1. Datos razonables. Un grano de arroz pesa unos $0,02 \text{ g} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ g}$. Un kilo son $1\,000 \text{ g} = 10^3 \text{ g}$.

2. Plantea la operación. Número de granos = peso total : peso de un grano = $10^3 : (2 \cdot 10^{-2})$.

3. Calcula. $10^3 : (2 \cdot 10^{-2}) = 0,5 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^4$ granos, es decir, unos 50 000.

4. Orden de magnitud. $5 \cdot 10^4$ está en el orden de 10^5 (regla del aula: si la parte decimal es 5 o más, se sube al exponente siguiente).

5. ¿Es razonable? Si fueran 5 000 granos, cada uno pesaría 0,2 g, demasiado. Si fueran 5 millones, pesarían 0,0002 g, demasiado poco. 50 000 es plausible.

Fuente: Estimación de elaboración propia con valores aproximados.

🔍 Estimar no es adivinar: se anotan los supuestos, se calcula y se comprueba que el resultado es razonable.

F8 Vocabulario esencial**GLOSARIO**

Base y exponente	En a^n , a es la base y n el exponente: cuántas veces se multiplica la base por sí misma.
Cuadrado perfecto	Número que es el cuadrado de un entero: 1, 4, 9, 16, 25...
Raíz cuadrada	$\sqrt{a} = b$ si $b \geq 0$ y $b^2 = a$. Es la operación inversa de elevar al cuadrado.
Radicando	El número que está dentro de la raíz.
Notación científica	Forma $a \cdot 10^n$ con $1 \leq a < 10$ y n entero.
Orden de magnitud	Potencia de 10 más próxima a una cantidad (en el aula: si la parte decimal es 5 o más, se sube un exponente).
Estimar	Calcular un valor aproximado con datos redondeados para comprobar si un resultado es razonable.

Fuente: Elaboración propia.

Fichas de actividades del alumnado

SdA 1 · Números enormes y números diminutos

ALUMNADO

FICHA 1

Escalas extremas

Sesión 1

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Trabaja con la tabla de magnitudes (F1), los prefijos (F2) y el mapa de escalas (F3).

1 Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.

 10^3 es igual a...☐ 30 ☐ 100 ☐ 1 000 $\sqrt{49}$ es igual a...☐ 7 ☐ 24,5 ☐ 98

El número 0,001 se escribe también...

☐ 10^3 ☐ 10^{-3} ☐ 10^{-1}

2 Con F1 y F2, escribe en metros (con todas sus cifras) el radio de la Tierra y la distancia Tierra-Luna.

3 Pasa a metros cada medida y ordena los objetos de menor (1) a mayor (7) tamaño.

Objeto	Medida en metros	Puesto (1 = el menor)
Monte Everest		
Glóbulo rojo		
Persona adulta		
Átomo de hidrógeno		
Hormiga		
Virus SARS-CoV-2		
Grosor de un cabello		

- 4 ¿Qué dificultades tiene escribir 0,0000000001 m o 149 600 000 000 m con todas sus cifras? Propón una idea para evitarlas.

FICHA 2 Potencias y patrones

Sesión 2

Usa el patrón y las propiedades de F4.

- 1 Completa la tabla siguiendo el patrón (cada vez se divide entre 10).

Potencia	Producto o fracción	Número
10^4		
10^2		
10^1		
10^0		
10^{-1}		
10^{-3}		
10^{-6}		

- 2 Escribe cada expresión como una sola potencia y calcula su valor.

Expresión	Una sola potencia	Valor
$10^3 \cdot 10^4$		
$10^9 : 10^6$		
$(10^2)^3$		
$2^5 \cdot 2^{-2}$		
$(3^2)^2$		
$7^4 : 7^4$		

- 3 Di si es verdadero o falso y corrige las falsas.

	V	F
$10^2 \cdot 10^3 = 10^6$	☐	☐
$(10^3)^2 = 10^6$	☐	☐
$10^{-2} = -100$	☐	☐
$10^8 : 10^5 = 10^3$	☐	☐
$7^0 = 0$	☐	☐

- 4 Un virus mide 10^{-7} m y un glóbulo rojo mide 10^{-5} m (valores redondeados a la potencia de 10 más próxima).
¿Cuántos virus caben alineados a lo largo de un glóbulo rojo?

FICHA 3 Cuadrados y raíces

Sesión 3

Mira F5: elevar al cuadrado y hacer la raíz cuadrada son operaciones inversas.

- 1 Relaciona cada raíz con su valor.

1 $\sqrt{16}$

a 4

2 $\sqrt{81}$

b 9

3 $\sqrt{144}$

c 12

4 $\sqrt{225}$

d 15

- 2 Completa la tabla de cuadrados (parcelas, plazas y baldosas).

Área (m ²)	Lado (m)	Perímetro (m)
400		
144		
2 500		
1,69		

- 3 Sin calculadora, indica entre qué dos enteros consecutivos está cada raíz y da una estimación con una cifra decimal. Después comprueba con la calculadora (dos decimales).

Raíz	Entre qué enteros	Estimación (décimas)	Calculadora
$\sqrt{50}$			
$\sqrt{200}$			
$\sqrt{30}$			

- 4 ¿Por qué no existe ningún número que multiplicado por sí mismo dé -9 ?

Usa F6 y F2. Recuerda: $a \cdot 10^n$ con $1 \leq a < 10$.

1 Completa la tabla.

Número	Notación científica
4 500 000	
0,00032	
150 000 000 000	
0,0000001	
	$7,3 \cdot 10^5$
	$2,4 \cdot 10^{-3}$

2 Marca la respuesta correcta.

¿Cuál está bien escrita en notación científica?

☐ $12 \cdot 10^3$ ☐ $0,5 \cdot 10^4$ ☐ $1,2 \cdot 10^4$

La calculadora muestra 3.2E-5. Eso significa...

☐ $3,2 \cdot 10^5$ ☐ $3,2 \cdot 10^{-5}$ ☐ 0,32

3 Calcula y deja el resultado en notación científica.

Operación	Pasos	Resultado
$(3 \cdot 10^4) \cdot (2 \cdot 10^5)$		
$(8 \cdot 10^9) : (4 \cdot 10^3)$		
$6,4 \cdot 10^3 + 3,6 \cdot 10^3$		
$(5 \cdot 10^6) \cdot (4 \cdot 10^{-2})$		

4 La luz viaja a $3 \cdot 10^8$ m/s. ¿Cuánto tarda en llegar del Sol a la Tierra ($1,5 \cdot 10^{11}$ m, valor redondeado)? ¿Y de la Luna a la Tierra ($3,84 \cdot 10^8$ m)? Da el resultado en segundos.

Regla del aula: si la parte decimal de la notación científica es 5 o más, el orden de magnitud sube un exponente (F8).

1 Completa la tabla.

Cantidad	Notación científica (m)	Orden de magnitud
Radio de la Tierra		
Monte Everest		
Persona adulta		
Glóbulo rojo		
Distancia Tierra-Luna		

2 Compara el radio de la Tierra con la altura del Everest. Primero con los órdenes de magnitud y después con el cociente exacto. ¿Qué diferencia hay?

3 ¿Cuántas veces cabe la distancia Tierra-Luna ($3,84 \cdot 10^8$ m) en la distancia a Próxima Centauri ($4,0 \cdot 10^{16}$ m)? Da el resultado en notación científica y su orden de magnitud.

4 Siguiendo el ejemplo F7, estima cuántos latidos da un corazón en 80 años si late 70 veces por minuto. Anota los supuestos y comprueba que es razonable.

Trabaja en equipo con roles: calculista, revisor, diseñador y portavoz. Escoge seis objetos de F1 con tamaños muy distintos.

1 Completa la tabla de datos de vuestra infografía.

Objeto	Medida original	En metros	Notación científica	Orden de magnitud

2 Bosqueja la recta de exponentes y coloca vuestros seis objetos, con su nombre y su medida (como en F3).

3 Escribid dos comparaciones del tipo «X es ___ veces mayor que Y», con el cálculo hecho en notación científica.

Comparación	Cálculo	Resultado

4 Revisión cruzada: otro equipo comprueba vuestra infografía.

- ☐ Todas las medidas están en metros antes de compararlas
- ☐ Las notaciones científicas cumplen $1 \leq a < 10$
- ☐ Los puntos de la recta coinciden con los exponentes
- ☐ Las comparaciones tienen el cálculo y las unidades
- ☐ Hay una estimación y su comprobación

Resuelve sin ayuda del equipo. Puedes usar calculadora, pero escribe los pasos.

1 Calcula y deja el resultado en notación científica.

Operación	Pasos	Resultado
$(2,5 \cdot 10^6) \cdot (4 \cdot 10^{-3})$		
$(9 \cdot 10^{12}) : (3 \cdot 10^5)$		
$3,2 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3$		

2 Un cuadrado tiene un área de $2\,025\text{ m}^2$. Estima su lado entre dos decenas, calcúlalo y comprueba el resultado.
¿Entre qué enteros está $\sqrt{700}$?

3 Estima cuántos glóbulos rojos de $8\text{ }\mu\text{m}$, colocados en fila, caben en 1 cm . Da el resultado en notación científica y su orden de magnitud.

4 Una compañera dice que $0,45 \cdot 10^6$ está en notación científica porque «tiene una potencia de 10». Explica el error y corrígelo.

ANEXO
4

Plantilla del producto final

SdA 1 · Números enormes y números diminutos

ALUMNADO

Nombre:

Curso/grupo:

Fecha:

Infografía de escalas del mundo real. Cada dato debe tener unidad, notación científica y fuente.

Título y equipo

Nombre de la infografía, integrantes y roles.

Recta de exponentes

Seis objetos situados en la recta de potencias de 10 (de menor a mayor).

Tabla de datos

Objeto · medida original · metros · notación científica · orden de magnitud.

Comparación 1

«X es ____ veces mayor que Y»: cálculo.

Comparación 2

Cálculo y comprobación con la calculadora.

Estimación propia

Supuestos, cálculo y razonabilidad.

Conclusión y fuentes

Qué hemos aprendido sobre las escalas y de dónde vienen los datos.

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 1 · Números enormes y números diminutos

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Antes de entregar **Infografía de escalas del mundo real**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- ☐ Las seis magnitudes se han pasado a metros antes de compararlas.
- ☐ Cada notación científica cumple $1 \leq a < 10$ y tiene exponente entero.
- ☐ Los objetos están situados en la recta según su exponente y de menor a mayor.
- ☐ Los órdenes de magnitud se han asignado con la misma regla en toda la tabla.
- ☐ Las dos comparaciones incluyen el cociente calculado con potencias.
- ☐ Hay una estimación con supuestos escritos y una comprobación de razonabilidad.
- ☐ Todas las medidas llevan su unidad y hay una fuente para cada dato.
- ☐ Otro equipo ha revisado los cálculos y los errores se han corregido.

Calidad y rigor

- ☐ He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- ☐ He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- ☐ He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- ☐ He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- ☐ He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

Rúbrica imprimible

SdA 1 · Números enormes y números diminutos

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Rúbrica para valorar **Infografía de escalas del mundo real**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

Autoevaluación y coevaluación

SdA 1 · Números enormes y números diminutos

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé escribir una cantidad muy grande o muy pequeña en notación científica y leerla en la calculadora.	☐	☐	☐	☐
Comparo cantidades con su orden de magnitud y compruebo si el resultado es razonable.	☐	☐	☐	☐
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	☐	☐	☐	☐
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	☐	☐	☐	☐
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	☐	☐	☐	☐
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	☐	☐	☐	☐

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo**Equipo evaluado:** _____**Fortaleza 1**

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

Material de apoyo y refuerzo

SdA 1 · Números enormes y números diminutos

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Potencias de 10, prefijos y calculadora con ejemplos modelados.⊗ **Ejemplo modelado: de 6 371 km a notación científica**

1. Pasa a metros: $6\,371\text{ km} = 6\,371 \cdot 10^3\text{ m}$. **2.** Escribe la parte decimal entre 1 y 10: $6\,371 = 6,371 \cdot 10^3$. **3.** Suma los exponentes: $6,371 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 6,371 \cdot 10^6\text{ m}$. **4.** Calculadora: escribe 6.371E6. ✓

⊗ **Glosario y trucos**

Muchos ceros a la derecha → exponente **positivo** (el número es grande). Ceros a la izquierda de la primera cifra → exponente **negativo** (el número es menor que 1). Mueve la coma hasta tener una sola cifra entera: el número de lugares que la has movido es el exponente.

1 **Completa la tabla con ayuda de F2.**

Medida	Potencia de 10	En metros (cifras)
5 km	$5 \cdot 10^3\text{ m}$	
3 mm		
40 nm		
2 Gm		

2 **Escribe en notación científica: a) 30 000 b) 0,0004 c) 2 500 000.**

3 **Completa con el exponente: $10^5 \cdot 10^2 = 10^{\text{—}}$; $10^6 : 10^4 = 10^{\text{—}}$; $(10^2)^2 = 10^{\text{—}}$.**

Actividad de ampliación

SdA 1 · Números enormes y números diminutos

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

🔗 Dos formas de aproximar una distancia: ¿cuál se equivoca menos?

La distancia media Tierra-Sol es de 149 597 870 700 m (una unidad astronómica, valor oficial). En divulgación se aproxima de varias formas: 10^{11} m (solo el orden de magnitud), $1,5 \cdot 10^{11}$ m (dos cifras) o $1,496 \cdot 10^{11}$ m (cuatro cifras). Un buen científico no solo aproxima: dice cuánto se equivoca.

☰ Pasos

- 1** Para cada aproximación calcula el error absoluto, es decir, la diferencia con el valor oficial.
- 2** Calcula el error relativo: error absoluto : valor oficial, en porcentaje.
- 3** Ordena las tres aproximaciones por su error relativo.
- 4** Descubre una regla: ¿cuál es el error relativo máximo si se redondea a una, dos o tres cifras?

1 Completa la tabla (usa la calculadora y redondea el porcentaje a dos cifras significativas).

Aproximación (m)	Error absoluto (m)	Error relativo (%)
10^{11}		
$1,5 \cdot 10^{11}$		
$1,496 \cdot 10^{11}$		

📦 Entrega

La tabla completa, una regla escrita con tus palabras que relacione el número de cifras con el error relativo máximo, y un ejemplo propio con otra magnitud de F1 que la confirme.

 Ficha 1

1. Diagnóstico: 1 000; 7; 10^{-3} .
2. Radio de la Tierra: 6 371 km = 6 371 000 m. Tierra-Luna: 384 400 km = 384 400 000 m.
3. En metros: átomo 0,0000000001; virus 0,0000001; glóbulo rojo 0,000008; cabello 0,00007; hormiga 0,005; persona 1,7; Everest 8 849. Puestos: átomo 1, virus 2, glóbulo rojo 3, cabello 4, hormiga 5, persona 6, Everest 7.
4. Respuesta esperable: hay muchísimos ceros, es fácil perder uno y cambiar la cantidad por un factor 10, y es difícil comparar de un vistazo. Idea: escribir solo cuántos ceros hay (potencias de 10) y la parte significativa.

 Ficha 2

1. Tabla: $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$; $10^2 = 100$; $10^1 = 10$; $10^0 = 1$; $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$; $10^{-3} = \frac{1}{1\,000} = 0,001$; $10^{-6} = \frac{1}{1\,000\,000} = 0,000001$.
2. $10^3 \cdot 10^4 = 10^7 = 10\,000\,000$; $10^9 : 10^6 = 10^3 = 1\,000$; $(10^2)^3 = 10^6 = 1\,000\,000$; $2^5 \cdot 2^{-2} = 2^3 = 8$; $(3^2)^2 = 3^4 = 81$; $7^4 : 7^4 = 7^0 = 1$.
3. V/F: Falso ($10^2 \cdot 10^3 = 10^5$); Verdadero; Falso ($10^{-2} = 0,01$, no es negativo); Verdadero; Falso ($7^0 = 1$).
4. $10^{-5} : 10^{-7} = 10^{-5-(-7)} = 10^2 = 100$ virus.

 Ficha 3

1. $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{81} = 9$; $\sqrt{144} = 12$; $\sqrt{225} = 15$.
2. Área 400: lado $\sqrt{400} = 20$ m, perímetro 80 m. Área 144: lado 12 m, perímetro 48 m. Área 2 500: lado 50 m, perímetro 200 m. Área 1,69: lado 1,3 m (porque $1,3^2 = 1,69$), perímetro 5,2 m.
3. $\sqrt{50}$: entre 7 y 8 ($49 < 50 < 64$), estimación 7,1, calculadora 7,07. $\sqrt{200}$: entre 14 y 15 ($196 < 200 < 225$), estimación 14,1, calculadora 14,14. $\sqrt{30}$: entre 5 y 6 ($25 < 30 < 36$), estimación 5,5, calculadora 5,48.
4. Porque el cuadrado de cualquier número, positivo o negativo, es positivo ($(+3)^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$); así que $\sqrt{-9}$ no existe como número real.

 Ficha 4

1. $4\,500\,000 = 4,5 \cdot 10^6$; $0,00032 = 3,2 \cdot 10^{-4}$; $150\,000\,000\,000 = 1,5 \cdot 10^{11}$; $0,0000001 = 1 \cdot 10^{-7}$; $7,3 \cdot 10^5 = 730\,000$; $2,4 \cdot 10^{-3} = 0,0024$.
2. Test: $1,2 \cdot 10^4$ (las otras tienen la parte decimal ≥ 10 o < 1); $3,2 \cdot 10^{-5}$.
3. $(3 \cdot 10^4) \cdot (2 \cdot 10^5) = 6 \cdot 10^9$; $(8 \cdot 10^9) : (4 \cdot 10^3) = 2 \cdot 10^6$; $6,4 \cdot 10^3 + 3,6 \cdot 10^3 = 10 \cdot 10^3 = 1 \cdot 10^4$; $(5 \cdot 10^6) \cdot (4 \cdot 10^{-2}) = 20 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^5$.
4. Sol-Tierra: $t = \frac{1,5 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^8} = 0,5 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^2 \text{ s} = 500 \text{ s} \approx 8 \text{ min } 20 \text{ s}$. Luna-Tierra: $\frac{3,84 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} = 1,28 \text{ s}$.

Ficha 5

- Radio de la Tierra: $6,371 \cdot 10^6$ m, orden 10^7 ($6,4 \geq 5$). Everest: $8,849 \cdot 10^3$ m, orden 10^4 . Persona: $1,7 \cdot 10^0$ m, orden 10^0 . Glóbulo rojo: $8 \cdot 10^{-6}$ m, orden 10^{-5} . Tierra-Luna: $3,844 \cdot 10^8$ m, orden 10^8 .
- Con órdenes: $10^7 : 10^4 = 10^3 = 1\,000$ veces. Exacto: $6\,371\,000 : 8\,849 \approx 720$ ($7,2 \cdot 10^2$, que también tiene orden de magnitud 10^3). Los órdenes de magnitud dan la idea correcta aunque no el valor exacto.
- $\frac{4,0 \cdot 10^{16}}{3,84 \cdot 10^8} \approx 1,04 \cdot 10^8$ veces; orden de magnitud 10^8 .
- $70 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 80 = 2\,943\,360\,000 \approx 2,9 \cdot 10^9$ latidos (unos 3 000 millones). Estimación redondeando: $7 \cdot 10^1 \cdot 6 \cdot 10^1 \cdot 2,4 \cdot 10^1 \cdot 3,65 \cdot 10^2 \cdot 8 \cdot 10^1 \approx 3 \cdot 10^9$. Es razonable: unos 100 000 latidos al día.

Ficha 6

- Respuesta abierta. Debe haber seis objetos de F1 con medida pasada a metros, notación científica correcta ($1 \leq a < 10$) y orden de magnitud con la regla del aula. Ejemplo: virus 10^{-7} m; hormiga $5 \cdot 10^{-3}$ m; persona $1,7$ m; Everest $8,849 \cdot 10^3$ m; Tierra-Luna $3,844 \cdot 10^8$ m; Próxima Centauri $4 \cdot 10^{16}$ m.
- Recta: cada objeto en su exponente aproximado (virus -7 , hormiga $-2,3$, persona $0,2$, Everest $3,9$, Tierra-Luna $8,6$, Próxima $16,6$), orden creciente.
- Comparación de ejemplo: Tierra-Luna frente a Everest: $\frac{3,844 \cdot 10^8}{8,849 \cdot 10^3} \approx 0,434 \cdot 10^5 = 4,3 \cdot 10^4$ veces. Otra: persona frente a virus: $\frac{1,7}{10^{-7}} = 1,7 \cdot 10^7$ veces.

Ficha 7

- a) $(2,5 \cdot 4) \cdot 10^{6-3} = 10 \cdot 10^3 = 1 \cdot 10^4$. b) $(9 : 3) \cdot 10^{12-5} = 3 \cdot 10^7$. c) $32\,000 + 8\,000 = 40\,000 = 4 \cdot 10^4$ (o $3,2 \cdot 10^4 + 0,8 \cdot 10^4 = 4 \cdot 10^4$).
- $40^2 = 1\,600 < 2\,025 < 2\,500 = 50^2$, así que el lado está entre 40 y 50; $45^2 = 2\,025$, lado = 45 m. $\sqrt{700} : 26^2 = 676 < 700 < 729 = 27^2$, entre 26 y 27 ($\approx 26,46$).
- 1 cm = 10^{-2} m. $\frac{10^{-2}}{8 \cdot 10^{-6}} = 0,125 \cdot 10^4 = 1,25 \cdot 10^3$ glóbulos (unos 1 250), orden de magnitud 10^3 .
- El error: la parte decimal 0,45 es menor que 1. Corrección: $0,45 \cdot 10^6 = 4,5 \cdot 10^5$.

Refuerzo

- 5 km = $5 \cdot 10^3$ m = 5 000 m; 3 mm = $3 \cdot 10^{-3}$ m = 0,003 m; 40 nm = $40 \cdot 10^{-9}$ = $4 \cdot 10^{-8}$ m = 0,00000004 m; 2 Gm = $2 \cdot 10^9$ m = 2 000 000 000 m.
- a) $3 \cdot 10^4$; b) $4 \cdot 10^{-4}$; c) $2,5 \cdot 10^6$.
- $10^5 \cdot 10^2 = 10^7$; $10^6 : 10^4 = 10^2$; $(10^2)^2 = 10^4$.

Ampliación

- Valor oficial: $1,495978707 \cdot 10^{11}$ m. Aproximación 10^{11} : error absoluto $\approx 4,96 \cdot 10^{10}$ m, relativo ≈ 33 %. Aproximación $1,5 \cdot 10^{11}$: error absoluto $\approx 4,0 \cdot 10^8$ m, relativo $\approx 0,27$ %. Aproximación $1,496 \cdot 10^{11}$: error absoluto $\approx 2,1 \cdot 10^6$ m, relativo $\approx 0,0014$ %.
- Orden de menor a mayor error: $1,496 \cdot 10^{11}$, $1,5 \cdot 10^{11}$, 10^{11} .
- Regla: al redondear a d cifras significativas, el error absoluto máximo es media unidad de la última cifra, y la parte decimal es al menos 1; por tanto el error relativo máximo es 5 % con 2 cifras, 0,5 % con 3 cifras y 0,05 % con 4 (y hasta 50 % con 1 cifra). Cada cifra más reduce el error relativo máximo a la décima parte.

⚠ Errores frecuentes

- Multiplicar los exponentes en lugar de sumarlos: $10^3 \cdot 10^4 = 10^{12}$.
- Creer que 10^{-2} es negativo, o que $a^0 = 0$.
- Escribir $35 \cdot 10^3$ o $0,35 \cdot 10^5$ como notación científica (la parte decimal debe estar entre 1 y 10).
- Confundir el signo del exponente al pasar de un número menor que 1 a notación científica, o contar mal los ceros.
- Aplicar las propiedades con bases distintas ($2^3 \cdot 5^3 = 10^6$).
- Sumar cantidades en notación científica con exponentes distintos sin igualarlos antes.
- Comparar medidas en unidades diferentes (km con μm) sin pasarlas a la misma unidad.

⚖ Criterios para valorar respuestas abiertas

- En la estimación de la Ficha 5 se aceptan otros supuestos razonables (por ejemplo, 60 o 80 latidos por minuto) si se escriben y el cálculo es coherente.
- En la infografía se valora más la coherencia entre la tabla, la recta y las comparaciones que la cantidad de objetos.
- La calculadora sirve para comprobar, pero cada resultado debe ir con su operación escrita en notación científica.
- Si usan otra regla para el orden de magnitud (por ejemplo, el exponente de la notación científica), se acepta si se aplica siempre igual y se explicita.

02 SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Fracciones que compiten

PREGUNTA GUÍA

¿Cómo decidimos entre cantidades expresadas como fracción, decimal o porcentaje?



CURSO
2.º ESO



SESIONES
7 sesiones · 1.º trimestre



SENTIDOS PRIORITARIOS
A · Sentido numérico



COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE2, CE5, CE7



PRODUCTO FINAL
Comparador de planes de reparto y consumo



CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 1.2, 2.1, 5.2, 7.2

Σ Contexto, reto y sentido

El AMPA del instituto ha reunido un fondo de **1 200 €** para el final de curso y el consejo de delegados tiene que decidir cómo repartirlo entre una excursión, material deportivo, la biblioteca y un colchón para imprevistos. Llegan tres propuestas: una escrita con fracciones, otra con decimales y otra con porcentajes. A simple vista parecen parecidas, pero no se pueden comparar si no se escriben de la misma manera.

La situación moviliza el sentido numérico con fracciones, decimales y porcentajes: pasar de una representación a otra, ordenar, sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones, calcular la fracción de una cantidad y resolver problemas de varias etapas («de lo que queda...»). El comparador final no es una lista de cuentas: es un documento donde cada plan se representa de varias formas, se comprueba que reparte exactamente el total y se justifica una decisión.

🎯 Reto

Construir un comparador de los tres planes de reparto del fondo de 1 200 € (y de un plan propio), expresando cada reparto como fracción, decimal, porcentaje y euros, comprobando que suma el total y justificando cuál recomendáis.

📦 Producto final

Comparador de planes de reparto y consumo.

📖 Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- CE5** Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.
- CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- 1.1** Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.
- 1.2** Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.
- 2.1** Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.
- 5.2** Realizar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.
- 7.2** Elaborar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada.

Saberes básicos prioritarios

A

Sentido numérico

- Fracciones, decimales y porcentajes como representaciones de una misma cantidad; equivalencias habituales.
- Fracciones equivalentes, simplificación y amplificación; orden de racionales y representación en la recta numérica.
- Suma y resta de fracciones con distinto denominador mediante el mínimo común múltiplo.
- Producto y cociente de fracciones; fracción de una cantidad como operador.
- Problemas de varias etapas con fracciones del total y de lo que queda; comprobación por un segundo camino.

F

Sentido socioafectivo

- Valoración de la precisión y de la revisión del error en el cálculo con fracciones.
- Toma de decisiones compartida y argumentada en equipo.



Objetivos didácticos

- ✓ Relacionar fracción, decimal y porcentaje.
- ✓ Operar con fracciones en contextos encadenados.
- ✓ Comparar estrategias exactas y aproximadas.
- ✓ Comprobar la coherencia del resultado.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

- ① Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Tres representaciones de una misma cantidad

 **Evidencia:** Ficha 1: tabla de equivalencias fracción-decimal-porcentaje, barras sombreadas y comparación de la parte dedicada a la excursión en los tres planes.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Fracciones equivalentes y orden

 **Evidencia:** Ficha 2: simplificación y amplificación, ordenación de cinco valores en distintas representaciones y justificación con denominador común.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Suma/resta con denominadores distintos

 **Evidencia:** Ficha 3: sumas y restas de fracciones con mcm, cálculo de la fracción total del Plan A y corrección de un error típico.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Producto y cociente como operadores

 **Evidencia:** Ficha 4: fracción de una cantidad (Plan A en euros), producto y cociente de fracciones y problemas de reparto.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Problemas de varias etapas

 **Evidencia:** Ficha 5: problema encadenado de consumo de folios y plan de varias etapas, con comprobación por dos caminos.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Comparador de planes

 **Evidencia:** Ficha 6: comparador completo de los planes con euros, criterios del consejo, decisión y plan propio.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Prueba individual y corrección argumentada

 **Evidencia:** Ficha 7: prueba individual con operaciones, orden, fracción de una cantidad y corrección argumentada de errores.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 7

**Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad** **Recursos**

Rectas numéricas

calculadora para comprobación

tarjetas de consumo y reparto

 Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.



DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo Anexo 8

Modelos de área, denominadores pequeños y guion de operaciones.

Ampliación Anexo 9

Diseñar dos expresiones distintas que den la misma cantidad y demostrar equivalencia.



Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1 Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).



FASE 2 Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).



FASE 3 Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Identificación de los datos del reparto en F1 y de la parte del fondo que corresponde a cada destino, con las preguntas bien comprendidas.	Ficha 1 / lista de cotejo
1.2	Elección de la operación adecuada (suma, resta, fracción de una cantidad, producto o cociente de fracciones) en los problemas de reparto y consumo.	Fichas 3, 4 y 5 / escala de valoración
2.1	Comprobación de que cada plan suma 1 (100 %, 1 200 €), contraste de resultados por dos caminos y corrección argumentada de errores.	Fichas 5 y 7 / rúbrica
5.2	Conexión entre fracción, decimal, porcentaje, euros y modelo de barras al comparar los planes y ordenar valores.	Fichas 1, 2 y 6 / rúbrica
7.2	Barras de reparto, recta numérica y tabla del comparador que ayudan a decidir entre los planes.	Comparador (Anexo 4) y Ficha 6 / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Comparador, problemas encadenados y comprobaciones.

+ Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

🔗 Variantes de aplicación

↗ Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

↖ Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 2 · Fracciones que compiten

ALUMNADO

El AMPA ha dejado 1 200 € en la secretaría y tres equipos de delegados han entregado sus propuestas de reparto. Una dice «dos quintos para la excursión», otra «0,35» y otra «el 45 %». ¿Cuál da más dinero a la excursión? ¿Alguna se pasa del total? ¿Hay un plan que cumple las condiciones del consejo y otro que no? Para decidir con justicia hay que traducir todo al mismo idioma. Vais a ser el comité de cuentas: compararéis los planes, los comprobaréis con fracciones, decimales y porcentajes y defenderéis una recomendación.

“ ¿Cómo decidimos entre cantidades expresadas como fracción, decimal o porcentaje? ”

🎯 Vuestro reto

Construir un comparador de los tres planes de reparto del fondo de 1 200 € (y de un plan propio), expresando cada reparto como fracción, decimal, porcentaje y euros, comprobando que suma el total y justificando cuál recomendáis.

📦 Lo que vais a producir

Comparador de planes de reparto y consumo.

📍 Hoja de ruta · 7 sesiones

- 1 Traducimos fracciones, decimales y porcentajes a un mismo idioma.
- 2 Buscamos fracciones equivalentes y ordenamos cantidades.
- 3 Sumamos y restamos fracciones con distinto denominador.
- 4 Usamos el producto y el cociente de fracciones para repartir y para ver cuánto cabe.
- 5 Resolvemos problemas de varias etapas y los comprobamos por dos caminos.
- 6 Montamos el comparador de los planes y decidimos.
- 7 Prueba individual y corrección argumentada de errores.

📋 Al terminar seré capaz de...

- ✓ Relacionar fracción, decimal y porcentaje.
- ✓ Operar con fracciones en contextos encadenados.
- ✓ Comparar estrategias exactas y aproximadas.
- ✓ Comprobar la coherencia del resultado.

📋 ¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 2 · Fracciones que compiten

ALUMNADO

Los tres planes de reparto, la barra comparativa, la recta numérica, las equivalencias habituales, un método de trabajo con ejemplos resueltos, el caso de los folios, errores típicos y un glosario. Los datos son ficticios, creados para el aula.

F1 Los tres planes de reparto del fondo de 1 200 €

DATOS

Destino	Plan A (fracciones)	Plan B (decimales)	Plan C (porcentajes)
Excursión	$\frac{2}{5}$	0,35	45 %
Material deportivo	$\frac{1}{4}$	0,30	20 %
Biblioteca	$\frac{3}{10}$	0,25	30 %
Imprevistos	lo que sobra	lo que sobra	5 %

Condiciones del consejo (tarjetas R1 a R4). Un plan solo es válido si cumple las cuatro:

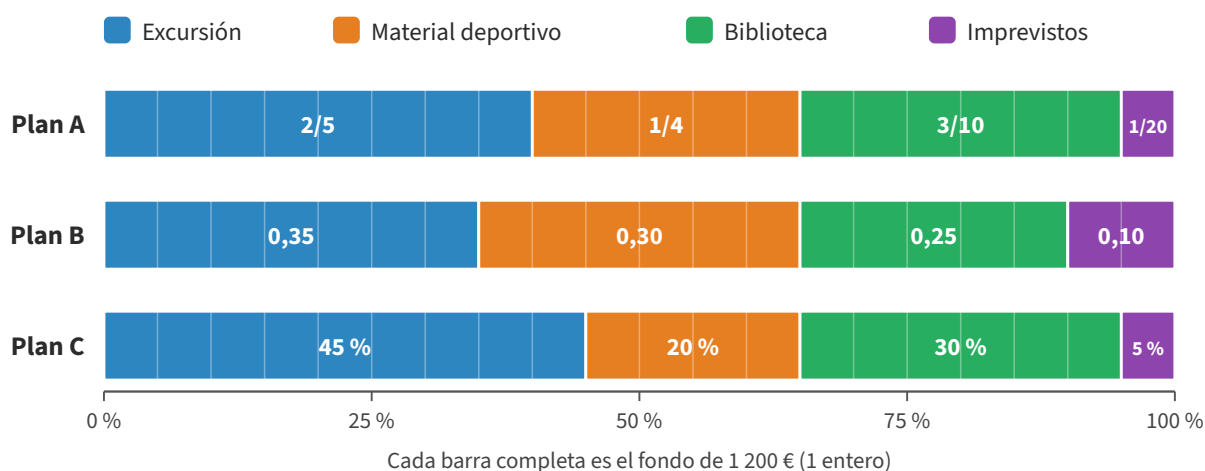
- **R1.** La excursión recibe al menos el 40 % del fondo.
- **R2.** El material deportivo recibe al menos el 20 %.
- **R3.** La biblioteca recibe al menos el 25 %.
- **R4.** Los imprevistos reciben al menos el 5 %.

Fuente: Situación y datos ficticios creados para el aula.

🔍 En los planes A y B, «lo que sobra» es lo que queda del fondo después de repartir los otros tres destinos. ¿Cuánto es en cada plan?

F2 Los planes en barras de reparto

ESQUEMA

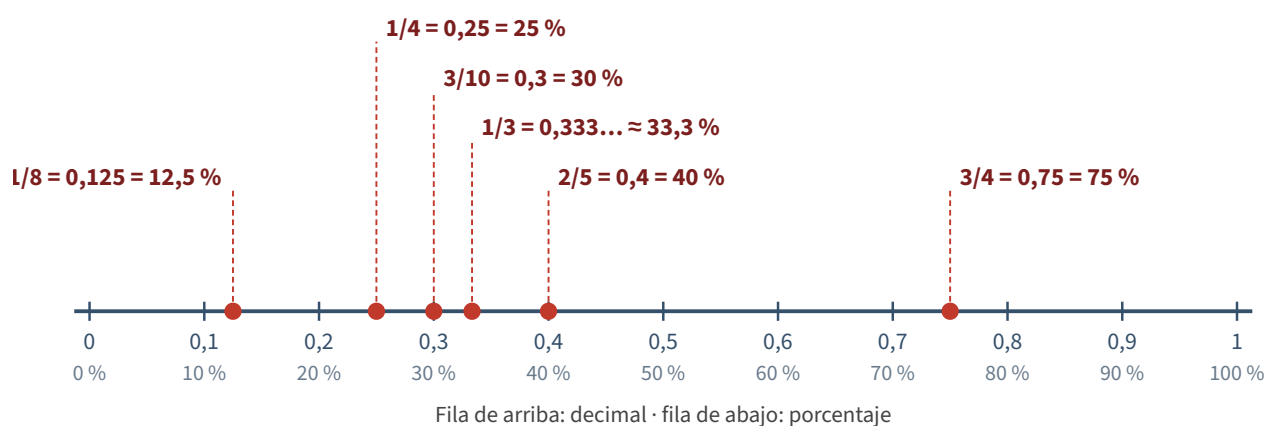


Fuente: Esquema de elaboración propia a partir de F1: cada barra es el fondo completo y está dividida en 20 partes iguales (5 % cada una).

🔍 Sin hacer cuentas, ¿qué plan dedica la barra más larga a la excursión? ¿Y cuál deja más para imprevistos?

F3 La recta numérica entre 0 y 1

ESQUEMA



Fuente: Esquema de elaboración propia.

🔍 Una fracción, un decimal y un porcentaje que ocupan el mismo punto de la recta son la misma cantidad.

F4 Equivalencias que conviene saber

DATOS

Fracción	Decimal	Porcentaje	Observación
$\frac{1}{2}$	0,5	50 %	la mitad
$\frac{1}{4}$	0,25	25 %	la cuarta parte
$\frac{3}{4}$	0,75	75 %	tres cuartas partes
$\frac{1}{5}$	0,2	20 %	dos décimas
$\frac{1}{10}$	0,1	10 %	una décima
$\frac{1}{8}$	0,125	12,5 %	decimal exacto
$\frac{1}{3}$	$0,\bar{3}$	$\approx 33,3 \%$	decimal periódico: se redondea
$\frac{2}{3}$	$0,\bar{6}$	$\approx 66,7 \%$	decimal periódico: se redondea

Fuente: Elaboración propia.

🔍 Para pasar una fracción a decimal se divide el numerador entre el denominador; para pasar a porcentaje, se multiplica el decimal por 100.

F5 Método de trabajo con fracciones

TEXTO

Equivalentes. Multiplicar o dividir numerador y denominador por el mismo número no cambia la fracción: $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ y $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

Comparar. Se reducen a común denominador (o se pasan a decimal): $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$ y $\frac{7}{9} = \frac{14}{18}$, luego $\frac{5}{6} > \frac{7}{9}$.

Sumar y restar. Primero denominador común (mínimo común múltiplo) y después se operan los numeradores: $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$.

Multiplicar. Numeradores por numeradores y denominadores por denominadores: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Dividir. Se multiplica por la inversa: $\frac{3}{5} : \frac{1}{10} = \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{1} = 6$.

Fracción de una cantidad. Es un producto: los $\frac{3}{10}$ de 1 200 € son $\frac{3}{10} \cdot 1\,200 = 360$ €.

«De lo que queda». Si primero se gasta $\frac{1}{4}$, queda $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; si después se gasta $\frac{2}{5}$ de lo que queda, quedan $\frac{3}{5}$ de $\frac{3}{4}$, es decir, $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$ del total.

Fuente: Elaboración propia.

🔍 Después de cada operación, simplifica el resultado y comprueba con una estimación o con decimales.

F6 Caso: la reserva de folios del instituto

ESTUDIO DE CASO

A principio de septiembre, la conserjería tiene una reserva de **2 400 folios** para todo el trimestre.

- En **septiembre** se consume $\frac{1}{4}$ de la reserva inicial.
- En **octubre** se consumen $\frac{2}{5}$ de los folios que quedaban a principios de mes.
- En **noviembre** se consume la mitad de los folios que quedaban a principios de mes.

El director quiere saber cuántos folios quedan a final de noviembre y qué fracción de la reserva inicial representan.

Fuente: Situación ficticia creada para el aula.

🔍 Cuidado: cada fracción se refiere a una cantidad distinta (la inicial o la que quedaba). No se pueden sumar sin más.

F7 Errores frecuentes con fracciones

Afirmación	¿Qué falla?	Forma correcta
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$	Se suman numeradores y denominadores. $\frac{2}{5} = 0,4$ es menor que $\frac{1}{2}$.	$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$
$0,25 > 0,3$ porque $25 > 3$	Se comparan como si fueran naturales.	$0,25 < 0,30$
$0,4 = 4\%$	Para pasar a porcentaje se multiplica por 100.	$0,4 = 40\%$
$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$	Se ha multiplicado por $\frac{1}{2}$ en vez de por su inversa.	$\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$
$\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$ porque $3 > 2$	A mayor denominador, las partes son más pequeñas.	$\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

Fuente: Elaboración propia a partir de errores habituales en el aula.

🔍 Una buena comprobación detecta casi todos estos errores: ¿el resultado tiene sentido en la recta numérica?

F8 Vocabulario esencial

Fracción equivalente	Fracción que representa la misma cantidad que otra, con numerador y denominador distintos.
Fracción irreducible	Fracción que ya no se puede simplificar.
Mínimo común múltiplo (mcm)	El menor número que es múltiplo de varios números; sirve como denominador común.
Inversa de una fracción	La inversa de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$; dividir por una fracción es multiplicar por su inversa.
Fracción de una cantidad	Se calcula multiplicando la fracción por la cantidad.
Decimal periódico	Decimal con cifras que se repiten sin fin, como $0,\overline{3}$.
Porcentaje	Fracción de denominador 100: $35\% = \frac{35}{100}$.

Fuente: Elaboración propia.

ANEXO
3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 2 · Fracciones que compiten

ALUMNADO

FICHA 1

Tres formas de decir lo mismo

Sesión 1

Nombre:

Curso/grupo:

Fecha:

Trabaja con los planes de F1 y las equivalencias de F4.

1 Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.

¿Qué fracción es equivalente a $\frac{2}{4}$?

☐ 1/2

☐ 2/8

☐ 4/2

El 25 % de 80 es...

☐ 20

☐ 25

☐ 55

¿Qué número es mayor?

☐ 0,5

☐ 0,45

☐ 0,09

2 Completa la tabla de equivalencias (usa F4 si lo necesitas).

Fracción	Decimal	Porcentaje
$\frac{3}{4}$		
	0,6	
		15 %
$\frac{1}{8}$		
$\frac{7}{20}$		

3 Colorea en cada barra (20 casillas iguales) la parte que se indica.

3/4

0,35

15 %

4 Con F1, escribe en porcentaje lo que cada plan dedica a la excursión y ordena los planes de mayor a menor.

Usa F3 y F5. Para comparar, lleva todo a la misma representación.

1 Obtén una fracción equivalente.

Fracción	Operación	Fracción equivalente
$\frac{12}{18}$ (simplifica)		
$\frac{6}{15}$ (simplifica)		
$\frac{3}{5}$ (amplifica a denominador 20)		
$\frac{7}{12}$ (amplifica a denominador 36)		

2 Ordena de menor a mayor. Primero pasa cada valor a decimal.

Valor	En decimal	Puesto (1 = el menor)
$\frac{3}{8}$		
$\frac{2}{5}$		
0,35		
36 %		
$\frac{1}{3}$		

3 Compara $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{9}$ reduciendo a común denominador. Después escribe una fracción que esté entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$ y comprueba tu respuesta con decimales.

4 Di si es verdadero o falso y corrige las falsas.

	V	F
$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$	☐	☐
$\frac{3}{5} = \frac{6}{15}$	☐	☐
$0,5 = 5\%$	☐	☐
$\frac{3}{7} > \frac{3}{5}$	☐	☐
$\frac{12}{18}$ y $\frac{2}{3}$ son la misma cantidad	☐	☐

FICHA 3 Sumar y restar fracciones

Sesión 3

Usa el método de F5: denominador común y después se operan los numeradores.

1 Calcula, simplifica y comprueba con decimales.

Operación	mcm	Pasos	Resultado
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$			
$\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$			
$\frac{2}{5} + \frac{3}{10}$			
$\frac{5}{6} - \frac{1}{4}$			

2 Con F1, calcula qué fracción del fondo reparte el Plan A entre excursión, material y biblioteca, y qué fracción queda para imprevistos. ¿Coincide con el 5 % del Plan C?

3 Pablo dice que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$. Explica con decimales o con una barra por qué no puede ser, y corrígelo.

4 Completa.

a) $3/4 - \underline{\hspace{2cm}} = 1/2$

b) $\underline{\hspace{2cm}} + 1/5 = 9/10$

c) $1 - \underline{\hspace{2cm}} = 3/8$

FICHA 4 Fracciones como operadores

Sesión 4

Usa F5. La fracción de una cantidad es un producto.

1 Calcula en euros lo que da el Plan A a cada destino (fondo: 1 200 €).

Destino	Fracción	Cálculo	Euros
Excursión	$\frac{2}{5}$		
Material deportivo	$\frac{1}{4}$		
Biblioteca	$\frac{3}{10}$		
Imprevistos	$\frac{1}{20}$		

2 Calcula y simplifica.

Operación	Pasos	Resultado
$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$		
$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{15}$		
$\frac{3}{5} : \frac{1}{10}$		
$\frac{5}{6} : \frac{2}{3}$		

3 En el Plan A, los $\frac{3}{4}$ del dinero de la excursión se dedican al autobús. ¿Qué fracción del fondo total es? ¿Cuántos euros son?

4

Quedan $\frac{3}{4}$ de una tarta y se parten raciones de $\frac{1}{8}$ de tarta: ¿cuántas raciones salen? Una cinta de 6 m se corta en tiras de $\frac{3}{4}$ de metro: ¿cuántas tiras salen?

FICHA 5

Problemas de varias etapas

Sesión 5

Lee el caso de los folios (F6). Cada fracción se refiere a una cantidad distinta.

1

Completa la tabla de consumo de folios.

Mes	Folios al empezar	Fracción consumida	Folios consumidos	Folios que quedan
Septiembre	2 400	$\frac{1}{4}$		
Octubre		$\frac{2}{5}$		
Noviembre		$\frac{1}{2}$		

2

¿Qué fracción de la reserva inicial queda a final de noviembre? Resuélvelo de dos maneras: con los folios de la tabla y multiplicando fracciones.

3

Plan D del AMPA para 1 200 €: primero $\frac{2}{5}$ para la excursión; de lo que queda, $\frac{1}{3}$ para material; de lo que aún queda, $\frac{3}{4}$ para la biblioteca; el resto, imprevistos. Calcula los euros de cada destino y la fracción del fondo para imprevistos.

- 4 Álex dice: «En los folios se ha gastado $\frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{1}{2}$, que es más de 1, así que es imposible». Explica su error.

FICHA 6 El comparador de planes

Sesión 6

Trabaja en equipo con roles: calculista, comprobador, diseñador y portavoz. Usad F1, F2 y las condiciones R1 a R4.

- 1 Completa el comparador: porcentaje y euros de cada destino en cada plan.

Destino	A: %	A: €	B: %	B: €	C: %	C: €
Excursión						
Material						
Biblioteca						
Imprevistos						
TOTAL						

- 2 Comprueba las condiciones del consejo para cada plan.

Condición	Plan A	Plan B	Plan C
R1: excursión ≥ 40 %			
R2: material ≥ 20 %			
R3: biblioteca ≥ 25 %			
R4: imprevistos ≥ 5 %			
¿Plan válido?			

- 3 Diseña un Plan D propio que cumpla R1 a R4. Escribid cada parte como fracción, decimal, porcentaje y euros, y comprobad que suma 1 200 €.

Destino	Fracción	Decimal	Porcentaje	Euros
Excursión				
Material				
Biblioteca				
Imprevistos				
TOTAL				

- 4 Elegid el plan que recomendáis (A, C o vuestro D) y justificadlo con datos.

FICHA 7

Prueba individual y corrección argumentada

Sesión 7

Resuelve sin ayuda del equipo. Escribe los pasos y comprueba cada resultado.

- 1 Calcula y simplifica: $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6}$ y $\frac{5}{6} : \frac{2}{3}$.

- 2 De 840 folios se gastan $\frac{3}{8}$. ¿Cuántos folios se han gastado y qué fracción queda?

- 3 Ordena de menor a mayor y señala si hay dos iguales: $\frac{5}{8}$, 0,6, 62 %, $\frac{3}{5}$.

- 4 Corrige y explica, con F7 si lo necesitas, el error de cada afirmación: a) $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ b) $0,4 = 4\%$.

Comparador de planes de reparto del fondo de 1 200 €. Cada plan debe aparecer como fracción, decimal, porcentaje y euros.

[illegible]

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 2 · Fracciones que compiten

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Antes de entregar **Comparador de planes de reparto y consumo**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- ☐ Cada plan está expresado como fracción, decimal, porcentaje y euros, y las equivalencias son correctas.
- ☐ Se ha comprobado que la suma de las partes de cada plan es 1 (100 %, 1 200 €).
- ☐ Las fracciones están simplificadas y las operaciones con distinto denominador usan el mcm.
- ☐ La ordenación de valores se ha hecho en una misma representación (decimal o común denominador).
- ☐ La fracción de una cantidad y los problemas de «lo que queda» tienen los pasos escritos.
- ☐ Las condiciones R1 a R4 se han comprobado para cada plan.
- ☐ Las barras de reparto están rotuladas y su longitud es coherente con los datos.
- ☐ La recomendación se justifica con datos del comparador y no solo con opiniones.

Calidad y rigor

- ☐ He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- ☐ He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- ☐ He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- ☐ He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- ☐ He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

Rúbrica imprimible

SdA 2 · Fracciones que compiten

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Rúbrica para valorar **Comparador de planes de reparto y consumo**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

Autoevaluación y coevaluación

SdA 2 · Fracciones que compiten

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé pasar de fracción a decimal y a porcentaje y comparar cantidades escritas de formas distintas.	☐	☐	☐	☐
Compruebo mis resultados con decimales, con una barra o por un segundo camino.	☐	☐	☐	☐
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	☐	☐	☐	☐
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	☐	☐	☐	☐
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	☐	☐	☐	☐
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	☐	☐	☐	☐

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo**Equipo evaluado:** _____**Fortaleza 1**

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

Material de apoyo y refuerzo

SdA 2 · Fracciones que compiten

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Modelos de área, denominadores pequeños y guion de operaciones.

**Ejemplo modelado:
sumar**

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

**con una
barra**

1. Dibuja una barra y divídela en 4 partes iguales (el denominador común es 4). **2.** $\frac{1}{2}$ ocupa 2 partes y $\frac{1}{4}$ ocupa 1 parte. **3.** Juntas ocupan 3 partes de 4: $\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. **4.** Con decimales: $0,5 + 0,25 = 0,75$ ✓.

**Guion de operaciones****Sumar o restar:** ¿mismo denominador? Si no, busca el mcm y pasa las fracciones al mcm. Opera losnumeradores. Simplifica. **Fracción de una cantidad:**

divide la cantidad entre el denominador y multiplica

por el numerador (los $\frac{3}{5}$ de 50: $50 : 5 = 10$; $10 \cdot$ $3 = 30$). **Decimal:** numerador : denominador.**Porcentaje:** decimal · 100.**1** Completa la tabla (denominadores pequeños).

Fracción	Decimal	Porcentaje
$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{4}$		
	0,75	
		20 %
$\frac{1}{10}$		

2 Calcula la fracción de cada cantidad: $\frac{1}{4}$ de 80 €; $\frac{3}{5}$ de 50 €; $\frac{2}{3}$ de 90 €.

3 Dibuja una barra de 4 partes y sombrea $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Escribe la suma.



Calcula con ayuda del guion: $\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$ y $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$.

Actividad de ampliación

SdA 2 · Fracciones que compiten

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

 Dos expresiones distintas, una misma cantidad

Los planes A, B y C reparten de formas distintas, pero a veces dos cálculos diferentes dan exactamente la misma cantidad. Por ejemplo, $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ y $\frac{7}{4} : 3$ valen lo mismo. Vas a construir y demostrar equivalencias.

 Pasos

- 1 Elige una cantidad objetivo, por ejemplo $\frac{7}{12}$.
- 2 Escribe dos expresiones distintas con fracciones que den esa cantidad: una con una suma o resta y otra con un producto o cociente.
- 3 Demuestra que valen lo mismo de dos maneras: con denominador común y con decimales o porcentajes.
- 4 Generaliza: calcula $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ en general y decide si es cierto que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{a+b}$.

1 Tabla de equivalencias.

Cantidad objetivo	Expresión 1 (suma o resta)	Expresión 2 (producto o cociente)	Demostración

 Entrega

Dos expresiones distintas con sus demostraciones, la fórmula general de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ y un contraejemplo numérico que refute $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{a+b}$.

 Ficha 1

1. Diagnóstico: $1/2$; 20; 0,5.

2. $\frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$; $0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 60\%$; $15\% = 0,15 = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$; $\frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$; $\frac{7}{20} = 0,35 = 35\%$.

3. Barras de 20 casillas: $\frac{3}{4} \rightarrow 15$ casillas; $0,35 \rightarrow 7$ casillas; $15\% \rightarrow 3$ casillas.

4. Excursión: Plan A $\frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$; Plan B $0,35 = 35\%$; Plan C 45% . Orden de mayor a menor: C (45%), A (40%), B (35%).

 Ficha 2

1. $\frac{12}{18} = \frac{12 \div 6}{18 \div 6} = \frac{2}{3}$; $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$; $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}$; $\frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{21}{36}$.

2. Decimales: $\frac{3}{8} = 0,375$; $\frac{2}{5} = 0,4$; $0,35$; $36\% = 0,36$; $\frac{1}{3} = 0,333 \dots$. Orden: $\frac{1}{3}$ (1.º) $< 0,35$ (2.º) $< 36\%$ (3.º) $< \frac{3}{8}$ (4.º) $< \frac{2}{5}$ (5.º).

3. $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$ y $\frac{7}{9} = \frac{14}{18}$, así que $\frac{5}{6}$ es mayor. Entre $\frac{1}{4} = 0,25$ y $\frac{1}{3} = 0,333 \dots$ sirve $\frac{3}{10} = 0,3$ (también $\frac{7}{24} \approx 0,29$ o $\frac{4}{13} \approx 0,31$).

4. V, F ($\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$, no $\frac{3}{5}$), F ($0,5 = 50\%$), F ($\frac{3}{7} < \frac{3}{5}$ porque $\frac{3}{7} \approx 0,43$ y $\frac{3}{5} = 0,6$), V ($\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$).

 Ficha 3

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$: mcm = 6; $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. $\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$: mcm = 12; $\frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$. $\frac{2}{5} + \frac{3}{10}$: mcm = 10; $\frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$. $\frac{5}{6} - \frac{1}{4}$: mcm = 12; $\frac{10}{12} - \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$.

2. Plan A: $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} + \frac{3}{10} = \frac{8}{20} + \frac{5}{20} + \frac{6}{20} = \frac{19}{20}$. Queda $1 - \frac{19}{20} = \frac{1}{20} = 0,05 = 5\%$: coincide con el Plan C.

3. Con decimales: $0,5 + 0,333 \dots = 0,833 \dots$, no 0,4; el resultado debe ser mayor que $\frac{1}{2}$. Correcto: $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. Pablo ha sumado numeradores y denominadores.

4. a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$, falta $\frac{1}{4}$; b) $\frac{9}{10} - \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$; c) $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$, falta $\frac{5}{8}$.

Ficha 4

- Excursión: $\frac{2}{5} \cdot 1\,200 = 480$ €. Material: $\frac{1}{4} \cdot 1\,200 = 300$ €. Biblioteca: $\frac{3}{10} \cdot 1\,200 = 360$ €. Imprevistos: $\frac{1}{20} \cdot 1\,200 = 60$ €. Suma: $480 + 300 + 360 + 60 = 1\,200$ €.
- $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$; $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{15} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$; $\frac{3}{5} : \frac{1}{10} = \frac{3}{5} \cdot 10 = 6$; $\frac{5}{6} : \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$.
- $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ del fondo, es decir, $\frac{3}{10} \cdot 1\,200 = 360$ €. Comprobación: $\frac{3}{4}$ de $480 = 360$ €.
- Tarta: $\frac{3}{4} : \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$ raciones. Cinta: $6 : \frac{3}{4} = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$ tiras.

Ficha 5

- Septiembre: empieza con 2 400; consumen $\frac{1}{4} \cdot 2\,400 = 600$; quedan 1 800. Octubre: empieza con 1 800; consumen $\frac{2}{5} \cdot 1\,800 = 720$; quedan 1 080. Noviembre: empieza con 1 080; consumen $\frac{1}{2} \cdot 1\,080 = 540$; quedan 540.
- Con folios: $\frac{540}{2\,400} = \frac{9}{40}$ ($= 0,225 = 22,5\%$). Con fracciones: queda $\frac{3}{4}$, luego $\frac{3}{5}$ de eso, luego $\frac{1}{2}$ de eso: $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{40}$. Coinciden.
- Plan D: excursión $\frac{2}{5} \cdot 1\,200 = 480$ €; quedan 720 €. Material: $\frac{1}{3} \cdot 720 = 240$ €; quedan 480 €. Biblioteca: $\frac{3}{4} \cdot 480 = 360$ €; quedan 120 € para imprevistos. Fracción: $\frac{120}{1\,200} = \frac{1}{10}$; con fracciones: $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$. El Plan D cumple R1 (40 %), R2 (20 %), R3 (30 %) y R4 (10 %).
- Error de Álex: las fracciones se refieren a cantidades distintas (la reserva inicial, lo que quedaba en octubre, lo que quedaba en noviembre). Solo se pueden sumar fracciones del mismo total. Además, en la práctica el consumo total es $1 - \frac{9}{40} = \frac{31}{40}$ de la reserva.

Ficha 6

- Plan A: 40 % → 480 €; 25 % → 300 €; 30 % → 360 €; 5 % → 60 €. Plan B: 35 % → 420 €; 30 % → 360 €; 25 % → 300 €; imprevistos 10 % → 120 € (lo que sobra: $1 - 0,9 = 0,1$). Plan C: 45 % → 540 €; 20 % → 240 €; 30 % → 360 €; 5 % → 60 €. Totales: 100 % y 1 200 € en los tres planes.
- Condiciones: Plan A cumple R1 ($40 \geq 40$), R2 ($25 \geq 20$), R3 ($30 \geq 25$) y R4 ($5 \geq 5$) → válido. Plan B no cumple R1 ($35 < 40$) → no válido. Plan C cumple R1 (45), R2 ($20 \geq 20$), R3 (30), R4 (5) → válido.
- Plan D propio: respuesta abierta. Debe cumplir R1 a R4 y sumar 1 (100 %, 1 200 €), con las cuatro representaciones coherentes. Ejemplo válido: excursión $\frac{2}{5} = 0,4 = 40\% \rightarrow 480$ €; material $\frac{1}{5} = 0,2 = 20\% \rightarrow 240$ €; biblioteca $\frac{1}{4} = 0,25 = 25\% \rightarrow 300$ €; imprevistos $\frac{3}{20} = 0,15 = 15\% \rightarrow 180$ €. Suma: $0,4 + 0,2 + 0,25 + 0,15 = 1$ y $480 + 240 + 300 + 180 = 1\,200$ €.
- Recomendación abierta entre A y C (B queda descartado por R1). Argumentos válidos: A reparte más a material y deja igual a biblioteca e imprevistos; C da 60 € más a la excursión pero 60 € menos a material y cumple R2 justo en el límite. Se valora que se apoye en datos del comparador.

Ficha 7

- $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} : \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$.
- $\frac{3}{8} \cdot 840 = 840 : 8 \cdot 3 = 105 \cdot 3 = 315$ folios. Queda $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ (525 folios).
- Decimales: $\frac{5}{8} = 0,625$; $0,6$; $62\% = 0,62$; $\frac{3}{5} = 0,6$. Orden: $0,6 = \frac{3}{5} < 62\% < \frac{5}{8}$. Son iguales $0,6$ y $\frac{3}{5}$.
- a) $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$ (se multiplica por la inversa). b) $0,4 = 40\%$ (se multiplica por 100); $4\% = 0,04$.

Refuerzo

- $\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$; $\frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$; $0,75 = \frac{3}{4} = 75\%$; $20\% = 0,2 = \frac{1}{5}$; $\frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$.
- $\frac{1}{4}$ de 80: $80 : 4 = 20$ €. $\frac{3}{5}$ de 50: $50 : 5 \cdot 3 = 30$ €. $\frac{2}{3}$ de 90: $90 : 3 \cdot 2 = 60$ €.
- Barra de 4 partes: 2 partes sombreadas ($\frac{1}{2}$) más 1 parte ($\frac{1}{4}$) dan 3 partes: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
- $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$.

Ampliación

- Ejemplo para $\frac{7}{12}$: Expresión 1: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$. Expresión 2: $\frac{7}{4} : 3 = \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$. Con decimales: $0,333... + 0,25 = 0,58333...$ y $1,75 : 3 = 0,58333...$ Otras: $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$; $1 - \frac{1}{12}$; $\frac{7}{6} \cdot \frac{1}{2}$.
- General: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} = \frac{a+b}{ab}$ (con $a, b \neq 0$).
- No es cierto que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{a+b}$. Contraejemplo: $a = 1, b = 3$: $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, pero $\frac{2}{1+3} = \frac{1}{2}$. Basta un caso para refutar una igualdad general.

Errores frecuentes

- Sumar numeradores y denominadores: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$.
- Comparar decimales como naturales ($0,25 > 0,3$) o creer que a mayor denominador la fracción es mayor.
- Pasar a porcentaje sin multiplicar por 100 ($0,4 = 4\%$), o confundir 4% con $0,4$.
- Dividir fracciones sin invertir la segunda, o invertir la primera.
- Sumar fracciones que se refieren a totales distintos («de lo que queda») sin pasarlas al mismo total.
- No simplificar el resultado o simplificar mal (restar el mismo número en numerador y denominador).

Criterios para valorar respuestas abiertas

- En el Plan D de la Ficha 6 se acepta cualquier reparto que cumpla R1 a R4, sume exactamente 1 y 1 200 €, y tenga las cuatro representaciones coherentes.
- En la recomendación se valora que use datos del comparador (euros, condiciones) y reconozca qué se sacrifica con su elección.
- En la corrección de errores se exige que se explique por qué es un error (con decimales, barra o ejemplo), no solo la respuesta correcta.
- La calculadora puede usarse para pasar a decimal y comprobar, pero las operaciones con fracciones deben aparecer escritas paso a paso.

03 SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

¿Cuánto ha cambiado el precio?



PREGUNTA GUÍA

¿Es lo mismo subir un 20 % y después bajar un 20 %?



CURSO
2.º ESO



SESIONES
7 sesiones · 1.º trimestre



SENTIDOS PRIORITARIOS
A · Sentido numérico



COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE2, CE3, CE6



PRODUCTO FINAL
Observatorio de variaciones porcentuales



CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 1.2, 2.2, 3.1, 6.1



Contexto, reto y sentido

Las rebajas, el IVA, los cupones del móvil, la subida del abono de transporte o el precio de la gasolina nos rodean todos los días, y casi siempre aparecen como porcentajes: «-25 %», «+15 %», «IVA 21 %». Un porcentaje, sin embargo, siempre se calcula sobre una cantidad concreta, y por eso no es lo mismo subir un 20 % y después bajar un 20 % que no hacer nada: el segundo 20 % se calcula sobre un precio distinto.

La situación moviliza el sentido numérico con porcentajes y proporcionalidad: calcular la variación de una cantidad, usar el índice de variación, encadenar aumentos y descuentos, calcular el precio antes del IVA y distinguir porcentaje de puntos porcentuales. El alumnado formula una conjetura, la comprueba con datos y construye un observatorio de seis casos con una recomendación de compra argumentada.

🎯 Reto

Construir un observatorio de seis casos de variaciones porcentuales de precios, calculando el resultado de cada uno con su índice de variación, comprobando una conjetura general y justificando una recomendación de compra.

📦 Producto final

Observatorio de variaciones porcentuales.



Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- 1.1** Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.
- 1.2** Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.
- 2.2** Comprobar la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, evaluando su alcance y repercusión desde diferentes perspectivas.
- 3.1** Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.
- 6.1** Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.

Saberes básicos prioritarios

A

Sentido numérico

- Porcentaje de una cantidad, cantidad final tras un aumento o un descuento, y cálculo de la cantidad inicial.
- Índice de variación $(1 + p/100$ y $1 - p/100)$ como multiplicador y variación porcentual entre dos valores.
- Aumentos y disminuciones porcentuales sucesivos: no se suman, se multiplican los índices.
- IVA y descuentos en tickets: precio con y sin IVA, orden de las operaciones y coste real de una oferta.
- Diferencia entre porcentaje y puntos porcentuales.

F

Sentido socioafectivo

- Actitud crítica ante la publicidad y las ofertas: consumo responsable y argumentado.
- Valoración del error como fuente de aprendizaje al contrastar una conjetura con los datos.



Objetivos didácticos

- ✓ Calcular porcentajes y variaciones porcentuales.
- ✓ Distinguir porcentaje de puntos porcentuales en ejemplos sencillos.
- ✓ Analizar aumentos y disminuciones sucesivas.
- ✓ Tomar decisiones de consumo justificadas.



Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.



Secuencia de sesiones y actividades

- ① Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Precio inicial, porcentaje y cantidad final

Evidencia: Ficha 1: tabla de precio inicial, porcentaje, cambio y precio final, y comparación de porcentajes sobre bases distintas.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Aumentos y descuentos

Evidencia: Ficha 2: índices de variación, cálculo del precio inicial, variación porcentual entre dos precios y verdadero/falso.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Cambios sucesivos: conjetura y comprobación

Evidencia: Ficha 3: conjetura sobre subir y bajar un 20 %, tabla de comprobación, gráfica de barras y análisis del orden.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

IVA/descuentos en tickets ficticios

 **Evidencia:** Ficha 4: ticket con IVA, cálculo del precio sin IVA, descuento e IVA combinados y puntos porcentuales.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Comparar ofertas y coste real

 **Evidencia:** Ficha 5: ofertas equivalentes (2×1 , $3 \times 2 \dots$), duelos de coste real con gastos de envío y reflexión sobre «hasta -50 %».

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Observatorio con seis casos

 **Evidencia:** Ficha 6: tabla del observatorio con los seis casos, orden de variaciones y argumento de compra.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Debate de decisiones y problema individual

 **Evidencia:** Ficha 7: debate con datos y problema individual (portátil con descuento e IVA), refutación de una afirmación falsa.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 7

**Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad** **Recursos**

Etiquetas y facturas ficticias

calculadora/hoja de cálculo

tarjetas de ofertas

 Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.



DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo Anexo 8

Porcentajes habituales y esquema cantidad inicial-cambio-final.

Ampliación Anexo 9

Investigar qué combinación de dos cambios porcentuales devuelve exactamente al precio inicial.



Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1 Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).



FASE 2 Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).



FASE 3 Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Identificación de la cantidad inicial, del cambio porcentual y de la cantidad final en tickets y ofertas, y comprensión de lo que se pregunta.	Ficha 1 / lista de cotejo
1.2	Elección del índice de variación o del cálculo inverso adecuado en descuentos, aumentos, IVA y cambios sucesivos.	Fichas 2, 4 y 5 / escala de valoración
2.2	Comprobación de la validez de cada resultado por un segundo camino y análisis de su coherencia y repercusión en el contexto (coste real con envío, orden de las operaciones).	Fichas 5 y 7 y observatorio / rúbrica
3.1	Formulación y comprobación con datos de la conjetura sobre subir y bajar el mismo porcentaje, y generalización con índices.	Ficha 3 y Anexo 9 / rúbrica
6.1	Modelización de tickets, ofertas y variaciones de precios reales o simulados con porcentajes, y uso de los resultados para decidir.	Observatorio (Anexo 4) y Ficha 6 / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Observatorio, tabla de cambios, argumento de compra y reto individual.



Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.



Variantes de aplicación

↗ Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

↖ Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 3 · ¿Cuánto ha cambiado el precio?

ALUMNADO

Un videojuego de 60 € «sube un 20 % por el lanzamiento» y, dos semanas después, «baja un 20 %». ¿Vuelve a costar 60 €? Una amiga jura que sí, otro dice que cuesta menos y una tienda anuncia «-15 % y un 10 % extra con cupón» como si fuera un 25 %. Entre rebajas, IVA, cupones y subidas, es fácil que nos cuenten una historia que los números no sostienen. Vais a montar un observatorio de variaciones de precios: calcularéis, comprobaréis y defenderéis con datos qué pasa de verdad.

“ *¿Es lo mismo subir un 20 % y después bajar un 20 %?* ”

🎯 Vuestro reto

Construir un observatorio de seis casos de variaciones porcentuales de precios, calculando el resultado de cada uno con su índice de variación, comprobando una conjetura general y justificando una recomendación de compra.

📦 Lo que vais a producir

Observatorio de variaciones porcentuales.

📍 Hoja de ruta · 7 sesiones

- 1 Calculamos el porcentaje de una cantidad y el precio final.
- 2 Usamos el índice de variación para aumentos y descuentos.
- 3 Formulamos y comprobamos la conjetura: subir y bajar un 20 %.
- 4 Leemos tickets con IVA y calculamos precios sin IVA.
- 5 Comparamos ofertas y calculamos el coste real.
- 6 Construimos el observatorio con seis casos.
- 7 Debatis nuestras conclusiones y resolvemos un problema individual.

📖 Al terminar seré capaz de...

- ✓ Calcular porcentajes y variaciones porcentuales.
- ✓ Distinguir porcentaje de puntos porcentuales en ejemplos sencillos.
- ✓ Analizar aumentos y disminuciones sucesivas.
- ✓ Tomar decisiones de consumo justificadas.

📝 ¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 3 · ¿Cuánto ha cambiado el precio?

ALUMNADO

Banco de seis casos, esquema inicial-cambio-final, tabla de índices de variación, gráfica de «subir y bajar un 20 %», tickets con IVA, ofertas para comparar, un ejemplo resuelto, puntos porcentuales frente a porcentaje y un glosario. Los precios y las tiendas son ficticios.

F1 Banco de casos del observatorio

DATOS

Caso	Situación	Qué hay que averiguar
C1 · Zapatillas	Precio original 80 €. Rebajas del 25 %.	Precio final y ahorro.
C2 · Videojuego	Cuesta 60 €. Sube un 20 % en el lanzamiento y después baja un 20 %.	Precio final y variación total.
C3 · Móvil	Precio 300 €. Una tienda ofrece un 15 % de descuento y un cupón extra del 10 % sobre el precio ya rebajado. Otra tienda ofrece directamente un 25 %.	¿Qué tienda es más barata? ¿Equivale el doble descuento a un 25 %?
C4 · Abono de transporte	Pasa de 40 € a 46 € al mes.	Variación porcentual.
C5 · Sudadera	Precio sin IVA 30 €. IVA del 21 %.	Precio con IVA.
C6 · Gasolina	1,60 € por litro. Sube un 10 % una semana y baja un 10 % la siguiente.	Precio final y variación total.

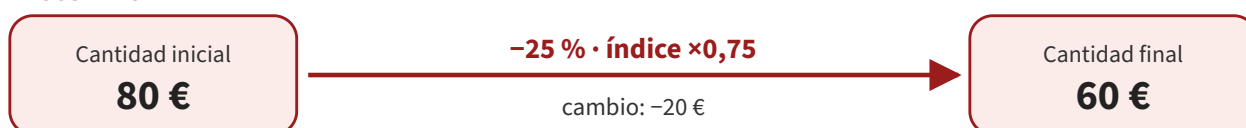
Fuente: Casos y precios ficticios creados para el aula.

🔍 Cada equipo resolverá los seis casos en la Ficha 6 y decidirá cuál es el más engañoso.

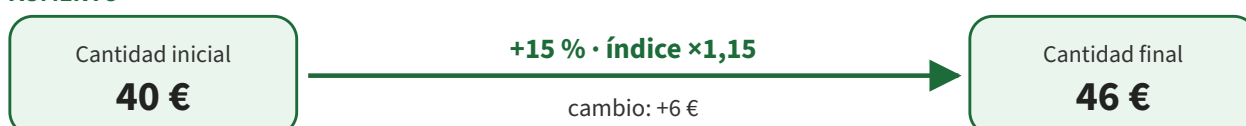
F2 Esquema: cantidad inicial, cambio y cantidad final

ESQUEMA

DESCUENTO



AUMENTO



$$\text{final} = \text{inicial} \cdot \text{índice} \cdot \text{cambio} = \text{final} - \text{inicial} \cdot \text{variación (\%)} = \text{cambio} : \text{inicial} \cdot 100$$

Fuente: Esquema de elaboración propia.

🔍 Antes de calcular, identifica siempre sobre qué cantidad se calcula el porcentaje.

F3 Índices de variación

DATOS

Cambio	Cómo se calcula el índice	Índice (multiplicador)
Aumento del 10 %	$1 + 0,10$	1,10
Aumento del 20 %	$1 + 0,20$	1,20
Aumento del 25 %	$1 + 0,25$	1,25
Aumento del 100 %	$1 + 1$	2
Descuento del 10 %	$1 - 0,10$	0,90
Descuento del 20 %	$1 - 0,20$	0,80
Descuento del 25 %	$1 - 0,25$	0,75
Descuento del 50 %	$1 - 0,50$	0,50

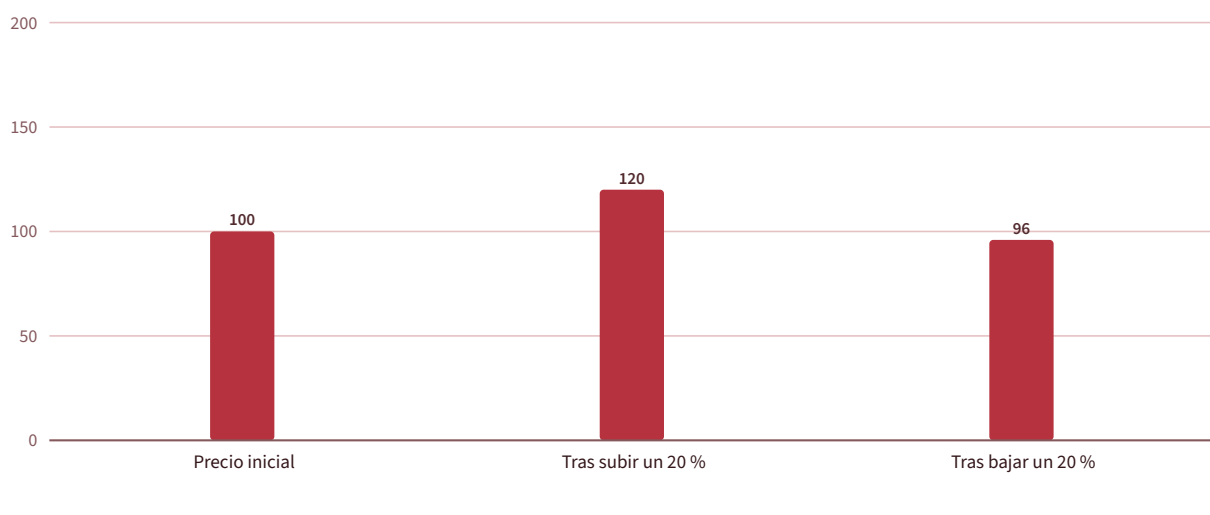
Precio final = precio inicial · índice. Si hay dos cambios seguidos, se multiplican los dos índices: aumento del 20 % y descuento del 20 % dan $1,20 \cdot 0,80 = 0,96$.

Fuente: Elaboración propia.

🔍 El índice es el número por el que se multiplica el precio inicial para obtener el precio final en un solo paso.

F4 ¿Qué pasa al subir un 20 % y bajar un 20 %?

GRÁFICO



Fuente: Elaboración propia a partir de un precio inicial de 100 €.

🔍 El segundo 20 % se calcula sobre 120 €, no sobre 100 €. ¿Vuelve el precio al valor inicial?

F5 Tickets con IVA

DATOS

Ticket 1 · Papelería Los Olmos	Precio sin IVA	Tipo de IVA
Libro de lectura	14,00 €	4 %
Calculadora científica	20,00 €	21 %
Paquete de bolígrafos	5,00 €	21 %

Ticket 2 · Cafetería del instituto. Menú del día: **11,00 €** (IVA del 10 % incluido).

Ticket 3 · Tienda de ropa. Sudadera: **36,30 €** (IVA del 21 % incluido).

Cómo se calcula. Con IVA: precio sin IVA · (1 + IVA), por ejemplo · 1,21. Sin IVA: precio con IVA : (1 + IVA).

Fuente: Tickets ficticios. Tipos de IVA vigentes en España (Agencia Tributaria): 21 % general, 10 % reducido y 4 % superreducido; el reparto de productos se ha simplificado para el aula.

🔍 El IVA es un porcentaje que se añade al precio sin IVA. No se calcula sobre el precio final.

F6 Ofertas para comparar

DATOS

Duelo	Opción 1	Opción 2
Mochila de 40 €	Tienda Alfa: descuento del 20 % y gastos de envío de 4,50 €.	Tienda Beta: precio fijo de 36 € con envío gratis.
Zapatillas de 90 €	Tienda X: descuento del 30 % y gastos de envío de 5,95 €.	Tienda Y: descuento del 20 % y después un 10 % extra sobre el precio rebajado, con envío gratis.
Camisetas de 12 € cada una (compra de 3)	Oferta 3×2: pagas 2 y te llevas 3.	Oferta -30 % sobre el total.

Fuente: Tiendas y precios ficticios creados para el aula.

🔍 El coste real incluye todo lo que se paga: descuentos, envío e impuestos.

F7 Ejemplo resuelto: subir y bajar un 20 %

TEXTO

Datos. Un videojuego cuesta 60 €. Sube un 20 % y después baja un 20 %.

Camino 1: paso a paso. Sube un 20 %: $60 \cdot 1,20 = 72$ €. Baja un 20 % **del nuevo precio**: $72 \cdot 0,80 = 57,60$ €.

Camino 2: con los índices. $60 \cdot 1,20 \cdot 0,80 = 60 \cdot 0,96 = 57,60$ €.

Variación total. 0,96 equivale a una bajada del 4 %. Comprobación: $60 - 57,60 = 2,40$ € y $2,40 : 60 = 0,04 = 4$ %.

Conclusión. Subir un 20 % y bajar un 20 % **no** devuelve el precio inicial, porque el segundo porcentaje se aplica sobre una cantidad mayor. Los porcentajes sucesivos **no se suman ni se restan**: se multiplican sus índices.

Fuente: Elaboración propia.

🔍 Resolver por dos caminos es la mejor forma de comprobar un resultado.

F8 Porcentaje o puntos porcentuales**ESTUDIO DE CASO**

En las elecciones de delegados del año pasado votó el **40 %** del alumnado. Este año ha votado el **50 %**.

- La participación ha subido **10 puntos porcentuales** ($50\% - 40\% = 10$ puntos).
- Pero el aumento **relativo** es del **25 %**: $\frac{50 - 40}{40} = 0,25$.

Un titular puede decir «la participación sube 10 puntos» o «la participación crece un 25 %»: los dos son correctos, pero no significan lo mismo.

Fuente: Ejemplo ficticio creado para el aula.

 Los puntos porcentuales se restan; el porcentaje de variación se calcula sobre el valor inicial.

F9 Vocabulario esencial**GLOSARIO**

Cantidad inicial y final	Valor antes y después del cambio. El porcentaje se calcula sobre la cantidad inicial.
Índice de variación	Número por el que se multiplica la cantidad inicial para obtener la final: $1 + p/100$ (aumento) o $1 - p/100$ (descuento).
Variación porcentual	$\frac{\text{final} - \text{inicial}}{\text{inicial}} \cdot 100$.
Cambios sucesivos	Varios aumentos o descuentos seguidos: se multiplican los índices, no se suman los porcentajes.
IVA	Impuesto sobre el valor añadido: porcentaje que se añade al precio sin IVA.
Punto porcentual	Unidad para la diferencia entre dos porcentajes: del 40 % al 50 % hay 10 puntos.
Coste real	Lo que de verdad se paga: descuentos, envío, impuestos y condiciones.

Fuente: Elaboración propia.

Fichas de actividades del alumnado

SdA 3 · ¿Cuánto ha cambiado el precio?

ALUMNADO

FICHA 1

Precio inicial, porcentaje y precio final

Sesión 1

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Trabaja con el esquema de F2. Recuerda: el porcentaje se calcula sobre la cantidad inicial.

1 Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.

El 10 % de 80 € es...

☐ 8 € ☐ 10 € ☐ 0,8 €

Un precio de 50 € sube un 20 %. Ahora cuesta...

☐ 60 € ☐ 70 € ☐ 52 €

El 25 % equivale a...

☐ 1/4 ☐ 1/25 ☐ 2,5

2 Completa la tabla con el cambio en euros y el precio final.

Precio inicial	Cambio	Cambio en €	Precio final
80 €	descuento del 25 %		
60 €	aumento del 10 %		
120 €	descuento del 15 %		
45 €	aumento del 20 %		

3 Un abono de transporte cuesta 40 € y sube un 15 % (caso C4 de F1). Completa el esquema: cantidad inicial, cambio en euros y cantidad final.

4 ¿En qué caso el cambio en euros es mayor: el 10 % de 200 € o el 25 % de 60 €? ¿Por qué un porcentaje mayor puede dar menos euros?

Usa la tabla de índices (F3).

1 Calcula el precio final con el índice.

Cambio	Índice	Precio inicial	Precio final
Sube un 20 %		50 €	
Baja un 30 %		80 €	
Sube un 5 %		200 €	
Baja un 12 %		25 €	

2 Calcula el precio inicial (operación inversa). a) Tras una rebaja del 20 %, unas zapatillas cuestan 64 €. b) Una sudadera cuesta 36,30 € con un IVA del 21 % incluido.

3 Calcula la variación porcentual.

Antes	Después	Cambio en €	Variación (%)
40 €	46 €		
300 €	255 €		
25 €	30 €		
80 €	60 €		

4 Verdadero o falso. Corrige las falsas.

	V	F
Subir un 50 % es multiplicar por 1,5.	☐	☐
Bajar un 25 % es multiplicar por 0,25.	☐	☐
Un aumento del 100 % duplica el precio.	☐	☐
Un descuento del 120 % es posible.	☐	☐
Multiplicar por 0,9 es bajar un 10 %.	☐	☐

La pregunta guía: ¿es lo mismo subir un 20 % y después bajar un 20 %? Primero conjetura, después comprueba (F4 y F7).

- 1 Antes de calcular, escribe tu conjetura y por qué la crees.

- 2 Comprueba tu conjetura con tres precios iniciales distintos.

Precio inicial	Tras subir un 20 %	Tras bajar un 20 %	¿Es igual al inicial?
100 €			
60 €			
250 €			

- 3 Dibuja las barras para el precio inicial de 100 €: inicial, tras subir un 20 % y tras bajar un 20 %.



- 4 Calcula también bajando primero un 20 % y subiendo después un 20 % con 100 €. ¿Importa el orden? Explícalo con los índices y di qué porcentaje de variación total resulta.

FICHA 4 IVA y descuentos en tickets**Sesión 4**

Usa los tickets de F5 y la ficha de puntos porcentuales (F8).

1 Completa el ticket 1 con el IVA de cada artículo y el total.

Artículo	Precio sin IVA	IVA (€)	Precio con IVA
Libro de lectura (4 %)	14,00 €		
Calculadora (21 %)	20,00 €		
Bolígrafos (21 %)	5,00 €		
TOTAL			

2 Calcula el precio sin IVA del menú del día del ticket 2 (11,00 € con un IVA del 10 %) y de la sudadera del ticket 3 (36,30 € con un IVA del 21 %).

3 La calculadora del ticket 1 (20 € sin IVA) se rebaja un 25 % y después se añade el 21 % de IVA. Calcula el precio final. ¿Cambia el resultado si primero se añade el IVA y después se rebaja un 25 %? Explica por qué.

4 Con F8: la participación de un club pasa del 20 % al 30 %. ¿Cuántos puntos porcentuales sube? ¿Qué porcentaje de aumento relativo es?

Usa F6. El coste real incluye descuentos, envío y condiciones.

- 1 Calcula el descuento equivalente de cada oferta con camisetas de 12 € (compra el número de unidades indicado).

Oferta	Unidades	Se paga	Sin oferta	Descuento equivalente (%)
2×1	2			
3×2	3			
2.ª unidad a mitad de precio	2			
−20 % y 10 % extra	1			

- 2 Resuelve los dos primeros duelos de F6 con el coste real y escribe cuál tienda es más barata.

Duelo	Opción 1 (€)	Opción 2 (€)	Más barata
Mochila			
Zapatillas			

- 3 Tercer duelo de F6: ¿qué es más barato, el 3×2 o el −30 % para tres camisetas de 12 €? ¿Cuál es el descuento equivalente del 3×2?

- 4 Una tienda anuncia «hasta −50 %». ¿Qué comprobarías antes de decidir que es una buena oferta?

Trabaja en equipo con roles: calculista, comprobador, diseñador y portavoz. Resolved los seis casos de F1 con los índices.

1 Completa el observatorio. Escribe el cálculo con índices y el resultado.

Caso	Cálculo con índices	Resultado final	Variación total (%)
C1 · Zapatillas			
C2 · Videojuego			
C3 · Móvil (15 % y 10 %)			
C3 · Móvil (25 % directo)			
C4 · Abono			
C5 · Sudadera			
C6 · Gasolina			

2 Ordena los casos de mayor a menor variación total (en valor absoluto) y explica en qué casos el resultado sorprende.

3 Escribe un argumento de compra para el caso C3: ¿qué tienda recomiendas y por qué?

4 Revisión cruzada: otro equipo comprueba vuestro observatorio.

- ☐ Cada cálculo parte de la cantidad inicial correcta
- ☐ Los índices de variación están bien escritos
- ☐ Cada resultado se ha comprobado por un segundo camino
- ☐ No se han sumado porcentajes de bases distintas
- ☐ La recomendación se apoya en cifras

Prepara tus argumentos con datos y resuelve el problema sin ayuda del equipo.

- 1 Escribe en tres frases, con un ejemplo numérico, tu respuesta a la pregunta guía: ¿es lo mismo subir un 20 % y después bajar un 20 %?

- 2 Un portátil cuesta 650 € sin IVA. La tienda hace un 15 % de descuento y después se aplica el 21 % de IVA. Calcula el precio final, la variación total respecto a 650 € y el resultado si se aplicara primero el IVA y luego el descuento.

- 3 Un compañero afirma: «Si un precio sube un 50 % y luego baja un 50 %, vuelve al precio original». Refuta su afirmación con un ejemplo numérico y con los índices.

- 4 Una tienda pasa su descuento del 20 % al 30 %. ¿Cuántos puntos porcentuales sube el descuento? Un pantalón de 80 €, ¿cuánto cuesta ahora y cuánto costaba antes?

ANEXO
4

Plantilla del producto final

SdA 3 · ¿Cuánto ha cambiado el precio?

ALUMNADO

Nombre:

Curso/grupo:

Fecha:

Observatorio de variaciones porcentuales. Cada caso debe tener cálculo con índices, resultado y comprobación.

Título y equipo
Nombre del observatorio, integrantes y roles.

Tabla de los seis casos
Caso · cantidad inicial · cambio(s) · índice(s) · resultado final · variación total (%).

Gráfica o esquema
Barras o esquema inicial-cambio-final de un caso.

Conjetura comprobada
¿Es lo mismo subir y bajar un 20 %? Datos y conclusión.

Comprobación por otro camino
Verifica un caso de dos maneras.

Argumento de compra
Recomendación basada en cifras (coste real, IVA, orden).

Conclusión y límites
Qué hemos aprendido y qué dato falta.

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 3 · ¿Cuánto ha cambiado el precio?

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Antes de entregar **Observatorio de variaciones porcentuales**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- ☐ Cada caso parte de la cantidad inicial correcta y la deja identificada.
- ☐ Los índices de variación son correctos ($1 + p/100$ o $1 - p/100$).
- ☐ En los cambios sucesivos se multiplican los índices y no se suman los porcentajes.
- ☐ El precio con y sin IVA se calcula con el índice, no con el 21 % del precio final.
- ☐ Cada resultado está comprobado por un segundo camino.
- ☐ La variación total de los casos con dos cambios se ha calculado y se expresa en porcentaje.
- ☐ Hay una conjetura sobre subir y bajar el mismo porcentaje y se ha comprobado con datos.
- ☐ La recomendación de compra se justifica con cifras y menciona el coste real.
- ☐ Se distingue porcentaje de puntos porcentuales cuando aparece.

Calidad y rigor

- ☐ He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- ☐ He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- ☐ He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- ☐ He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- ☐ He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

Rúbrica imprimible

SdA 3 · ¿Cuánto ha cambiado el precio?

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Rúbrica para valorar **Observatorio de variaciones porcentuales**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

Autoevaluación y coevaluación

SdA 3 · ¿Cuánto ha cambiado el precio?

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé calcular un aumento o un descuento con el índice de variación y encadenar varios cambios.	☐	☐	☐	☐
Compruebo mis resultados por otro camino y me fijo en sobre qué cantidad se calcula cada porcentaje.	☐	☐	☐	☐
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	☐	☐	☐	☐
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	☐	☐	☐	☐
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	☐	☐	☐	☐
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	☐	☐	☐	☐

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo**Equipo evaluado:** _____**Fortaleza 1**

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

Material de apoyo y refuerzo

SdA 3 · ¿Cuánto ha cambiado el precio?

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Porcentajes habituales y esquema cantidad inicial-cambio-final.⊗ **Porcentajes habituales con trucos**

10 % → divide entre 10. **50 %** → divide entre 2. **25 %** → divide entre 4. **1 %** → divide entre 100. **5 %** → la mitad del 10 %. **75 %** → tres veces el 25 %. Ejemplo: el 25 % de 80 € es $80 : 4 = 20$ €.

⊗ **Ejemplo modelado: zapatillas de 80 € con un 25 % de descuento**

1. Inicial: 80 €. **2. Cambio:** el 25 % de 80 es $80 : 4 = 20$ €, y como es descuento, -20 €. **3. Final:** $80 - 20 = 60$ €. **Comprobación con índice:** $80 \cdot 0,75 = 60$ € ✓.

1 Completa los porcentajes habituales de 200 €.

Porcentaje	Truco	Resultado
10 %	$200 : 10$	
50 %		
25 %		
5 %		
1 %		

2 Completa el esquema inicial-cambio-final de cada caso.

Caso	Inicial	Cambio en €	Final
Descuento del 10 % en 60 €	60 €		
Aumento del 25 % en 40 €	40 €		
Descuento del 50 % en 120 €	120 €		

3 Calcula con el índice: un precio de 50 € sube un 20 %. Escribe el índice y el precio final.

Actividad de ampliación

SdA 3 · ¿Cuánto ha cambiado el precio?

ALUMNADO

Nombre:

Curso/grupo:

Fecha:

🌀 ¿Qué dos cambios devuelven el precio inicial?

Subir un 20 % y bajar un 20 % no devuelve el precio inicial. Pero si se elige bien el segundo porcentaje, sí es posible. Por ejemplo, subir un 25 % y bajar un 20 % sí: $1,25 \cdot 0,80 = 1$. Vas a investigar la relación entre los dos porcentajes.

✓✓ Pasos

- 1 Para cada subida de la tabla, busca el descuento que devuelve exactamente al precio inicial (usa los índices).
- 2 Observa los resultados: ¿el descuento es mayor, igual o menor que la subida? ¿Por qué?
- 3 Escribe una fórmula para calcular el descuento b a partir de la subida a (ambos en forma decimal).
- 4 Decide si un descuento del 100 % puede «deshacerse» con una subida.

1 Completa la tabla.

Subida	Índice de la subida	Índice que devuelve a 1	Descuento necesario
25 %			
50 %			
100 %			
10 %			

Entrega

La tabla completa, la fórmula general demostrada con los índices y una explicación de por qué el descuento necesario siempre es menor que la subida. Añade el caso del descuento del 100 %.

 Ficha 1

1. Diagnóstico: 8 €; 60 €; $1/4$.
2. Descuento 25 % de 80 €: $-20 € \rightarrow 60 €$. Aumento 10 % de 60 €: $+6 € \rightarrow 66 €$. Descuento 15 % de 120 €: $-18 € \rightarrow 102 €$. Aumento 20 % de 45 €: $+9 € \rightarrow 54 €$.
3. C4: inicial 40 €; cambio $0,15 \cdot 40 = +6 €$; final 46 €.
4. El 10 % de 200 € son 20 € y el 25 % de 60 € son 15 €: el primero es mayor. El porcentaje se calcula sobre la cantidad inicial: un porcentaje mayor de una cantidad pequeña puede dar menos euros que un porcentaje menor de una cantidad grande.

 Ficha 2

1. Sube 20 %: índice 1,20; $50 \cdot 1,20 = 60 €$. Baja 30 %: $0,70$; $80 \cdot 0,70 = 56 €$. Sube 5 %: $1,05$; $200 \cdot 1,05 = 210 €$. Baja 12 %: $0,88$; $25 \cdot 0,88 = 22 €$.
2. a) $64 : 0,80 = 80 €$ (comprobación: $80 \cdot 0,80 = 64$). b) $36,30 : 1,21 = 30 €$ (comprobación: $30 \cdot 1,21 = 36,30$).
3. $40 \rightarrow 46$: $+6 €$, $\frac{6}{40} = 0,15 = +15 \%$. $300 \rightarrow 255$: $-45 €$, $\frac{45}{300} = 0,15 = -15 \%$. $25 \rightarrow 30$: $+5 €$, $+20 \%$. $80 \rightarrow 60$: $-20 €$, -25% .
4. V; F (es multiplicar por 0,75); V; F (el descuento no puede superar el 100 %); V.

 Ficha 3

1. Respuesta abierta. Es habitual conjeturar que sí vuelve al inicio; lo importante es que la escriban antes de comprobar y la contrasten luego.
2. $100 \rightarrow 120 \rightarrow 96$; $60 \rightarrow 72 \rightarrow 57,60$; $250 \rightarrow 300 \rightarrow 240$. En ningún caso es igual al inicial: siempre queda un 4 % por debajo ($1,20 \cdot 0,80 = 0,96$).
3. Barras: 100, 120 y 96 (la última un poco por debajo de la primera).
4. Bajando primero: $100 \cdot 0,80 = 80$ y $80 \cdot 1,20 = 96$. El orden no importa porque la multiplicación es conmutativa: $0,80 \cdot 1,20 = 1,20 \cdot 0,80 = 0,96$. Variación total: -4% .

 Ficha 4

1. Libro: IVA $0,04 \cdot 14 = 0,56 €$, con IVA 14,56 €. Calculadora: IVA $0,21 \cdot 20 = 4,20 €$, con IVA 24,20 €. Bolígrafos: IVA 1,05 €, con IVA 6,05 €. TOTAL: IVA $0,56 + 4,20 + 1,05 = 5,81 €$; con IVA $14,56 + 24,20 + 6,05 = 44,81 €$.
2. Menú: $11 : 1,10 = 10,00 €$. Sudadera: $36,30 : 1,21 = 30,00 €$.
3. $20 \cdot 0,75 \cdot 1,21 = 15 \cdot 1,21 = 18,15 €$. Si primero IVA: $20 \cdot 1,21 \cdot 0,75 = 24,20 \cdot 0,75 = 18,15 €$. No cambia: son productos de los mismos índices y la multiplicación es conmutativa.
4. $30 - 20 = 10$ puntos porcentuales. Aumento relativo: $\frac{10}{20} = 0,5 = 50 \%$.

Ficha 5

1. 2×1 : se pagan 12 € en vez de 24 € $\rightarrow$ 50 %. 3×2 : se pagan 24 € en vez de 36 € $\rightarrow$ 33,3 %. 2.ª unidad a mitad: $12 + 6 = 18$ € en vez de 24 € $\rightarrow$ 25 %. -20 % y 10 % extra: $12 \cdot 0,80 \cdot 0,90 = 8,64$ €; ahorro 3,36 €, es decir, 28 % (no 30 %).
2. Mochila: Alfa $40 \cdot 0,80 + 4,50 = 32 + 4,50 = 36,50$ €; Beta 36,00 €. Beta es más barata (0,50 € menos). Zapatillas: $X \cdot 90 \cdot 0,70 + 5,95 = 63 + 5,95 = 68,95$ €; $Y \cdot 90 \cdot 0,80 \cdot 0,90 = 90 \cdot 0,72 = 64,80$ €. Y es más barata (4,15 € menos).
3. Tres camisetas cuestan 36 €. 3×2 : pagas 24 € (descuento 33,3 %). -30 %: $36 \cdot 0,70 = 25,20$ €. Es más barato el 3×2 .
4. Respuesta abierta. Debe mencionar: a qué productos se aplica, cuál es el precio original, si hay condiciones (compra mínima, envío), y comprobar el precio final.

Ficha 6

1. C1: $80 \cdot 0,75 = 60$ €; -25 % (ahorro 20 €). C2: $60 \cdot 1,20 \cdot 0,80 = 57,60$ €; -4 %. C3 (15 % y 10 %): $300 \cdot 0,85 \cdot 0,90 = 229,50$ €; -23,5 %. C3 (25 % directo): $300 \cdot 0,75 = 225$ €; -25 %. C4: $\frac{46-40}{40} = 0,15$; +15 %. C5: $30 \cdot 1,21 = 36,30$ €; +21 %. C6: $1,60 \cdot 1,10 \cdot 0,90 = 1,584 \approx 1,58$ €; -1 % (índice 0,99).
2. Orden por variación total en valor absoluto: C1 y C3 con el 25 % directo (25 %), C3 con doble descuento (23,5 %), C5 (21 %), C4 (15 %), C2 (4 %), C6 (1 %). Sorprenden C2 y C6, que no vuelven al precio inicial, y C3, donde 15 % + 10 % no equivale a 25 %.
3. Recomendación: la tienda con el 25 % directo (225 €) es 4,50 € más barata que la del doble descuento (229,50 €). Se acepta otra respuesta si se justifica con cifras (por ejemplo, envío o garantía).

Ficha 7

1. Respuesta abierta. Debe decir que no es lo mismo y apoyarse en un ejemplo: $100 \rightarrow 120 \rightarrow 96$, porque el segundo 20 % se calcula sobre 120 €.
2. $650 \cdot 0,85 \cdot 1,21 = 552,50 \cdot 1,21 = 668,525 \approx 668,53$ €. Variación total: $0,85 \cdot 1,21 = 1,0285$, es decir, +2,85 %. Si se aplica primero el IVA: $650 \cdot 1,21 \cdot 0,85 = 668,525 \approx 668,53$ €: igual.
3. $100 \rightarrow 150 \rightarrow 75$: baja un 25 % respecto al inicio. Con índices: $1,50 \cdot 0,50 = 0,75 \neq 1$.
4. Sube 10 puntos porcentuales. Antes: $80 \cdot 0,80 = 64$ €; ahora: $80 \cdot 0,70 = 56$ €. El ahorro pasa de 16 € a 24 €, un 50 % más.

Refuerzo

1. 10 %: $200 : 10 = 20$; 50 %: $200 : 2 = 100$; 25 %: $200 : 4 = 50$; 5 %: la mitad del 10 % = 10; 1 %: $200 : 100 = 2$.
2. Descuento 10 % de 60 €: cambio -6 €, final 54 €. Aumento 25 % de 40 €: cambio +10 €, final 50 €. Descuento 50 % de 120 €: cambio -60 €, final 60 €.
3. Índice 1,20; $50 \cdot 1,20 = 60$ €.

Ampliación

1. $1 + a$ es el índice de la subida y el índice que devuelve a 1 es $\frac{1}{1+a}$. Subida 25 %: $1,25$; $\frac{1}{1,25} = 0,80 \rightarrow$ descuento 20 %. Subida 50 %: $1,5$; $\frac{1}{1,5} = 0,666 \dots \rightarrow$ descuento 33,3 %. Subida 100 %: 2 ; $0,5 \rightarrow$ descuento 50 %. Subida 10 %: $1,1$; $0,909 \dots \rightarrow$ descuento 9,09 %.
2. Fórmula: $(1 + a)(1 - b) = 1 \Rightarrow 1 - b = \frac{1}{1+a} \Rightarrow b = 1 - \frac{1}{1+a} = \frac{a}{1+a}$. Como $1 + a > 1$, se tiene $b < a$: el descuento necesario es siempre menor, porque se aplica sobre una cantidad mayor.
3. Un descuento del 100 % multiplica por 0 y deja el precio en 0: ninguna subida porcentual puede deshacerlo (cualquier número por 0 es 0).

Errores frecuentes

- Sumar o restar porcentajes de bases distintas: «+20 % -20 % = 0 %».
- Calcular el IVA sobre el precio final en vez de sobre el precio sin IVA (por ejemplo, restar el 21 % a 36,30 € para obtener el precio sin IVA).
- Usar mal el índice: bajar un 25 % como multiplicar por 0,25 en lugar de 0,75.
- Sumar los descuentos sucesivos (15 % + 10 % = 25 %).
- Confundir puntos porcentuales con porcentaje de variación.
- Comparar ofertas sin incluir gastos de envío u otras condiciones.

Criterios para valorar respuestas abiertas

- En la conjetura de la Ficha 3 se valora que esté escrita antes de calcular y que se contraste con los datos, aunque fuera incorrecta.
- En el argumento de compra se acepta cualquier decisión justificada con cifras (coste real, ahorro, condiciones).
- Los resultados con céntimos se redondean a dos decimales; si usan otro redondeo, se acepta si se indica.
- La calculadora es válida para comprobar, pero cada paso debe quedar escrito con su índice.

04 SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Descubrimos patrones



PREGUNTA GUÍA

¿Cómo podemos predecir un término que todavía no hemos construido?



CURSO
2.º ESO



SESIONES
6 sesiones · 1.º-2.º trimestre



SENTIDOS PRIORITARIOS
D · Sentido algebraico



COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE3, CE4, CE5, CE7



PRODUCTO FINAL
Catálogo de sucesiones y reglas



CRITERIOS DE EVALUACIÓN
3.1, 3.2, 4.1, 5.1, 7.1



Contexto, reto y sentido

Un restaurante quiere juntar mesas cuadradas en una sola fila para una comida de fin de curso, un taller de mosaicos coloca baldosas formando flores cada vez más grandes y una escalera de bloques crece un escalón en cada figura. En todos los casos es fácil dibujar las primeras figuras, pero nadie quiere dibujar la número 100 para saber cuántas sillas o baldosas hacen falta: hay que predecirlo.

La situación moviliza el sentido algebraico a partir de patrones: observar qué cambia y qué se mantiene, organizar los datos en una tabla de posición y valor, describir la regla con palabras, detectar diferencias constantes y pasar del caso particular a una expresión con la letra n . El alumnado también modifica patrones, contrasta conjeturas con contraejemplos y reúne sus descubrimientos en un catálogo.

Reto

Elaborar un catálogo de sucesiones y reglas con cuatro patrones (dibujo, tabla, regla verbal y expresión con n), predecir términos lejanos y comprobar cada predicción.

Producto final

Catálogo de sucesiones y reglas.



Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

CE3

Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.

CE4

Utilizar el pensamiento computacional: descomponer, reconocer patrones, generalizar y crear algoritmos.

CE5

Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.

CE7

Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- 3.1** Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.
- 3.2** Plantear variantes de un problema dado modificando alguno de sus datos o alguna condición del problema.
- 4.1** Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación computacional.
- 5.1** Reconocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente.
- 7.1** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales.

Saberes básicos prioritarios

D

Sentido algebraico

- Patrones, pautas y regularidades numéricas y figurativas: observación, descripción verbal y continuación.
- Sucesiones: término, posición y diferencia entre términos consecutivos; sucesiones con diferencia constante.
- Regla de formación (recurrente y en función de la posición) y expresión algebraica sencilla del término general.
- Uso de la letra n para generalizar; valor numérico de una expresión; resolución de ecuaciones sencillas para hallar la posición de un término.
- Creación de variantes de un patrón y comprobación de conjeturas con contraejemplos.

F

Sentido socioafectivo

- Perseverancia ante la búsqueda de regularidades y aceptación de que una regla puede ser incorrecta.
- Intercambio de estrategias en equipo y valoración de las explicaciones de los demás.



Objetivos didácticos

- ✓ Detectar regularidades numéricas y geométricas.
- ✓ Expresar reglas de formación verbal y simbólicamente.
- ✓ Calcular términos a partir de una regla.
- ✓ Crear variantes y comprobar conjeturas.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

- ① Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Patrones visuales con figuras

 **Evidencia:** Ficha 1: tabla de sillas por figura, predicción y dibujo de la figura 5, y conteo de baldosas de la flor.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Sucesiones numéricas y diferencias

 **Evidencia:** Ficha 2: análisis de diferencias en cuatro sucesiones, regla de una sucesión no lineal, sucesión inventada y detección del término erróneo.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Regla verbal y tabla posición-valor

 **Evidencia:** Ficha 3: tablas posición-valor y reglas verbales de las mesas, la flor y la escalera, y límite de la regla verbal.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Del caso particular a una expresión con n

Evidencia: Ficha 4: obtención de a_n para cuatro sucesiones, comprobación con términos nuevos, problemas inversos y corrección de una expresión errónea.

Ficha: Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Variantes de un patrón y comparación

Evidencia: Ficha 5: tabla de cuatro variantes del patrón de las mesas, comparación de ritmos, variante propia y conjetura refutada con contraejemplo.

Ficha: Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Catálogo final y reto individual

Evidencia: Ficha 6: tabla del catálogo con cuatro patrones, reto individual con una sucesión nueva y análisis de dos reglas para 1, 2, 4.

Ficha: Anexo 3 · ficha 6



Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

Recursos

Fichas de mosaicos

palillos o bloques

tablas

geometría dinámica opcional

Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.



DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

⊗ Refuerzo Anexo 8

Patrones con crecimiento constante y tablas parcialmente completadas.

✍ Ampliación Anexo 9

Crear dos patrones diferentes que coincidan en los primeros términos y diverjan después; explicar por qué.

📋 Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1 Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).



FASE 2 Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).



FASE 3 Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

⚖ Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
3.1	Formulación de conjeturas sobre la regla de un patrón y sobre cómo cambia al modificarlo, y comprobación con casos y contraejemplos.	Fichas 4 y 5 y reto individual (Ficha 6) / rúbrica
3.2	Planteamiento de variantes de un patrón modificando una condición (sillas por mesa, extremos, forma) y cálculo de su nueva expresión.	Ficha 5 y Anexo 9 / rúbrica
4.1	Reconocimiento del patrón en figuras y números, organización de los datos en una tabla posición-valor y descomposición en «qué cambia» y «qué se mantiene».	Fichas 1, 2 y 3 / lista de cotejo
5.1	Conexión entre el dibujo, la tabla, la regla verbal y la expresión con n de un mismo patrón.	Fichas 3 y 4 y catálogo (Anexo 4) / rúbrica
7.1	Representación de cada patrón de varias maneras (figuras, tabla, regla verbal, expresión y gráfica) en el catálogo final.	Catálogo (Anexo 4) y Ficha 6 / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Catálogo, tablas, reglas y generalización individual.

+ Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.



Variantes de aplicación

↗ Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

↖ Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 4 · Descubrimos patrones

ALUMNADO

Hoy en el comedor han juntado cuatro mesas cuadradas en fila para la comida de fin de curso. Cuentas las sillas: diez. Mañana vendrán más clases y habrá que juntar veinte mesas, y después cien. ¿Cuántas sillas harán falta? Nadie quiere dibujarlas todas, y sumar de dos en dos hasta cien es un rollo. ¿Y si existiera un truco para adivinar cualquier figura sin construirla? Vais a convertirlos en un estudio de patrones: descubriréis la regla escondida, la escribiréis con una letra y la pondréis a prueba hasta que no falle.

“ *¿Cómo podemos predecir un término que todavía no hemos construido?* ”

🎯 Vuestro reto

Elaborar un catálogo de sucesiones y reglas con cuatro patrones (dibujo, tabla, regla verbal y expresión con n), predecir términos lejanos y comprobar cada predicción.

📦 Lo que vais a producir

Catálogo de sucesiones y reglas.

📍 Hoja de ruta · 6 sesiones

- 1 Observamos patrones con figuras y descubrimos qué cambia y qué se mantiene.
- 2 Analizamos sucesiones de números y sus diferencias.
- 3 Organizamos tablas posición-valor y escribimos reglas con palabras.
- 4 Pasamos del caso particular a una expresión con n y la comprobamos.
- 5 Creamos variantes de un patrón y comparamos.
- 6 Montamos el catálogo y resolvemos un reto individual.

📖 Al terminar seré capaz de...

- ✓ Detectar regularidades numéricas y geométricas.
- ✓ Expresar reglas de formación verbal y simbólicamente.
- ✓ Calcular términos a partir de una regla.
- ✓ Crear variantes y comprobar conjeturas.

📝 ¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 4 · Descubrimos patrones

ALUMNADO

Tres patrones figurativos (mesas, escalera, flor), sucesiones numéricas para analizar, un método con ejemplo resuelto, una gráfica de tres formas de crecer, errores típicos de generalización y un glosario. Los contextos son ficticios, creados para el aula.

F1 Patrón A: las mesas del comedor

ESQUEMA

Mesas cuadradas en fila; cada círculo es una silla.

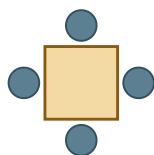


Figura 1

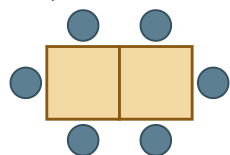


Figura 2

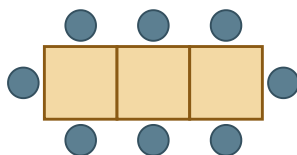


Figura 3

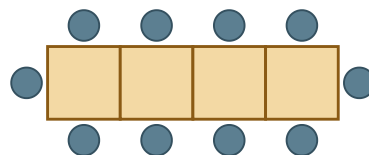


Figura 4

Fuente: Esquema de elaboración propia.

🔍 Cada figura añade una mesa a la fila. Cuenta las sillas de las figuras 1, 2, 3 y 4. ¿Cuántas habrá en la figura 5?

F2 Patrón B: la escalera de bloques

ESQUEMA

Escaleras de bloques; cada cuadrado es un bloque.



Figura 1



Figura 2

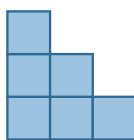


Figura 3

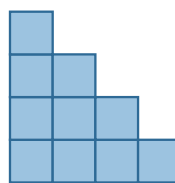


Figura 4

Fuente: Esquema de elaboración propia.

🔍 ¿Cuántos bloques tiene cada figura? ¿Cuántos bloques nuevos se añaden al pasar de una figura a la siguiente?

F3 Patrón C: la flor de baldosas

ESQUEMA

Flores de baldosas; cada cuadrado es una baldosa.



Figura 1

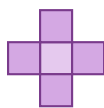


Figura 2

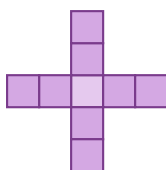


Figura 3

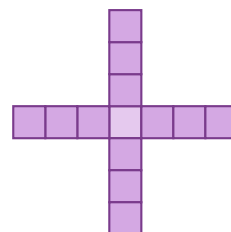


Figura 4

Fuente: Esquema de elaboración propia.

🔍 Una baldosa central y cuatro brazos que crecen. ¿Qué cambia en cada figura y qué se mantiene?

F4 Sucesiones para analizar

DATOS

Sucesión	Primeros términos	Pista
S1	5, 8, 11, 14, ...	¿Cuánto aumenta cada vez?
S2	2, 4, 8, 16, ...	¿Se suma siempre lo mismo?
S3	1, 4, 9, 16, 25, ...	Mira las diferencias entre términos consecutivos.
S4	20, 17, 14, 11, ...	Los términos disminuyen.
S5	3, 7, 11, 15, ...	¿Qué relación hay con los múltiplos de 4?
S6	1, 1, 2, 3, 5, 8, ...	Cada término se obtiene con los anteriores.

Fuente: Elaboración propia.

🔍 Escribe cada término como $a_1, a_2, a_3, \dots$ (a_n es el término que ocupa la posición n).

F5 Método: del caso particular a una expresión con n

DATOS

Posición n	1	2	3	4	5
Sillas de las mesas a_n	4	6	8	10	12
Diferencia con la anterior	—	+2	+2	+2	+2

Ejemplo resuelto con las mesas (patrón A): 4, 6, 8, 10, ...

1. Observa y cuenta. Cada mesa nueva añade 2 sillas (una arriba y otra abajo); las 2 sillas de los extremos siempre están.

2. Tabla posición-valor. Es la de arriba: se anota cada posición con su valor y la diferencia con el término anterior.

3. Diferencia. $6 - 4 = 8 - 6 = 10 - 8 = 2$: la diferencia es constante, $d = 2$. Esto indica que $a_n = 2 \cdot n + \dots$

4. Ajusta el número que falta. Para $n = 1$ debe salir 4: $2 \cdot 1 + \square = 4$, luego $\square = 2$. Regla: $a_n = 2n + 2$ (en general, $a_n = d \cdot n + (a_1 - d)$).

5. Comprueba con un término que no hayas usado. $n = 5$: $2 \cdot 5 + 2 = 12$ ✓ (5 mesas: 5 arriba, 5 abajo y 2 en los extremos).

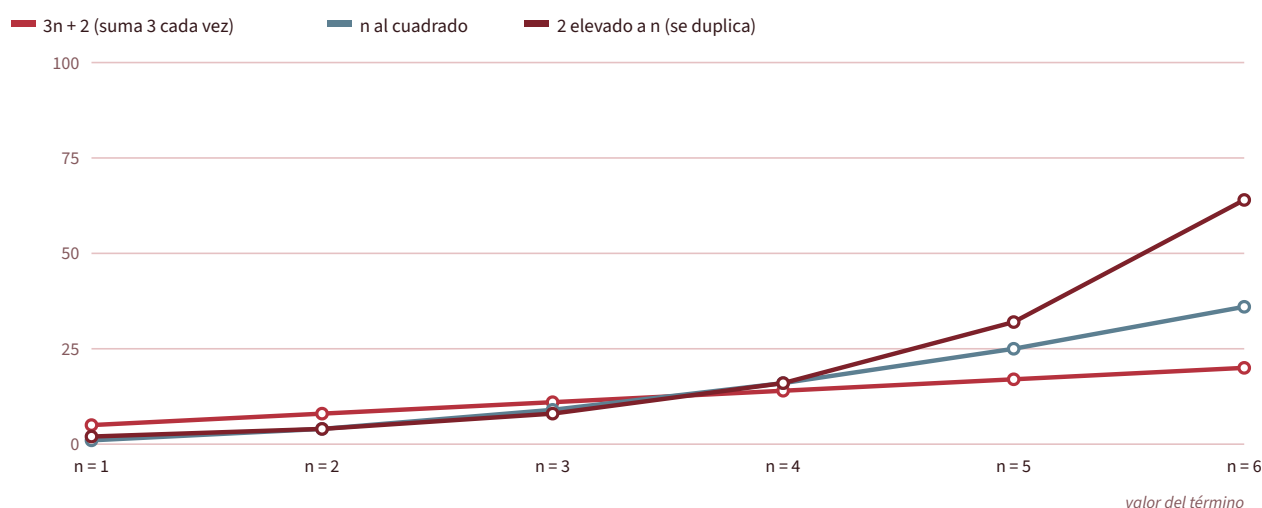
6. Predice. $n = 20$: $2 \cdot 20 + 2 = 42$ sillas. $n = 100$: $2 \cdot 100 + 2 = 202$ sillas.

Fuente: Elaboración propia.

🔍 Si la diferencia no es constante, la regla no es de la forma $d \cdot n + c$ (como en los cuadrados 1, 4, 9, 16...).

F6 Tres formas de crecer

GRÁFICO



Fuente: Elaboración propia: $3n + 2$ (S1), n^2 (S3) y 2^n (S2) para las seis primeras posiciones.

🔍 Las tres sucesiones empiezan con números parecidos y acaban muy separadas. ¿Cuál crece a un ritmo constante?

F7 Errores típicos al generalizar

Afirmación	Contraejemplo o comprobación	Corrección
En 2, 4, 8, 16, ... la regla es «sumar 2».	$2 + 2 = 4$, pero $4 + 2 = 6$ y el siguiente es 8.	Se multiplica por 2 cada vez.
En 4, 6, 8, 10, ... la regla es $a_n = n + 3$.	Para $n = 2$ sale 5, no 6.	$a_n = 2n + 2$.
En 3, 7, 11, 15, ... la regla es $a_n = 4n + 1$.	Para $n = 1$ sale 5, no 3.	$a_n = 4n - 1$.
En 1, 4, 9, 16, ... se suma 3 cada vez.	$4 - 1 = 3$, pero $9 - 4 = 5$.	Las diferencias son 3, 5, 7...: crecen de 2 en 2.
Con tres términos ya conozco la regla.	1, 2, 4, ... puede seguir con 8 o con 7.	Hace falta el contexto o más términos para fijar la regla.

Fuente: Elaboración propia a partir de errores habituales en el aula.

🔍 Una regla solo es válida si funciona para todos los términos conocidos y para uno nuevo.

F8 Vocabulario esencial

Sucesión	Lista ordenada de números: $a_1, a_2, a_3, \dots$
Término y posición	El término a_n es el número que ocupa la posición n .
Diferencia	Resta entre dos términos consecutivos, $d = a_{n+1} - a_n$.
Regla recurrente	Describe cómo obtener un término a partir del anterior («suma 2»).
Término general	Expresión con n que da directamente cualquier término, como $a_n = 2n + 2$.
Conjetura	Afirmación que creemos cierta y que hay que comprobar.
Contraejemplo	Un caso concreto que demuestra que una afirmación general es falsa.

Fuente: Elaboración propia.

Fichas de actividades del alumnado

SdA 4 · Descubrimos patrones

ALUMNADO

FICHA 1

Patrones con figuras

Sesión 1

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Observa los patrones de F1 y F3. Antes de contar, fíjate en qué cambia y qué se mantiene.

1 Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.

¿Cuál es el siguiente término de 3, 6, 9, 12, ...?

☐ 14 ☐ 15 ☐ 18

Si $n = 4$, ¿cuánto vale $3n + 1$?

☐ 13 ☐ 12 ☐ 7

En 2, 4, 8, 16, ... el siguiente es...

☐ 24 ☐ 32 ☐ 20

2 Cuenta las sillas de cada figura de las mesas (F1).

Figura	Sillas contadas
1	
2	
3	
4	

3 Predice cuántas sillas tendrá la figura 5, después dibújala y comprueba tu predicción.

- 4 Cuenta las baldosas de la flor (F3) y predice la figura 5. Explica qué cambia y qué se mantiene de una figura a la siguiente.

Figura	Baldosas
1	
2	
3	
4	
5 (predicción)	

FICHA 2 Sucesiones y diferencias

Sesión 2

Usa las sucesiones de F4. Calcula las diferencias entre términos consecutivos.

- 1 Completa para cada sucesión las diferencias y los tres términos siguientes.

Sucesión	Diferencias	Tres términos siguientes
S1: 5, 8, 11, 14		
S3: 1, 4, 9, 16, 25		
S4: 20, 17, 14, 11		
S5: 3, 7, 11, 15		

- 2 S2 es 2, 4, 8, 16. ¿Se suma siempre lo mismo? ¿Qué se hace en cada paso? Escribe los tres términos siguientes. En S6 (1, 1, 2, 3, 5, 8) cada término se obtiene con los anteriores: descubre cómo y escribe los tres siguientes.

- 3 Inventa una sucesión que empiece en 40 y tenga diferencia constante -5 . Escribe sus seis primeros términos.

4

En la sucesión 5, 8, 11, 14, 18, 20 hay un término mal puesto. Encuéntralo y corrígelo.

FICHA 3

Tabla posición-valor y regla verbal

Sesión 3

Organiza los datos en tablas. Después describe la regla con palabras.

1

Completa la tabla de las mesas (F1) y escribe la regla verbal.

Posición n	Sillas	Diferencia con la anterior
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Regla verbal: la figura 1 tiene _____ sillas y cada mesa nueva añade _____ sillas.

2

Completa la tabla de la flor (F3) y escribe la regla verbal.

Posición n	Baldosas	Diferencia con la anterior
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Regla verbal: la figura 1 tiene _____ baldosa y cada figura nueva añade _____ baldosas.

- 3 Completa la tabla de la escalera (F2) y escribe la regla verbal. Aquí la diferencia no es constante.

Posición n	Bloques	Diferencia con la anterior
1		
2		
3		
4		
5		
6		

- 4 Con la regla verbal, ¿qué tendrías que hacer para saber las sillas de la figura 100 de las mesas? ¿Hay un camino más corto?

FICHA 4 Del caso particular a la expresión con n

Sesión 4

Sigue los pasos del método de F5.

- 1 Mesas (4, 6, 8, 10): completa los pasos del método.

Diferencia: $d =$ _____

Regla: $a_n = d \cdot n + (a_1 - d) =$ _____ $\cdot n +$ _____

Comprobación con $n = 3$: _____

Predicción: $n = 20 \rightarrow$ _____; $n = 100 \rightarrow$ _____

- 2 Halla la expresión de cada sucesión, compruébala con los tres primeros términos y calcula los términos de las posiciones 10 y 100.

Sucesión	Expresión con n	Comprobación ($n = 1, 2, 3$)	$n = 10$	$n = 100$
Mesas: 4, 6, 8, 10				
Flor: 1, 5, 9, 13				
S5: 3, 7, 11, 15				
Escalera: 1, 3, 6, 10	$\frac{n(n+1)}{2}$			

- 3 Con las mesas: si hay 35 invitados, ¿cuántas mesas hacen falta como mínimo? Con la flor: ¿en qué posición hay 101 baldosas?

- 4 Aitor propone $a_n = n + 3$ para 4, 6, 8, 10. Compruébala con $n = 2$ y $n = 4$, explica qué falla y corrígela.

FICHA 5 Variantes y comparación

Sesión 5

Modifica el patrón de las mesas (F1) y observa cómo cambia la expresión. Contrasta tus conjeturas con casos.

- 1 Completa la tabla de variantes de las mesas.

Variante	Cambio respecto a F1	Expresión con n	$n = 10$	$n = 25$
Original	—	$2n + 2$		
V1	3 sillas arriba y 3 abajo por mesa; 1 silla en cada extremo			
V2	Mesas en anillo cerrado: 2 sillas por mesa, sin extremos			
V3	Mesas pegadas a la pared: solo 1 silla por mesa y 1 en cada extremo			

- 2 ¿Qué variante añade más sillas por cada mesa nueva? ¿Qué número de la expresión lo indica? ¿Y qué indica el otro número?

3

Crea una variante propia: describe el cambio, dibuja las figuras 1, 2 y 3 y escribe su expresión comprobada.

4

Conjetura: «Si cada mesa tiene el doble de sillas por lado (2 arriba y 2 abajo) y se mantienen las 2 de los extremos, el total de sillas se duplica». Compruébala con $n = 1, 2, 3$ y explica con las expresiones qué ocurre.

FICHA 6

Catálogo final y reto individual

Sesión 6

Completa el catálogo con tu equipo y resuelve el reto individual sin ayuda.

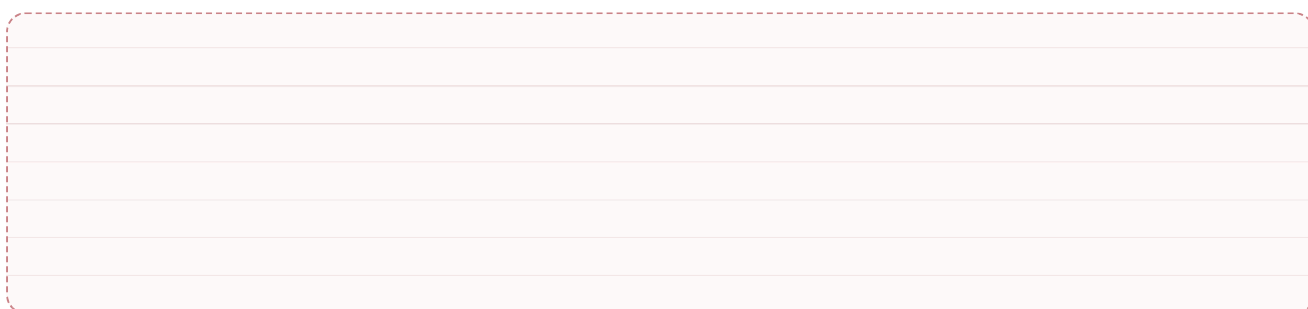
1

Completa la tabla del catálogo con cuatro patrones (los tres de F1 a F3 y uno propio).

Patrón	Primeros términos	Regla verbal	Expresión	$n = 20$	$n = 100$
Mesas (F1)					
Flor (F3)					
Escalera (F2)			$\frac{n(n+1)}{2}$		
Patrón propio					

- 2 Reto individual. Sucesión 7, 11, 15, 19, ... a) Calcula la diferencia y la expresión de a_n . b) Calcula el término de la posición 30. c) ¿En qué posición está el 203? d) ¿Es 150 un término de esta sucesión?

- 3 Dibuja las figuras 1, 2 y 3 de un patrón de palillos (cuadrados en fila) y comprueba que sigue la expresión $3n + 1$.



- 4 Lucía dice que 1, 2, 4, ... continúa con 8 y Marcos que continúa con 7. ¿Quién tiene razón? Explica qué necesitaríais para decidir.

Plantilla del producto final

SdA 4 · Descubrimos patrones

ALUMNADO

Nombre:

Curso/grupo:

Fecha:

Catálogo de sucesiones y reglas. Cada patrón debe tener figuras o términos, tabla, regla verbal, expresión y predicción comprobada.

Título del catálogo y equipo

Nombre del catálogo, integrantes y roles.

Patrón 1: figuras y tablaPrimeros términos, tabla posición-valor, regla verbal y a_n .**Patrón 2: figuras y tabla**Primeros términos, tabla posición-valor, regla verbal y a_n .**Patrón 3: figuras y tabla**Primeros términos, tabla posición-valor, regla verbal y a_n .**Patrón 4 (propio)**

Invéntalo y explica su regla.

**Predicciones y comprobación**

Término 20 y 100 de cada patrón; comprobación con un término nuevo.

Variante y conjetura

Una variante y una conjetura con su contraejemplo o su comprobación.

Gráfica o conclusión

Gráfica de un patrón o conclusión del equipo.

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 4 · Descubrimos patrones

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Antes de entregar **Catálogo de sucesiones y reglas**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- ☐ Cada patrón incluye figuras o términos suficientes para ver la regularidad.
- ☐ La tabla posición-valor está completa y las diferencias están calculadas.
- ☐ La regla verbal explica qué cambia y qué se mantiene.
- ☐ La expresión con n funciona para todos los términos de la tabla.
- ☐ Se ha comprobado la expresión con un término que no se usó para encontrarla.
- ☐ Las predicciones de los términos 20 y 100 están calculadas con la expresión.
- ☐ Hay al menos una variante de un patrón y su expresión comprobada.
- ☐ Hay una conjetura y se ha contrastado con casos, incluido un contraejemplo si procede.
- ☐ El patrón propio es original y se puede continuar sin ambigüedad.

Calidad y rigor

- ☐ He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- ☐ He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- ☐ He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- ☐ He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- ☐ He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

Rúbrica imprimible

SdA 4 · Descubrimos patrones

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Rúbrica para valorar **Catálogo de sucesiones y reglas**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

Autoevaluación y coevaluación

SdA 4 · Descubrimos patrones

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé encontrar la regla de un patrón con diferencia constante y escribirla con n .	☐	☐	☐	☐
Compruebo mis reglas con un término nuevo y reconozco cuándo una regla no funciona.	☐	☐	☐	☐
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	☐	☐	☐	☐
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	☐	☐	☐	☐
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	☐	☐	☐	☐
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	☐	☐	☐	☐

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

Material de apoyo y refuerzo

SdA 4 · Descubrimos patrones

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Patrones con crecimiento constante y tablas parcialmente completadas.

⊗ Ejemplo modelado: sucesión 4, 7, 10, 13

1. Diferencias: $7 - 4 = 3$, $10 - 7 = 3$, $13 - 10 = 3 \rightarrow$ siempre suma 3. **2. Regla verbal:** empieza en 4 y suma 3 cada vez. **3. Expresión:** $a_n = 3n + \square$; con $n = 1$: $3 + \square = 4$, luego $\square = 1 \rightarrow a_n = 3n + 1$. **4. Comprobación:** $n = 4$: $3 \cdot 4 + 1 = 13$ ✓.

⊗ Símbolos esenciales

n es la posición (1, 2, 3...). a_n es el término de la posición n . d es la diferencia entre términos consecutivos. $a_n = d \cdot n + (a_1 - d)$ vale cuando la diferencia es constante.

1 Mira las figuras de palillos y cuenta los palillos de cada una. Completa la tabla.



Figura 1



Figura 2



Figura 3

Figura n	Palillos	Diferencia
1		
2		
3		
4		
5		
10		

2 Completa los pasos con la ayuda del ejemplo.

Cada figura nueva añade _____ palillos. Expresión: $a_n = \text{_____} \cdot n + \text{_____}$.Comprobación con $n = 3$: _____

3 Completa la sucesión 5, 8, 11, ____, ____, ____ y escribe la regla con tus palabras.

Actividad de ampliación

SdA 4 · Descubrimos patrones

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

 Dos patrones que empiezan igual y acaban distintos

En F7 hay una sucesión, 1, 2, 4, ..., que puede continuar de dos maneras: duplicando (1, 2, 4, 8, 16...) o sumando una cantidad que crece (1, 2, 4, 7, 11...). Tres datos no bastan para saber la regla. Vas a crear tus propias parejas de patrones.

 Pasos

- 1 Elige tres primeros términos y escribe dos reglas diferentes que los produzcan.
- 2 Calcula los seis primeros términos de cada patrón y señala en qué posición dejan de coincidir.
- 3 Explica por qué los tres primeros términos no determinan la regla.
- 4 Representa ambos patrones con figuras o con una gráfica y analiza cuál crece más deprisa.

1 **Tabla de comparación de tus dos patrones.**

Posición n	Patrón 1	Patrón 2	¿Coinciden?
1			
2			
3			
4			
5			
6			

 Entrega

Las dos reglas, la tabla con seis términos, la posición donde divergen, una explicación de por qué tres términos no bastan y una representación gráfica o con figuras.

 Ficha 1

1. Diagnóstico: 15; 13; 32.
2. Mesas: figura 1 $\rightarrow$ 4 sillas; 2 $\rightarrow$ 6; 3 $\rightarrow$ 8; 4 $\rightarrow$ 10.
3. Figura 5: 5 mesas, 5 sillas arriba, 5 abajo y 2 en los extremos: 12 sillas (cada mesa añade 2).
4. Flor: 1, 5, 9, 13 baldosas; predicción figura 5: 17. Cambia: cada brazo crece una baldosa (4 baldosas más por figura). Se mantiene: la baldosa central y el número de brazos (4).

 Ficha 2

1. S1: diferencias 3, 3, 3; siguientes 17, 20, 23. S3: diferencias 3, 5, 7, 9 (no constante, crecen de 2 en 2); siguientes 36, 49, 64 (son los cuadrados 6^2 , 7^2 , 8^2). S4: diferencias -3 , -3 , -3 ; siguientes 8, 5, 2. S5: diferencias 4, 4, 4; siguientes 19, 23, 27.
2. S2: no se suma lo mismo (+2, +4, +8); cada término es el doble del anterior: 32, 64, 128. S6: cada término es la suma de los dos anteriores ($1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$...): 13, 21, 34.
3. 40, 35, 30, 25, 20, 15.
4. El término erróneo es 18: debería ser 17 ($14 + 3$), y el siguiente 20 (que sí cuadra: 5, 8, 11, 14, 17, 20).

 Ficha 3

1. Mesas: 4, 6, 8, 10, 12, 14; diferencias $-$, 2, 2, 2, 2, 2. Regla: la figura 1 tiene 4 sillas y cada mesa nueva añade 2 sillas.
2. Flor: 1, 5, 9, 13, 17, 21; diferencias $-$, 4, 4, 4, 4, 4. Regla: la figura 1 tiene 1 baldosa y cada figura nueva añade 4 baldosas.
3. Escalera: 1, 3, 6, 10, 15, 21; diferencias $-$, 2, 3, 4, 5, 6 (no constantes). Regla: a la figura anterior se le suman tantos bloques como indica la posición (figura 4 = figura 3 + 4).
4. Habría que ir calculando todas las figuras anteriores hasta la 100 (o sumar 2 noventa y nueve veces a 4). Un camino más corto es una expresión con n que dé directamente el término (se estudia en la Ficha 4).

 Ficha 4

1. Mesas: $d = 2$; $a_n = 2 \cdot n + (4 - 2) = 2n + 2$; $n = 3$: $2 \cdot 3 + 2 = 8$ ✓; $n = 20 \rightarrow 42$; $n = 100 \rightarrow 202$.
2. Mesas $2n + 2$: $n = 10 \rightarrow 22$; $n = 100 \rightarrow 202$. Flor: $d = 4$, $a_n = 4n + (1 - 4) = 4n - 3$; comprobación: 1, 5, 9 ✓; $n = 10 \rightarrow 37$; $n = 100 \rightarrow 397$. S5: $d = 4$, $a_n = 4n - 1$; comprobación: 3, 7, 11 ✓; $n = 10 \rightarrow 39$; $n = 100 \rightarrow 399$. Escalera $\frac{n(n+1)}{2}$: $n = 1 \rightarrow 1$, $n = 2 \rightarrow 3$, $n = 3 \rightarrow 6$ ✓; $n = 10 \rightarrow 55$; $n = 100 \rightarrow 5\,050$.
3. Invitados: $2n + 2 \geq 35 \rightarrow 2n \geq 33 \rightarrow n \geq 16,5$; hacen falta 17 mesas (36 sillas, sobra 1). Flor: $4n - 3 = 101 \rightarrow 4n = 104 \rightarrow n = 26$.
4. Con $n = 2$: $2 + 3 = 5 \neq 6$; con $n = 4$: $4 + 3 = 7 \neq 10$. Falla porque el coeficiente de n debe ser la diferencia (2) y no 1. Correcta: $a_n = 2n + 2$.

Ficha 5

1. Original: $2n + 2 \rightarrow 22$ y 52. V1: $3 + 3 = 6$ sillas por mesa y 2 en los extremos: $6n + 2 \rightarrow 62$ y 152. V2: 2 sillas por mesa, sin extremos: $2n \rightarrow 20$ y 50. V3: 1 silla por mesa y 2 extremos: $n + 2 \rightarrow 12$ y 27.
2. V1 añade más sillas por cada mesa nueva (6). El número que multiplica a n (el coeficiente) indica cuántas sillas añade cada mesa; el otro número (término independiente) son las sillas que hay «de partida» (los extremos), independientes del número de mesas.
3. Respuesta abierta. Se valora que la expresión sea coherente con el dibujo y esté comprobada con $n = 1, 2, 3$.
4. Con 2 arriba y 2 abajo y 1 en cada extremo, el total es $4n + 2$: $n = 1 \rightarrow 6$, $n = 2 \rightarrow 10$, $n = 3 \rightarrow 14$. El doble de la original sería $2(2n + 2) = 4n + 4$: 8, 12, 16. No coinciden: la conjetura es falsa (contraejemplo $n = 1$: 6 sillas, no 8). Los extremos no se duplican.

Ficha 6

1. Mesas: 4, 6, 8, 10; suma 2; $2n + 2$; 42; 202. Flor: 1, 5, 9, 13; suma 4; $4n - 3$; 77; 397. Escalera: 1, 3, 6, 10; se suma n ; $\frac{n(n+1)}{2}$; $\frac{20 \cdot 21}{2} = 210$; $\frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$. El patrón propio es abierto: se acepta cualquiera con expresión comprobada.
2. a) $d = 4$ y $a_n = 4n + (7 - 4) = 4n + 3$. b) $a_{30} = 4 \cdot 30 + 3 = 123$. c) $4n + 3 = 203 \rightarrow 4n = 200 \rightarrow n = 50$. d) $4n + 3 = 150 \rightarrow 4n = 147 \rightarrow n = 36,75$, que no es entero: 150 no es un término.
3. Palillos: figura 1 $\rightarrow$ 4 palillos, figura 2 $\rightarrow$ 7, figura 3 $\rightarrow$ 10. $3 \cdot 1 + 1 = 4$, $3 \cdot 2 + 1 = 7$, $3 \cdot 3 + 1 = 10$ ✓: cada cuadrado nuevo añade 3 palillos.
4. Ambos pueden tener razón: 1, 2, 4, 8 (se duplica) y 1, 2, 4, 7 (se suma 1, 2, 3...) coinciden en tres términos. Para decidir hace falta más términos o el contexto (la figura que genera la sucesión).

Refuerzo

1. Palillos: figura 1 $\rightarrow$ 4; figura 2 $\rightarrow$ 7; figura 3 $\rightarrow$ 10; figura 4 $\rightarrow$ 13; figura 5 $\rightarrow$ 16; figura 10 $\rightarrow$ 31. Diferencias: 3, 3, 3...
2. Cada figura nueva añade 3 palillos. $a_n = 3n + 1$. Comprobación con $n = 3$: $3 \cdot 3 + 1 = 10$ ✓.
3. 5, 8, 11, 14, 17, 20 (suma 3; $a_n = 3n + 2$).

Ampliación

1. Respuesta abierta. Ejemplo: 1, 2, 4, ... Patrón 1 (se duplica): 1, 2, 4, 8, 16, 32. Patrón 2 (se suma 1, 2, 3, 4, 5): 1, 2, 4, 7, 11, 16. Coinciden en las posiciones 1 a 3 y divergen en la 4.
2. Los tres primeros términos son compatibles con varias reglas; solo dejan de serlo al añadir un cuarto dato. En general, un número finito de términos no determina la regla de forma única.
3. Gráficamente, el patrón que se duplica crece más deprisa que el que suma cantidades crecientes (32 frente a 16 en la posición 6).

Errores frecuentes

- Quedarse con «suma 2» o «suma 3» sin comprobar la diferencia entre todos los términos consecutivos.
- Escribir $a_n = n + c$ en vez de usar la diferencia como coeficiente de n (por ejemplo, $a_n = n + 3$ para 4, 6, 8, 10).
- Olvidar el término independiente: $a_n = 3n$ para 5, 8, 11, 14.
- Calcular la regla con $n = 0$ en lugar de $n = 1$, o confundir la posición con el valor.
- Generalizar con pocos casos: dos o tres términos no determinan la regla.
- Pasar de una variante a otra pensando que todo se duplica si se duplica una parte del patrón.

Criterios para valorar respuestas abiertas

- En las reglas verbales se acepta cualquier descripción correcta que diga qué se mantiene y qué cambia, aunque no use la expresión con n .
- En el patrón propio y en las variantes se valora que la expresión sea coherente con el dibujo y esté comprobada con al menos un término que no se usó para hallarla.
- Si una expresión es equivalente a la esperada (por ejemplo, $2(n + 1)$ en lugar de $2n + 2$), se acepta.
- En las preguntas de ambigüedad (1, 2, 4...) se valora que reconozcan que hay más de una regla posible y pidan más información.

05 SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Álgebra que simplifica problemas



PREGUNTA GUÍA

¿Cómo podemos transformar una expresión sin cambiar lo que significa?



CURSO
2.º ESO



SESIONES
7 sesiones · 2.º trimestre



SENTIDOS PRIORITARIOS
D · Sentido algebraico



COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE2, CE3, CE5, CE8



PRODUCTO FINAL
Manual de expresiones y polinomios para modelizar



CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 1.2, 2.1, 3.1, 5.2, 8.1



Contexto, reto y sentido

El instituto va a reformar un patio rectangular y todavía no se sabe cuánto medirá: un lado será « x » metros y el otro « $x + 3$ ». Aun así, el arquitecto necesita ya la fórmula del perímetro para encargar la valla y la del área para encargar el suelo. Al mismo tiempo, dos empresas de impresión de camisetas ofrecen tarifas con un precio fijo y un precio por unidad, y hay que saber cuándo sale más barata cada una. En ambos casos la letra sirve para hablar de una cantidad que todavía no conocemos.

La situación moviliza el sentido algebraico: traducir enunciados a expresiones, reconocer monomios y términos semejantes, sumar, restar y multiplicar polinomios sencillos, aplicar la propiedad distributiva con un modelo de área y decidir si dos expresiones son equivalentes. El alumnado construye un manual de expresiones con ejemplos modelizados y aprende a detectar y explicar errores algebraicos.

🎯 Reto

Elaborar un manual de expresiones y polinomios con ejemplos modelizados de perímetros, áreas y costes, comprobando por dos caminos que las expresiones simplificadas son equivalentes y explicando los errores típicos.

📦 Producto final

Manual de expresiones y polinomios para modelizar.



Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- CE5** Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.
- CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- 1.1** Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.
- 1.2** Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.
- 2.1** Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.
- 3.1** Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.
- 5.2** Realizar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.
- 8.1** Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, oralmente y por escrito, al explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.

Saberes básicos prioritarios

D

Sentido algebraico

- Expresiones algebraicas para describir cantidades variables (perímetros, áreas y costes) y valor numérico.
- Monomios: coeficiente, parte literal y grado; términos semejantes; suma y resta de monomios semejantes.
- Polinomios: grado y valor numérico; suma, resta y producto de polinomios sencillos y de un monomio por un polinomio.
- Propiedad distributiva y modelo de área; expresiones equivalentes.
- Comprobación de equivalencias con valores numéricos y con propiedades, y refutación con contraejemplos.

F

Sentido socioafectivo

- Aceptación del error como parte del aprendizaje algebraico y revisión crítica del propio trabajo.
- Comunicación respetuosa de explicaciones y correcciones entre iguales.



Objetivos didácticos

- ✓ Interpretar expresiones algebraicas en contexto.
- ✓ Operar con monomios y polinomios sencillos.
- ✓ Reconocer expresiones equivalentes.
- ✓ Usar el álgebra para describir perímetros y costes.



Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.



Secuencia de sesiones y actividades

- ① Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Expresiones para describir cantidades variables

Evidencia: Ficha 1: traducción de enunciados a expresiones, perímetro y área del patio con valor numérico, y coste de la tarifa de camisetas.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Monomios: grado, coeficiente y términos semejantes

Evidencia: Ficha 2: coeficiente, parte literal y grado de cinco monomios, agrupación por términos semejantes y reducción de seis expresiones.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Suma/resta de polinomios

 **Evidencia:** Ficha 3: grado y valor numérico de polinomios, cuatro sumas y restas comprobadas y diferencia entre las dos tarifas.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Producto sencillo y distributiva

 **Evidencia:** Ficha 4: producto de monomios, propiedad distributiva, modelo de área y ampliación del patio.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Equivalencia mediante valor numérico y propiedades

 **Evidencia:** Ficha 5: tabla de valores para tres expresiones, cuatro parejas de expresiones equivalentes o no, y seis formas de escribir un mismo perímetro.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Manual con ejemplos modelizados

 **Evidencia:** Ficha 6: apartados del manual con ejemplos propios, modelización de un huerto y de un pedido, y revisión cruzada.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Reto individual de error algebraico

 **Evidencia:** Ficha 7: reto individual con tres resoluciones erróneas, un problema de piscina, una equivalencia demostrada de dos maneras y una explicación de error.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 7

**Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad** **Recursos**

Tarjetas de expresiones

figuras con lados algebraicos

calculadora para comprobación

 Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo Anexo 8

Código de colores para términos semejantes y operaciones de una sola etapa.

Ampliación Anexo 9

Comparar dos expresiones complejas y demostrar equivalencia de dos maneras.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1 Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2 Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3 Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Interpretación de enunciados y de situaciones (patio, tarifas) y traducción a expresiones algebraicas con las preguntas bien comprendidas.	Ficha 1 / lista de cotejo
1.2	Elección de la herramienta algebraica adecuada (reducir términos semejantes, operar polinomios, distributiva, modelo de área) en cada problema.	Fichas 2, 3 y 4 / escala de valoración
2.1	Comprobación de cada simplificación con valores numéricos y por un segundo camino, y detección de errores en resoluciones ajenas.	Fichas 3, 5 y 7 / rúbrica
3.1	Formulación y comprobación de conjeturas sobre equivalencia de expresiones, con valores y contraejemplos.	Ficha 5 y Anexo 9 / rúbrica
5.2	Conexión entre el modelo geométrico de área, la propiedad distributiva y la expresión algebraica, y entre coste, tarifa y polinomio.	Fichas 4 y 6 y manual (Anexo 4) / rúbrica

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
8.1	Explicación escrita y oral de por qué dos expresiones son equivalentes y de por qué una resolución es incorrecta, con lenguaje algebraico preciso.	Fichas 6 y 7 y presentación del manual / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Manual, ejercicios contextualizados y explicación de equivalencia.

+ Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

🔗 Variantes de aplicación

↶ Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

↗ Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 5 · Álgebra que simplifica problemas

ALUMNADO

El instituto quiere reformar el patio y todavía no sabe cuánto medirá: un lado, «x metros»; el otro, «x más 3». El arquitecto pide ya la valla y el suelo. Tres compañeros escriben el perímetro así: « $x + x + 3 + x + x + 3$ », « $2x + 2(x + 3)$ » y « $4x + 3$ ». ¿Hay alguno que se haya equivocado? ¿Cómo lo comprobamos sin conocer x? Mientras tanto, dos empresas de camisetas anuncian tarifas con precio fijo más precio por unidad. Vais a escribir el manual del álgebra del patio: un recetario para describir, simplificar, comprobar y detectar errores.

“ ¿Cómo podemos transformar una expresión sin cambiar lo que significa? ”

 Vuestro reto

Elaborar un manual de expresiones y polinomios con ejemplos modelizados de perímetros, áreas y costes, comprobando por dos caminos que las expresiones simplificadas son equivalentes y explicando los errores típicos.

 Lo que vais a producir

Manual de expresiones y polinomios para modelizar.

 Hoja de ruta · 7 sesiones

- 1 Escribimos con letras cantidades que todavía no conocemos.
- 2 Descubrimos monomios, grado y términos semejantes.
- 3 Sumamos y restamos polinomios.
- 4 Multiplicamos y usamos la propiedad distributiva con un modelo de área.
- 5 Comprobamos si dos expresiones son equivalentes.
- 6 Montamos el manual con ejemplos modelizados.
- 7 Reto individual: cazar y explicar un error algebraico.

 Al terminar seré capaz de...

- ✓ Interpretar expresiones algebraicas en contexto.
- ✓ Operar con monomios y polinomios sencillos.
- ✓ Reconocer expresiones equivalentes.
- ✓ Usar el álgebra para describir perímetros y costes.

 ¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 5 · Álgebra que simplifica problemas

ALUMNADO

Banco de traducciones, el patio y su modelo de área, la distributiva, monomios y polinomios, tabla de equivalencias por valor numérico, errores típicos, tarifas de camisetas y un glosario. Los datos y las empresas son ficticios, creados para el aula.

F1 Banco de traducciones al lenguaje algebraico

DATOS

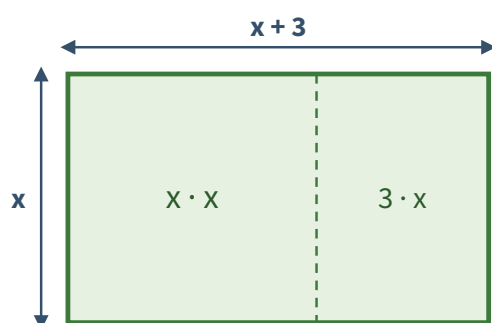
Enunciado	Expresión algebraica
Un número cualquiera	x
El doble de un número	$2x$
Un número aumentado en 5	$x + 5$
La mitad de un número	$\frac{x}{2}$
El cuadrado de un número	x^2
Tres números consecutivos	$x, x + 1, x + 2$
El triple de un número menos 4	$3x - 4$

Fuente: Elaboración propia.

- 🔍 Una letra representa un número que puede cambiar. Cuidado con el orden: «el doble de un número más 5» es $2x + 5$, pero «el doble de (un número más 5)» es $2(x + 5)$.

F2 El patio del instituto: perímetro y área

ESQUEMA



Patio rectangular (medidas en metros)

Perímetro

$$\begin{aligned}
 &x + (x + 3) + x + (x + 3) \\
 &= 2x + 2(x + 3) \\
 &= 4x + 6
 \end{aligned}$$

Área

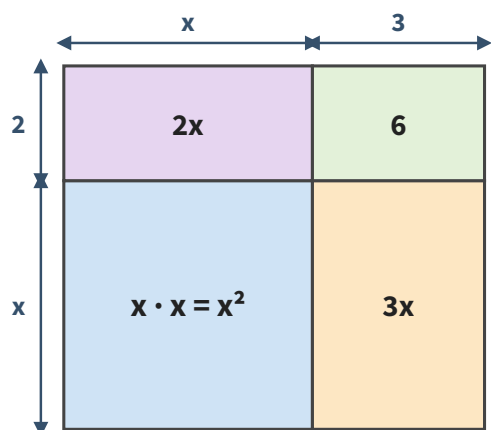
$$\begin{aligned}
 &x \cdot (x + 3) = x \cdot x + 3 \cdot x \\
 &= x^2 + 3x
 \end{aligned}$$

Fuente: Esquema de elaboración propia; medidas en metros.

- 🔍 Si $x = 5$, ¿cuánto miden los lados, el perímetro y el área del patio?

F3 Modelo de área para la propiedad distributiva

ESQUEMA

Largo total: $x + 3$ · Ancho total: $x + 2$

$$(x + 2)(x + 3)$$

$$= x^2 + 3x + 2x + 6$$

$$= x^2 + 5x + 6$$

Cada trozo de área es el producto de un lado de arriba por un lado de la izquierda.

Fuente: Esquema de elaboración propia.

- 🔍 El área total es la suma de las áreas de los cuatro trozos. Comprueba con $x = 4$: $(4 + 2)(4 + 3) = 42$ y $4^2 + 5 \cdot 4 + 6 = 42$.

F4 Monomios: coeficiente, parte literal y grado

DATOS

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
$5x$	5	x	1
$-3x^2$	-3	x^2	2
7	7	(no tiene)	0
$\frac{1}{2}x^3$	$\frac{1}{2}$	x^3	3
$-x$	-1	x	1

Los **términos semejantes** tienen la misma parte literal y se pueden sumar o restar: $4x + 3x = 7x$ (se suman los coeficientes). Los que no son semejantes no se pueden juntar: $4x + 3x^2$ se queda así.

Un **polinomio** es una suma de monomios. Su **grado** es el mayor grado de sus monomios, y su **valor numérico** se obtiene sustituyendo la letra: si $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$, entonces $P(2) = 12 - 10 + 2 = 4$.

Fuente: Elaboración propia.

- 🔍 Código de colores para el aula: un color para los términos en x , otro para los términos en x^2 y otro para los números sueltos.

F5 Operaciones con polinomios: método y ejemplos

TEXTO

Sumar. Se agrupan los términos semejantes: $(3x^2 - 5x + 2) + (x^3 - 4x + 1) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$.

Restar. Restar es sumar el opuesto: el signo menos delante de un paréntesis cambia **todos** los signos de dentro. $(3x^2 - 5x + 2) - (-2x + 7) = 3x^2 - 5x + 2 + 2x - 7 = 3x^2 - 3x - 5$.

Multiplicar monomios. Se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes: $(3x)(2x^2) = 6x^3$ y $(-4x)(5x) = -20x^2$. Para dividir, se dividen coeficientes y se restan exponentes: $6x^3 : 2x = 3x^2$.

Propiedad distributiva. $a(b + c) = ab + ac$. Con modelo de área: $x(x + 3) = x^2 + 3x$. Con dos paréntesis, cada término del primero multiplica a cada término del segundo: $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$.

Comprobación. Sustituye un valor y comprueba que antes y después da lo mismo. Con $x = 1$: $(3x^2 - 5x + 2) + (x^3 - 4x + 1)$ vale $0 + (-2) = -2$ y el resultado $1 + 3 - 9 + 3$ vale -2 ✓.

Fuente: Elaboración propia.

🔍 Una buena comprobación usa un valor que no sea 0 ni 1 siempre, para evitar coincidencias casuales.

F6 ¿Son equivalentes? La prueba de los valores

DATOS

x	$(x + 2)^2$	$x^2 + 4$	$x^2 + 4x + 4$
0	4	4	4
1	9	5	9
2	16	8	16
3	25	13	25
-1	1	5	1

Dos expresiones son **equivalentes** si dan el mismo valor para **todos** los valores de la letra. Aquí $(x + 2)^2$ y $x^2 + 4x + 4$ coinciden siempre; en cambio, $(x + 2)^2$ y $x^2 + 4$ solo coinciden con $x = 0$: no son equivalentes. Un **contraejemplo** (por ejemplo, $x = 1$) basta para demostrar que no lo son; coincidir en varios valores no demuestra que sean equivalentes.

Fuente: Elaboración propia.

🔍 Para demostrar que dos expresiones son equivalentes, además de los valores, hay que transformar una en la otra con las propiedades.

F7 Errores típicos en álgebra

DATOS

Afirmación incorrecta	Por qué es incorrecta	Forma correcta
$2x + 3x = 5x^2$	Al sumar términos semejantes, la parte literal no cambia.	$2x + 3x = 5x$
$x + x = x^2$	$x + x$ es sumar; $x \cdot x$ es multiplicar.	$x + x = 2x$
$3(x + 2) = 3x + 2$	El 3 multiplica a todos los términos.	$3x + 6$
$-(x - 3) = -x - 3$	El signo menos cambia todos los signos del paréntesis.	$-x + 3$
$4x + 3x^2 = 7x^3$	No son semejantes: no se pueden juntar.	$4x + 3x^2$ ya está simplificado
$(x + 2)^2 = x^2 + 4$	Es $(x + 2)(x + 2)$; faltan términos al multiplicar.	$x^2 + 4x + 4$

Fuente: Elaboración propia a partir de errores habituales en el aula.

🔍 Casi todos estos errores se detectan sustituyendo un valor: por ejemplo, con $x = 1$, $3(x + 2) = 9$ pero $3x + 2 = 5$.

F8 Dos tarifas de camisetas

DATOS

Número de camisetas n	Empresa A: 20 € de diseño + 6 € por camiseta	Empresa B: 30 € de diseño + 5 € por camiseta
5	50 €	55 €
10	80 €	80 €
20	140 €	130 €
30	200 €	180 €

Las dos tarifas se expresan con polinomios en n : **Empresa A:** $6n + 20$. **Empresa B:** $5n + 30$.

Fuente: Tarifas de empresas ficticias creadas para el aula.

🔍 ¿Para qué número de camisetas cuestan lo mismo? ¿Cuál es más barata después?

F9 Vocabulario esencial

Expresión algebraica	Combinación de números, letras y operaciones, como $2x + 3$.
Valor numérico	Resultado de sustituir la letra por un número.
Monomio	Producto de un número (coeficiente) por una letra elevada a un exponente: $-3x^2$.
Términos semejantes	Monomios con la misma parte literal; solo ellos se pueden sumar o restar.
Polinomio y grado	Suma de monomios; su grado es el mayor exponente de la letra.
Propiedad distributiva	$a(b + c) = ab + ac$.
Expresiones equivalentes	Expresiones que dan el mismo valor para todos los valores de la letra.
Contraejemplo	Un valor para el que dos expresiones dan resultados distintos.

Fuente: Elaboración propia.

ANEXO
3

Fichas de actividades del alumnado

SdA 5 · Álgebra que simplifica problemas

ALUMNADO

FICHA 1

Expresiones para cantidades variables

Sesión 1

Nombre:

Curso/grupo:

Fecha:

Usa el banco de F1, el patio de F2 y las tarifas de F8.

1 Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.

El doble de un número, más 3, se escribe...

- ☐ $2x + 3$
- ☐ $2(x + 3)$
- ☐ $x^2 + 3$

Si $x = 4$, ¿cuánto vale $3x - 2$?

- ☐ 10
- ☐ 14
- ☐ 2

El perímetro de un cuadrado de lado a es...

- ☐ $4a$
- ☐ a^2
- ☐ $2a$

2 Escribe cada enunciado como expresión algebraica.

Enunciado	Expresión
El doble de un número más 5	
La mitad de un número más 7	
El cuadrado de un número aumentado en 1	
Un número y su doble, sumados	
Suma de tres números consecutivos (el menor es x)	

3 El patio de F2 mide x y $x + 3$ metros. Escribe el perímetro y el área. Calcula sus valores para $x = 5$.

4 Con F8, escribe el coste de n camisetas en cada empresa y calcula el de 15 camisetas. ¿Qué empresa conviene?

FICHA 2

Monomios y términos semejantes

Sesión 2

Usa F4 y el código de colores: un color para cada parte literal.

1 Completa la tabla de monomios.

Monomio	Coefficiente	Parte literal	Grado
$7x^2$			
$-4x$			
9			
$\frac{3}{5}x^3$			
$-x$			

2 Agrupa los términos semejantes de esta lista: $3x, -2x^2, 5x, x^2, 7, -x, 4x^2$.

Con parte literal x	Con parte literal x^2	Números sueltos

3 Reduce.

Expresión	Resultado
$4x + 7x$	
$9x^2 - 5x^2$	
$8x - x + 2x$	
$-3x - 4x$	
$5x + 2 + 3x - 7$	
$x^2 + 3x + 2x^2 - x$	

4 Verdadero o falso. Corrige las falsas.

	V	F
$2x + 3x = 5x^2$	☐	☐
$x + x = 2x$	☐	☐
$4x^2 + 3x = 7x^3$	☐	☐
$-x$ tiene coeficiente -1	☐	☐
El grado de $5x^3$ es 3	☐	☐
$3x$ y $3x^2$ son términos semejantes	☐	☐

Usa F5. Agrupa los términos semejantes y cuidado con los signos al restar.

- 1 Completa la tabla. Los polinomios son $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$, $Q(x) = x^3 - 4x + 1$ y $R(x) = -2x + 7$.

Polinomio	Grado	Coeficiente de mayor grado	Valor para $x = 2$
$P(x)$			
$Q(x)$			
$R(x)$			

- 2 Opera y comprueba con $x = 1$ (calcula el valor de cada polinomio y compara).

Operación	Pasos	Resultado	Comprobación con $x = 1$
$P + Q$			
$P - R$			
$(x^2 + 4x) + (2x^2 - x + 5)$			
$(2x^2 - 3x + 1) - (x^2 - 3x - 4)$			

- 3 Con F8, escribe como polinomio la diferencia de coste entre la empresa B y la A: $(5n + 30) - (6n + 20)$. ¿Para qué valores de n es negativa y qué significa?

- 4 Un compañero resuelve $(x^2 + 3x) - (x^2 - 2x) = 3x - 2x = x$. Encuentra el error y corrígelo.

Usa F3 y F5. Multiplicar es repartir: cada término de un factor multiplica a cada término del otro.

1 Multiplica o divide los monomios.

Operación	Resultado
$(3x)(2x^2)$	
$(-4x)(5x)$	
$x \cdot x \cdot x$	
$6x^3 : 2x$	
$(2x)^2$	

2 Aplica la propiedad distributiva.

Producto	Desarrollo	Resultado
$3(x + 4)$		
$-2(x - 5)$		
$x(x + 3)$		
$4x(2x - 1)$		

3 Dibuja el modelo de área de $(x + 1)(x + 4)$ y calcula el producto. Comprueba con $x = 3$.

- 4 El patio de F2 se amplía 2 m en un lado y 2 m en el otro: ahora mide $x + 2$ y $x + 5$. Escribe su área, calcula cuántos metros cuadrados más tiene que antes y comprueba con $x = 4$.

FICHA 5 ¿Son equivalentes?

Sesión 5

Usa F6. Los valores pueden refutar una equivalencia, pero para demostrarla hay que transformarla con propiedades.

- 1 Completa la tabla de valores de F6 con $x = 0, 1, 2, -1$. ¿Qué pares son equivalentes?

x	$(x + 2)^2$	$x^2 + 4$	$x^2 + 4x + 4$
0			
1			
2			
-1			

- 2 Decide si cada pareja es equivalente. Si no lo es, da un contraejemplo.

Pareja	Valor con $x = 1$	Valor con $x = 3$	¿Equivalentes? Contraejemplo
$2(x + 3)$ y $2x + 6$			
$x + x$ y x^2			
$3x - x$ y $2x$			
$(x + 1)^2$ y $x^2 + 1$			

- 3 Tres compañeros escriben el perímetro del patio (lados x y $x + 3$) de seis formas. Evalúalas con $x = 2$ y $x = 5$ y señala cuáles son equivalentes: A: $x + (x + 3) + x + (x + 3)$ · B: $2x + 2(x + 3)$ · C: $4x + 6$ · D: $4(x + 3) - 6$ · E: $4x + 3$ · F: $2(2x + 3)$.

Expresión	$x = 2$	$x = 5$	¿Equivale a $4x + 6$?
A			
B			
C			
D			
E			
F			

- 4 $x + x$ y x^2 valen lo mismo para $x = 2$. ¿Quiere eso decir que son equivalentes? Explica qué se necesita para demostrar una equivalencia y qué basta para refutarla.

FICHA 6 El manual de expresiones

Sesión 6

Trabaja en equipo con roles: redactor, calculista, comprobador y portavoz. Cada apartado del manual lleva un ejemplo con datos propios.

- 1 Planifica los apartados del manual con un ejemplo propio de cada uno.

Apartado del manual	Ejemplo propio (con datos)	Resolución paso a paso	Comprobación
1. Traducir a álgebra			
2. Monomios y semejantes			
3. Sumar y restar polinomios			
4. Distributiva y equivalencia			

- 2 Modelización.** Un huerto rectangular mide $2x$ de largo y $x + 4$ de ancho (metros). Escribe y simplifica su perímetro y su área, y calcula ambos con $x = 3$.

- 3 Costes.** Una camiseta cuesta 6 € y una gorra 4 €. Se encargan c camisetas y g gorras, y después se añaden 3 camisetas y 2 gorras más. Escribe el coste total como $6(c + 3) + 4(g + 2)$, simplifícalo y comprueba con $c = 10$, $g = 5$.

- 4 Revisión cruzada: otro equipo comprueba vuestro manual.**

- ☐ Cada ejemplo tiene su comprobación con un valor numérico
- ☐ No hay errores de signo al restar polinomios
- ☐ Los términos semejantes están bien agrupados
- ☐ La distributiva multiplica todos los términos
- ☐ Se explica por qué las expresiones son equivalentes

FICHA 7**Reto individual: cazar el error**

Sesión 7

Resuelve sin ayuda del equipo. Escribe los pasos y comprueba con valores.

- 1 Cada resolución tiene un error. Localízalo, explícalo y corrige.**

Resolución con error	Dónde está el error	Resolución correcta
a) $4x + 3x^2 = 7x^3$		
b) $-(2x - 5) = -2x - 5$		
c) $(x + 4)(x - 1) = x^2 - 4$		

- 2 Una piscina rectangular mide $3x$ de largo y $x + 2$ de ancho (metros). Escribe su perímetro y su área simplificados y calcula ambos para $x = 5$.

- 3 Demuestra de dos maneras (con valores y con propiedades) que $3(x + 2) - x$ y $2x + 6$ son equivalentes.

- 4 Una compañera afirma que $(x + 3)^2 = x^2 + 9$. Refútalo con un contraejemplo y obtén el resultado correcto.

ANEXO
4

Plantilla del producto final

SdA 5 · Álgebra que simplifica problemas

ALUMNADO

Nombre:

Curso/grupo:

Fecha:

Manual de expresiones y polinomios para modelizar. Cada apartado lleva un ejemplo con datos, su resolución y su comprobación.

Título del manual y equipo
Nombre del manual, integrantes y roles.

1. Traducir y valor numérico
Enunciado → expresión → valor.

2. Monomios y términos semejantes
Coficiente, parte literal, grado y reducción.

3. Sumar y restar polinomios
Ejemplo con comprobación por valor numérico.

4. Distributiva y modelo de área
Dibujo del modelo de área y desarrollo.



Ejemplo modelizado: perímetro y área
Una figura con expresiones simplificadas.



Ejemplo modelizado: costes
Dos tarifas y su diferencia.

Errores típicos y su corrección
Tres errores, por qué lo son y cómo se corrigen.

¿Cómo sabemos que dos expresiones son equivalentes?
Valores, contraejemplos y propiedades.

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 5 · Álgebra que simplifica problemas

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Antes de entregar **Manual de expresiones y polinomios para modelizar**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- ☐ Cada enunciado o situación está traducido a una expresión algebraica correcta.
- ☐ Los términos semejantes están bien agrupados y los coeficientes, bien calculados.
- ☐ Al restar polinomios se han cambiado todos los signos del segundo.
- ☐ La propiedad distributiva multiplica todos los términos y se apoya en un modelo de área.
- ☐ Cada simplificación está comprobada con al menos un valor numérico.
- ☐ Se explica por qué dos expresiones son equivalentes (propiedades) y no solo que dan lo mismo en un caso.
- ☐ El manual incluye un ejemplo de perímetro o área y uno de coste, bien modelizados.
- ☐ Se recogen al menos tres errores típicos con su explicación y su corrección.
- ☐ El lenguaje algebraico (signos, paréntesis, exponentes) es correcto.

Calidad y rigor

- ☐ He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- ☐ He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- ☐ He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- ☐ He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- ☐ He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

Rúbrica imprimible

SdA 5 · Álgebra que simplifica problemas

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Rúbrica para valorar **Manual de expresiones y polinomios para modelizar**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

Autoevaluación y coevaluación

SdA 5 · Álgebra que simplifica problemas

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé simplificar expresiones agrupando términos semejantes y usando la propiedad distributiva.	☐	☐	☐	☐
Compruebo si dos expresiones son equivalentes con valores y con propiedades, y detecto errores.	☐	☐	☐	☐
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	☐	☐	☐	☐
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	☐	☐	☐	☐
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	☐	☐	☐	☐
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	☐	☐	☐	☐

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo**Equipo evaluado:** _____**Fortaleza 1**

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

Material de apoyo y refuerzo

SdA 5 · Álgebra que simplifica problemas

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Código de colores para términos semejantes y operaciones de una sola etapa.

⊗ **Ejemplo modelado con colores:** $4x + 3 + 2x - 1$

Azul (términos en x): $4x$ y $2x \rightarrow 4x + 2x = 6x$.

Naranja (números sueltos): 3 y $-1 \rightarrow 3 - 1 = 2$.

Resultado: $6x + 2$. **Comprobación** con $x = 1$: antes $4 + 3 + 2 - 1 = 8$; después $6 + 2 = 8$ ✓.

⊗ **Símbolos esenciales**

x : la letra (un número que puede cambiar).

Coeficiente: el número que multiplica a la letra ($-3x$ tiene coeficiente -3). Solo se suman términos con la **misma parte literal**. $3(x + 2) = 3x + 6$: el 3 multiplica a **cada** término. Si $x = 2$, entonces $5x = 5 \cdot 2 = 10$.

1 Pinta con el mismo color los términos semejantes y reduce: $5x + 2 + 3x - 1$.

2 Reduce cada expresión (una sola operación).

Expresión	Resultado
$2x + 5x$	
$9x - 4x$	
$x^2 + 3x^2$	
$3(x + 4)$	

3 Relaciona cada expresión con su forma simplificada.

1 $x + x$ ● a x^2 2 $3x - 2x$ ● b x 3 $2(x + 1)$ ● c $2x + 2$ 4 $x \cdot x$ ● d $2x$

4 Calcula el valor numérico con $x = 3$: $2x + 1$ y $x^2 - 4$.

Actividad de ampliación

SdA 5 · Álgebra que simplifica problemas

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

 Dos expresiones complejas, dos pruebas

A veces dos expresiones muy distintas a la vista son equivalentes, y otras parecen iguales y no lo son. Una prueba solo con valores puede engañar: hay que combinarla con una demostración con propiedades. Por ejemplo, $3(x + 2) - 2(x - 1)$ y $x + 8$ parecen no tener nada que ver.

 Pasos

- 1 Para cada pareja de la tabla, calcula los valores de ambas expresiones para tres valores de x (elige uno que sea 0, otro positivo y otro negativo).
- 2 Después, simplifica la expresión más complicada con las propiedades y compara.
- 3 Decide si la pareja es equivalente. Si no, explica con un contraejemplo.
- 4 Inventa una pareja de expresiones que coincida en un valor de x y no sea equivalente.

1 Completa la tabla.

Pareja	Prueba con tres valores	Demostración con propiedades	¿Equivalentes?
$3(x + 2) - 2(x - 1)$ y $x + 8$			
$(x + 1)(x + 4)$ y $x^2 + 5x + 4$			
$(x + 3)^2$ y $x^2 + 9$			
$2(x^2 + 3x) - x(x + 6)$ y x^2			

 Entrega

La tabla completa, la pareja inventada que coincide en un valor y no es equivalente, y una explicación con tus palabras de por qué basta un contraejemplo para refutar una equivalencia pero no bastan unos valores para demostrarla.

Ficha 1

1. Diagnóstico: $2x + 3$; 10; $4a$.
2. $2x + 5$; $\frac{x}{2} + 7$; $x^2 + 1$; $x + 2x$ (que es $3x$); $x + (x + 1) + (x + 2)$ (que es $3x + 3$).
3. Perímetro: $x + (x + 3) + x + (x + 3) = 4x + 6$. Área: $x(x + 3) = x^2 + 3x$. Con $x = 5$: lados 5 m y 8 m; perímetro $4 \cdot 5 + 6 = 26$ m (comprobación: $5 + 8 + 5 + 8 = 26$); área $25 + 15 = 40$ m² (comprobación: $5 \cdot 8 = 40$).
4. Empresa A: $6n + 20$; con $n = 15$: $6 \cdot 15 + 20 = 110$ €. Empresa B: $5n + 30$; con $n = 15$: $5 \cdot 15 + 30 = 105$ €. Conviene la B (5 € menos).

Ficha 2

1. $7x^2$: coeficiente 7, parte literal x^2 , grado 2. $-4x$: -4 , x , 1. 9: 9, sin parte literal, grado 0. $\frac{3}{5}x^3$: $\frac{3}{5}$, x^3 , grado 3. $-x$: -1 , x , 1.
2. Con x : $3x$, $5x$, $-x$. Con x^2 : $-2x^2$, x^2 , $4x^2$. Números sueltos: 7.
3. $4x + 7x = 11x$; $9x^2 - 5x^2 = 4x^2$; $8x - x + 2x = 9x$; $-3x - 4x = -7x$; $5x + 2 + 3x - 7 = 8x - 5$; $x^2 + 3x + 2x^2 - x = 3x^2 + 2x$.
4. F ($2x + 3x = 5x$); V; F ($4x^2$ y $3x$ no son semejantes: no se pueden sumar); V; V; F (tienen distinta parte literal).

Ficha 3

1. P : grado 2, coeficiente 3, $P(2) = 12 - 10 + 2 = 4$. Q : grado 3, coeficiente 1, $Q(2) = 8 - 8 + 1 = 1$. R : grado 1, coeficiente -2 , $R(2) = -4 + 7 = 3$.
2. $P + Q = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$; con $x = 1$: $P(1) = 0$, $Q(1) = -2$, suma -2 ; resultado $1 + 3 - 9 + 3 = -2$ ✓. $P - R = 3x^2 - 5x + 2 + 2x - 7 = 3x^2 - 3x - 5$; $P(1) - R(1) = 0 - 5 = -5$; resultado $3 - 3 - 5 = -5$ ✓. $(x^2 + 4x) + (2x^2 - x + 5) = 3x^2 + 3x + 5$; con $x = 1$: $5 + 6 = 11$ y $3 + 3 + 5 = 11$ ✓. $(2x^2 - 3x + 1) - (x^2 - 3x - 4) = 2x^2 - 3x + 1 - x^2 + 3x + 4 = x^2 + 5$; con $x = 1$: $0 - (-6) = 6$ y $1 + 5 = 6$ ✓.
3. $(5n + 30) - (6n + 20) = 5n + 30 - 6n - 20 = -n + 10$. Es negativa cuando $n > 10$: la empresa B es más barata para más de 10 camisetas; con $n = 10$ cuestan lo mismo (diferencia 0).
4. Error: al restar, el signo menos cambia todos los signos del paréntesis: $-(x^2 - 2x) = -x^2 + 2x$. Correcto: $x^2 + 3x - x^2 + 2x = 5x$.

Ficha 4

1. $(3x)(2x^2) = 6x^3$; $(-4x)(5x) = -20x^2$; $x \cdot x \cdot x = x^3$; $6x^3 : 2x = 3x^2$; $(2x)^2 = 2x \cdot 2x = 4x^2$.
2. $3(x + 4) = 3x + 12$; $-2(x - 5) = -2x + 10$; $x(x + 3) = x^2 + 3x$; $4x(2x - 1) = 8x^2 - 4x$.
3. $(x + 1)(x + 4) = x^2 + 4x + x + 4 = x^2 + 5x + 4$. Modelo: un cuadrado $x \cdot x$, un rectángulo $x \cdot 4$, otro $1 \cdot x$ y un cuadradito de $1 \cdot 4$. Con $x = 3$: $(4)(7) = 28$ y $9 + 15 + 4 = 28$ ✓.
4. Área nueva: $(x + 2)(x + 5) = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$. Diferencia: $(x^2 + 7x + 10) - (x^2 + 3x) = 4x + 10$ m² más. Con $x = 4$: área antes $4 \cdot 7 = 28$; ahora $6 \cdot 9 = 54$; diferencia $26 = 4 \cdot 4 + 10$ ✓.

Ficha 5

1. $x = 0$: 4, 4, 4. $x = 1$: 9, 5, 9. $x = 2$: 16, 8, 16. $x = -1$: 1, 5, 1. $(x + 2)^2 y x^2 + 4x + 4$ coinciden siempre (son equivalentes); $x^2 + 4$ solo coincide con las otras en $x = 0$.
2. $2(x + 3)$ y $2x + 6$: $x = 1$: 8 y 8; $x = 3$: 12 y 12 → equivalentes (por distributiva). $x + x y x^2$: $x = 1$: 2 y 1 → contraejemplo $x = 1$ (con $x = 3$: 6 y 9) → no equivalentes. $3x - x y 2x$: $x = 1$: 2 y 2; $x = 3$: 6 y 6 → equivalentes. $(x + 1)^2 y x^2 + 1$: $x = 1$: 4 y 2 → contraejemplo → no equivalentes (el primero es $x^2 + 2x + 1$).
3. Con $x = 2$ y $x = 5$: A: 14 y 26; B: 14 y 26; C: 14 y 26; D: $4 \cdot 5 - 6 = 14$ y $4 \cdot 8 - 6 = 26$; E: 11 y 23; F: 14 y 26. Equivalentes a $4x + 6$: A, B, C, D y F. E no lo es ($4x + 3$). Demostración: $4(x + 3) - 6 = 4x + 12 - 6 = 4x + 6$ y $2(2x + 3) = 4x + 6$.
4. No: coinciden en $x = 2$ ($2 + 2 = 4 = 2^2$) y también en $x = 0$, pero no en $x = 1$ ni en $x = 3$. Para demostrar una equivalencia hay que transformar una expresión en la otra con propiedades (o probar para todos los valores); para refutarla basta un contraejemplo.

Ficha 6

1. Respuesta abierta. Cada ejemplo debe tener datos, resolución y comprobación con un valor. Ejemplo: 3. $(2x^2 + x) - (x^2 - 3x) = 2x^2 + x - x^2 + 3x = x^2 + 4x$; con $x = 2$: $10 - (-2) = 12$ y $4 + 8 = 12$ ✓.
2. Perímetro: $2 \cdot 2x + 2(x + 4) = 4x + 2x + 8 = 6x + 8$; con $x = 3$: 26 m. Área: $2x(x + 4) = 2x^2 + 8x$; con $x = 3$: $18 + 24 = 42$ m². Comprobación con las medidas: lados 6 m y 7 m, perímetro $2(6 + 7) = 26$ m y área $6 \cdot 7 = 42$ m² ✓.
3. $6(c + 3) + 4(g + 2) = 6c + 18 + 4g + 8 = 6c + 4g + 26$. Con $c = 10$, $g = 5$: $6 \cdot 13 + 4 \cdot 7 = 78 + 28 = 106$ € y $60 + 20 + 26 = 106$ € ✓.
4. Revisión cruzada: respuesta abierta; se valora que citen comprobaciones concretas.

Ficha 7

1. a) $4x$ y $3x^2$ no son semejantes y no se pueden juntar: $4x + 3x^2$ ya está simplificado. b) El signo menos cambia todos los signos: $-(2x - 5) = -2x + 5$. c) Faltan términos: $(x + 4)(x - 1) = x^2 - x + 4x - 4 = x^2 + 3x - 4$.
2. Perímetro: $2 \cdot 3x + 2(x + 2) = 6x + 2x + 4 = 8x + 4$; con $x = 5$: 44 m. Área: $3x(x + 2) = 3x^2 + 6x$; con $x = 5$: $75 + 30 = 105$ m². Comprobación con las medidas: 15 m y 7 m, perímetro $2(15 + 7) = 44$ m y área $15 \cdot 7 = 105$ m² ✓.
3. Con valores: $x = 1$: $3 \cdot 3 - 1 = 8$ y $2 + 6 = 8$; $x = 4$: $3 \cdot 6 - 4 = 14$ y $8 + 6 = 14$. Con propiedades: $3(x + 2) - x = 3x + 6 - x = 2x + 6$ ✓.
4. Contraejemplo: $x = 1$: $(1 + 3)^2 = 16$ y $1^2 + 9 = 10$. Correcto: $(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$.

Refuerzo

1. $5x + 3x = 8x$ y $2 - 1 = 1$: resultado $8x + 1$.
2. $2x + 5x = 7x$; $9x - 4x = 5x$; $x^2 + 3x^2 = 4x^2$; $3(x + 4) = 3x + 12$.
3. $x + x = 2x$; $3x - 2x = x$; $2(x + 1) = 2x + 2$; $x \cdot x = x^2$.
4. Con $x = 3$: $2 \cdot 3 + 1 = 7$; $3^2 - 4 = 5$.

Ampliación

- $3(x + 2) - 2(x - 1) = 3x + 6 - 2x + 2 = x + 8$: equivalentes. Valores: $x = 0$: 8 y 8; $x = 1$: 9 y 9; $x = -1$: 7 y 7.
- $(x + 1)(x + 4) = x^2 + 4x + x + 4 = x^2 + 5x + 4$: equivalentes. Valores: $x = 0$: 4 y 4; $x = 1$: 10 y 10; $x = -1$: 0 y 0.
- $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$, no es $x^2 + 9$: no equivalentes. Coinciden en $x = 0$ (9 y 9) pero no en $x = 1$ (16 y 10): contraejemplo.
- $2(x^2 + 3x) - x(x + 6) = 2x^2 + 6x - x^2 - 6x = x^2$: equivalentes. Valores: $x = 0$: 0 y 0; $x = 1$: $8 - 7 = 1$ y 1; $x = -1$: $2(-2) - (-1)(5) = -4 + 5 = 1$ y 1.
- Pareja inventada: respuesta abierta. Ejemplo: $x + x$ y x^2 coinciden en $x = 0$ y en $x = 2$ y no son equivalentes. Basta un contraejemplo para refutar; coincidir en varios valores no demuestra la equivalencia.

Errores frecuentes

- Sumar términos no semejantes ($4x + 3x^2 = 7x^3$) o sumar también la parte literal ($2x + 3x = 5x^2$).
- Confundir $x + x$ con $x \cdot x$ (suma y producto).
- Olvidar multiplicar todos los términos de un paréntesis: $3(x + 2) = 3x + 2$.
- Al restar un polinomio, no cambiar todos los signos del paréntesis.
- Desarrollar $(x + 2)^2$ como $x^2 + 4$ en lugar de multiplicar $(x + 2)(x + 2)$.
- Dar por demostrada una equivalencia porque coinciden en uno o dos valores.

Criterios para valorar respuestas abiertas

- Las expresiones equivalentes a la esperada (por ejemplo, $2(2x + 3)$ en lugar de $4x + 6$) son válidas si se justifican.
- En el manual se valora que cada ejemplo tenga comprobación con un valor numérico y que las explicaciones usen lenguaje algebraico correcto.
- En las explicaciones de errores se pide que digan por qué es un error (con un contraejemplo o con una propiedad), no solo la corrección.
- La calculadora puede usarse para el valor numérico, pero las simplificaciones deben aparecer escritas paso a paso.

06

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Encontrar lo desconocido



PREGUNTA GUÍA

¿Qué significa realmente “resolver” una ecuación?CURSO
2.º ESOSESIONES
7 sesiones · 2.º trimestreSENTIDOS PRIORITARIOS
D · Sentido algebraicoCOMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE2, CE4, CE8PRODUCTO FINAL
Expediente de ecuaciones
resueltas y verificadasCRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 1.2, 2.1, 4.2, 8.1

Contexto, reto y sentido

Un detective no se queda con la primera respuesta: comprueba, contrasta y archiva. Con las ecuaciones pasa igual. Resolver una ecuación no consiste en «mover cosas de un lado a otro»: consiste en conservar una igualdad mientras se descubre qué número la hace cierta. Y un caso solo se cierra cuando la solución se ha verificado y se ha traducido a una respuesta con sentido.

En esta situación vais a abrir una oficina de verificación de ecuaciones. Partiréis de la balanza en equilibrio, aprenderéis qué operaciones conservan la igualdad, resolveréis ecuaciones con paréntesis y con la incógnita en los dos miembros, plantearéis problemas de edades, longitudes y precios ficticios y, sobre todo, depuraréis soluciones erróneas de otros. El producto final es un expediente donde cada caso tiene planteamiento, solución y comprobación.

Reto

Elaborar un expediente de al menos tres casos (una ecuación con balanza, una con paréntesis y un problema de enunciado) en el que cada caso muestre planteamiento, resolución paso a paso, comprobación por sustitución y respuesta contextual, e incluir un detector de errores con una solución ajena corregida.

Producto final

Expediente de ecuaciones resueltas y verificadas.



Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

CE1

Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.

CE2

Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.

CE4

Utilizar el pensamiento computacional: descomponer, reconocer patrones, generalizar y crear algoritmos.

CE8

Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- 1.1** Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.
- 1.2** Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.
- 2.1** Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.
- 4.2** Modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz interpretando y modificando algoritmos.
- 8.1** Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, oralmente y por escrito, al explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.

Saberes básicos prioritarios

D

Sentido algebraico

- Igualdad como equivalencia: la balanza en equilibrio y las operaciones que la conservan (sumar, restar, multiplicar o dividir por un mismo número no nulo en los dos miembros).
- Ecuaciones de primer grado con una incógnita: miembros, términos, solución y ecuaciones equivalentes.
- Resolución de ecuaciones del tipo $ax + b = c$, $ax + b = cx + d$ y con paréntesis sencillos, con comprobación por sustitución.
- Modelización de enunciados (edades, longitudes, precios) mediante ecuaciones y distinción entre la solución de la ecuación y la respuesta al problema.

F

Sentido socioafectivo

- Valoración de la comprobación y del análisis del error como parte del trabajo matemático.
- Trabajo cooperativo con roles y revisión cruzada de las producciones.



Objetivos didácticos

- ✓ Plantear ecuaciones a partir de enunciados.
- ✓ Resolver ecuaciones de primer grado con operaciones equivalentes.
- ✓ Comprobar soluciones sustituyendo.
- ✓ Distinguir solución algebraica y respuesta contextual.

Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.

Secuencia de sesiones y actividades

- ① Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Balanza e igualdad

 **Evidencia:** Ficha 1: tres balanzas traducidas a ecuaciones, verdadero o falso sobre la igualdad y comprobación de soluciones propuestas.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Operaciones equivalentes en ambos miembros

 **Evidencia:** Ficha 2: $3x - 5 = 10$ con la cadena de operaciones inversas, cinco ecuaciones comprobadas y ecuaciones equivalentes.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Ecuaciones con paréntesis sencillos

 **Evidencia:** Ficha 3: propiedad distributiva, ecuación con paréntesis completada paso a paso y cinco ecuaciones con la incógnita en los dos miembros.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

De enunciado a ecuación

 **Evidencia:** Ficha 4: cinco enunciados emparejados con su ecuación, cuatro planteamientos sin resolver y un acertijo numérico.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Problemas de edades, longitudes y precios ficticios

 **Evidencia:** Ficha 5: tres problemas (edades, longitud y precios) con planteamiento, resolución, comprobación y respuesta, y un problema inventado.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Expediente: planteamiento-solución-comprobación

 **Evidencia:** Ficha 6: tres casos del expediente, un caso cuya solución no tiene sentido en el contexto y revisión cruzada.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Evidencia individual y análisis de error

 **Evidencia:** Ficha 7: reto individual con un problema de precios, una ecuación con paréntesis, tres resoluciones ajenas por depurar y una solución negativa por interpretar.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 7



Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

 Recursos

Balanza manipulativa/dibujada

tarjetas

calculadora solo para comprobar

 Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo Anexo 8

Ecuaciones $x+a=b$ y $ax=b$ con tabla de pasos.

Ampliación Anexo 9

Crear una ecuación con solución predeterminada y otra equivalente más compleja.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1 Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2 Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3 Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Identificación en cada problema de la incógnita, los datos y la pregunta, y elección de una letra bien definida.	Fichas 4 y 5 / lista de cotejo
1.2	Elección y aplicación de estrategias de resolución: balanza, operaciones inversas, tanteo guiado, propiedad distributiva y agrupación de términos.	Fichas 2, 3 y 5 / escala de valoración
2.1	Comprobación por sustitución de cada solución en la ecuación original y análisis de si la solución responde al problema.	Fichas 1, 6 y 7 / rúbrica
4.2	Traducción de un enunciado a una ecuación y modificación del procedimiento (corregir una resolución errónea, transformar una ecuación en otra equivalente).	Fichas 4, 6 y 7 y Anexo 9 / rúbrica
8.1	Explicación escrita de cada paso, de cada error detectado y de la respuesta final con unidades.	Expediente (Anexo 4) y Ficha 7 / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Expediente, ecuaciones comprobadas y problema individual.

+ Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

🔗 Variantes de aplicación

↗ Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

↖ Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 6 · Encontrar lo desconocido

ALUMNADO

En una balanza de platillos hay a la izquierda dos bolsas opacas iguales y tres cubos de 1 g; a la derecha, otra bolsa igual y siete cubos. La balanza está exactamente en equilibrio. Sin abrir ninguna bolsa, ¿podéis decir cuánto pesa una? Un compañero asegura: «Quito una bolsa de cada lado y tres cubos de cada lado, y ya lo sé». Otro dice: «Eso es hacer trampa». ¿Quién tiene razón? Vais a abrir una oficina de verificación: cada ecuación es un caso y solo se cierra cuando está planteada, resuelta y comprobada. El resultado será un expediente de casos resueltos y verificados.

“ ¿Qué significa realmente “resolver” una ecuación? ”

🎯 Vuestro reto

Elaborar un expediente de al menos tres casos (una ecuación con balanza, una con paréntesis y un problema de enunciado) en el que cada caso muestre planteamiento, resolución paso a paso, comprobación por sustitución y respuesta contextual, e incluir un detector de errores con una solución ajena corregida.

📦 Lo que vais a producir

Expediente de ecuaciones resueltas y verificadas.

🗺 Hoja de ruta · 7 sesiones

- 1 Leemos la balanza como una igualdad y probamos si un número es solución.
- 2 Descubrimos qué operaciones mantienen el equilibrio y resolvemos paso a paso.
- 3 Resolvemos ecuaciones con paréntesis y con letras en los dos lados.
- 4 Traducimos enunciados a ecuaciones sin resolver todavía.
- 5 Resolvemos problemas de edades, longitudes y precios y respondemos con sentido.
- 6 Montamos el expediente: planteamiento, solución y comprobación.
- 7 Reto individual: resolver y depurar errores ajenos.

📋 Al terminar seré capaz de...

- ✓ Plantear ecuaciones a partir de enunciados.
- ✓ Resolver ecuaciones de primer grado con operaciones equivalentes.
- ✓ Comprobar soluciones sustituyendo.
- ✓ Distinguir solución algebraica y respuesta contextual.

📋 ¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

ANEXO
2

Dossier de fuentes y materiales base

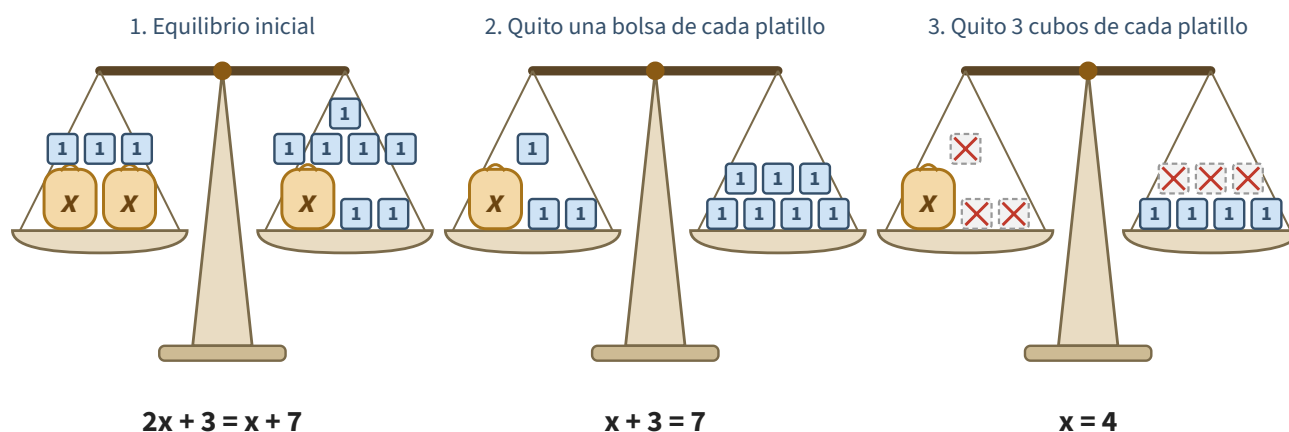
SdA 6 · Encontrar lo desconocido

ALUMNADO

Modelo de balanza, cadena de operaciones inversas, tres ecuaciones resueltas paso a paso, traducción de enunciados, banco de problemas, soluciones erróneas para depurar, protocolo del expediente y glosario. Todos los datos y precios son ficticios, creados para el aula.

F1 La balanza: resolver sin abrir las bolsas

ESQUEMA



Fuente: Esquema de elaboración propia. Cada bolsa contiene el mismo número desconocido de cubos; cada cubo vale 1. Los cubos con una cruz son los que se retiran.

- Q Los dos platillos pesan lo mismo al empezar. Si quito lo mismo de los dos lados, siguen pesando lo mismo. Comprueba la solución: con $x = 4$, $2 \cdot 4 + 3 = 11$ y $4 + 7 = 11$.

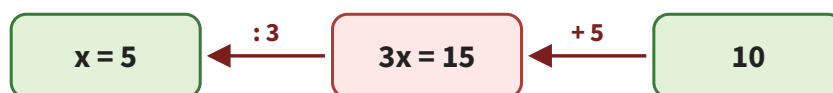
F2 Deshacer la cadena de operaciones

ESQUEMA

Así se construyó la ecuación $3x - 5 = 10$ (de izquierda a derecha)



Para resolverla, deshacemos cada paso en orden inverso (de derecha a izquierda)



Operación inversa: la suma se deshace con una resta, el producto con una división (y al revés).

Fuente: Esquema de elaboración propia.

- Q Para aislar la incógnita se deshacen las operaciones en orden inverso a como se aplicaron, y siempre en los dos miembros de la ecuación.

F3 Tres ecuaciones resueltas paso a paso

DATOS

Paso	$2x + 5 = 17$	$5x - 3 = 2x + 9$	$3(x - 2) = x + 8$
1. Quitar paréntesis (distributiva)	no hay	no hay	$3x - 6 = x + 8$
2. Pasar las letras a un lado: restar $2x$ o x en los dos miembros	no hay	$3x - 3 = 9$	$2x - 6 = 8$
3. Dejar solo el término con la letra (operación inversa)	restamos 5: $2x = 12$	sumamos 3: $3x = 12$	sumamos 6: $2x = 14$
4. Dividir entre el coeficiente	$x = 6$	$x = 4$	$x = 7$
5. Comprobar en la ecuación original	$2 \cdot 6 + 5 = 17$ ✓	$20 - 3 = 17$ y $8 + 9 = 17$ ✓	$3 \cdot 5 = 15$ y $7 + 8 = 15$ ✓

Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución. Cada paso de la tabla convierte la ecuación en otra equivalente más sencilla.

Importante: la comprobación se hace siempre en la ecuación **original**, no en las intermedias. Así se detecta cualquier error de los pasos anteriores.

Fuente: Ejemplos resueltos de elaboración propia.

🔍 Regla de oro: lo que hago en un miembro de la igualdad, lo hago en el otro.

F4 Del enunciado a la ecuación

DATOS

Frase	Expresión	Observación
Un número	x	Se elige una letra y se dice qué representa
El doble de un número, más 5	$2x + 5$	Primero se multiplica y después se suma
El doble de (un número más 5)	$2(x + 5)$	El paréntesis cambia el orden
Un número y su siguiente	x y $x + 1$	Dos números consecutivos suman $2x + 1$
3 años más que Ana (que tiene x)	$x + 3$	«Más que» suma; «menos que» resta
El triple de la edad de Ana, menos 4	$3x - 4$	Cuidado con el orden de «menos»

Ejemplo. «Piensa un número, súmale 4 y multiplica por 2: el resultado es 18.»

- Letra: x es el número pensado.
- Ecuación: $2(x + 4) = 18$.
- Resolución: $2x + 8 = 18$, $2x = 10$, $x = 5$.
- Comprobación: $2 \cdot (5 + 4) = 18$ ✓. El número pensado es 5.

Fuente: Elaboración propia.

- 🔍 Una ecuación bien planteada «cuenta lo mismo» que el enunciado. Si al sustituir tu solución no se cumple el enunciado, el error está en el planteamiento.

F5 Banco de problemas

DATOS

N.º	Tipo	Enunciado
P1	Edades	Ana tiene 5 años más que su hermano Luis. Dentro de 4 años, la suma de sus edades será 31. ¿Qué edad tiene cada uno hoy?
P2	Longitudes	Se quiere vallar un huerto rectangular cuyo largo mide 6 m más que su ancho. Se necesitan 56 m de valla en total. ¿Cuánto miden los lados?
P3	Precios	Una mochila cuesta el doble que un estuche. Con 3 estuches y 1 mochila se pagan 20 €. ¿Cuánto cuesta cada artículo?
P4	Precios	Seis amigos van a un parque. La entrada cuesta x euros por persona y el transporte, 2 € por persona. Entre todos pagan 42 €. ¿Cuánto cuesta la entrada?
P5	Números	Piensa un número, súmale 7, multiplica por 3 y resta 5. Obtienes 28. ¿Qué número pensaste?
P6	Longitudes	Los lados de un triángulo miden x cm, $(x + 3)$ cm y $(2x - 1)$ cm. Su perímetro es 30 cm. ¿Cuánto mide cada lado?

Fuente: Problemas de elaboración propia. Nombres y precios ficticios.

- 🔍 Todos los problemas se resuelven con una ecuación de primer grado. Elige una letra, di qué representa y comprueba la solución en el enunciado, no solo en la ecuación.

F6 Casos para depurar: soluciones erróneas

DATOS

Caso	Ecuación	Resolución del alumno	Solución obtenida
A	$3x - 5 = 10$	$3x = 10 - 5; 3x = 5$	$x = \frac{5}{3}$
B	$2(x + 3) = 14$	$2x + 3 = 14; 2x = 11$	$x = \frac{11}{2}$
C	$\frac{x}{5} = 4$	$x = 4 : 5$	$x = 0,8$
D	$4x - 3 = x + 9$	$4x - x = 9 - 3; 3x = 6$	$x = 2$

Fuente: Resoluciones inventadas por el equipo docente para practicar la detección de errores.

- 🔍 Para depurar: 1) sustituye la solución en la ecuación original, 2) localiza el primer paso incorrecto, 3) escribe la resolución correcta.

F7 Protocolo de la oficina de verificación

PROTOCOLO

Cada caso del expediente sigue siempre estos cinco pasos:

- **1. Entender.** Subrayo los datos y la pregunta. Digo con mis palabras qué se busca.
- **2. Plantear.** Elijo una letra, escribo qué representa y traduzco el enunciado a una ecuación.
- **3. Resolver.** Resuelvo paso a paso, escribiendo la operación que hago en los dos miembros.
- **4. Comprobar.** Sustituyo la solución en la ecuación original y en el enunciado.
- **5. Responder.** Escribo una frase con unidades. Si la solución no tiene sentido (por ejemplo, edades negativas), el caso queda abierto.

Roles del equipo: planteador (traduce), calculista (resuelve), verificador (comprueba) y portavoz (explica el caso).

Fuente: Elaboración propia.

- 🔍 Un caso solo se archiva cuando tiene los cinco pasos y la firma del verificador.

F8 Vocabulario de las ecuaciones

Ecuación	Igualdad con una o más letras (incógnitas) que solo se cumple para ciertos valores.
Miembro	Cada lado de la igualdad. En $3x - 5 = 10$, el primer miembro es $3x - 5$ y el segundo es 10.
Incógnita	Letra que representa el número que queremos averiguar.
Solución	Valor de la incógnita que hace cierta la igualdad.
Ecuaciones equivalentes	Ecuaciones que tienen la misma solución, como $2x + 6 = 14$ y $x = 4$.
Operación inversa	La que deshace otra: suma y resta, producto y división.
Comprobar	Sustituir la solución en la ecuación original y verificar que los dos miembros valen lo mismo.
Respuesta contextual	Frase que contesta a la pregunta del problema, con unidades y comprobando que tiene sentido.

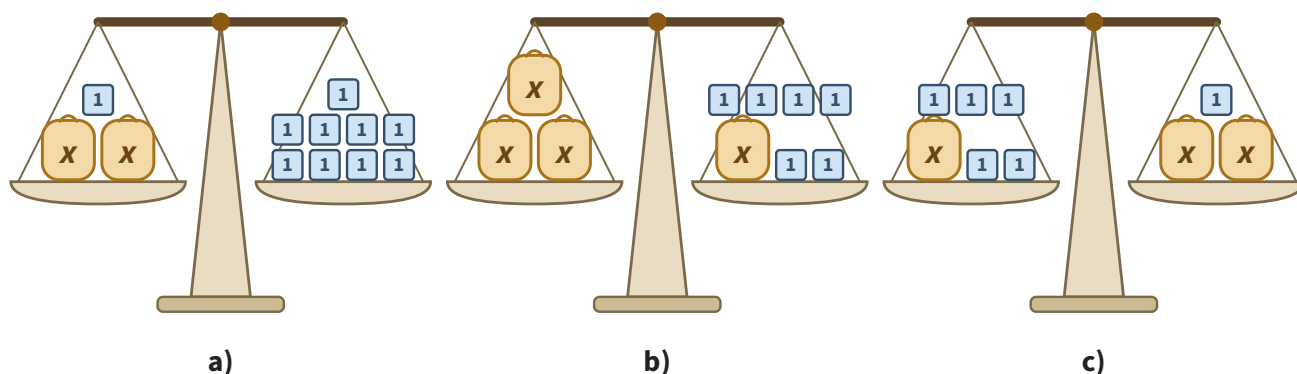
Fuente: Elaboración propia.

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Cada bolsa de las balanzas contiene el mismo número de cubos y todas están en equilibrio (F1).

1 Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.Si $x + 5 = 12$, entonces x vale...☐ 5 ☐ 7 ☐ 17El resultado de $3 + 2 \cdot 4$ es...☐ 20 ☐ 11 ☐ 24El opuesto de -6 es...☐ -6 ☐ 6 ☐ $\frac{1}{6}$ **2 Escribe la ecuación de cada balanza y averigua el valor de x quitando lo mismo de los dos platillos. Comprueba la solución.**

Balanza	Ecuación	Pasos	$x =$	Comprobación
a)				
b)				
c)				

3 Verdadero o falso.

	V	F
Para mantener el equilibrio, lo que hago en un platillo lo tengo que hacer en el otro.	☐	☐
Las ecuaciones $x + 4 = 9$ y $x = 5$ tienen la misma solución.	☐	☐
$x = 3$ es solución de $4x - 5 = 2x + 3$.	☐	☐
$x = 4$ es solución de $2x + 3 = 3x - 1$.	☐	☐
Si $2x = 10$, entonces $x = 20$.	☐	☐

4 Comprueba si el valor dado es solución. Calcula cada miembro por separado.

Ecuación	Valor	Primer miembro	Segundo miembro	¿Es solución?
$3x + 4 = 10$	$x = 2$			
$3x + 4 = 10$	$x = 3$			
$2x - 1 = 3x - 6$	$x = 5$			
$x + 7 = 5$	$x = -2$			

FICHA 2 Operaciones que conservan la igualdad

Sesión 2

Usa la cadena de operaciones (F2) y los ejemplos resueltos (F3).

1 Resuelve $3x - 5 = 10$ completando la tabla (modelo: F2). Escribe en cada paso la operación que haces en los dos miembros.

Paso	Operación en los dos miembros	Ecuación que queda
1		
2		
3 (comprobación)		

2 Resuelve y comprueba.

Ecuación	Pasos	Solución	Comprobación
$x + 7 = 12$			
$4x = 28$			
$2x + 9 = 21$			
$5x - 8 = 17$			
$\frac{x}{3} + 2 = 6$			

- 3 Marca las ecuaciones equivalentes a $2x + 6 = 14$ (tienen la misma solución que ella).

☐ $x + 3 = 7$

☐ $2x = 8$

☐ $x = 4$

☐ $2x = 20$

☐ $x + 6 = 14$

- 4 Un alumno resuelve $5x + 10 = 35$ dividiendo solo el término $5x$ entre 5 y escribe $x + 10 = 7$. Explica su error y resuelve bien la ecuación.

FICHA 3 Paréntesis y letras en los dos miembros

Sesión 3

Sigue los cinco pasos de la tabla F3: quitar paréntesis, juntar letras, aislar, dividir y comprobar.

- 1 Quita los paréntesis con la propiedad distributiva.

Expresión	Sin paréntesis
$2(x + 3)$	
$3(x - 4)$	
$5(2x + 1)$	
$-(x - 2)$	

- 2 Completa la resolución de $3(x - 2) = x + 8$ (modelo en F3).

$$3(x - 2) = x + 8 \rightarrow 3x - \underline{\hspace{2cm}} = x + 8$$

$$\text{Resto } x \text{ en los dos miembros: } 3x - x - \underline{\hspace{2cm}} = 8, \text{ es decir, } \underline{\hspace{2cm}} x - 6 = 8$$

$$\text{Sumo } \underline{\hspace{2cm}} \text{ en los dos miembros: } \underline{\hspace{2cm}} x = 14$$

$$\text{Divido entre } \underline{\hspace{2cm}} : x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Comprobación: } 3 \cdot (\underline{\hspace{2cm}} - 2) = \underline{\hspace{2cm}} \text{ y } 7 + 8 = \underline{\hspace{2cm}}$$

3 Resuelve y comprueba.

Ecuación	Pasos	Solución	Comprobación
$2(x + 3) = 14$			
$3(x - 1) = 2x + 5$			
$5x - 3 = 2x + 9$			
$4(x + 2) - 3 = x + 14$			
$6x + 4 = 2(x + 10)$			

4 Para resolver $7x - 4 = 3x + 12$ un alumno escribe $7x + 3x = 12 + 4$. ¿Qué ha hecho mal? Resuelve bien la ecuación y comprueba.

FICHA 4 De enunciado a ecuación

Sesión 4

En esta sesión solo se plantea: elige la letra, escribe la ecuación y, si se pide, resuélvela. Usa F4.

1 Une cada enunciado con su ecuación escribiendo la letra que corresponda.

1 El doble de un número, más 5, es 17. ●

2 El doble de (un número más 5) es 17. ●

3 Un número y su siguiente suman 17. ●

4 El triple de un número menos 4 es igual al número más 10. ●

5 La mitad de un número es 9. ●

● a $x + (x + 1) = 17$ ● b $2x + 5 = 17$ ● c $\frac{x}{2} = 9$ ● d $2(x + 5) = 17$ ● e $3x - 4 = x + 10$

- 2 Plantea la ecuación de cada enunciado (sin resolverla): di qué representa la letra y escribe la ecuación.

Enunciado	La letra x representa...	Ecuación
Marta tiene 5 años más que su primo Álex. Entre los dos suman 29 años.		
Un rectángulo mide 4 cm más de largo que de ancho y su perímetro es 28 cm.		
Compro 3 cuadernos iguales y un bolígrafo de 1,50 €. Pago 7,50 € en total.		
Un número aumentado en su doble da 21.		

- 3 Piensa un número, súmale 7, multiplica el resultado por 3 y resta 5. Obtienes 28. Plantea la ecuación, resuélvela y comprueba (F4 tiene un ejemplo parecido).

- 4 El enunciado dice «Pablo tiene 4 años menos que Eva» y se llama x a la edad de Eva. Dos alumnos escriben $x - 4$ y $4 - x$ para la edad de Pablo. Prueba con Eva = 10 años y decide cuál es correcta.

FICHA 5 Problemas de edades, longitudes y precios

Sesión 5

Resuelve los problemas P1, P2 y P3 del banco (F5) siguiendo el protocolo de F7.

- 1 Completa la tabla de cada problema. La comprobación se hace también en el enunciado.

Problema	Letra	Ecuación	Resolución	Comprobación y respuesta
P1 (edades)				
P2 (huerto)				
P3 (mochila y estuche)				

- 2 En P1, ¿qué edad tendrá cada hermano dentro de 4 años? Comprueba que suman 31.

- 3 Inventa un problema de precios (con datos ficticios) cuya solución sea 3 € y resuélvelo con una ecuación.

FICHA 6

El expediente: planteamiento, solución, comprobación

Sesión 6

Trabaja en equipo con los roles de F7. Cada equipo prepara los casos del expediente.

- 1 Casos P4, P5 y P6 de F5. Rellenad una fila por caso.

Caso	Letra y ecuación	Resolución	Comprobación y respuesta
P4 (parque)			
P5 (número)			
P6 (triángulo)			

- 2 Caso con trampa: «Se reparten 20 caramelos entre 3 niños de modo que cada uno recibe los mismos y sobran 4. ¿Cuántos caramelos recibe cada niño?». Plantea la ecuación, resuélvela y explica si la solución tiene sentido en el problema.

3 Inventad el caso propio del equipo (enunciado, ecuación, resolución y comprobación).

4 Revisión cruzada: otro equipo comprueba vuestros casos.

- ☐ Cada letra tiene definido qué representa
- ☐ La ecuación coincide con el enunciado
- ☐ Cada paso indica la operación en los dos miembros
- ☐ La solución está comprobada en la ecuación original
- ☐ La respuesta es una frase con unidades

FICHA 7

Reto individual

Sesión 7

Trabajo individual. Puedes usar F3 y F7, pero no la ayuda de otras personas.

- 1 En una papelería (precios ficticios), 4 cuadernos iguales y 2 bolígrafos de 0,75 € cada uno cuestan lo mismo que 2 cuadernos iguales a los anteriores y una carpeta de 6,50 €. (a) Elige la letra y di qué representa. (b) Plantea la ecuación. (c) Resuélvela. (d) Comprueba y responde con una frase.

- 2 Resuelve y comprueba: $5(x - 2) = 3x + 4$.

3 Depura estas tres resoluciones. Indica si son correctas y, si no lo son, localiza el error y escribe la solución buena.

Resolución del alumno	¿Correcta?	Error y solución correcta
A: $2(x + 5) = 18 \rightarrow 2x + 5 = 18 \rightarrow 2x = 13 \rightarrow x = 6,5$		
B: $6x - 4 = 2x + 8 \rightarrow 4x = 12 \rightarrow x = 3$		
C: $\frac{x}{4} = 5 \rightarrow x = 5 : 4 = 1,25$		

4 La ecuación $x + 9 = 6$ tiene como solución $x = -3$. Si x fuera el número de alumnos que faltan a clase, ¿tendría sentido? ¿Y si x fuera una temperatura en grados? Razona.

Plantilla del producto final

SdA 6 · Encontrar lo desconocido

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Expediente de ecuaciones resueltas y verificadas. Cada caso lleva planteamiento, resolución paso a paso, comprobación y respuesta.

Título y equipo**Caso 1: ecuación con balanza***Dibujo de la balanza, ecuación, pasos y comprobación.*

Caso 2: ecuación con paréntesis*Resolución paso a paso y comprobación.*

Caso 3: problema de enunciado*Letra, ecuación, resolución, comprobación y respuesta con unidades.*

Detector de errores*Una solución errónea, su error y su corrección.***Revisión del otro equipo***Comprobaciones y firma del verificador.***Conclusión***Qué significa resolver una ecuación.*

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 6 · Encontrar lo desconocido

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Antes de entregar **Expediente de ecuaciones resueltas y verificadas**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- ☐ Cada letra tiene definido lo que representa.
- ☐ La ecuación coincide con el enunciado del problema.
- ☐ Cada paso de la resolución indica la operación que se hace en los dos miembros.
- ☐ Las operaciones con paréntesis y con letras en los dos miembros están bien resueltas.
- ☐ Cada solución está comprobada sustituyendo en la ecuación original.
- ☐ La respuesta de cada problema es una frase con unidades y se ha comprobado que tiene sentido.
- ☐ El detector de errores localiza el primer paso incorrecto y corrige la resolución.
- ☐ El expediente es claro, ordenado y utiliza el lenguaje matemático (miembro, solución, equivalente).

Calidad y rigor

- ☐ He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- ☐ He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- ☐ He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- ☐ He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- ☐ He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

Rúbrica imprimible

SdA 6 · Encontrar lo desconocido

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Rúbrica para valorar **Expediente de ecuaciones resueltas y verificadas**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

Autoevaluación y coevaluación

SdA 6 · Encontrar lo desconocido

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé explicar por qué una operación mantiene la igualdad y cuál no.	☐	☐	☐	☐
Planteo la ecuación de un problema y compruebo la solución en el enunciado.	☐	☐	☐	☐
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	☐	☐	☐	☐
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	☐	☐	☐	☐
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	☐	☐	☐	☐
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	☐	☐	☐	☐

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo**Equipo evaluado:** _____**Fortaleza 1**

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

Material de apoyo y refuerzo

SdA 6 · Encontrar lo desconocido

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

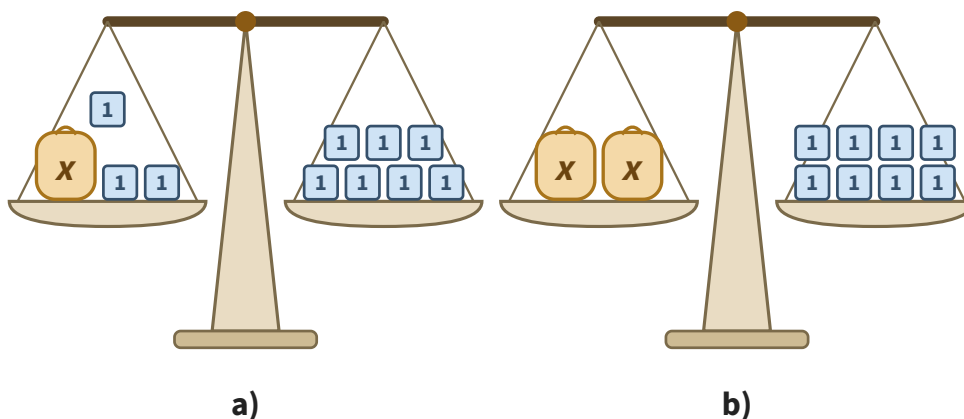
Ecuaciones $x + a = b$ y $ax = b$ con tabla de pasos y la balanza como apoyo.

⊗ Tabla de pasos

- $x + a = b$: resto a en los dos miembros, $x = b - a$.
- $x - a = b$: sumo a en los dos miembros, $x = b + a$.
- $ax = b$: divido entre a los dos miembros, $x = b : a$.
- **Siempre:** compruebo sustituyendo en la ecuación original.

⊗ Ejemplo modelado

Ecuación $x + 3 = 7$: la balanza tiene una bolsa y 3 cubos a la izquierda y 7 cubos a la derecha. Quito 3 cubos de cada lado y queda $x = 4$. Compruebo: $4 + 3 = 7$ ✓. En $2x = 8$ hay dos bolsas iguales que pesan 8: cada una pesa $8 : 2 = 4$. Compruebo: $2 \cdot 4 = 8$ ✓.

1 Escribe la ecuación de cada balanza y halla x .

Balanza	Ecuación	Paso	$x =$
a)			
b)			

2 Completa la tabla de pasos.

Ecuación	Operación en los dos miembros	Solución	Comprobación
$x + 6 = 10$	restar 6		
$x - 4 = 5$	sumar 4		
$3x = 15$	dividir entre 3		
$x + 9 = 12$			
$5x = 20$			

3 Comprueba si $x = 6$ es solución de $x + 5 = 11$ y si $x = 3$ es solución de $2x = 8$.

Actividad de ampliación

SdA 6 · Encontrar lo desconocido

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

 Fabricamos ecuaciones con solución secreta

Un problema inverso: en lugar de resolver una ecuación, la creamos nosotros a partir de la solución y la disfrazamos con operaciones que conservan la igualdad.

 Pasos

- 1** Elige una solución secreta (por ejemplo, $x = 6$) y escribe $x = 6$.
- 2** Aplica a los dos miembros operaciones que conserven la igualdad (multiplicar, sumar, restar...) para obtener una ecuación como $2x = 12$ y después $2x + 3 = 15$.
- 3** Disfraza la ecuación todavía más hasta llegar a una con la letra en los dos miembros y un paréntesis.
- 4** Escribe un enunciado cuya ecuación sea una de ellas.
- 5** Explica por qué todas las ecuaciones de tu lista son equivalentes.

1 **Tabla de trabajo.**

Solución secreta	Ecuación simple	Ecuación disfrazada (con paréntesis y letra en los dos miembros)	Comprobación con la solución
$x = 6$			
Tu solución secreta			

 Entrega

Una página con dos soluciones secretas, la cadena de ecuaciones equivalentes de cada una, un enunciado asociado y una frase que explique por qué todas tienen la misma solución.

 Ficha 1

1. Diagnóstico: $7 (7 + 5 = 12)$; 11 (primero el producto: $3 + 8$); 6 (el opuesto de -6 es 6).
2. a) $2x + 1 = 9$; quito 1 de cada platillo: $2x = 8$; $x = 4 (2 \cdot 4 + 1 = 9 \checkmark)$. b) $3x = x + 6$; quito una bolsa de cada lado: $2x = 6$; $x = 3 (9 = 3 + 6 \checkmark)$. c) $x + 5 = 2x + 1$; quito una bolsa de cada lado: $5 = x + 1$; $x = 4 (4 + 5 = 9 = 2 \cdot 4 + 1 \checkmark)$.
3. V; V; F ($4 \cdot 3 - 5 = 7$ y $2 \cdot 3 + 3 = 9$); V ($11 = 11$); F ($x = 5$).
4. $3x + 4 = 10$ con 2: 10 y 10, sí; con 3: 13 y 10, no. $2x - 1 = 3x - 6$ con 5: 9 y 9, sí. $x + 7 = 5$ con -2 : 5 y 5, sí.

 Ficha 2

1. $3x - 5 = 10$: sumo 5 en los dos miembros, $3x = 15$; divido entre 3, $x = 5$; comprobación $3 \cdot 5 - 5 = 10 \checkmark$.
2. $x = 5 (5 + 7 = 12)$; $x = 7 (4 \cdot 7 = 28)$; $2x = 12$, $x = 6 (12 + 9 = 21)$; $5x = 25$, $x = 5 (25 - 8 = 17)$; $\frac{x}{3} = 4$, $x = 12 (4 + 2 = 6)$.
3. Son equivalentes $x + 3 = 7$, $2x = 8$ y $x = 4$ (solución 4). No lo son $2x = 20$ (solución 10) ni $x + 6 = 14$ (solución 8).
4. Debe dividir los **dos** términos del primer miembro entre 5 (o restar 10 primero): $x + 2 = 7$, $x = 5$. Con la forma errónea $x + 10 = 7$ saldría $x = -3$, que no cumple ($5 \cdot (-3) + 10 = -5 \neq 35$). Resolución buena: $5x = 25$, $x = 5$; comprobación $25 + 10 = 35 \checkmark$.

 Ficha 3

1. $2x + 6$; $3x - 12$; $10x + 5$; $-x + 2$ (el signo menos cambia los dos signos del paréntesis).
2. $3x - 6 = x + 8$; $3x - x - 6 = 8$, es decir $2x - 6 = 8$; sumo 6: $2x = 14$; divido entre 2: $x = 7$; comprobación: $3 \cdot (7 - 2) = 15$ y $7 + 8 = 15$.
3. $2(x + 3) = 14 \rightarrow 2x + 6 = 14 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4 (14 = 14 \checkmark)$. $3(x - 1) = 2x + 5 \rightarrow 3x - 3 = 2x + 5 \rightarrow x = 8 (21 = 21 \checkmark)$. $5x - 3 = 2x + 9 \rightarrow 3x = 12 \rightarrow x = 4 (17 = 17 \checkmark)$. $4(x + 2) - 3 = x + 14 \rightarrow 4x + 5 = x + 14 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 3 (17 = 17 \checkmark)$. $6x + 4 = 2(x + 10) \rightarrow 6x + 4 = 2x + 20 \rightarrow 4x = 16 \rightarrow x = 4 (28 = 28 \checkmark)$.
4. Al restar $3x$ en los dos miembros queda $7x - 3x - 4 = 12$; el alumno ha sumado $3x$ en lugar de restarlo (el -4 sí lo ha pasado bien como $+4$). Correcto: $4x - 4 = 12$, $4x = 16$, $x = 4$; comprobación: $28 - 4 = 24$ y $12 + 12 = 24 \checkmark$.

 Ficha 4

1. 1-b ($2x + 5 = 17$); 2-d ($2(x + 5) = 17$); 3-a ($x + (x + 1) = 17$); 4-e ($3x - 4 = x + 10$); 5-c ($\frac{x}{2} = 9$).
2. Álex x años: $x + (x + 5) = 29$ ($x = 12$). Ancho x cm: $2x + 2(x + 4) = 28$ ($x = 5$). Precio de un cuaderno x €: $3x + 1,5 = 7,5$ ($x = 2$). Número x : $x + 2x = 21$ ($x = 7$). Se acepta cualquier letra si está definida.
3. $3(x + 7) - 5 = 28 \rightarrow 3x + 21 - 5 = 28 \rightarrow 3x = 12 \rightarrow x = 4$. Comprobación: $3 \cdot 11 - 5 = 28 \checkmark$. El número pensado es 4.
4. Con Eva = 10, Pablo tiene 6 años: $x - 4 = 6$ es correcta; $4 - x = -6$ no tiene sentido como edad.

Ficha 5

1. P1: x = edad actual de Luis; Ana, $x + 5$. Dentro de 4 años: $(x + 4) + (x + 9) = 31 \rightarrow 2x + 13 = 31 \rightarrow x = 9$. Luis tiene 9 años y Ana 14. Comprobación: $13 + 18 = 31$ ✓. P2: x = ancho (m); $2x + 2(x + 6) = 56 \rightarrow 4x + 12 = 56 \rightarrow x = 11$. El ancho mide 11 m y el largo 17 m. Comprobación: $2 \cdot 28 = 56$ ✓. P3: x = precio del estuche (€); mochila $2x$; $3x + 2x = 20 \rightarrow x = 4$. El estuche cuesta 4 € y la mochila 8 €. Comprobación: $12 + 8 = 20$ ✓.
2. Dentro de 4 años Luis tendrá 13 y Ana 18; $13 + 18 = 31$ ✓.
3. Respuesta abierta. Ejemplo: «Un helado cuesta x € y un zumo cuesta 1 € más. Dos helados y un zumo cuestan 10 €». $2x + (x + 1) = 10 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 3$. Se valora que la solución sea 3 € y que la ecuación coincida con el enunciado.

Ficha 6

1. P4: x = precio de la entrada; $6(x + 2) = 42 \rightarrow 6x + 12 = 42 \rightarrow 6x = 30 \rightarrow x = 5$. La entrada cuesta 5 € (y con transporte, 7 € por persona: $6 \cdot 7 = 42$ ✓). P5: $3(x + 7) - 5 = 28 \rightarrow 3x + 16 = 28 \rightarrow 3x = 12 \rightarrow x = 4$ ($3 \cdot 11 - 5 = 28$ ✓). P6: $x + (x + 3) + (2x - 1) = 30 \rightarrow 4x + 2 = 30 \rightarrow x = 7$. Los lados miden 7 cm, 10 cm y 13 cm; $7 + 10 + 13 = 30$ ✓.
2. $3x + 4 = 20 \rightarrow 3x = 16 \rightarrow x = \frac{16}{3} \approx 5,33$. La ecuación tiene solución, pero el problema no: no se pueden repartir caramelos enteros en partes iguales de esa forma. Con esos datos el caso queda abierto (con 19 o 22 caramelos sí tendría solución).
3. Respuesta abierta. Se valora letra definida, ecuación coherente con el enunciado, resolución paso a paso y comprobación.
4. Revisión cruzada: se comprueba cada casilla y el equipo revisor señala al menos una mejora concreta.

Ficha 7

1. (a) x = precio de un cuaderno (€). (b) $4x + 2 \cdot 0,75 = 2x + 6,50 \rightarrow 4x + 1,50 = 2x + 6,50$. (c) $2x = 5 \rightarrow x = 2,5$. (d) Comprobación: $4 \cdot 2,5 + 1,5 = 11,5$ y $2 \cdot 2,5 + 6,5 = 11,5$ ✓. Cada cuaderno cuesta 2,50 €.
2. $5(x - 2) = 3x + 4 \rightarrow 5x - 10 = 3x + 4 \rightarrow 2x = 14 \rightarrow x = 7$. Comprobación: $5 \cdot 5 = 25$ y $21 + 4 = 25$ ✓.
3. A: incorrecta; no ha multiplicado el 5 por 2 al quitar el paréntesis. Correcto: $2x + 10 = 18$, $2x = 8$, $x = 4$ ($2 \cdot 9 = 18$ ✓). B: correcta ($6 \cdot 3 - 4 = 14$ y $2 \cdot 3 + 8 = 14$). C: incorrecta; la operación inversa de dividir entre 4 es multiplicar por 4: $x = 5 \cdot 4 = 20$ ($20 : 4 = 5$ ✓).
4. No tiene sentido como número de alumnos (no puede ser negativo); sí como temperatura: -3 °C. La solución de la ecuación es -3 en ambos casos; la respuesta al problema depende del contexto.

Refuerzo

1. a) $x + 3 = 7$, $x = 4$; b) $2x = 8$, $x = 4$.
2. $x + 6 = 10 \rightarrow x = 4$ ($4 + 6 = 10$); $x - 4 = 5 \rightarrow x = 9$ ($9 - 4 = 5$); $3x = 15 \rightarrow x = 5$ ($15 = 15$); $x + 9 = 12 \rightarrow$ restar 9, $x = 3$; $5x = 20 \rightarrow$ dividir entre 5, $x = 4$.
3. $6 + 5 = 11$ ✓, sí es solución; $2 \cdot 3 = 6 \neq 8$, no es solución (la solución es 4).

Ampliación

1. Respuesta abierta. Ejemplo con $x = 6$: $2x = 12$; $2x + 3 = 15$; $2(x + 1) + 3 = 17$; $5x + 3 = 3x + 15$ (comprobación con 6: $33 = 33$). Todas son equivalentes porque se obtienen de la anterior aplicando la misma operación a los dos miembros, y por tanto conservan la solución.
2. Se valora que la ecuación disfrazada tenga paréntesis y letra en los dos miembros, que la solución secreta se verifique y que el enunciado asociado sea coherente.

⚠ Errores frecuentes

- Operar solo en un miembro de la ecuación.
- Usar la operación directa en lugar de la inversa: $x - 3 = 5 \rightarrow x = 5 - 3$.
- Al quitar un paréntesis, multiplicar solo el primer término: $2(x + 3) = 2x + 3$.
- Dividir solo un término del miembro entre el coeficiente: $5x + 10 = 35 \rightarrow x + 10 = 7$.
- Cambiar mal el signo al pasar un término de miembro (restar x en un lado y sumarlo en el otro).
- Comprobar en la ecuación transformada y no en la original, o dar la solución sin frase de respuesta ni unidades.

⚖ Criterios para valorar respuestas abiertas

- Se acepta cualquier letra siempre que esté definida y la ecuación coincida con el enunciado.
- Se valora que cada paso indique la operación que se aplica en los dos miembros, no solo el resultado.
- En las tareas abiertas (casos propios, ampliación) se acepta cualquier contexto realista si la ecuación coincide con el enunciado y la solución está comprobada.
- La calculadora puede usarse para comprobar, pero los pasos de resolución deben estar escritos.

07 SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Dos incógnitas, una decisión



PREGUNTA GUÍA

¿Cuándo necesitamos dos ecuaciones para describir una situación?



CURSO
2.º ESO



SESIONES
7 sesiones · 2.º trimestre



SENTIDOS PRIORITARIOS
D · Sentido algebraico



COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE2, CE5, CE7



PRODUCTO FINAL
Informe comparativo de dos planes



CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 1.2, 2.1, 5.2, 7.1



Contexto, reto y sentido

El club de ciclismo del instituto quiere alquilar bicicletas para una ruta por el río y hay dos empresas que parecen igual de buenas: una cobra una cuota inicial alta y poco por hora; la otra cobra una cuota baja y más por hora. Dependiendo de cuántas horas dure la ruta, saldrá más barata una u otra. ¿Cuándo cambia la decisión? Hay dos cantidades que no conocemos a la vez (las horas y el coste) y dos relaciones que las unen: ese es el terreno de los sistemas de dos ecuaciones.

En esta situación vais a comparar dos planes con tablas, gráficas y ecuaciones. Aprenderéis a resolver un sistema por sustitución y por reducción, a reconocer cuándo tiene una solución, ninguna o infinitas, y a interpretar la solución para tomar una decisión razonada. El producto final es un informe comparativo de dos planes que incluye una recomendación argumentada.

🎯 Reto

Elaborar un informe comparativo de dos planes de alquiler (precios ficticios) que presente tabla de valores, gráfica con el punto de corte, resolución del sistema por dos métodos, comprobación y una recomendación razonada según el número de horas de uso.

📦 Producto final

Informe comparativo de dos planes.



Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- CE5** Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.
- CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- 1.1** Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.
- 1.2** Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.
- 2.1** Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.
- 5.2** Realizar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.
- 7.1** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales.

Saberes básicos prioritarios

D

Sentido algebraico

- Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas: planteamiento a partir de una situación, solución como par de valores que cumple las dos ecuaciones.
- Métodos algebraicos sencillos: sustitución y reducción (suma o resta de ecuaciones), con comprobación en las dos ecuaciones.
- Representación gráfica de las dos ecuaciones y interpretación del punto de corte, de las rectas paralelas y de las rectas coincidentes.
- Sistemas con una solución, sin solución o con infinitas soluciones, a nivel intuitivo.
- Interpretación de la solución en el contexto y toma de decisiones a partir de la comparación de dos planes.

F

Sentido socioafectivo

- Valoración de distintos métodos para un mismo problema y respeto por las estrategias ajenas.
- Trabajo cooperativo con roles y revisión cruzada de las producciones.



Objetivos didácticos

- ✓ Representar dos relaciones lineales.
- ✓ Interpretar la solución de un sistema como condición simultánea.
- ✓ Resolver sistemas por métodos accesibles.
- ✓ Comprobar la solución en el contexto.



Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.



Secuencia de sesiones y actividades

-  Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Dos tarifas y una pregunta de igualdad

 **Evidencia:** Ficha 1: tabla de costes de dos tarifas, tanteo del punto de igualdad, ecuación de igualdad y verdadero o falso sobre qué plan conviene.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Tabla y gráfica de dos relaciones

 **Evidencia:** Ficha 2: tabla de valores, gráfica de las dos tarifas en una cuadrícula vacía, lectura del punto de corte y zonas de conveniencia.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Método de sustitución

 **Evidencia:** Ficha 3: sistemas resueltos por sustitución, comprobación de pares, y localización de un error de sustitución.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Método de reducción en casos sencillos

 **Evidencia:** Ficha 4: sistemas resueltos por reducción, problema de monedas y problema de entradas.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Sistemas con una, ninguna o muchas soluciones a nivel intuitivo

 **Evidencia:** Ficha 5: clasificación de tres sistemas según tengan una, ninguna o infinitas soluciones, relacionándolos con sus gráficas.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Informe comparativo

 **Evidencia:** Ficha 6: tabla comparativa de los dos planes para cuatro usos, recomendación argumentada, variante con otra cuota y revisión cruzada.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Reto individual

 **Evidencia:** Ficha 7: reto individual con dos tarifas nuevas, un sistema por reducción, tres resoluciones ajenas por depurar y una solución sin sentido en el contexto.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 7

**Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad** **Recursos**

Tarifas ficticias

papel milimetrado

calculadora/GeoGebra opcional

 Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.



DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo Anexo 8

Sistemas con coeficientes pequeños y método indicado.

Ampliación Anexo 9

Diseñar un sistema cuya solución tenga interpretación concreta y comparar dos métodos.



Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1 Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2 Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3 Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Interpretación de las tarifas y problemas, identificación de las dos incógnitas y de las dos relaciones, y comprensión de qué se pregunta.	Fichas 1, 4 y 7 / lista de cotejo
1.2	Elección y aplicación del método adecuado (tabla, gráfica, sustitución, reducción) según el sistema.	Fichas 2, 3 y 4 / escala de valoración
2.1	Comprobación de la solución en las dos ecuaciones y en el contexto, y análisis de si tiene sentido.	Fichas 3, 5 y 7 / rúbrica
5.2	Conexión entre la tabla, la gráfica, la ecuación de igualdad y el sistema, y entre el tipo de sistema y la posición de las rectas.	Fichas 2 y 5 y informe (Anexo 4) / rúbrica
7.1	Representación de la misma situación con tabla, gráfica, sistema y texto, con las herramientas adecuadas (papel o GeoGebra).	Fichas 2 y 6 e informe (Anexo 4) / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Informe, gráfica, sistema y justificación.



Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.



Variantes de aplicación

↗ Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

↖ Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 7 · Dos incógnitas, una decisión

ALUMNADO

Para la ruta por el río hay dos ofertas. RuedaLibre cobra 10 € por la cuota inicial más 2 € por cada hora. Pedalea cobra solo 4 € de cuota, pero 3 € por cada hora. Marta dice: «Pedalea es más barata porque la cuota es menor». Pablo dice: «RuedaLibre, porque cada hora sale más barata». ¿Quién tiene razón? Depende de cuántas horas se alquile. Vais a averiguar en qué momento las dos tarifas cuestan lo mismo, qué plan conviene antes de ese momento y cuál después, y a presentar vuestra recomendación en un informe comparativo.

“ ¿Cuándo necesitamos dos ecuaciones para describir una situación? ”

🎯 Vuestro reto

Elaborar un informe comparativo de dos planes de alquiler (precios ficticios) que presente tabla de valores, gráfica con el punto de corte, resolución del sistema por dos métodos, comprobación y una recomendación razonada según el número de horas de uso.

📦 Lo que vais a producir

Informe comparativo de dos planes.

📍 Hoja de ruta · 7 sesiones

- 1 Calculamos el coste de dos tarifas y buscamos cuándo coinciden.
- 2 Representamos las dos tarifas en una gráfica y leemos el punto de corte.
- 3 Resolvemos sistemas por sustitución y comprobamos.
- 4 Resolvemos sistemas por reducción.
- 5 Clasificamos sistemas con una, ninguna o infinitas soluciones.
- 6 Redactamos el informe comparativo con su recomendación.
- 7 Reto individual: tarifas nuevas, errores ajenos y solución con sentido.

📖 Al terminar seré capaz de...

- ✓ Representar dos relaciones lineales.
- ✓ Interpretar la solución de un sistema como condición simultánea.
- ✓ Resolver sistemas por métodos accesibles.
- ✓ Comprobar la solución en el contexto.

📝 ¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 7 · Dos incógnitas, una decisión

ALUMNADO

Tarifas de dos empresas de alquiler, gráfica y tabla de valores, métodos de sustitución y reducción, los tres casos de un sistema, un banco de problemas y el glosario. Todos los datos, empresas y precios son ficticios, creados para el aula.

F1 Las dos tarifas de alquiler de bicicletas

DATOS

Empresa	Cuota inicial	Precio por hora	Coste de x horas (€)
RuedaLibre	10 €	2 €	$y = 2x + 10$
Pedalea	4 €	3 €	$y = 3x + 4$

En las dos fórmulas, x es el **número de horas** de alquiler e y es el **coste total en euros**. Cada tarifa es una relación entre dos cantidades: una ecuación con dos incógnitas.

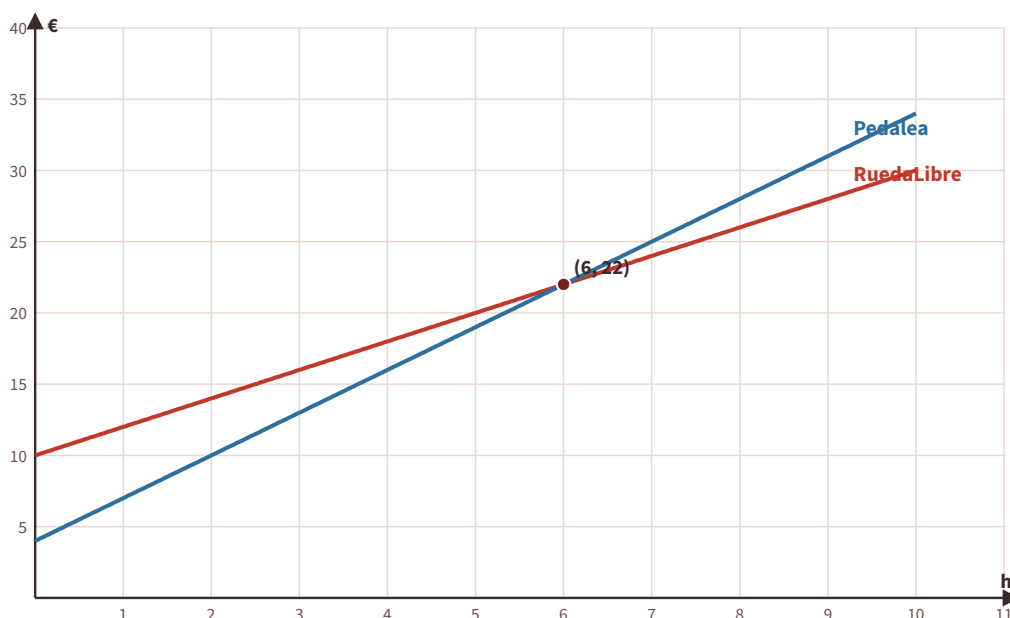
Un **sistema** de dos ecuaciones agrupa las dos relaciones. Su **solución** es el par (x, y) que cumple las dos a la vez; aquí, el número de horas para el que los dos planes cuestan lo mismo.

Fuente: Datos ficticios creados para el aula; las empresas no existen.

🔍 El coste de x horas se obtiene multiplicando x por el precio por hora y sumando la cuota inicial.

F2 Gráfica de las dos tarifas

GRÁFICO



Fuente: Gráfica calculada para el aula con los datos de F1 (ficticios).

🔍 Las rectas se cortan en un único punto: el punto de corte es la solución del sistema. A la izquierda del punto, una recta está por debajo de la otra; a la derecha, al revés.

F3 Tabla de valores de las dos tarifas

DATOS

Horas x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RuedaLibre (€)	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
Pedalea (€)	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34
Diferencia (RuedaLibre – Pedalea)	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

Fuente: Cálculos propios a partir de F1 (datos ficticios).

🔍 La diferencia pasa de positiva a negativa. ¿En qué fila vale cero?

F4 Método de sustitución

DATOS

Paso	$\begin{cases} y = 2x + 10 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 10 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$
1. Despejar una incógnita (o usar la ya despejada)	y ya está despejada en las dos	$y = 2x + 1$ ya está despejada
2. Sustituir en la otra ecuación	$2x + 10 = 3x + 4$	$x + (2x + 1) = 10$
3. Resolver la ecuación con una incógnita	$10 - 4 = 3x - 2x, x = 6$	$3x + 1 = 10, 3x = 9, x = 3$
4. Calcular la otra incógnita	$y = 2 \cdot 6 + 10 = 22$	$y = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
5. Comprobar en las dos ecuaciones	$22 = 2 \cdot 6 + 10 \checkmark$ y $22 = 3 \cdot 6 + 4 \checkmark$	$3 + 7 = 10 \checkmark$ y $7 = 2 \cdot 3 + 1 \checkmark$
Solución	$x = 6, y = 22$	$x = 3, y = 7$

Fuente: Ejemplos resueltos de elaboración propia.

🔍 La sustitución es cómoda cuando una de las incógnitas está ya despejada o se despeja con facilidad.

F5 Método de reducción

ESQUEMA

Sistema

$$(1) \quad 3x + 2y = 19$$

$$(2) \quad x - 2y = 1$$

$$(1)+(2) \quad 4x = 20$$

Los términos en y se anulan: $+2y$ y $-2y$.

1. Sumo las dos ecuaciones

$$(2y - 2y = 0) \rightarrow 4x = 20$$

2. Despejo x

$$x = 20 : 4 = 5$$

3. Sustituyo en la ecuación (2)

$$5 - 2y = 1 \rightarrow 2y = 4 \rightarrow y = 2$$

4. Compruebo en las dos

$$3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 19 \quad \checkmark \quad 5 - 2 \cdot 2 = 1 \quad \checkmark$$

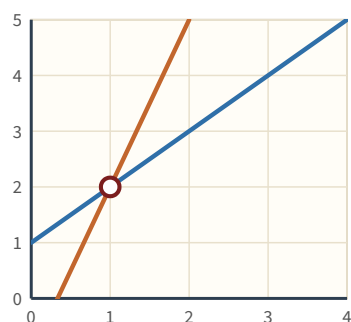
Solución: $x = 5, y = 2$

Fuente: Esquema de elaboración propia.

🔍 Se suman o restan las dos ecuaciones para que desaparezca una incógnita. Si no desaparece, se multiplica antes una de las ecuaciones (en los casos de esta situación no hará falta).

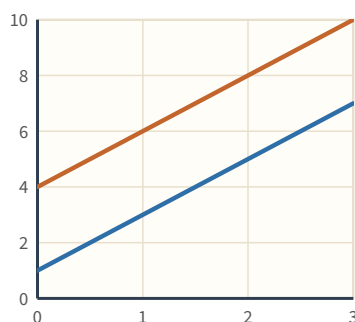
F6 Los tres casos de un sistema

ESQUEMA

a) Se cortan

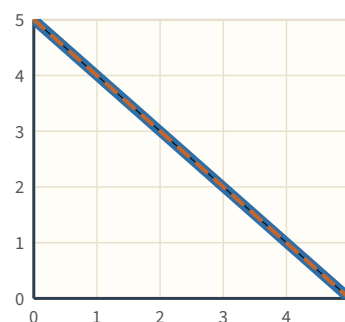
Una solución: (1, 2)

$$y = x + 1; y = 3x - 1$$

b) Paralelas

Ninguna solución

$$y = 2x + 1; y = 2x + 4$$

c) Coinciden

Infinitas soluciones

$$x + y = 5; 2x + 2y = 10$$

Fuente: Gráficas de elaboración propia.

🔍 El número de soluciones del sistema es el número de puntos que tienen en común las dos rectas: uno, ninguno o todos los de la recta.

F7 Banco de problemas con dos incógnitas

DATOS

N.º	Enunciado
Q1	En un parque, 3 adultos y 2 niños pagan 31 € en total; 2 adultos y 3 niños pagan 29 €. ¿Cuánto cuesta la entrada de cada uno?
Q2	En una hucha hay 20 monedas, todas de 1 € o de 2 €, y suman 27 €. ¿Cuántas monedas hay de cada tipo?
Q3	Dos números suman 14 y su diferencia es 4. ¿Cuáles son?
Q4	Mi padre tiene el triple de mi edad y entre los dos sumamos 52 años. ¿Qué edad tenemos?
Q5	En un grupo de 10 personas, entre adultos y niños, hay 3 adultos más que niños. ¿Cuántos hay de cada tipo?

Fuente: Problemas de elaboración propia. Datos ficticios.

🔍 Antes de resolver, escribe qué representa cada letra y escribe las dos ecuaciones.

F8 Guion del informe comparativo

PROTOCOLO

Un informe comparativo tiene siempre estas partes:

- **1. Planes comparados.** Qué ofrece cada plan, con sus datos exactos.
- **2. Tabla y gráfica.** Valores para varios usos y rectas con el punto de corte señalado.
- **3. Resolución.** El sistema planteado y resuelto con un método algebraico y comprobado.
- **4. Interpretación.** Qué significa la solución en el contexto (cuántas horas, cuántos euros).
- **5. Recomendación.** Qué plan conviene según el uso, con una frase para cada caso.
- **6. Revisión.** Otro equipo comprueba las cuentas y la gráfica.

Roles del equipo: analista (tabla), dibujante (gráfica), calculista (sistema) y portavoz (recomendación).

Fuente: Elaboración propia.

🔍 Una recomendación sin números no es un informe: cada afirmación debe apoyarse en un dato de la tabla, la gráfica o el sistema.

F9 Vocabulario de los sistemas**GLOSARIO**

Sistema de ecuaciones	Conjunto de dos ecuaciones con las mismas incógnitas que deben cumplirse a la vez.
Solución del sistema	Par de valores (x, y) que cumple las dos ecuaciones.
Sustitución	Método que despeja una incógnita y la sustituye en la otra ecuación.
Reducción	Método que suma o resta las ecuaciones para eliminar una incógnita.
Punto de corte	Punto donde se cruzan las gráficas de las dos ecuaciones. Sus coordenadas son la solución.
Rectas paralelas	Rectas que no se cortan: el sistema no tiene solución.
Rectas coincidentes	Dos ecuaciones que dibujan la misma recta: el sistema tiene infinitas soluciones.
Comprobar	Sustituir la solución en las dos ecuaciones originales.

Fuente: Elaboración propia.

Fichas de actividades del alumnado

SdA 7 · Dos incógnitas, una decisión

ALUMNADO

FICHA 1

Dos tarifas y una pregunta

Sesión 1

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Usa las tarifas de F1. x es el número de horas e y el coste en euros.

1 Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.

Si $y = 2x + 10$ y $x = 3$, entonces y vale...☐ 16 ☐ 36 ☐ 15La solución de $3x - 2x = 10 - 4$ es...☐ $x = 6$ ☐ $x = 14$ ☐ $x = 1$ Si $x + 5 = 12$, entonces x es...☐ 17 ☐ 7 ☐ 5

2 Completa la tabla de costes de las dos tarifas y rodea la fila donde el coste es igual.

Horas x	RuedaLibre ($2x + 10$)	Pedalea ($3x + 4$)	¿Cuál es más barata?
1			
2			
4			
6			
8			

3 Para encontrar cuándo cuestan lo mismo escribe la ecuación $2x + 10 = 3x + 4$ y resuélvela paso a paso. ¿Qué coste tienen los dos planes en ese momento?

4 Verdadero o falso.

	V	F
Con 3 horas es más barata Pedalea.	☐	☐
Con 6 horas las dos tarifas cuestan lo mismo.	☐	☐
Con 8 horas es más barata RuedaLibre.	☐	☐
Pedalea es siempre más barata porque su cuota inicial es menor.	☐	☐
Si solo se necesita 1 hora, conviene Pedalea.	☐	☐

FICHA 2 Tabla y gráfica de dos relaciones

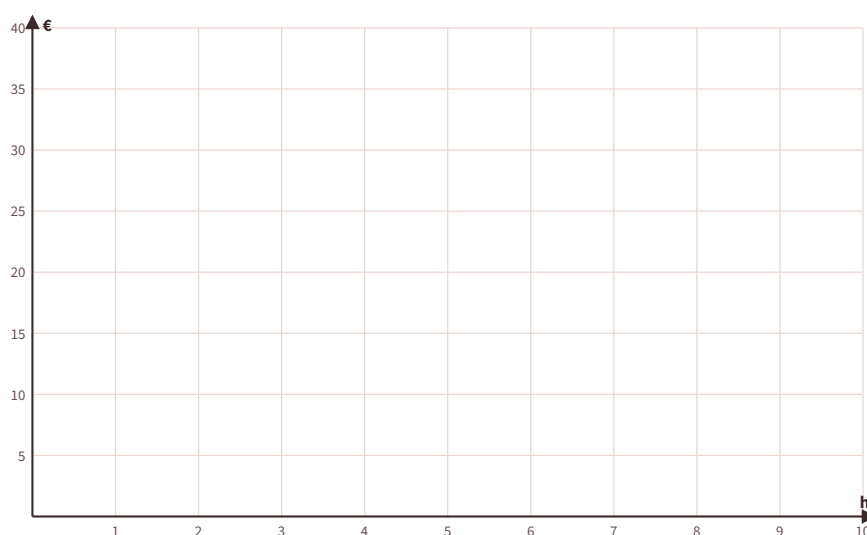
Sesión 2

Usa F2 y F3. Una misma situación se puede mostrar con una tabla, una gráfica y una fórmula.

1 Completa la tabla de valores con la fórmula de cada tarifa.

Horas x	RuedaLibre $y = 2x + 10$	Pedalea $y = 3x + 4$
0		
2		
4		
6		
8		
10		

2 Dibuja en la cuadrícula las dos rectas con los puntos de tu tabla (cada tarifa con un color distinto) y marca el punto de corte.



- 3 Lee el punto de corte e interprétalo: ¿qué significan sus dos coordenadas? Escribe después en qué intervalo de horas conviene cada plan.

- 4 El club alquilará las bicicletas para una ruta de 4 horas y otra de 9 horas. Para cada ruta, di qué plan conviene y cuánto se ahorra.

Ruta	Plan más barato	Coste de cada plan	Ahorro
4 horas			
9 horas			

FICHA 3 Resolvemos por sustitución

Sesión 3

Sigue los cinco pasos de F4. Comprueba siempre la solución en las dos ecuaciones.

- 1 Completa la resolución de $\begin{cases} y = x + 3 \\ 2x + y = 18 \end{cases}$.

Sustituyo y en la segunda ecuación: $2x + (x + \underline{\hspace{2cm}}) = 18$

Resuelvo: $3x + \underline{\hspace{2cm}} = 18$, luego $3x = \underline{\hspace{2cm}}$ y $x = \underline{\hspace{2cm}}$

Calculo $y = x + 3 = \underline{\hspace{2cm}}$

Comprobación: $2 \cdot \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = 18$ y $y = \underline{\hspace{2cm}} + 3$

- 2 Resuelve por sustitución y comprueba.

Sistema	Sustitución	x	y	Comprobación
$\begin{cases} x = y + 2 \\ x + y = 12 \end{cases}$				
$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = x + 6 \end{cases}$				
$\begin{cases} 2x + y = 13 \\ y = x + 1 \end{cases}$				

- 3 Comprueba si cada par es solución del sistema $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$.

Par (x, y)	$x + y$	$2x - y$	¿Es solución?
$(2, 5)$			
$(3, 4)$			

- 4 Un alumno resuelve $\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 9 \end{cases}$ así: « $x + 2x = 9$, luego $2x = 9$ y $x = 4,5$ ». ¿Qué error ha cometido? Resuelve bien el sistema.

FICHA 4 Resolvemos por reducción

Sesión 4

Sigue el esquema de F5: suma o resta las dos ecuaciones para que desaparezca una incógnita.

- 1 Resuelve por reducción y comprueba.

Sistema	Suma o resta	x	y	Comprobación
$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 4 \end{cases}$				
$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ x + y = 7 \end{cases}$				
$\begin{cases} 3x + 2y = 19 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$				
$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$				

- 2 Problema Q2 de F7 (monedas): define las letras, escribe el sistema, resuélvelo por reducción (restando) y responde con una frase.

- 3 Problema Q1 de F7 (entradas): llama a al precio de una entrada de adulto y n a la de niño. Escribe el sistema. Suma las dos ecuaciones y obtén $a + n$; réstalas y obtén $a - n$. Calcula los dos precios y comprueba.

- 4 Explica con tus palabras por qué, al sumar dos ecuaciones, se obtiene otra ecuación cierta para la solución.

FICHA 5 Una, ninguna o infinitas soluciones

Sesión 5

Observa los tres casos de F6 y clasifica sistemas por su aspecto algebraico y por su gráfica.

- 1 Resuelve cada sistema e indica cuántas soluciones tiene.

Sistema	Qué pasa al resolver	Número de soluciones	Gráfica de F6
$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$			
$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$			
$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$			

- 2 Completa.

Si las rectas se cortan en un punto, el sistema tiene _____ solución.

Si las rectas son paralelas, el sistema tiene _____ solución.

Si las dos ecuaciones dibujan la misma recta, el sistema tiene _____ soluciones.

- 3 Dos tarifas de gimnasio son $y = 15 + 5x$ y $y = 5x + 20$ (x en meses, y en euros). Sin dibujar, explica por qué nunca costarán lo mismo.

4 Escribe dos soluciones distintas del sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$ y comprueba que cumplen las dos ecuaciones.

FICHA 6 El informe comparativo

Sesión 6

Trabajad en equipo con los roles de F8. Usad F1, F2, F3 y F4 para redactar el informe.

1 Tabla comparativa: para cada uso, calculad el coste de cada plan y decidid cuál conviene.

Uso (horas)	Coste RuedaLibre	Coste Pedalea	Plan que conviene	Ahorro
2 horas				
4 horas				
6 horas				
8 horas				

2 Escribid la recomendación del equipo: una frase para ruta corta y otra para ruta larga, apoyadas en el punto de corte.

3 Pedalea sube su cuota inicial a 6 € (y mantiene 3 € por hora). Escribid el nuevo sistema, resolvedlo y decid si cambia la recomendación.

3 Depura estas tres resoluciones. Indica si son correctas y, si no lo son, localiza el error y da la solución buena.

Resolución del alumno	¿Correcta?	Error y solución correcta
A: $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$. Sumo: $2x = 12, x = 6$ y $y = 6$.		
B: $\begin{cases} y = x + 2 \\ x + y = 10 \end{cases}$. $x + x + 2 = 10, 2x = 8, x = 4$ e $y = 6$.		
C: $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$. Igualo: $2x + 1 = 2x - 3$. «Tiene una solución».		

4 En un grupo de 10 personas, entre adultos y niños, hay 3 adultos más que niños (Q5 de F7). Resuelve el sistema y explica si la solución tiene sentido en el problema.

Plantilla del producto final

SdA 7 · Dos incógnitas, una decisión

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Informe comparativo de dos planes. Describe los planes, represéntalos, resuelve el sistema, interpreta la solución y recomienda con argumentos.

Título y equipo**Planes comparados**

Datos exactos de cada plan y qué representan x e y .

Tabla de valores

Coste de los dos planes para varios usos.

Gráfica con el punto de corte

Ejes rotulados, escala y punto de corte.

Resolución del sistema

Método, pasos y comprobación en las dos ecuaciones.

Interpretación y recomendación

Qué plan conviene según el uso, con números.

Revisión del otro equipo

Comprobaciones y firma.

Conclusión

Cuándo necesitamos dos ecuaciones para describir una situación.

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 7 · Dos incógnitas, una decisión

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Antes de entregar **Informe comparativo de dos planes**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- ☐ Las dos tarifas están escritas con sus datos exactos y las letras tienen significado y unidad.
- ☐ La tabla de valores es correcta y cubre un intervalo que incluye el punto de igualdad.
- ☐ La gráfica tiene ejes rotulados, escala adecuada y el punto de corte señalado.
- ☐ El sistema está bien planteado a partir de la situación.
- ☐ El sistema se resuelve con un método algebraico, con los pasos escritos.
- ☐ La solución está comprobada en las dos ecuaciones.
- ☐ La solución se interpreta en el contexto (horas y euros) y se comprueba que tiene sentido.
- ☐ La recomendación distingue los usos en que conviene cada plan y se apoya en datos.

Calidad y rigor

- ☐ He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- ☐ He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- ☐ He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- ☐ He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- ☐ He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

Rúbrica imprimible

SdA 7 · Dos incógnitas, una decisión

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Rúbrica para valorar **Informe comparativo de dos planes**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

Autoevaluación y coevaluación

SdA 7 · Dos incógnitas, una decisión

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé escribir un sistema de dos ecuaciones a partir de una situación y resolverlo por sustitución o reducción.	☐	☐	☐	☐
Interpreto el punto de corte de dos gráficas y decido qué plan conviene.	☐	☐	☐	☐
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	☐	☐	☐	☐
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	☐	☐	☐	☐
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	☐	☐	☐	☐
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	☐	☐	☐	☐

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo**Equipo evaluado:** _____**Fortaleza 1**

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

Material de apoyo y refuerzo

SdA 7 · Dos incógnitas, una decisión

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Sistemas con coeficientes pequeños y método indicado, con la tabla de pasos como guía.

⊗ Pasos

- **Sustitución:** despejo una letra, la sustituyo en la otra ecuación, resuelvo y calculo la otra letra.
- **Reducción:** sumo o resto las dos ecuaciones para que desaparezca una letra, resuelvo y sustituyo.
- **Siempre:** compruebo el par (x, y) en las dos ecuaciones.

⊗ Ejemplo modelado

Sistema $x + y = 5$ y $x - y = 1$. Sumo las ecuaciones: $2x = 6$, $x = 3$. Sustituyo en la primera: $3 + y = 5$, $y = 2$. Compruebo: $3 + 2 = 5$ ✓ y $3 - 2 = 1$ ✓. La solución es $(3, 2)$.

- 1 Comprueba si cada par es solución del sistema $x + y = 7$ y $x - y = 1$.

Par (x, y)	$x + y$	$x - y$	¿Es solución?
$(4, 3)$			
$(5, 2)$			

- 2 Resuelve por reducción (suma o resta) y comprueba.

Sistema	Suma o resta	x	y	Comprobación
$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$				
$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$				

- 3 Resuelve por sustitución y comprueba.

Sistema	Sustitución	x	y	Comprobación
$\begin{cases} y = x + 2 \\ x + y = 10 \end{cases}$				
$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 9 \end{cases}$				

ANEXO
9

Actividad de ampliación

SdA 7 · Dos incógnitas, una decisión

ALUMNADO

Nombre:

Curso/grupo:

Fecha:

Diseñamos un sistema con historia

Un buen problema empieza por la solución. Vamos a inventar un sistema cuya solución tenga una interpretación concreta y a resolverlo por dos métodos para compararlos.

Pasos

- 1
- Elige una situación de compra y unos precios secretos. Por ejemplo, en un parque: entrada de adulto 7 € y de niño 5 €.
- 2
- Inventa dos compras distintas y calcula el total de cada una (por ejemplo, 3 adultos y 2 niños; 2 adultos y 3 niños). Obtienes un sistema.
- 3
- Intercambia el sistema (sin los precios) con otra pareja y resuelve el suyo por sustitución.
- 4
- Resuelve ahora el sistema de la otra pareja, y el tuyo, por reducción.
- 5
- Compara los dos métodos: ¿cuál ha sido más corto? ¿en qué sistema te ha convenido más uno que otro? Justifícalo.

1 **Tabla de trabajo.**

Compra 1	Compra 2	Sistema	Solución por sustitución	Solución por reducción
Adultos: ____ Niños: ____ Total: ____				
Adultos: ____ Niños: ____ Total: ____				

Entrega

Una página con el sistema diseñado, su historia, las dos resoluciones y una conclusión sobre cuándo conviene cada método.

 Ficha 1

1. Diagnóstico: $16 (2 \cdot 3 + 10)$; $x = 6 (3x - 2x = 6)$; $7 (7 + 5 = 12)$.
2. RuedaLibre ($2x + 10$): 12, 14, 18, 22, 26 € para 1, 2, 4, 6, 8 horas. Pedalea ($3x + 4$): 7, 10, 16, 22, 28 €. Más barata: Pedalea, Pedalea, Pedalea, igual (6 h), RuedaLibre.
3. $2x + 10 = 3x + 4 \rightarrow 10 - 4 = 3x - 2x \rightarrow x = 6$. Con 6 horas los dos cuestan $2 \cdot 6 + 10 = 22$ € y $3 \cdot 6 + 4 = 22$ €.
4. V ($3 \cdot 3 + 4 = 13 < 16$); V (22 y 22); V ($26 < 28$); F (a partir de 7 horas es más cara); V ($7 < 12$).

 Ficha 2

1. RuedaLibre: 10, 14, 18, 22, 26, 30 € para $x = 0, 2, 4, 6, 8, 10$. Pedalea: 4, 10, 16, 22, 28, 34 €.
2. Las dos rectas se cortan en (6, 22). RuedaLibre sale del punto (0, 10) y Pedalea de (0, 4); Pedalea tiene más pendiente (3 frente a 2).
3. El punto de corte (6, 22) significa que con 6 horas los dos planes cuestan 22 €. Con menos de 6 horas conviene Pedalea (su recta está debajo); con más de 6, RuedaLibre.
4. 4 horas: Pedalea, 16 € frente a 18 €, ahorra 2 €. 9 horas: RuedaLibre, 28 € frente a 31 €, ahorra 3 €.

 Ficha 3

1. $2x + (x + 3) = 18 \rightarrow 3x + 3 = 18 \rightarrow 3x = 15 \rightarrow x = 5$; $y = 5 + 3 = 8$; comprobación $2 \cdot 5 + 8 = 18$ y $8 = 5 + 3$.
2. S1: $x = y + 2$; $(y + 2) + y = 12 \rightarrow 2y = 10 \rightarrow y = 5$, $x = 7$ ($7 + 5 = 12$ y $7 = 5 + 2$). S2: $3x - 2 = x + 6 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4$, $y = 10$ ($10 = 3 \cdot 4 - 2$ y $10 = 4 + 6$). S3: $2x + (x + 1) = 13 \rightarrow 3x = 12 \rightarrow x = 4$, $y = 5$ ($8 + 5 = 13$ y $5 = 4 + 1$).
3. (2, 5): $2 + 5 = 7$ y $2 \cdot 2 - 5 = -1$, sí es solución. (3, 4): $3 + 4 = 7$ pero $2 \cdot 3 - 4 = 2 \neq -1$, no es solución.
4. Al sustituir $y = 2x$ en $x + y = 9$ queda $x + 2x = 3x = 9$, no $2x$; el error es sumar mal los términos semejantes. Solución: $x = 3$, $y = 6$ ($3 + 6 = 9$ y $6 = 2 \cdot 3$).

 Ficha 4

1. S1: sumo, $2x = 16$, $x = 8$, $y = 4$ ($8 + 4 = 12$ y $8 - 4 = 4$). S2: resto, $x = 4$, $y = 3$ ($8 + 3 = 11$ y $4 + 3 = 7$). S3: sumo, $4x = 20$, $x = 5$, $y = 2$ ($15 + 4 = 19$ y $5 - 4 = 1$). S4: resto, $4y = 8$, $y = 2$, $x = 3$ ($6 + 6 = 12$ y $6 - 2 = 4$).
2. Q2: x = monedas de 1 €, y = monedas de 2 €. $x + y = 20$ y $x + 2y = 27$. Resto: $y = 7$ y $x = 13$. Comprobación: $13 + 7 = 20$ y $13 + 14 = 27$. Hay 13 monedas de 1 € y 7 de 2 €.
3. Q1: $3a + 2n = 31$ y $2a + 3n = 29$. Sumo: $5a + 5n = 60$, $a + n = 12$. Resto: $a - n = 2$. Entonces $a = 7$ y $n = 5$. Comprobación: $21 + 10 = 31$ y $14 + 15 = 29$. La entrada de adulto cuesta 7 € y la de niño 5 €.
4. Si dos igualdades son ciertas, al sumar lo mismo a los dos lados de una y a los dos lados de la otra la igualdad se conserva: se suma a la izquierda y a la derecha cantidades que son iguales entre sí.

Ficha 5

1. S1: $x + 1 = 3x - 1 \rightarrow x = 1, y = 2$: una solución, gráfica a). S2: $2x + 1 = 2x + 4 \rightarrow 1 = 4$, imposible: ninguna solución, gráfica b). S3: la segunda ecuación es el doble de la primera: infinitas soluciones, gráfica c).
2. una; ninguna; infinitas.
3. Las dos tarifas tienen el mismo precio por mes (5 €) y distinta cuota: $15 + 5x$ siempre es 5 € menor que $5x + 20$. Son rectas paralelas y no se cortan.
4. Por ejemplo, $(0, 5)$: $0 + 5 = 5$ y $0 + 10 = 10$; $(2, 3)$: $5 = 5$ y $4 + 6 = 10$. Sirve cualquier par con $x + y = 5$.

Ficha 6

1. 2 h: 14 € y 10 €, conviene Pedalea, ahorro 4 €. 4 h: 18 € y 16 €, Pedalea, 2 €. 6 h: 22 € y 22 €, igual, 0 €. 8 h: 26 € y 28 €, RuedaLibre, 2 €.
2. Respuesta modelo: «Para rutas de menos de 6 horas recomendamos Pedalea; para rutas de más de 6 horas, RuedaLibre. Con exactamente 6 horas, las dos cuestan 22 €.»
3. Nuevo sistema: $y = 2x + 10$ e $y = 3x + 6$. Igual: $2x + 10 = 3x + 6, x = 4, y = 18$. El punto de corte pasa a $(4, 18)$: Pedalea solo conviene en rutas de menos de 4 horas. Cambia la recomendación.
4. Revisión cruzada: se comprueba cada casilla y el equipo revisor señala al menos una mejora concreta.

Ficha 7

1. (a) Centro: $y = 2x + 8$; Plaza: $y = 4x$. (b) $2x + 8 = 4x \rightarrow 8 = 2x \rightarrow x = 4, y = 16$. (c) Con 4 horas los dos cuestan 16 €. (d) Con 3 horas: Centro 14 € y Plaza 12 €, conviene Plaza; con 6 horas: Centro 20 € y Plaza 24 €, conviene Centro.
2. Resto: $2x = 6, x = 3; y = 8 - 3 = 5$. Comprobación: $9 + 5 = 14$ y $3 + 5 = 8$.
3. A: incorrecta; al sustituir en $x + y = 10$ queda $y = 10 - 6 = 4$, no 6. Solución $(6, 4)$. B: correcta ($4 + 6 = 10$ y $6 = 4 + 2$). C: incorrecta; $2x + 1 = 2x - 3$ da $1 = -3$, imposible: no tiene solución (rectas paralelas).
4. $a + n = 10$ y $a = n + 3$: $2n + 3 = 10, n = 3,5$ y $a = 6,5$. La solución del sistema es correcta, pero no tiene sentido: no puede haber 3,5 niños. Con esos datos el problema no tiene solución válida.

Refuerzo

1. $(4, 3)$: $4 + 3 = 7$ y $4 - 3 = 1$, sí. $(5, 2)$: $5 + 2 = 7$ pero $5 - 2 = 3 \neq 1$, no.
2. $x + y = 9, x - y = 3$: sumo, $2x = 12, x = 6, y = 3$. $x + y = 10, x - y = 2$: sumo, $2x = 12, x = 6, y = 4$.
3. $y = x + 2$: $x + x + 2 = 10, x = 4, y = 6$. $x = 2y$: $2y + y = 9, y = 3, x = 6$.

Ampliación

1. Respuesta abierta. Ejemplo con precios 7 € y 5 €: $3a + 2n = 31$ y $2a + 3n = 29$. Sustitución: $a = \frac{31-2n}{3}$ y se obtiene $n = 5, a = 7$. Reducción: sumando y restando se obtiene directamente $a + n = 12$ y $a - n = 2$.
2. Se valora que las compras den un sistema con solución única, que las dos resoluciones coincidan y que la comparación sea razonada: la reducción es más rápida cuando los coeficientes se anulan o se suman bien; la sustitución es mejor cuando una letra ya está despejada.

⚠ Errores frecuentes

- Calcular solo una de las incógnitas y olvidar la otra, o no comprobar en las dos ecuaciones.
- Al sustituir, perder términos o sumar mal los términos semejantes ($x + 2x = 2x$).
- En la reducción, restar solo un término de la ecuación o equivocarse con el signo ($-2y - (-2y)$).
- Interpretar la solución sin unidades o sin comprobar que tiene sentido (personas negativas o con decimales).
- Concluir que un sistema «tiene una solución» cuando al resolver aparece una igualdad imposible como $1 = -3$.
- Creer que la tarifa con menor cuota es siempre la más barata.

⚖ Criterios para valorar respuestas abiertas

- Se acepta cualquier letra siempre que esté definida y coincida con el enunciado.
- Se valora que la solución se compruebe en las dos ecuaciones y se interprete con unidades.
- En las tareas abiertas (informe, ampliación) se acepta cualquier contexto realista si el sistema coincide con la historia y la solución está comprobada.
- Se puede usar GeoGebra o una hoja de cálculo para representar las rectas, pero el método algebraico debe estar escrito.

08

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

La matemática de los planos



PREGUNTA GUÍA

¿Cómo podemos calcular una medida que no aparece directamente en un plano?CURSO
2.º ESOSESIONES
8 sesiones · 2.º-3.º trimestreSENTIDOS PRIORITARIOS
B · Sentido de la medida · C ·
Sentido espacialCOMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE3, CE6, CE7, CE8PRODUCTO FINAL
Plano técnico simplificado y
memoria de medidasCRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 1.2, 3.1, 6.1, 7.1, 8.1

Contexto, reto y sentido

El instituto va a convertir un antiguo almacén en el **Espacio Maker**: un taller con mesas de trabajo, impresora 3D y un depósito de agua de lluvia para limpiar herramientas. La oficina técnica solo ha dejado un plano en planta a escala 1:100 con unas pocas cotas, y el equipo directivo necesita saber ya cuánto suelo hay que comprar, cuánta pintura, cuánto mide una cinta de señalización en diagonal y cuánta agua cabe en el depósito. Nadie puede ir con la cinta métrica a todas partes: hay que calcular las medidas que no aparecen en el plano.

La situación moviliza el sentido de la medida y el espacial: leer y usar escalas, razonar con la semejanza (y descubrir que longitudes, áreas y volúmenes no se escalan igual), aplicar el teorema de Pitágoras, descomponer figuras para calcular áreas y calcular volúmenes y capacidades. El producto final es un plano técnico simplificado con su memoria de medidas, que debe poder revisar otro equipo.

Reto

Elaborar el plano a escala del Espacio Maker y una memoria de medidas que calcule, con la escala, la semejanza, Pitágoras, las áreas y los volúmenes, las medidas que no aparecen en el plano, comprobando cada resultado.

Producto final

Plano técnico simplificado y memoria de medidas.



Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.
- CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- 1.1** Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.
- 1.2** Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.
- 3.1** Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.
- 6.1** Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.
- 7.1** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales.
- 8.1** Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, oralmente y por escrito, al explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.

Saberes básicos prioritarios

B

Sentido de la medida

- Escalas: interpretación de planos y conversión entre medidas del plano y medidas reales.
- Unidades de longitud, superficie, volumen y capacidad, y sus equivalencias ($1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$).
- Áreas de figuras planas compuestas por suma y por resta de trozos.
- Volumen de prismas, cilindros y pirámides; capacidad de un depósito.
- Estimación y comprobación de la razonabilidad de una medida; redondeo y errores.

C

Sentido espacial

- Figuras semejantes: razón de semejanza y su relación con las razones de longitudes, áreas y volúmenes.
- Teorema de Pitágoras: significado geométrico y aplicación al cálculo de longitudes desconocidas.
- Triángulos semejantes y medida indirecta de alturas mediante sombras.
- Representación a escala de un espacio y descomposición de figuras con líneas auxiliares.

F

Sentido socioafectivo

- Perseverancia en problemas de varias etapas y valoración del error como fuente de información.
- Trabajo en equipo con revisión cruzada de las medidas.



Objetivos didácticos

- ✓ Aplicar escalas y semejanza.
- ✓ Usar Pitágoras en triángulos rectángulos.
- ✓ Calcular áreas y volúmenes de figuras/cuerpos compuestos sencillos.
- ✓ Justificar decisiones de medida y precisión.



Metodología y papel docente

🔗 Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

🔗 Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

🔗 Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

🔗 Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

🎓 Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.



Secuencia de sesiones y actividades

- ① Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Lectura de plano y escala

 **Evidencia:** Ficha 1: diagnóstico, conversión de medidas del plano a reales, tramos sin cota y comparación de escalas 1:50, 1:100 y 1:200.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Semejanza y razones de longitudes

 **Evidencia:** Ficha 2: razón de semejanza entre plano y realidad, ampliación al 150 %, tabla del cubo con $k = 1, 2, 3$ y conjetura sobre k, k^2 y k^3 .

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Pitágoras como relación entre lados

 **Evidencia:** Ficha 3: ternas pitagóricas, comprobación de triángulos rectángulos, diagonales de la sala, escalera apoyada y escuadra de albañil.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Medidas indirectas en plano

 **Evidencia:** Ficha 4: alturas por sombras (farola, árbol, poste), distancia entre extremos con Pitágoras y diagonal medida en el plano.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Áreas compuestas

 **Evidencia:** Ficha 5: área de la sala en L por suma y por resta, perímetro, coste del suelo, pintura de paredes y mesa con semicírculos.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Volúmenes y capacidad

 **Evidencia:** Ficha 6: volumen y capacidad de aljibe, bidón, aire de la sala y tolva; conversiones, lluvia recogida y maqueta a escala.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Diseño del plano

 **Evidencia:** Ficha 7: tabla de mobiliario, borrador del plano a escala en cuadrícula, memoria de medidas y revisión cruzada.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 7

8

SESIÓN 8

Defensa y comprobación individual

 **Evidencia:** Ficha 8: problema individual de transferencia (sala 12×9 m), medida indirecta con sombras y explicación de por qué el área no escala como la longitud.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 8

**Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad** **Recursos**

Plano ficticio

regla

cinta métrica

cuerpos/plantillas

geometría dinámica opcional

 Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.

**DUA y atención a la diversidad** **Implicación**

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

 Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

 Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

 Refuerzo **Anexo 8**

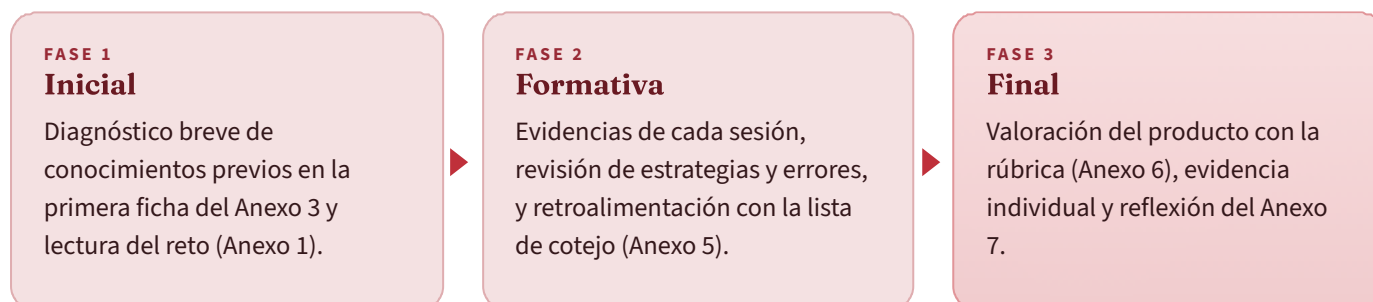
Triángulos pitagóricos conocidos y figuras descompuestas con líneas auxiliares.

 Ampliación **Anexo 9**

Optimizar una distribución espacial con restricción de superficie o volumen.

Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.



Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Lectura del plano F1: selección de cotas útiles, identificación de los tramos sin cota y organización de los datos del problema.	Ficha 1 y Ficha 8 / lista de cotejo
1.2	Elección de la estrategia adecuada en cada medida (escala, semejanza, Pitágoras, descomposición de áreas, fórmula de volumen).	Fichas 3, 4, 5 y 6 / escala de valoración
3.1	Formulación y comprobación de la conjetura sobre cómo cambian longitud, área y volumen con la razón de semejanza k .	Ficha 2 y Anexo 9 / rúbrica
6.1	Modelización del Espacio Maker: paso de la sala real a un plano y de las necesidades (suelo, pintura, agua) a cálculos con medidas.	Fichas 5, 6 y 7 / rúbrica
7.1	Plano a escala rotulado, esquemas con líneas auxiliares y tabla de la memoria de medidas.	Plano y memoria (Anexo 4), Ficha 7 / rúbrica
8.1	Explicación escrita y oral de cada resultado con unidades y lenguaje matemático (razón, hipotenusa, escala), y justificación de por qué el área no escala como la longitud.	Ficha 8 y defensa del plano / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Plano, cálculos, memoria y problema de transferencia.

Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.



Variantes de aplicación

↗ Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

↘ Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 8 · La matemática de los planos

ALUMNADO

El instituto tiene un almacén vacío y un plano a escala 1:100 con apenas cuatro cotas. Las mesas, la impresora 3D y un depósito de lluvia tienen que caber ahí dentro, y el centro debe pedir ya el suelo, la pintura y el aljibe. Vuestro compañero Hugo mide con la regla un tramo del plano y dice: «¡8 centímetros! Entonces la sala mide 8 centímetros». ¿Qué le falta? ¿Y cómo se calcula una diagonal que no se puede medir sin cruzar la sala? Vais a ser la oficina técnica del Espacio Maker: leer el plano, calcular lo que falta y firmar una memoria de medidas que otro equipo pueda revisar.

“ ¿Cómo podemos calcular una medida que no aparece directamente en un plano? ”

🎯 Vuestro reto

Elaborar el plano a escala del Espacio Maker y una memoria de medidas que calcule, con la escala, la semejanza, Pitágoras, las áreas y los volúmenes, las medidas que no aparecen en el plano, comprobando cada resultado.

📦 Lo que vais a producir

Plano técnico simplificado y memoria de medidas.

📍 Hoja de ruta · 8 sesiones

- 1 Leemos el plano F1 y pasamos del papel a la realidad con la escala.
- 2 Descubrimos qué pasa con longitudes, áreas y volúmenes al cambiar de escala.
- 3 Usamos Pitágoras para medir lo que no se puede medir con la cinta.
- 4 Calculamos alturas con sombras y distancias con Pitágoras.
- 5 Descomponemos la sala en figuras para calcular suelo y pintura.
- 6 Calculamos volúmenes y capacidades: aljibe, aire y maqueta.
- 7 Dibujamos el plano a escala y redactamos la memoria de medidas.
- 8 Defendemos el plano y resolvemos un problema nuevo en solitario.

📋 Al terminar seré capaz de...

- ✓ Aplicar escalas y semejanza.
- ✓ Usar Pitágoras en triángulos rectángulos.
- ✓ Calcular áreas y volúmenes de figuras/cuerpos compuestos sencillos.
- ✓ Justificar decisiones de medida y precisión.

📋 ¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

Dossier de fuentes y materiales base

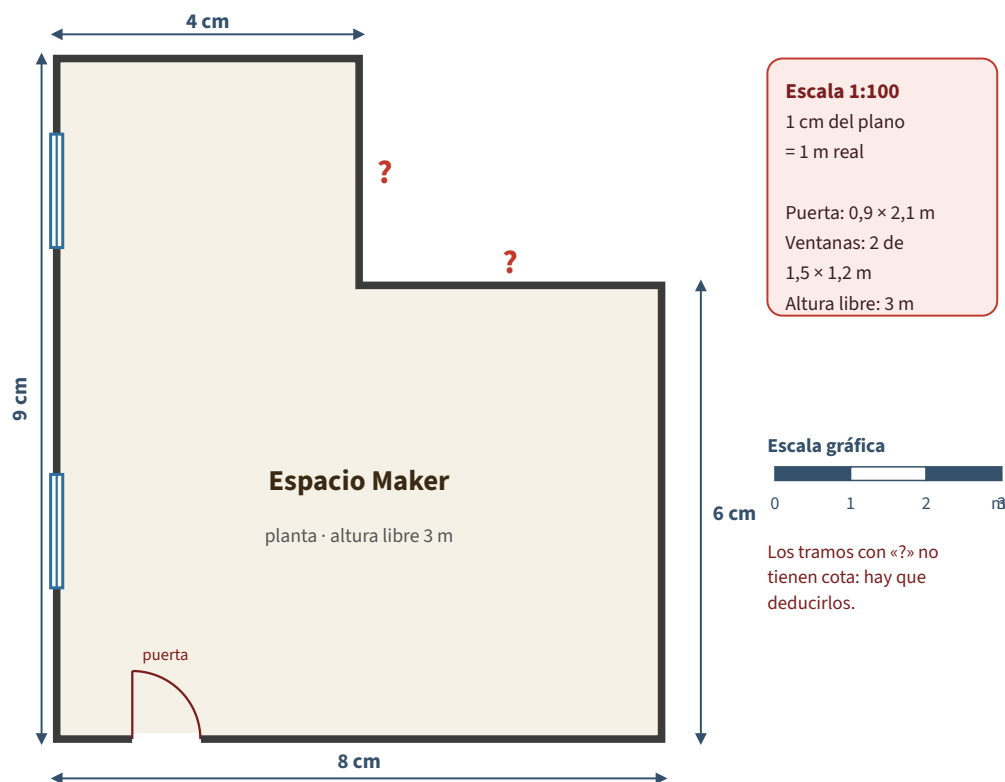
SdA 8 · La matemática de los planos

ALUMNADO

El plano de la sala, escalas, semejanza, Pitágoras, sombras, un ejemplo resuelto de área compuesta, fórmulas de volumen y los requisitos y precios del proyecto. La sala, las medidas y los precios son ficticios, creados para el aula.

F1 Plano en planta del Espacio Maker (escala 1:100)

ESQUEMA



Fuente: Plano ficticio creado para el aula. Dibujado a escala 1:100: 1 cm del plano equivale a 1 m real.

¿Qué medidas necesitas que no están? Los dos tramos con «?» no tienen cota. Si tu regla no coincide con la impresión, fíate de la escala gráfica.

F2 Escalas habituales en planos

DATOS

Escala	1 cm del plano equivale a...	Medida real = medida del plano ×	Uso típico
1:50	50 cm = 0,5 m	50	Detalle de una habitación
1:100	100 cm = 1 m	100	Planta de una vivienda o aula
1:200	200 cm = 2 m	200	Edificio o parcela pequeña
1:500	500 cm = 5 m	500	Manzana o calle

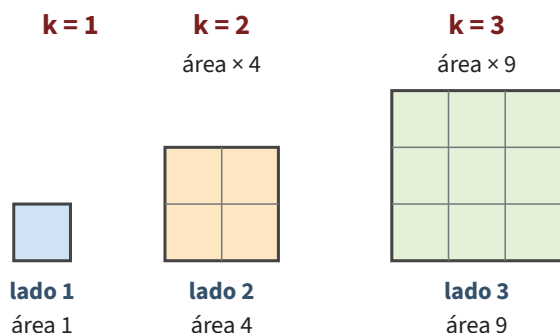
Una escala **1:100** significa que cada medida del plano es 100 veces más pequeña que la real. Para pasar del plano a la realidad se **multiplica**; para pasar de la realidad al plano se **divide**.

Fuente: Elaboración propia.

🔍 Cuidado con las unidades: $3,5 \text{ cm del plano} \times 100 = 350 \text{ cm reales} = 3,5 \text{ m}$.

F3 Figuras semejantes: longitud, área y volumen

ESQUEMA



Si la razón de semejanza es k:

- las longitudes se multiplican por k
- las áreas se multiplican por k^2
- los volúmenes se multiplican por k^3

Escala 1:100 $\rightarrow$ k = 100 (en longitud)

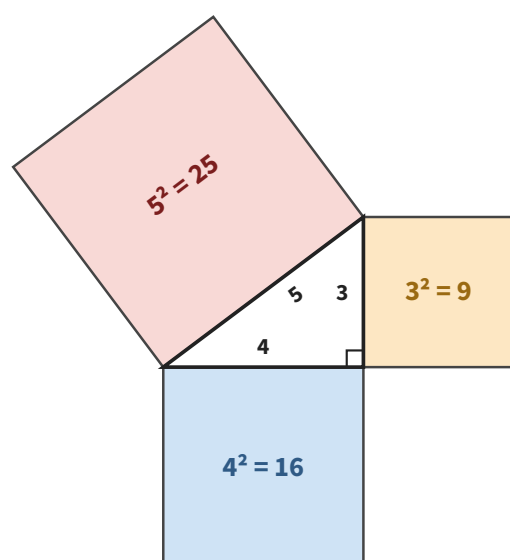
$1 \text{ cm}^2 \text{ del plano} = 10\,000 \text{ cm}^2 \text{ reales}$
porque $100^2 = 10\,000$

Fuente: Esquema de elaboración propia.

🔍 Dos figuras son **semejantes** si tienen la misma forma: ángulos iguales y lados proporcionales. ¿Qué tres números aparecen cuando el lado se multiplica por k = 1, 2 y 3?

F4 El teorema de Pitágoras: los tres cuadrados

ESQUEMA



Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo:
catetos a, b (forman el ángulo recto)
hipotenusa c (el lado más largo)

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

El área del cuadrado grande es la suma de las áreas de los otros dos.

Fuente: Esquema de elaboración propia.

🔍 Comprueba con regla y cuadrícula que $9 + 16 = 25$. Si el triángulo no es rectángulo, la igualdad no se cumple.

F5 Ternas pitagóricas habituales

DATOS

Catetos a, b	Hipotenusa c	$a^2 + b^2$	c^2
3 y 4	5	$9 + 16 = 25$	25
6 y 8	10	$36 + 64 = 100$	100
5 y 12	13	$25 + 144 = 169$	169
8 y 15	17	$64 + 225 = 289$	289
7 y 24	25	$49 + 576 = 625$	625

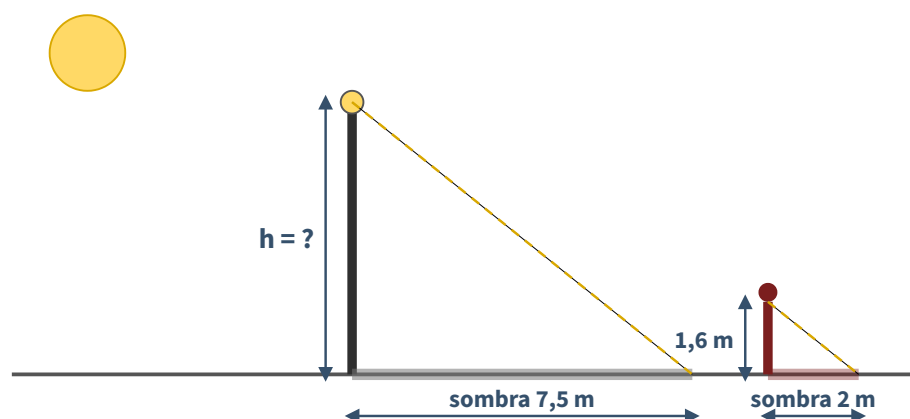
Los múltiplos de una terna también lo son: si 3, 4, 5 funciona, 6, 8, 10 y 9, 12, 15 también. Los albañiles usan la terna 3, 4, 5 (o 60, 80, 100 cm) para comprobar que una esquina es **recta**.

Fuente: Elaboración propia.

🔍 Si $c^2 > a^2 + b^2$, el ángulo opuesto a c es mayor que 90° ; si $c^2 < a^2 + b^2$, es menor.

F6 Medir una altura con una sombra

ESQUEMA



A la misma hora,
los rayos del Sol
son paralelos y los
dos triángulos
(objeto, sombra y rayo)
son semejantes:

$$h / 7,5 = 1,6 / 2$$

Fuente: Esquema de elaboración propia; altura y sombras dibujadas a la misma escala.

🔍 Con la proporción de la derecha, calcula h (no hace falta subir a la farola).

F7 Fórmulas de área y volumen

TEXTO

Áreas. Rectángulo: $A = b \cdot h$. Triángulo: $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Círculo: $A = \pi r^2$. Superficie de una pared: largo · alto.

Volúmenes. Prisma o cilindro: $V = A_{\text{base}} \cdot h$ (cilindro: $V = \pi r^2 h$). Pirámide: $V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h$.

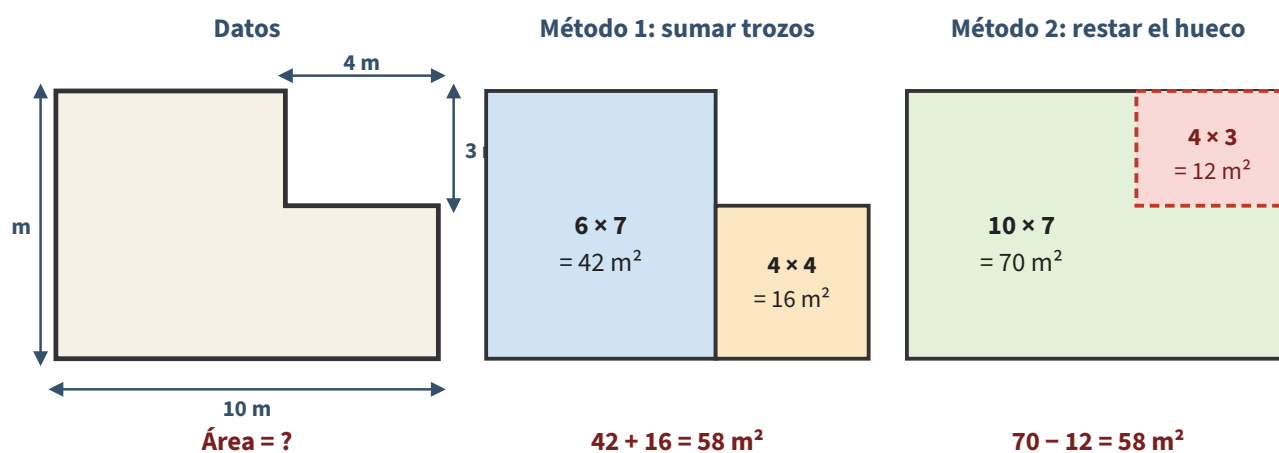
Capacidad. $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$; $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$. Para la lluvia: **1 mm de lluvia sobre 1 m² recoge 1 L.**

Fuente: Elaboración propia.

🔍 Antes de calcular, pasa todas las medidas a la misma unidad (por ejemplo, metros).

F8 Ejemplo resuelto: área de una figura compuesta

ESQUEMA



Fuente: Ejemplo de elaboración propia con una figura distinta a la del plano.

🔍 Los dos métodos dan el mismo resultado: 58 m^2 . Si no coinciden, hay un error. ¿Con cuál de los dos se cometen menos errores en la sala L del plano?

F9 Requisitos y precios del proyecto

DATOS

Concepto	Dato	Uso
Suelo vinílico	18 € por m ²	Se compra por m ² exactos (sin merma).
Pintura	Bote de 4 L: 22 €; rinde 10 m ² por litro y mano	Se dan 2 manos; se compran botes enteros.
Puerta y ventanas	Puerta 0,9 m × 2,1 m; 2 ventanas de 1,5 m × 1,2 m	No se pintan.
Aljibe de agua de lluvia	Prisma de 2 m × 1,5 m × 1,2 m	Almacén de agua para limpiar herramientas.
Mobiliario	4 mesas de 2 m × 1 m; 1 armario de 1 m × 0,5 m; 1 mesa de impresora de 1,5 m × 0,8 m	Debe ocupar como máximo el 40 % del suelo.
Presupuesto	Suelo + pintura ≤ 1 400 €	Requisito del centro.

Fuente: Requisitos y precios ficticios creados para el aula.

🔍 El plano F1 aporta la forma de la sala; esta tabla aporta los demás datos.

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Usa el plano F1 y la tabla de escalas F2. Lo primero: ¿qué datos tengo y qué me falta?

1 Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.

Una escala 1:50 significa que 1 cm del plano representa...

☐ 50 cm reales ☐ 50 m reales ☐ 5 m reales

El área de un rectángulo de 8 m × 6 m es...

☐ 14 m² ☐ 48 m² ☐ 28 m²

El perímetro de un cuadrado de 5 m de lado es...

☐ 25 m ☐ 10 m ☐ 20 m

2 Completa la tabla con las cotas de F1 y con los dos tramos con «?». Explica cómo obtienes los tramos sin cota.

Tramo	En el plano (cm)	Cómo lo obtengo	En la realidad (m)
Lado inferior			
Lado derecho			
Lado izquierdo			
Lado superior			
Tramo horizontal «?»			
Tramo vertical «?»			

3 Un muro real mide 12 m. ¿Cuántos centímetros medirá en un plano a escala 1:50, 1:100 y 1:200?

Escala	Operación	Medida en el plano (cm)
1:50		
1:100		
1:200		

- 4 En un plano a 1:100, un pasillo mide 3,5 cm. ¿Cuánto mide en realidad? Una mesa real de 1,2 m, ¿cuánto medirá en el plano? Escribe las operaciones con sus unidades.

FICHA 2 Semejanza: longitudes, áreas y volúmenes

Sesión 2

Usa F3 y F1. Conjetura primero y comprueba después con números.

- 1 El rectángulo principal de la sala mide $8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ en el plano (1:100) y $8 \text{ m} \times 6 \text{ m}$ en la realidad. Completa la tabla en centímetros y calcula cuántas veces es mayor lo real.

Magnitud	En el plano	En la realidad	Veces mayor
Lado largo			
Lado corto			
Área			

- 2 Una pieza del plano es un triángulo de lados 6, 8 y 10 cm. Se fotocopia ampliada al 150 % ($k = 1,5$). Calcula los lados, el perímetro y el área antes y después. ¿Por cuánto se multiplica cada cosa?

- 3 Una maqueta cúbica de arista 2 cm se amplía con $k = 1, 2$ y 3 . Completa la tabla y escribe una conjetura sobre cómo cambian la longitud, el área de una cara y el volumen. Compruébala con $k = 10$.

k	Arista (cm)	Área de una cara (cm^2)	Volumen (cm^3)
1			
2			
3			
10			

4 Verdadero o falso. Corrige las falsas.

	V	F
Dos cuadrados cualesquiera son semejantes.	☐	☐
Si la razón de semejanza es 3, el área se multiplica por 3.	☐	☐
Los rectángulos de 4×6 y 6×9 son semejantes.	☐	☐
Los rectángulos de 4×6 y 5×8 son semejantes.	☐	☐
En un plano a 1:100, 1 cm^2 del plano representa 100 cm^2 reales.	☐	☐

FICHA 3

Pitágoras: medir lo que no se puede medir

Sesión 3

Usa F4 y F5. Dibuja siempre el triángulo y marca cuál es la hipotenusa.

1 Calcula el lado que falta de cada triángulo rectángulo. Comprueba con F5 cuando sea una terna conocida.

Catetos / hipotenusa	Planteamiento	Lado que falta
$a = 6, b = 8, c = ?$		
$a = 5, b = ?, c = 13$		
$a = ?, b = 24, c = 25$		
$a = 9, b = 12, c = ?$		

2 Decide si cada triángulo es rectángulo comprobando $a^2 + b^2 = c^2$ con el lado mayor como c .

Lados	$a^2 + b^2$	c^2	¿Es rectángulo?
7, 24, 25			
6, 7, 9			
8, 15, 17			

3 Aplica Pitágoras en el Espacio Maker. a) Se pega una cinta de señalización en diagonal sobre el suelo del rectángulo principal ($8 \text{ m} \times 6 \text{ m}$) y otra en el anexo ($4 \text{ m} \times 3 \text{ m}$). ¿Cuántos metros de cinta hacen falta? b) Una escalera de $2,6 \text{ m}$ se apoya en una pared y alcanza $2,4 \text{ m}$ de altura. ¿A qué distancia de la pared está su pie?

- 4 Un albañil marca 0,6 m en un lado de una esquina y 0,8 m en el otro, y mide 1,05 m entre las dos marcas. ¿Es recta la esquina? Si no lo es, ¿es mayor o menor que 90° ? Razónalo con F5.

FICHA 4 **Medidas indirectas**

Sesión 4

Usa F6, F5 y F1. Si dos triángulos son semejantes, sus lados son proporcionales.

- 1 En F6, una persona de 1,6 m proyecta 2 m de sombra y a la misma hora la farola proyecta 7,5 m. Completa la tabla, escribe la proporción y calcula la altura h de la farola.

Objeto	Altura (m)	Sombra (m)
Persona		
Farola		

- 2 A la misma hora, un árbol del patio proyecta 9 m de sombra. ¿Qué altura tiene? Explica por qué no importa a qué hora se mida mientras sea la misma para los dos objetos.

- 3 Una varilla de 1 m proyecta 0,75 m de sombra y un poste proyecta 3 m a la misma hora. Calcula la altura del poste y, con Pitágoras, la distancia entre la punta de su sombra y su punta.

- 4
- En F1, la diagonal del rectángulo principal medida con regla en el plano es de 10 cm. ¿Cuántos metros reales son? Compruébalo calculando la diagonal con Pitágoras a partir de las cotas del plano.
-
-
-
-
-

FICHA 5

Áreas compuestas

Sesión 5

Usa F1, F8 y F9. Descompón la figura con líneas auxiliares: por suma y por resta.

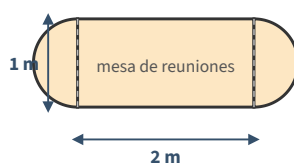
- 1
- Calcula el área del suelo del Espacio Maker (F1) por dos métodos y comprueba que coinciden.

Método	Trozos / dibujo	Cálculo	Área (m²)
Sumar trozos			
Restar el hueco			

- 2
- Calcula el perímetro de la sala (suma de todos los lados reales) y la superficie total de sus paredes si la altura libre es 3 m.

- 3
- Con los datos de F9, calcula el coste del suelo y el de la pintura (restando puerta y ventanas, con 2 manos y botes enteros). ¿Se cumple el presupuesto de 1 400 €?

- 4 La mesa de reuniones tiene un rectángulo de $2\text{ m} \times 1\text{ m}$ y dos semicírculos de radio $0,5\text{ m}$. Calcula su área con $\pi \approx 3,14$ y redondea a centésimas.



FICHA 6 Volúmenes y capacidad

Sesión 6

Usa F7 y F9. Pasa primero todas las medidas a metros; luego, de m^3 a litros.

- 1 Completa la tabla (usa $\pi \approx 3,14$ y redondea los litros).

Cuerpo	Datos	Volumen (m^3)	Capacidad (L)
Aljibe (prisma)	$2\text{ m} \times 1,5\text{ m} \times 1,2\text{ m}$		
Bidón (cilindro)	radio $0,25\text{ m}$, altura 1 m		
Aire de la sala (prisma de base en L)	área de F1 y altura 3 m		
Tolva (pirámide)	base cuadrada de 1 m de lado, altura $1,2\text{ m}$		

- 2 Completa las equivalencias.

$$2,5\text{ m}^3 = \underline{\hspace{2cm}}\text{ L}$$

$$750\text{ L} = \underline{\hspace{2cm}}\text{ m}^3$$

$$3\,600\text{ L} = \underline{\hspace{2cm}}\text{ m}^3$$

$$0,04\text{ m}^3 = \underline{\hspace{2cm}}\text{ L}$$

- 3 El tejado del Espacio Maker tiene 60 m^2 y recoge una tormenta de 20 mm . ¿Cuántos litros llegan al aljibe? ¿Cuántas tormentas iguales llenan el aljibe vacío?

- 4 Se construye una maqueta del aljibe a escala 1:10. Calcula sus medidas, su volumen en litros y compáralo con el real. ¿Por qué factor se divide el volumen?

FICHA 7

Diseñamos el plano y la memoria

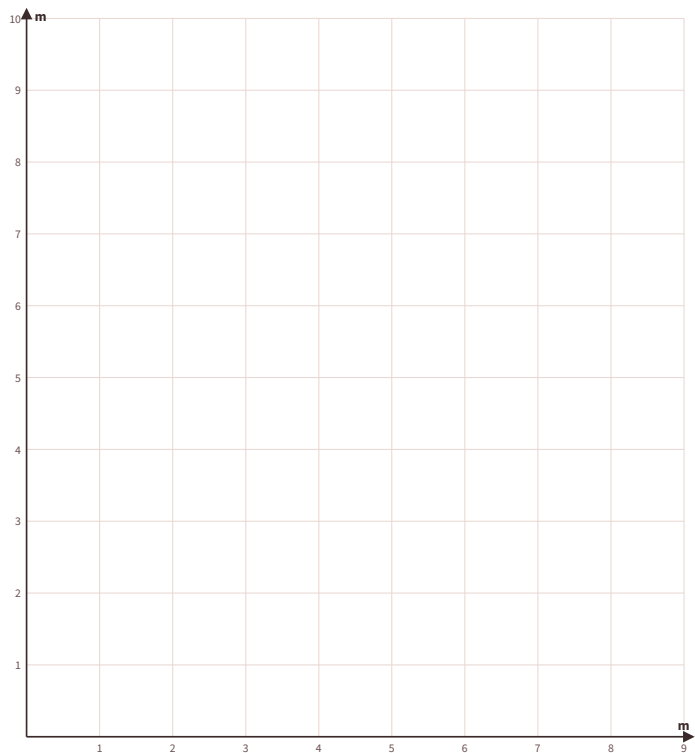
Sesión 7

Trabaja en equipo con roles: dibujante, calculista, comprobador y portavoz. Escala 1:100: 1 cuadro de la cuadrícula = 1 cm del plano = 1 m real.

- 1 Completa las medidas del mobiliario (F9) en la realidad y en el plano (escala 1:100) y calcula el área que ocupa. Después halla el porcentaje del suelo (60 m^2) que ocupa en total.

Objeto	Medidas reales (m)	Medidas en el plano (cm)	Área real (m^2)
4 mesas de trabajo	2×1 cada una		
Armario	$1 \times 0,5$		
Mesa de impresora	$1,5 \times 0,8$		
TOTAL			

2 Dibuja a escala 1:100 la planta de la sala (F1) y coloca el mobiliario cumpliendo que deje pasillos de al menos 1 m.



3 Rellena la memoria de medidas de vuestro plano.

Medida	Método	Cálculo	Resultado	Comprobación
Superficie del suelo				
Perímetro				
Diagonal del rectángulo principal				
Volumen de aire				
Capacidad del aljibe				

4 Revisión cruzada: otro equipo comprueba vuestro plano y memoria y los firma.

- ☐ La escala está indicada y las medidas del plano coinciden con las reales
- ☐ Todas las medidas llevan unidades
- ☐ Los tramos sin cota se han deducido y explicado
- ☐ Cada resultado tiene una comprobación por otro camino
- ☐ Se cumple el 40 % de ocupación y el presupuesto de 1 400 €

Resuelve sin ayuda del equipo. Escribe todos los pasos, con unidades.

- 1 Una sala rectangular de un gimnasio mide $12\text{ m} \times 9\text{ m}$ y tiene 4 m de altura. Se dibuja a escala $1:200$. Calcula: a) las medidas de la sala en el plano; b) la longitud real de la diagonal; c) el área real y el área en el plano; d) el volumen de aire en m^3 y en litros.

- 2 A la misma hora, un bastón de $1,5\text{ m}$ proyecta $1,2\text{ m}$ de sombra y un árbol, 6 m . ¿Qué altura tiene el árbol?

- 3 Una compañera dice: «Si el plano está a escala $1:100$, el área del plano es 100 veces más pequeña que la real». Explica si es cierto y pon un ejemplo numérico.

ANEXO
4

Plantilla del producto final

SdA 8 · La matemática de los planos

ALUMNADO

Nombre:

Curso/grupo:

Fecha:

Plano técnico simplificado del Espacio Maker y memoria de medidas. Cada medida calculada debe tener método, cálculo, resultado con unidades y comprobación.

Título, equipo y escala

Nombre del proyecto, integrantes, roles y escala del plano.

Plano a escala

Planta rotulada con cotas, puerta, ventanas y mobiliario (1 cuadro = 1 m).

Datos y supuestos

Cotas del plano, medidas deducidas y datos de F9.

Memoria de medidas

Medida · método · cálculo · resultado con unidades · comprobación.

Pitágoras y semejanza

Una medida indirecta con su esquema.

Áreas y volúmenes

Suelo, pintura y aljibe, con costes.

Conclusión y revisión

Cumple los requisitos de F9; firma del equipo revisor.

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 8 · La matemática de los planos

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Antes de entregar **Plano técnico simplificado y memoria de medidas**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- ☐ La escala está indicada y las medidas del plano se corresponden con las reales.
- ☐ Los tramos sin cota se han deducido a partir de las demás cotas y se explica cómo.
- ☐ Cada medida de la memoria indica el método (escala, semejanza, Pitágoras, descomposición o fórmula de volumen).
- ☐ El teorema de Pitágoras se aplica con la hipotenusa bien identificada.
- ☐ El área de la sala está calculada por suma o por resta de trozos y comprobada con el otro método.
- ☐ Los volúmenes están en m^3 y las capacidades en litros, con la conversión correcta.
- ☐ Todos los resultados llevan unidades y están redondeados con sentido.
- ☐ Se cumplen los requisitos de F9 (40 % de ocupación y presupuesto de 1 400 €).
- ☐ Otro equipo ha revisado la memoria y ha firmado la revisión.

Calidad y rigor

- ☐ He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- ☐ He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- ☐ He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- ☐ He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- ☐ He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

Rúbrica imprimible

SdA 8 · La matemática de los planos

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Rúbrica para valorar **Plano técnico simplificado y memoria de medidas**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

Autoevaluación y coevaluación

SdA 8 · La matemática de los planos

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé pasar medidas del plano a la realidad y al revés, y sé cómo cambian la longitud, el área y el volumen con la escala.	☐	☐	☐	☐
Elijo entre semejanza, Pitágoras o descomposición de figuras para calcular una medida que no puedo medir.	☐	☐	☐	☐
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	☐	☐	☐	☐
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	☐	☐	☐	☐
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	☐	☐	☐	☐
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	☐	☐	☐	☐

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo**Equipo evaluado:** _____**Fortaleza 1**

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

Material de apoyo y refuerzo

SdA 8 · La matemática de los planos

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Triángulos pitagóricos conocidos y figuras descompuestas con líneas auxiliares, con los pasos señalados.

⊗ Ejemplo modelado: figura en L con una línea auxiliar

Una figura en L es un rectángulo de 6×5 al que le falta un hueco de 3×2 . **Por restar:** $6 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 30 - 6 = 24 \text{ m}^2$. **Por sumar:** se traza una línea horizontal y salen un rectángulo de $6 \cdot 3 = 18$ y otro de $3 \cdot 2 = 6$: $18 + 6 = 24 \text{ m}^2$ ✓. Si los dos métodos coinciden, el resultado es fiable.

⊗ Glosario y símbolos esenciales

Escala 1:100: 1 cm del plano = 100 cm reales. **Cota:** número que indica una medida en el plano. **Cateto:** lado que forma el ángulo recto. **Hipotenusa:** lado opuesto al ángulo recto (el mayor). **Terna pitagórica:** tres números que cumplen $a^2 + b^2 = c^2$ (3, 4, 5; 6, 8, 10; 5, 12, 13; 8, 15, 17). **Capacidad:** $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$.

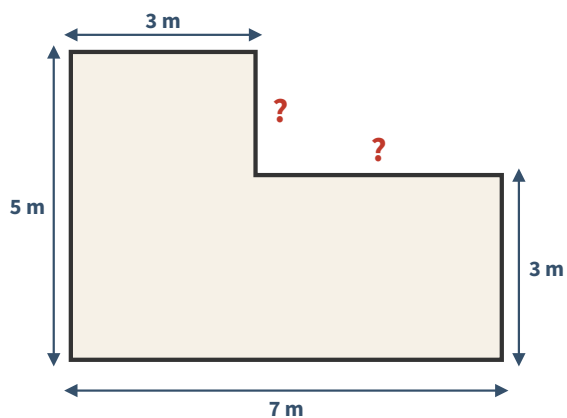
1 Escala 1:100. Completa pasando de unas medidas a otras.

En el plano	Operación	En la realidad
5 cm		
0,8 cm		
		3 m

2 Usa las ternas pitagóricas conocidas para completar el lado que falta.

Catetos	Hipotenusa	Terna usada
3 y 4	?	3, 4, 5
9 y 12	?	3, 4, 5 ($\times 3$)
5 y ?	13	5, 12, 13

- 3 Dibuja una línea auxiliar en la figura, calcula los lados que faltan (marcados con «?») y halla su área sumando dos rectángulos.



Actividad de ampliación

SdA 8 · La matemática de los planos

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

 Optimizar una zona de trabajo: ¿qué rectángulo da más superficie?

El equipo dispone de 20 m de cinta para delimitar en el suelo del rectángulo principal ($8\text{ m} \times 6\text{ m}$) una zona de trabajo rectangular, con los lados en metros enteros. Se quiere la mayor superficie posible.

 Pasos

- 1** Haz una tabla con todos los rectángulos de perímetro 20 m y lados enteros, calcula su área y marca los que caben en una sala de $8\text{ m} \times 6\text{ m}$.
- 2** ¿Qué rectángulo da el área máxima? Haz una conjetura sobre su forma.
- 3** Escribe los lados como $5 + d$ y $5 - d$ y explica con el área por qué el cuadrado es el mejor.
- 4** Generaliza: con un perímetro P cualquiera, ¿cuál es el área máxima y qué medidas tiene el rectángulo?

1 Tabla de rectángulos de perímetro 20 m.

Lado a (m)	Lado b (m)	Área (m^2)	¿Cabe en 8×6 ?
1			
2			
3			
4			
5			

 Entrega

Una tabla, la conjetura y su justificación con $5 + d$ y $5 - d$, y la regla general escrita para un perímetro P .

 Ficha 1

1. Diagnóstico: 50 cm reales; 48 m²; 20 m.
2. Tabla (plano → realidad, $\times 100$): lado inferior 8 cm → 800 cm = 8 m; lado derecho 6 cm → 6 m; lado izquierdo 9 cm → 9 m; lado superior 4 cm → 4 m; tramo horizontal «?»: $8 - 4 = 4$ cm → 4 m; tramo vertical «?»: $9 - 6 = 3$ cm → 3 m.
3. Escalas: $12 \text{ m} = 1\,200 \text{ cm}$; $1:50 \rightarrow 1\,200 : 50 = 24 \text{ cm}$; $1:100 \rightarrow 12 \text{ cm}$; $1:200 \rightarrow 6 \text{ cm}$.
4. Pasillo: $3,5 \cdot 100 = 350 \text{ cm} = 3,5 \text{ m}$. Mesa: $1,2 \text{ m} = 120 \text{ cm} \rightarrow 120 : 100 = 1,2 \text{ cm}$.

 Ficha 2

1. Tabla: lado largo 8 cm → 800 cm, 100 veces; lado corto 6 cm → 600 cm, 100 veces; área $8 \cdot 6 = 48 \text{ cm}^2 \rightarrow 800 \cdot 600 = 480\,000 \text{ cm}^2$, $480\,000 : 48 = 10\,000$ veces ($= 100^2$).
2. Triángulo 6-8-10 → lados 9, 12, 15; perímetro 24 → $36 (\times 1,5)$; área $\frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \rightarrow \frac{9 \cdot 12}{2} = 54 (\times 2,25 = 1,5^2)$.
3. Cubo: $k=1$: 2, 4, 8; $k=2$: 4, 16, 64; $k=3$: 6, 36, 216; $k=10$: 20, 400, 8 000. Conjetura: longitudes $\times k$, áreas $\times k^2$, volúmenes $\times k^3$ (con $k=10$: $4 \cdot 100 = 400$ y $8 \cdot 1\,000 = 8\,000$).
4. V, F (se multiplica por 9), V ($4/6 = 6/9 = 2/3$), F ($4/5 = 0,8 \neq 6/8 = 0,75$), F (1 cm² del plano son 10 000 cm² reales).

 Ficha 3

1. Tabla: $\sqrt{36 + 64} = 10$; $b = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$; $a = \sqrt{625 - 576} = 7$; $\sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$.
2. $49 + 576 = 625 = 25^2 \rightarrow$ sí; $36 + 49 = 85 \neq 81 \rightarrow$ no; $64 + 225 = 289 = 17^2 \rightarrow$ sí.
3. a) Diagonal principal $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ m; diagonal del anexo $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ m; total 15 m de cinta. b) $d = \sqrt{2,6^2 - 2,4^2} = \sqrt{6,76 - 5,76} = 1$ m.
4. Esquina: $0,6^2 + 0,8^2 = 0,36 + 0,64 = 1$, así que debería medir 1 m; mide 1,05 m ($1,05^2 = 1,1025 > 1$), luego no es recta: como $c^2 > a^2 + b^2$, el ángulo es mayor que 90°.

 Ficha 4

1. Persona 1,6 m, sombra 2 m; farola h , sombra 7,5 m. $\frac{h}{7,5} = \frac{1,6}{2} \rightarrow h = 7,5 \cdot 0,8 = 6$ m.
2. Árbol: $h = 9 \cdot 0,8 = 7,2$ m. Mientras los dos objetos se midan a la vez, los rayos del Sol tienen la misma inclinación y la razón altura/sombra es la misma (0,8); a otra hora cambiaría para ambos.
3. Poste: $\frac{h}{3} = \frac{1}{0,75} \rightarrow h = 4$ m. Distancia punta-punta: $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ m.
4. $10 \text{ cm} \times 100 = 1\,000 \text{ cm} = 10 \text{ m}$. Pitágoras: $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ m} \checkmark$.

Ficha 5

1. Sumar: $8 \cdot 6 + 4 \cdot 3 = 48 + 12 = 60 \text{ m}^2$. Restar: $8 \cdot 9 - 4 \cdot 3 = 72 - 12 = 60 \text{ m}^2$.
2. Perímetro: $8 + 6 + 4 + 3 + 4 + 9 = 34 \text{ m}$. Paredes: $34 \cdot 3 = 102 \text{ m}^2$.
3. Suelo: $60 \cdot 18 = 1\,080 \text{ €}$. Pintura: puerta $0,9 \cdot 2,1 = 1,89$; ventanas $2 \cdot 1,5 \cdot 1,2 = 3,6$; superficie $102 - 1,89 - 3,6 = 96,51 \text{ m}^2$. Dos manos: $193,02 \text{ m}^2$; litros $193,02 : 10 = 19,302 \text{ L}$; botes de 4 L: $19,302 : 4 = 4,83 \rightarrow 5$ botes; $5 \cdot 22 = 110 \text{ €}$. Total $1\,080 + 110 = 1\,190 \text{ €} \leq 1\,400 \text{ €} \checkmark$ (sobran 210 €).
4. Mesa: $2 \cdot 1 + \pi \cdot 0,5^2 = 2 + 3,14 \cdot 0,25 = 2 + 0,785 = 2,785 \approx 2,79 \text{ m}^2$ (los dos semicírculos forman un círculo de radio 0,5 m).

Ficha 6

1. Aljibe: $2 \cdot 1,5 \cdot 1,2 = 3,6 \text{ m}^3 = 3\,600 \text{ L}$. Bidón: $3,14 \cdot 0,25^2 \cdot 1 = 0,19625 \text{ m}^3 \approx 196 \text{ L}$. Aire: $60 \cdot 3 = 180 \text{ m}^3 = 180\,000 \text{ L}$. Tolva: $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1,2 = 0,4 \text{ m}^3 = 400 \text{ L}$.
2. $2,5 \text{ m}^3 = 2\,500 \text{ L}$; $750 \text{ L} = 0,75 \text{ m}^3$; $3\,600 \text{ L} = 3,6 \text{ m}^3$; $0,04 \text{ m}^3 = 40 \text{ L}$.
3. Tormenta: $60 \cdot 20 = 1\,200 \text{ L}$. Para llenar $3\,600 \text{ L}$ hacen falta $3\,600 : 1\,200 = 3$ tormentas iguales.
4. Maqueta 1:10: $0,2 \times 0,15 \times 0,12 \text{ m} = 0,0036 \text{ m}^3 = 3,6 \text{ L}$. El volumen se divide por $10^3 = 1\,000$ ($3\,600 : 1\,000 = 3,6 \text{ L}$).

Ficha 7

1. Mobiliario: mesas $2 \times 1 = 2 \text{ m}^2$ cada una, 8 m^2 las cuatro (plano $2 \times 1 \text{ cm}$); armario $0,5 \text{ m}^2$ ($1 \times 0,5 \text{ cm}$); mesa impresora $1,5 \cdot 0,8 = 1,2 \text{ m}^2$ ($1,5 \times 0,8 \text{ cm}$). Total $8 + 0,5 + 1,2 = 9,7 \text{ m}^2$; $9,7 : 60 \approx 0,162 = 16,2 \% \leq 40 \% \checkmark$.
2. Plano en cuadrícula: polígono de vértices (0,0), (8,0), (8,6), (4,6), (4,9), (0,9). Es válida cualquier distribución que respete las medidas a escala y los pasillos de 1 m.
3. Memoria esperada: suelo $48 + 12 = 60 \text{ m}^2$ (y $72 - 12$); perímetro 34 m; diagonal $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ m}$; aire $60 \cdot 3 = 180 \text{ m}^3$; aljibe $3,6 \text{ m}^3 = 3\,600 \text{ L}$.

Ficha 8

1. a) $1\,200 : 200 = 6 \text{ cm}$ y $900 : 200 = 4,5 \text{ cm}$. b) $\sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ m}$. c) Real: $12 \cdot 9 = 108 \text{ m}^2$. Plano: $6 \cdot 4,5 = 27 \text{ cm}^2$ (comprobación: $108 \text{ m}^2 = 1\,080\,000 \text{ cm}^2$ y $1\,080\,000 : 200^2 = 27$). d) $108 \cdot 4 = 432 \text{ m}^3 = 432\,000 \text{ L}$.
2. Árbol: $\frac{h}{6} = \frac{1,5}{1,2} = 1,25 \rightarrow h = 7,5 \text{ m}$.
3. Es falso: la escala 1:100 divide las longitudes por 100, pero el área se divide por $100^2 = 10\,000$. Ejemplo: $8 \text{ m} \times 6 \text{ m} = 48 \text{ m}^2$ real; en el plano $8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} = 48 \text{ cm}^2$, y $48 \text{ m}^2 = 480\,000 \text{ cm}^2$, que es 10 000 veces más.

Refuerzo

1. $5 \text{ cm} \times 100 = 500 \text{ cm} = 5 \text{ m}$; $0,8 \text{ cm} \times 100 = 80 \text{ cm} = 0,8 \text{ m}$; $3 \text{ m} = 300 \text{ cm} \rightarrow 3 \text{ cm}$ en el plano.
2. 3, 4, 5; 9, 12, 15 ($3 \cdot (3, 4, 5)$); 5, 12, 13.
3. Lados que faltan: $7 - 3 = 4 \text{ m}$ (horizontal) y $5 - 3 = 2 \text{ m}$ (vertical). Por sumar: franja inferior $7 \cdot 3 = 21$ y rectángulo superior $3 \cdot 2 = 6$; total 27 m^2 . Comprobación por resta: $7 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 35 - 8 = 27 \text{ m}^2 \checkmark$.

Ampliación

1. Con $a + b = 10$: (1,9) área 9, no cabe ($9 \text{ m} > 8 \text{ m}$); (2,8) área 16, cabe; (3,7) área 21, cabe; (4,6) área 24, cabe; (5,5) área 25, cabe. El máximo es el cuadrado de 5 m, con 25 m^2 .
2. Lados $5 + d$ y $5 - d$: área $(5 + d)(5 - d) = 25 - d^2$, que es máxima cuando $d = 0$ (cuadrado).
3. Para un perímetro P cualquiera, semiperímetro $P/2$, lados $P/4 \pm d$ y área $(P/4)^2 - d^2$: el máximo es un cuadrado de lado $P/4$ y área $(P/4)^2$. Con $P = 20$: $5^2 = 25$.

Errores frecuentes

- Medir en el plano y dar la medida real sin multiplicar por la escala, o confundir cm del plano con cm reales.
- Escalar el área y el volumen como si fueran longitudes (dividir por 100 en lugar de por 100^2 o 100^3).
- Aplicar Pitágoras sumando los cuadrados cuando se busca un cateto, o no identificar bien la hipotenusa.
- Olvidar restar la puerta y las ventanas en la pintura, o comprar botes «con decimales» en lugar de redondear hacia arriba.
- Mezclar unidades (cm con m) o confundir m^3 con litros ($1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$, no 100).
- Plantear mal la proporción de las sombras (poner la sombra de un objeto con la altura del otro).

Criterios para valorar respuestas abiertas

- En las respuestas abiertas se valora que la justificación mencione la razón de semejanza o el teorema usado, no solo el resultado.
- Se aceptan distribuciones distintas del mobiliario si respetan las medidas a escala, los pasillos de 1 m y el 40 % de ocupación.
- Se aceptan pequeñas diferencias de redondeo ($\pi \approx 3,14$ frente a la calculadora) si se indica el redondeo.
- La calculadora es válida para comprobar, pero cada cálculo debe aparecer escrito con sus unidades.

09

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Cuando una cantidad depende de otra

PREGUNTA GUÍA



¿Cómo reconocemos si una gráfica representa una relación lineal, constante o no lineal?



CURSO
2.º ESO



SESIONES
7 sesiones · 3.º trimestre



SENTIDOS PRIORITARIOS
D · Sentido algebraico



COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE3, CE5, CE7, CE8



PRODUCTO FINAL
Panel de funciones cotidianas



CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 3.1, 5.1, 7.1, 8.1



Contexto, reto y sentido

Para la Semana de la Ciencia, el instituto quiere un **panel de funciones cotidianas** en el pasillo: cuatro historias de la vida real, cada una con su tabla, su gráfica y su fórmula. Hay un patinete eléctrico que se alquila por minutos, un bono mensual de transporte que cuesta lo mismo se viaje mucho o poco, una piscina hinchable que se vacía y la distancia que necesita un coche para frenar. Cuatro situaciones muy distintas en las que una cantidad depende de otra, y cuatro gráficas con formas distintas.

La situación moviliza el sentido algebraico: distinguir variable independiente y dependiente, pasar de la tabla a la gráfica y a la expresión, interpretar pendiente y ordenada en el origen de una recta, reconocer cuándo el cambio es constante y cuándo no, y comparar lo lineal con lo cuadrático. Cada gráfica del panel debe poder «leerse» y justificar su tipo.

Reto

Montar un panel con cuatro funciones cotidianas (una lineal creciente, una constante, una lineal decreciente y una no lineal) con su historia, tabla, gráfica y expresión, y justificar con datos por qué cada gráfica es de su tipo.

Producto final

Panel de funciones cotidianas.



Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

CE1

Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.

CE3

Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.

CE5

Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, integrando conocimientos.

CE7

Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.

CE8

Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- 1.1** Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.
- 3.1** Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.
- 5.1** Reconocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente.
- 7.1** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales.
- 8.1** Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, oralmente y por escrito, al explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.

Saberes básicos prioritarios

D

Sentido algebraico

- Relaciones entre dos magnitudes: variable independiente y dependiente, y sus unidades.
- Representación de una función mediante tabla, gráfica y expresión algebraica, y paso de unas a otras.
- Funciones lineales $y = mx + n$: pendiente como cambio constante y ordenada en el origen, y su interpretación en un contexto.
- Función constante y recta decreciente: reconocimiento en tablas, gráficas y expresiones.
- Introducción a las relaciones cuadráticas ($y = x^2$): incrementos no constantes y gráfica curva.

F

Sentido socioafectivo

- Confianza en la propia capacidad para interpretar gráficas y aceptar el error como parte del aprendizaje.
- Comunicación respetuosa de explicaciones y trabajo cooperativo con roles.



Objetivos didácticos

- ✓ Identificar variable independiente y dependiente.
- ✓ Relacionar tabla, gráfica y expresión.
- ✓ Interpretar pendiente y ordenada en relaciones lineales sencillas.
- ✓ Comparar relaciones lineales y no lineales desde sus representaciones.



Metodología y papel docente

Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.



Secuencia de sesiones y actividades

- ① Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1**SESIÓN 1****Variables y relaciones**

Evidencia: Ficha 1: variables de cuatro historias, lectura de la gráfica de un paseo y dibujo de la gráfica de una ruta en bici.

Ficha: Anexo 3 · ficha 1

2**SESIÓN 2****Tabla-gráfica-expresión**

Evidencia: Ficha 2: emparejado de historias con gráficas A-D, tabla del patinete, gráfica de la piscina a partir de su tabla y lecturas de la gráfica del frenado.

Ficha: Anexo 3 · ficha 2

3**SESIÓN 3****Rectas: cambio constante**

Evidencia: Ficha 3: clasificación de cinco rectas por pendiente y ordenada, tabla y gráfica de $y = 2x - 1$ y tarifa de una academia.

Ficha: Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Pendiente desde tablas y gráficas

 **Evidencia:** Ficha 4: pendiente y ordenada desde una tabla, desde una gráfica y desde dos puntos, e interpretación en el contexto.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Comparación con una relación cuadrática visual

 **Evidencia:** Ficha 5: tabla de incrementos del frenado, efecto de duplicar la velocidad, gráfica $y = x^2$ y verdadero o falso.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Panel de cuatro funciones

 **Evidencia:** Ficha 6: planificación de las cuatro funciones del panel, modelización de una vela que se consume y revisión cruzada.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Presentación y reto individual

 **Evidencia:** Ficha 7: reto individual con tabla a expresión, gráfica a expresión, clasificación de tres tablas y refutación de una afirmación.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 7



Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

 Recursos

Conjuntos de datos ficticios

gráficas

GeoGebra/hoja de cálculo opcional

 Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.



DUA y atención a la diversidad

Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

Refuerzo Anexo 8

Tablas con incremento constante y ejes preparados.

Ampliación Anexo 9

Crear dos funciones que se crucen y explicar el significado del punto de corte.



Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1 Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).



FASE 2 Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).



FASE 3 Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Interpretación de cada historia: identificación de las variables, sus unidades y de qué depende qué, y de las preguntas del reto.	Ficha 1 / lista de cotejo
3.1	Formulación y comprobación de conjeturas sobre el tipo de relación (lineal, constante o no lineal) con incrementos de tablas y forma de la gráfica.	Fichas 4 y 5 y Anexo 9 / rúbrica
5.1	Conexión entre tabla, gráfica y expresión de una misma función, y entre pendiente y ordenada y su significado en la historia.	Fichas 2, 3 y 4 / escala de valoración
7.1	Gráficas con ejes rotulados y escala, tablas de valores y expresiones de las cuatro funciones del panel.	Panel (Anexo 4) y Ficha 6 / rúbrica
8.1	Justificación oral y escrita del tipo de cada función usando lenguaje matemático (variable, pendiente, ordenada, incremento).	Ficha 7 y presentación del panel / rúbrica

☆ Evidencias clave de esta SdA

Panel, gráficas, tablas y comentarios.

+ Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.

🔗 Variantes de aplicación

↗ Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

↘ Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 9 · Cuando una cantidad depende de otra

ALUMNADO

Cuatro gráficas cuelgan del pasillo sin título. Una es una recta que sube desde 1; otra, una recta horizontal; otra, una recta que baja hasta cero; y la última, una curva que cada vez sube más deprisa. Debajo, cuatro historias: un patinete eléctrico, un bono de transporte, una piscina que se vacía y un coche que frena. Lucía asegura que el bono es la gráfica de la recta que sube, y Marcos dice que no. ¿Quién tiene razón y cómo se sabe? Vais a montar un panel de funciones cotidianas con una regla clara para reconocer cada tipo de relación.

“ ¿Cómo reconocemos si una gráfica representa una relación lineal, constante o no lineal? ”

🎯 Vuestro reto

Montar un panel con cuatro funciones cotidianas (una lineal creciente, una constante, una lineal decreciente y una no lineal) con su historia, tabla, gráfica y expresión, y justificar con datos por qué cada gráfica es de su tipo.

📦 Lo que vais a producir

Panel de funciones cotidianas.

📍 Hoja de ruta · 7 sesiones

- 1 Descubrimos qué cantidades dependen de cuáles en cuatro historias.
- 2 Unimos tablas, gráficas y expresiones de la misma función.
- 3 Estudiamos las rectas: qué cambia y qué se mantiene.
- 4 Calculamos pendientes y ordenadas desde tablas y gráficas.
- 5 Comparamos las rectas con una relación cuadrática.
- 6 Montamos el panel de cuatro funciones.
- 7 Presentamos el panel y resolvemos un reto individual.

📖 Al terminar seré capaz de...

- ✓ Identificar variable independiente y dependiente.
- ✓ Relacionar tabla, gráfica y expresión.
- ✓ Interpretar pendiente y ordenada en relaciones lineales sencillas.
- ✓ Comparar relaciones lineales y no lineales desde sus representaciones.

📝 ¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 9 · Cuando una cantidad depende de otra

ALUMNADO

Cuatro historias, cuatro gráficas sin título, tablas de valores, un esquema de pendiente y ordenada, la gráfica de un paseo y un ejemplo resuelto. Todas las situaciones y datos son ficticios o aproximados, creados para el aula.

F1 Cuatro historias para el panel

DATOS

Nº	Historia	Datos
1	Alquiler de un patinete eléctrico	Se paga 1 € por desbloquearlo y 0,20 € por cada minuto de uso.
2	Bono mensual de transporte	Cuesta 20 € al mes, se hagan pocos o muchos viajes.
3	Piscina hinchable que se vacía	Contiene 600 L y pierde 40 L por minuto.
4	Distancia de frenado de un coche	Regla aproximada: la distancia en metros es $(v/10)^2$, con v en km/h, en calzada seca.

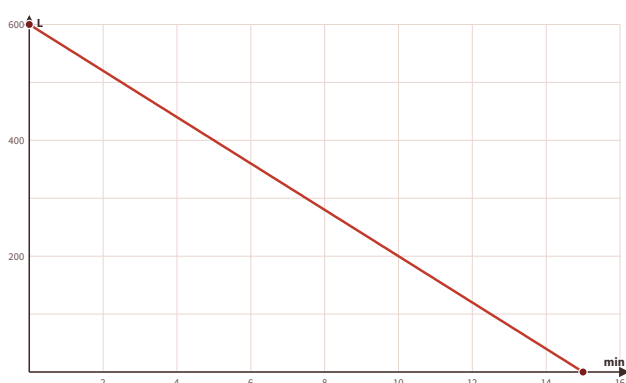
Fuente: Situaciones ficticias creadas para el aula.

🔍 Para cada historia, ¿qué cantidad depende de cuál?

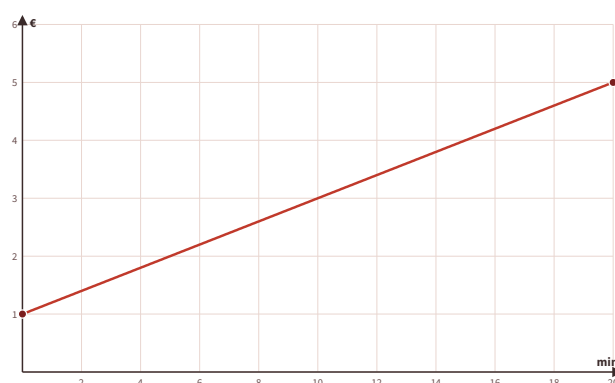
F2 Cuatro gráficas sin título

GRÁFICO

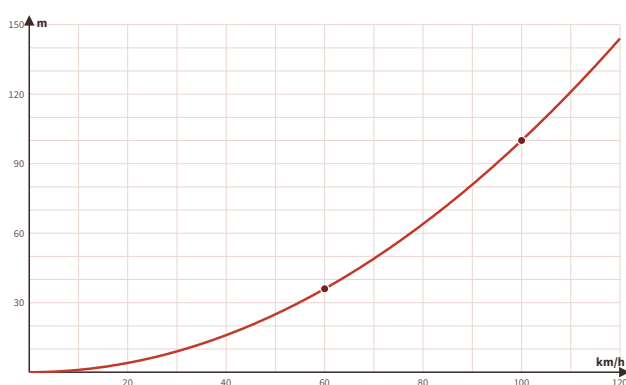
GRÁFICA A



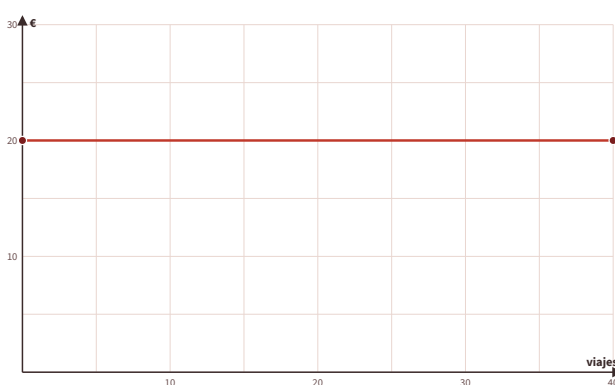
GRÁFICA B



GRÁFICA C



GRÁFICA D



Fuente: Gráficas calculadas para el aula con los datos de F1 (no están en el mismo orden que las historias).

¿Qué gráfica corresponde a cada historia? Fíjate en el punto de partida, en si sube, baja o se mantiene y en si es recta o curva.

F3 Tablas de valores

DATOS

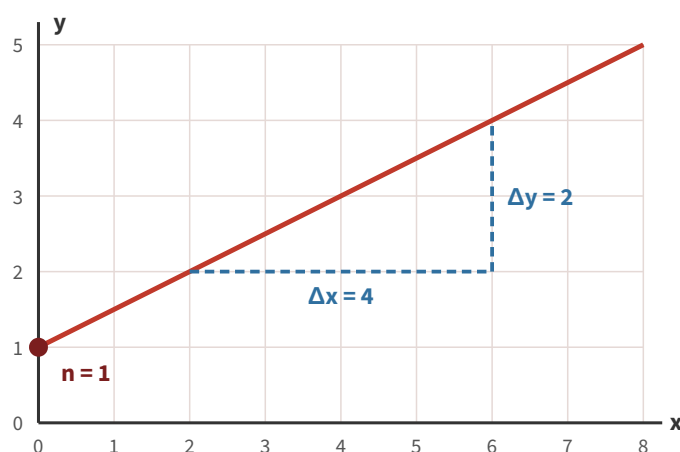
Historia	Valores de la variable independiente x	Valores de la variable dependiente y
1. Patinete (t min, C €)	$0 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20$	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$
2. Bono (n viajes, P €)	$0 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 40$	$20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20$
3. Piscina (t min, V L)	$0 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12$	$600 \cdot 480 \cdot 360 \cdot 240 \cdot 120$
4. Frenado (v km/h, d m)	$0 \cdot 30 \cdot 60 \cdot 90 \cdot 120$	$0 \cdot 9 \cdot 36 \cdot 81 \cdot 144$

Fuente: Valores calculados para el aula con los datos de F1.

Mira cuánto cambia y cada vez que x avanza lo mismo. ¿En qué historias el cambio es siempre igual?

F4 Pendiente y ordenada en el origen

ESQUEMA

**Recta: $y = m \cdot x + n$** **$m = \text{pendiente} = \Delta y / \Delta x$** $= 2 / 4 = 0,5$ Por cada 1 que avanza x ,
y sube 0,5. **$n = \text{ordenada en el origen}$** $= \text{valor de } y \text{ cuando } x = 0$ $= 1 \text{ (la recta corta el eje } y)$ Fuente: Esquema de elaboración propia con la recta $y = 0,5x + 1$.

🔍 La pendiente es el cambio de y por cada unidad que avanza x ; la ordenada es dónde la recta corta el eje vertical.

F5 Detectar el tipo de relación con los incrementos

DATOS

t (min)	Patinete: C (€)	Incremento de C	v (km/h)	Frenado: d (m)	Incremento de d
0	1	—	0	0	—
5	2	+1	30	9	+9
10	3	+1	60	36	+27
15	4	+1	90	81	+45
20	5	+1	120	144	+63

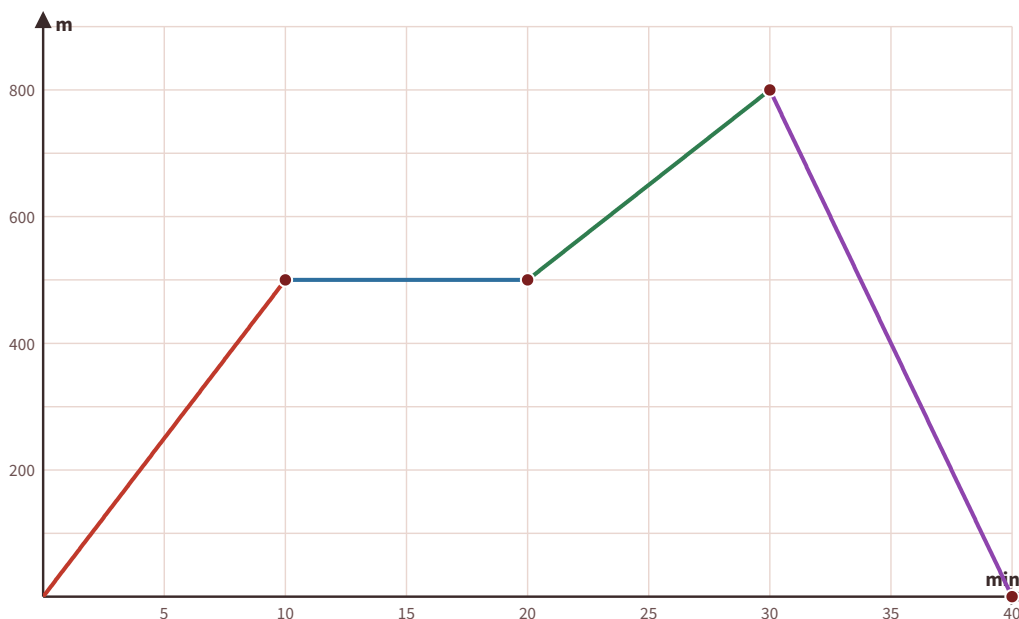
Si al avanzar x lo mismo, y cambia **siempre lo mismo**, la relación es **lineal** (su gráfica es una recta). Si el cambio no es constante, es **no lineal**. Si y no cambia nunca, es una función **constante**.

Fuente: Valores calculados para el aula con los datos de F1.

🔍 En el frenado, ¿qué pasa con los incrementos? ¿Y con la gráfica C ?

F6 Un paseo: distancia a casa en el tiempo

GRÁFICO



Fuente: Gráfica calculada para el aula. Historia ficticia: Marta sale de casa, se para, sigue más despacio y vuelve corriendo.

🔍 Describe con palabras qué hace Marta en cada tramo. ¿En qué tramo va más deprisa?

F7 Ejemplo resuelto: de la tabla a la expresión

TEXTO

Patinete. Tabla de F3: $(0, 1), (5, 2), (10, 3), (15, 4), (20, 5)$.

1. Incrementos: $+1$ cada 5 minutos, siempre lo mismo $\rightarrow$ relación lineal.
2. Pendiente: $m = \frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ € por minuto}$.
3. Ordenada: cuando $t = 0, C = 1 \rightarrow n = 1$.
4. Expresión: $C = 0,2t + 1$.
5. Comprobación con $t = 15$: $0,2 \cdot 15 + 1 = 4 \checkmark$ (coincide con la tabla).

Fuente: Elaboración propia.

🔍 Una expresión se comprueba siempre con un valor que no se haya usado para encontrarla.

F8 Vocabulario esencial

Variable independiente	La que se elige o cambia libremente (eje horizontal): minutos, viajes, velocidad.
Variable dependiente	La que depende de la otra (eje vertical): coste, volumen, distancia.
Función lineal	Relación $y = mx + n$; su gráfica es una recta.
Pendiente m	Cambio de y por cada unidad de x ; si $m > 0$ la recta sube, si $m < 0$ baja, si $m = 0$ es horizontal.
Ordenada en el origen n	Valor de y cuando $x = 0$.
Función constante	$y = n$: la recta es horizontal y y no cambia.
Relación cuadrática	Como $y = x^2$: su gráfica es una curva (parábola) y los incrementos no son constantes.

Fuente: Elaboración propia.

F9 Cómo se presenta una función en el panel

Cada función del panel ocupa un recuadro con estos seis elementos:

- **1. Historia** en una frase, con sus datos.
- **2. Variables** con sus unidades (independiente y dependiente).
- **3. Tabla** con al menos cinco valores.
- **4. Gráfica** con ejes rotulados y escala.
- **5. Expresión** y, si es lineal, pendiente y ordenada con su significado.
- **6. Tipo** (lineal creciente, constante, lineal decreciente o no lineal) y **una frase de justificación** con datos.

Fuente: Elaboración propia.

Fichas de actividades del alumnado

SdA 9 · Cuando una cantidad depende de otra

ALUMNADO

FICHA 1

Variables y relaciones

Sesión 1

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Usa F1 y F6. Antes de calcular, pregúntate: ¿qué cantidad depende de cuál?

1 Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.

En «el coste depende del número de minutos», la variable independiente es...

☐ el coste ☐ el número de minutos ☐ el euroSi $y = 2x + 3$ y $x = 4$, entonces y vale...☐ 9 ☐ 14 ☐ 11

Una gráfica que es una recta horizontal indica que...

☐ la cantidad dependiente no cambia ☐ la cantidad crece muy deprisa ☐ la cantidad decrece

2 Completa las variables de cada historia de F1, con sus unidades.

Historia	Variable independiente	Variable dependiente
1. Patinete		
2. Bono		
3. Piscina		
4. Frenado		

3 Con la gráfica del paseo de Marta (F6), responde: a) ¿Qué hace entre los minutos 10 y 20? b) ¿A qué distancia máxima de casa llega y cuándo? c) ¿A qué velocidad (en m/min) camina en los primeros 10 minutos? d) ¿Cuándo vuelve a casa y a qué velocidad?

- 4 Dibuja la gráfica de esta historia: Lucas va en bici 10 min a 200 m/min, se para 5 min a descansar y vuelve a casa en 10 min por el mismo camino.



FICHA 2 Tabla, gráfica y expresión

Sesión 2

Usa F1, F2 y F3. Una misma función se puede contar de tres formas.

- 1 Empareja cada historia de F1 con su gráfica de F2 y justifica tu elección con un dato de la gráfica.

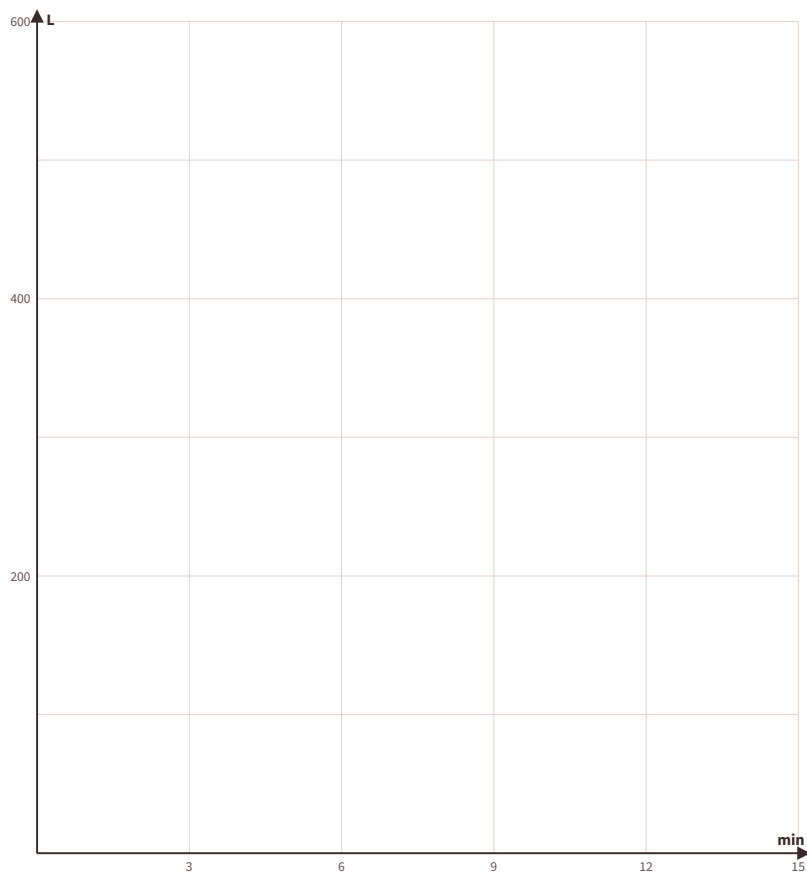
Historia	Gráfica (A-D)	Justificación
1. Patinete		
2. Bono		
3. Piscina		
4. Frenado		

- 2 Completa el coste del patinete con la gráfica B (cuando se pueda) y con la expresión $C = 1 + 0,2t$.

t (min)	0	5	10	12	25
C (€)					

3

Dibuja con los puntos de F3 la gráfica de la piscina (historia 3). ¿Cuándo se vacía por completo?



4

Con la gráfica C de F2: ¿qué distancia necesita un coche para frenar a 60 km/h? ¿A qué velocidad necesita 100 m? ¿Es una recta?

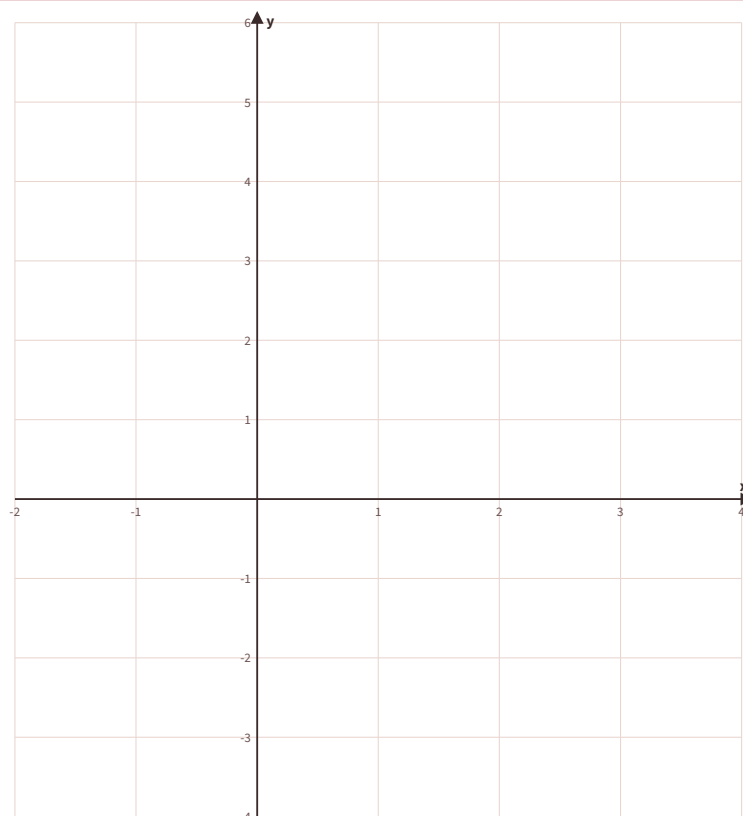
Usa F4 y F8. En $y = mx + n$, m dice cómo cambia y y n dónde empieza.

1 Completa la tabla de rectas.

Expresión	Pendiente m	Ordenada n	¿Crece, decrece o es constante?
$y = 3x + 2$			
$y = -2x + 10$			
$y = 5$			
$y = x$			
$y = 0,5x - 1$			

2 Haz la tabla de valores de $y = 2x - 1$ y dibuja su recta.

x	-1	0	1	2	3
y					



3 Marca la respuesta correcta.

¿Cuál de estas relaciones es lineal?

☐ $y = 3x + 1$ ☐ $y = x^2 + 1$ ☐ $y = x \cdot x$

La gráfica de $y = -3$ es...

☐ una recta que baja ☐ una recta horizontal ☐ una curva

4

Una academia de patinaje cobra 10 € de matrícula y 4 € por cada clase. Escribe la expresión del coste y en función del número de clases x , di qué significan 10 y 4 y calcula el coste de 6 clases.

FICHA 4

Pendiente desde tablas y gráficas

Sesión 4

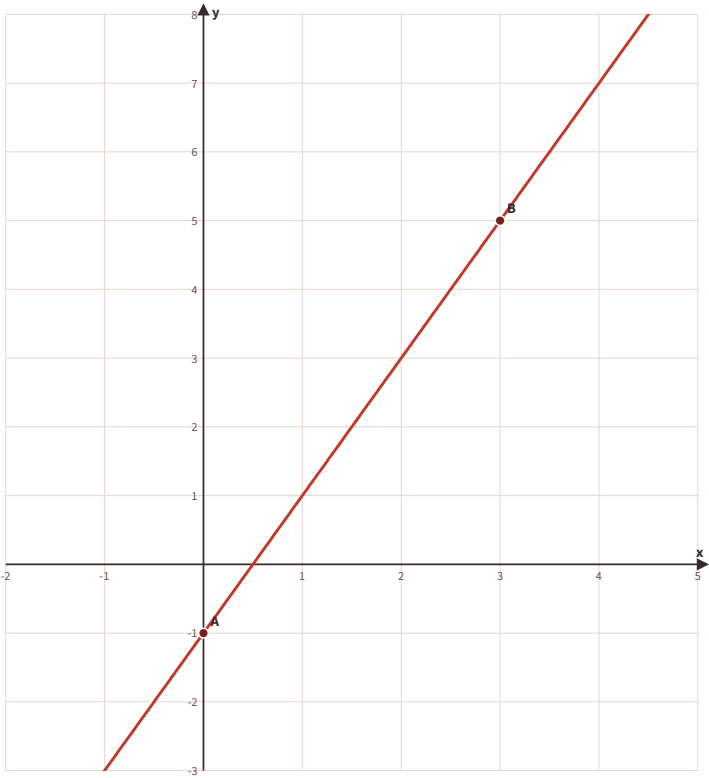
Usa F4, F5 y F7. Pendiente = cambio de y / cambio de x .

1

Esta tabla es lineal. Calcula los incrementos de y , la pendiente, la ordenada y la expresión.

x	y	Incremento de y
1	5	—
2	8	
3	11	
4	14	

2 Lee en la gráfica la ordenada y la pendiente, y escribe la expresión de la recta.



3 Una recta pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(5, 11)$. Calcula su pendiente, su ordenada y su expresión, y comprueba con un tercer valor.

4 Interpreta la pendiente y la ordenada en las historias 1 y 3 de F1.

Historia	Pendiente	Significado	Ordenada	Significado
1. Patinete				
3. Piscina				

Usa F5 y la gráfica C de F2. Si los incrementos no son constantes, la relación no es lineal.

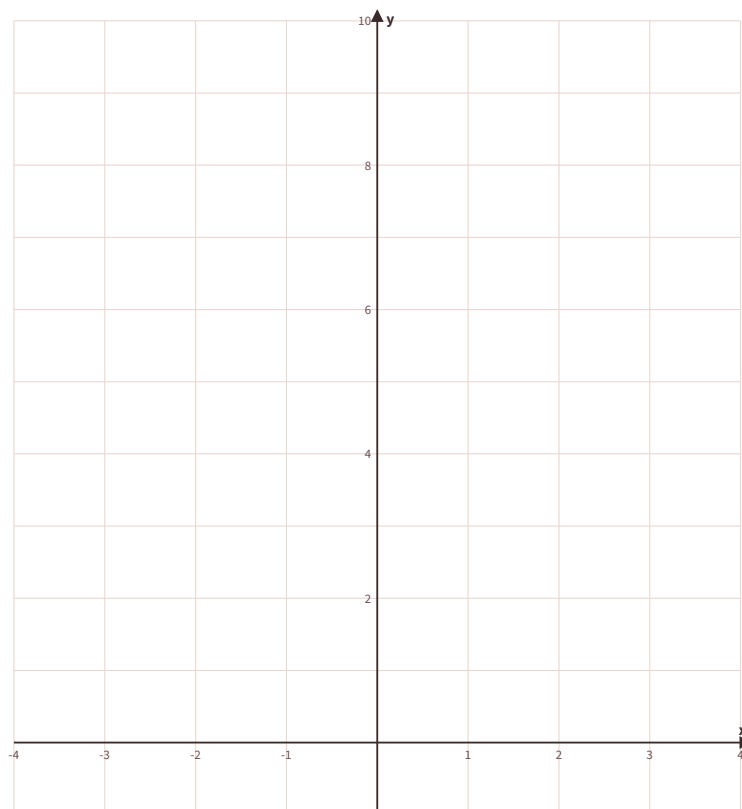
- 1 Completa la tabla del frenado ($d = v^2/100$) y calcula los incrementos. ¿Es lineal? ¿Por qué?

v (km/h)	20	40	60	80	100
d (m)					
Incremento					

- 2 Un coche pasa de 50 km/h a 100 km/h. ¿Por cuánto se multiplica su distancia de frenado? ¿Cambiaría igual en una función lineal? Explícalo.

- 3 Completa la tabla de $y = x^2$ y dibuja su gráfica. ¿Qué forma tiene y qué observas entre x y $-x$?

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



4 Verdadero o falso. Corrige las falsas.

	V	F
La gráfica de $y = x^2$ es una recta.	☐	☐
En $y = 2x + 1$, si x se duplica, y también se duplica.	☐	☐
Si los incrementos de y son siempre iguales, la relación es lineal.	☐	☐
El área de un cuadrado de lado l ($A = l^2$) es una relación no lineal.	☐	☐

FICHA 6

Montamos el panel

Sesión 6

Trabajad en equipo con roles: redactor, calculista, dibujante y portavoz. Seguid los seis elementos de F9.

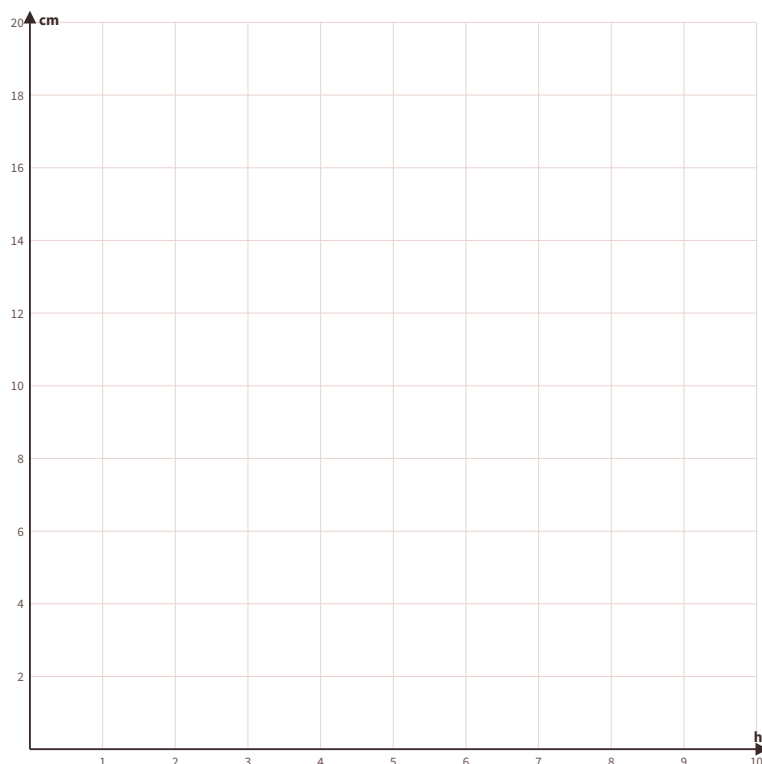
1 Planificad las cuatro funciones del panel (podéis usar las de F1 o inventar otras).

Tipo de función	Historia elegida	Variables y unidades	Expresión	m y n
Lineal creciente				
Constante				
Lineal decreciente				
No lineal				

2 Modelización. Una vela de 20 cm se consume 2 cm cada hora. Escribe la expresión de su longitud L en función del tiempo t en horas, completa la tabla e indica cuándo se apaga.

t (h)	0	2	4	6	10
L (cm)					

3 Dibuja la gráfica de la vela y escribe una frase de justificación de su tipo con datos.



4 Revisión cruzada: otro equipo revisa vuestro panel.

- ☐ Cada función tiene historia, variables con unidades, tabla, gráfica, expresión y tipo
- ☐ Las gráficas tienen ejes rotulados y escala
- ☐ La expresión coincide con la tabla y con la gráfica
- ☐ La pendiente y la ordenada se interpretan en la historia
- ☐ Se justifica el tipo con datos (incrementos o forma de la gráfica)

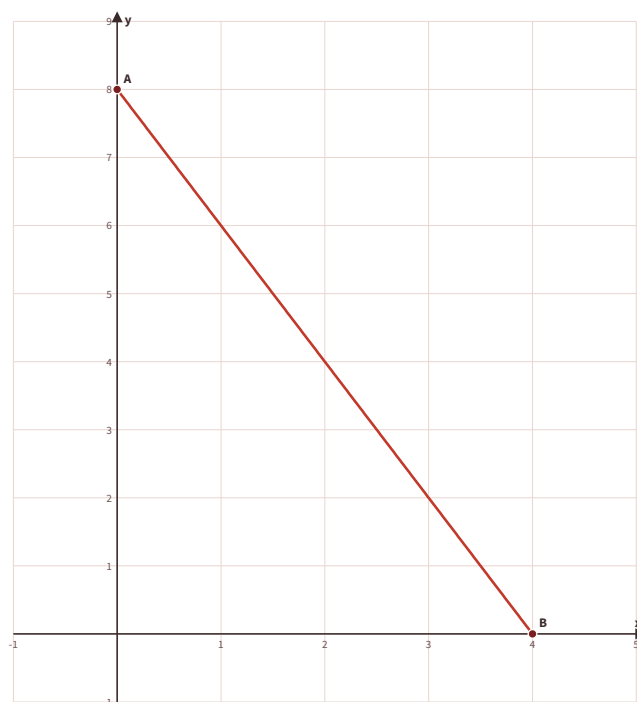
FICHA 7 Reto individual

Sesión 7

Resuelve sin ayuda del equipo. Escribe cada paso y comprueba con un valor.

1 La tabla es lineal: $(0, 5)$, $(1, 8)$, $(2, 11)$, $(3, 14)$. Escribe su expresión, di si es creciente o decreciente y calcula el valor de y para $x = 10$.

- 2 Escribe la expresión de la recta de la gráfica e interprétala como el agua que queda (en litros) en un depósito al cabo de x minutos.



- 3 Clasifica cada tabla como lineal, constante o no lineal y justifícalo con los incrementos.

Tabla	Incrementos de y	Tipo
$x: 1, 2, 3, 4 \rightarrow y: 4, 7, 10, 13$		
$x: 1, 2, 3, 4 \rightarrow y: 1, 4, 9, 16$		
$x: 1, 2, 3, 4 \rightarrow y: 6, 6, 6, 6$		

- 4 Un compañero afirma: « $y = 2x^2$ es lineal porque lleva una x ». Refútalo con una tabla de valores y explica qué forma tiene su gráfica.

ANEXO
4

Plantilla del producto final

SdA 9 · Cuando una cantidad depende de otra

ALUMNADO

Nombre:

Curso/grupo:

Fecha:

Panel de funciones cotidianas. Cada recuadro lleva historia, variables, tabla, gráfica, expresión, tipo y justificación (F9).

Título del panel y equipo

Nombre, integrantes y roles.

Función 1: lineal creciente

Historia · variables · tabla · expresión · justificación.

Función 2: constante

Historia · variables · tabla · expresión · justificación.

Función 3: lineal decreciente

Historia · variables · tabla · expresión · justificación.

Función 4: no lineal

Historia · variables · tabla · expresión · justificación.

Cómo reconocerlas

Regla del equipo para distinguir cada tipo en una tabla y en una gráfica.

Pendiente y ordenada

Qué significan en las dos funciones lineales.

Conclusión y revisión

Qué aprendimos; firma del equipo revisor.

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 9 · Cuando una cantidad depende de otra

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Antes de entregar **Panel de funciones cotidianas**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- ☐ Las cuatro funciones son de tipos distintos: lineal creciente, constante, lineal decreciente y no lineal.
- ☐ Cada función indica sus variables, con unidades, y cuál es la independiente.
- ☐ Las tablas tienen al menos cinco valores y coinciden con la expresión.
- ☐ Las gráficas tienen ejes rotulados, escala y puntos bien situados.
- ☐ En las funciones lineales, la pendiente y la ordenada están calculadas y se interpretan en la historia.
- ☐ El tipo de cada función se justifica con datos (incrementos o forma de la gráfica).
- ☐ Las expresiones se han comprobado con un valor que no se ha usado para hallarlas.
- ☐ El lenguaje matemático es correcto y la presentación es clara.

Calidad y rigor

- ☐ He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- ☐ He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- ☐ He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- ☐ He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- ☐ He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

Rúbrica imprimible

SdA 9 · Cuando una cantidad depende de otra

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Rúbrica para valorar **Panel de funciones cotidianas**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

Autoevaluación y coevaluación

SdA 9 · Cuando una cantidad depende de otra

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé pasar de una tabla a su gráfica y a su expresión, y al revés.	☐	☐	☐	☐
Sé calcular e interpretar la pendiente y la ordenada de una recta y distinguir una relación lineal de una que no lo es.	☐	☐	☐	☐
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	☐	☐	☐	☐
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	☐	☐	☐	☐
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	☐	☐	☐	☐
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	☐	☐	☐	☐

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo

Equipo evaluado: _____

Fortaleza 1

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

Material de apoyo y refuerzo

SdA 9 · Cuando una cantidad depende de otra

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Tablas con incremento constante y ejes preparados, con los pasos señalados.

⊗ Ejemplo modelado: de la tabla a la recta

Tabla: $x: 0, 1, 2, 3 \rightarrow y: 1, 3, 5, 7$. **Incremento:** $+2$ cada vez que x sube 1 $\rightarrow$ pendiente $m = 2$. **Ordenada:** si $x = 0, y = 1 \rightarrow n = 1$. **Expresión:** $y = 2x + 1$.

Gráfica: se marcan $(0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7)$ y se unen. **Comprobación** con $x = 4: 2 \cdot 4 + 1 = 9$.

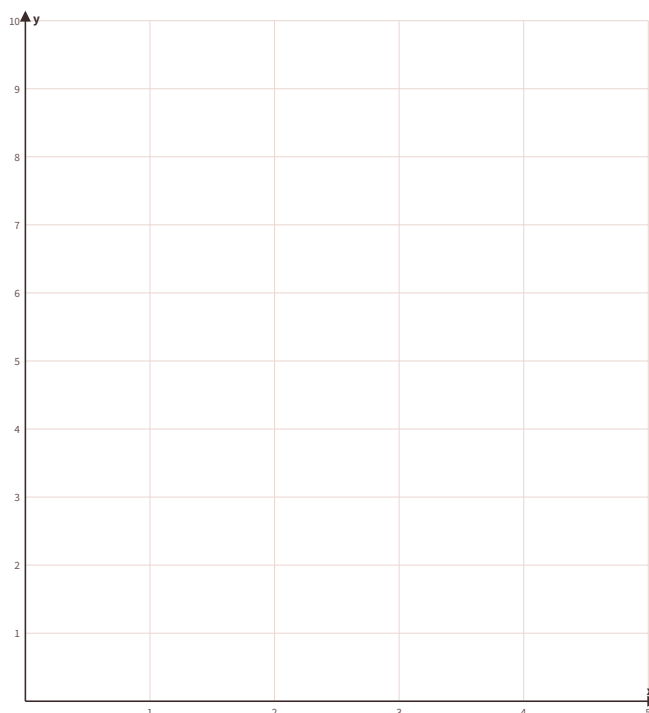
⊗ Glosario y símbolos esenciales

x : variable independiente (eje horizontal). y : variable dependiente (eje vertical). **Pendiente m :** lo que cambia y cuando x sube 1. **Ordenada n :** valor de y cuando $x = 0$. **Incremento:** diferencia entre dos valores seguidos de y .

1 Completa la tabla de $y = 2x + 1$ y señala el incremento.

x	0	1	2	3	4
y					
Incremento					

2 Dibuja los puntos de la tabla anterior en los ejes preparados y únelos. ¿Qué forma sale?

3 En esta tabla, $x: 0, 1, 2, 3 \rightarrow y: 4, 7, 10, 13$, calcula la pendiente, la ordenada y escribe la expresión.

Actividad de ampliación

SdA 9 · Cuando una cantidad depende de otra

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

🔗 Dos funciones que se cruzan: ¿qué significa el punto de corte?

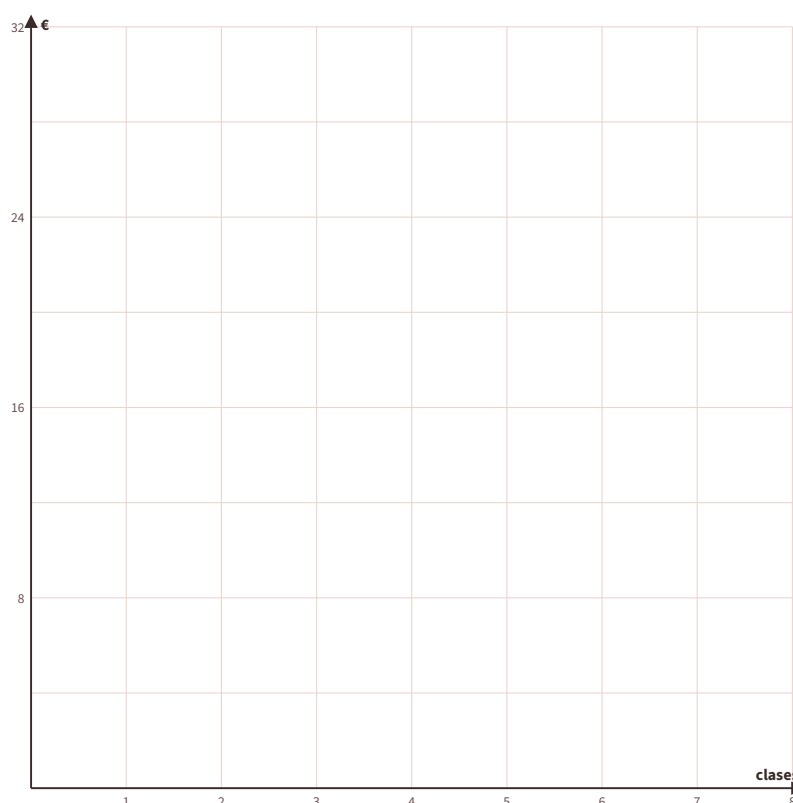
Un gimnasio A cobra 10 € de cuota más 2 € por clase; un gimnasio B cobra 4 € por clase, sin cuota. Sus costes son $y = 10 + 2x$ e $y = 4x$. Cuando las dos rectas se cortan, los dos gimnasios cuestan lo mismo.

☰ Pasos

- 1** Haz una tabla de valores y dibuja las dos rectas del ejemplo. Encuentra el punto de corte y explica qué significan sus dos coordenadas.
- 2** Inventa dos funciones lineales distintas que se corten en $x = 6$ con el mismo valor de y . Comprueba con una tabla.
- 3** Escribe la historia de tus dos funciones y explica con palabras qué ocurre antes y después del punto de corte.
- 4** ¿Cuántos puntos de corte pueden tener dos rectas distintas? Explica cuándo no se cortan.

1 Tabla de los gimnasios A y B.

Clases x	0	2	4	5	6
A: $10 + 2x$					
B: $4x$					

2 Gráfica de las dos rectas.

 Entrega

Las dos rectas dibujadas con su punto de corte, las dos funciones inventadas con su tabla y la explicación del significado del punto de corte.

ANEXO
10

Guía docente de respuestas y orientaciones

SdA 9 · Cuando una cantidad depende de otra

DOCENTE

🔑 Ficha 1

1. Diagnóstico: el número de minutos; $2 \cdot 4 + 3 = 11$; la cantidad dependiente no cambia.
2. Variables: patinete: minutos (min) $\rightarrow$ coste (€); bono: número de viajes $\rightarrow$ precio (€); piscina: tiempo (min) $\rightarrow$ volumen (L); frenado: velocidad (km/h) $\rightarrow$ distancia (m).
3. a) Está parada a 500 m de casa. b) Llega a 800 m a los 30 min. c) $500 : 10 = 50$ m/min. d) Vuelve a casa a los 40 min, a $800 : 10 = 80$ m/min (más deprisa que al principio).
4. Gráfica de Lucas: segmentos $(0, 0)-(10, 2000)$, horizontal hasta $(15, 2000)$ y vuelta hasta $(25, 0)$.

🔑 Ficha 2

1. Historia 1 $\rightarrow$ B (empieza en 1 € y sube con regularidad); 2 $\rightarrow$ D (recta horizontal en 20); 3 $\rightarrow$ A (empieza en 600 L y baja hasta 0); 4 $\rightarrow$ C (curva que sube cada vez más deprisa y pasa por el origen).
2. $C(0) = 1$; $C(5) = 2$; $C(10) = 3$; $C(12) = 1 + 0,2 \cdot 12 = 3,4$ €; $C(25) = 1 + 5 = 6$ € (fuera de la gráfica, con la expresión).
3. Puntos $(0, 600)$, $(3, 480)$, $(6, 360)$, $(9, 240)$, $(12, 120)$ en una recta que baja; se vacía a los $600 : 40 = 15$ min.
4. A 60 km/h, 36 m. Para frenar en 100 m, 100 km/h. No es una recta: es una curva.

🔑 Ficha 3

1. $y = 3x + 2$: $m = 3$, $n = 2$, crece. $y = -2x + 10$: $m = -2$, $n = 10$, decrece. $y = 5$: $m = 0$, $n = 5$, constante. $y = x$: $m = 1$, $n = 0$, crece. $y = 0,5x - 1$: $m = 0,5$, $n = -1$, crece.
2. $y = 2x - 1$: $x = -1, 0, 1, 2, 3 \rightarrow y = -3, -1, 1, 3, 5$. Recta que pasa por $(0, -1)$ con pendiente 2.
3. $y = 3x + 1$; una recta horizontal.
4. $y = 4x + 10$: 10 € es la matrícula (se paga aunque no haya clases) y 4 € es el precio de cada clase. Para 6 clases: $4 \cdot 6 + 10 = 34$ €.

🔑 Ficha 4

1. Incrementos: $+3, +3, +3 \rightarrow$ lineal; $m = 3$. Si $x = 0$, $y = 5 - 3 = 2$, luego $n = 2$ y $y = 3x + 2$. Comprobación con $x = 5$: 17 (la tabla seguiría $14 + 3$).
2. La recta corta el eje en $(0, -1)$: $n = -1$. De A a B: x avanza 3 e y sube 6 $\rightarrow m = 2$. Expresión: $y = 2x - 1$.
3. $m = \frac{11 - 3}{5 - 1} = 2$; $n = 3 - 2 \cdot 1 = 1$; $y = 2x + 1$. Comprobación con $x = 3$: 7 (recta por $(3, 7)$).
4. Patinete: $m = 0,20$, el coste de cada minuto; $n = 1$, el desbloqueo (lo que se paga con 0 minutos). Piscina: $m = -40$, pierde 40 L por minuto; $n = 600$, el volumen inicial.

Ficha 5

1. $d = 4, 16, 36, 64, 100$; incrementos $+12, +20, +28, +36$. No es lineal: los incrementos no son constantes y la gráfica es curva.
2. A 50 km/h: 25 m; a 100 km/h: 100 m $\rightarrow$ se multiplica por 4 ($(2v)^2 = 4v^2$). En una función lineal, al duplicar x la distancia no se multiplicaría por 4 (un coche no es una recta).
3. $y = x^2$: $x = -3, \dots, 3 \rightarrow 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9$. Es una curva (parábola) simétrica respecto al eje vertical: x y $-x$ dan el mismo valor.
4. F; F ($x = 1$: $y = 3$; $x = 2$: $y = 5$, no es el doble); V; V.

Ficha 6

1. Se acepta cualquier planificación coherente. Ejemplo: lineal creciente (patinete, $y = 0,2x + 1$); constante (bono, $y = 20$); lineal decreciente (piscina, $y = 600 - 40x$); no lineal (frenado, $y = x^2/100$).
2. Vela: $L = 20 - 2t$; $t = 0, 2, 4, 6, 10 \rightarrow L = 20, 16, 12, 8, 0$; se apaga a las $20 : 2 = 10$ h.
3. Recta que baja de $(0, 20)$ a $(10, 0)$. Justificación: los incrementos son siempre -4 cada 2 h (pendiente -2 cm/h), luego es lineal decreciente.

Ficha 7

1. Incrementos $+3$: $m = 3, n = 5$; $y = 3x + 5$, creciente. Para $x = 10$: 35.
2. Corta el eje en 8; de $A(0, 8)$ a $B(4, 0)$: $m = -8/4 = -2$. $y = -2x + 8$: el depósito tiene 8 L y pierde 2 L por minuto; se vacía a los 4 min.
3. Tabla 1: incrementos $+3, +3, +3 \rightarrow$ lineal; tabla 2: $+3, +5, +7 \rightarrow$ no lineal; tabla 3: $0, 0, 0 \rightarrow$ constante.
4. Tabla de $y = 2x^2$: $x = 1, 2, 3 \rightarrow 2, 8, 18$; incrementos $+6, +10$, no constantes, luego no es lineal. Su gráfica es una parábola.

Refuerzo

1. $y = 1, 3, 5, 7, 9$; incrementos $+2$ siempre.
2. Los puntos $(0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9)$ están alineados: sale una recta.
3. Incrementos $+3$: $m = 3$; $x = 0 \rightarrow y = 4$; $n = 4$; $y = 3x + 4$.

Ampliación

1. Tabla: A: 10, 14, 18, 20, 22; B: 0, 8, 16, 20, 24. Se cortan en $(5, 20)$: con 5 clases los dos cuestan 20 €. Con menos de 5 clases B es más barato; con más, A.
2. Ejemplo: $y = 5x$ e $y = 2x + 18$ se cortan en $x = 6$: $5 \cdot 6 = 30 = 2 \cdot 6 + 18$. Se acepta cualquier pareja válida (con comprobación).
3. Dos rectas distintas tienen 0 puntos de corte (si son paralelas, es decir, con la misma pendiente) o 1.

Errores frecuentes

- Confundir la variable independiente con la dependiente o invertir los ejes.
- Pensar que todas las gráficas que suben son lineales: hay que mirar si los incrementos son constantes.
- Calcular la pendiente como $\Delta x / \Delta y$ (al revés) o ignorar el signo en las rectas decrecientes.
- Confundir la ordenada con el primer valor de la tabla cuando la tabla no empieza en $x = 0$.
- Unir los puntos de una relación no lineal con segmentos rectos, o no rotular los ejes ni indicar unidades.
- Creer que una expresión con x es siempre lineal ($y = x^2$ no lo es).

Criterios para valorar respuestas abiertas

- En las justificaciones se valora que se apoyen en los incrementos de la tabla o en la forma de la gráfica, no solo en «porque sube».
- Se aceptan otras historias para el panel si las variables, la tabla y la expresión son coherentes entre sí.
- En la interpretación de la pendiente y la ordenada, deben aparecer las unidades (por ejemplo, € por minuto).
- La hoja de cálculo o GeoGebra pueden usarse para comprobar gráficas, pero el panel debe contener las tablas y expresiones escritas por el alumnado.

10

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

¿Azar o patrón?



PREGUNTA GUÍA

¿Cómo distinguimos una racha casual de una ventaja real?



CURSO
2.º ESO



SESIONES
7 sesiones · 3.º trimestre



SENTIDOS PRIORITARIOS
E · Sentido estocástico



COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE1, CE2, CE3, CE6, CE7, CE8



PRODUCTO FINAL
Informe estadístico y auditoría de un juego



CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.1, 2.1, 3.1, 6.1, 7.1, 8.1



Contexto, reto y sentido

En la feria del instituto hay una caseta, «Siete u once», donde se pagan 1 € y se lanzan dos dados: si la suma es 7 u 11, se reciben 3 €. El cartel presume de que «¡casi uno de cada dos gana!». Sergio, el delegado, ha ganado cuatro partidas seguidas y asegura que la caseta está trucada; el responsable de la caseta contesta que ha sido simple suerte. ¿Quién tiene razón? Una racha no prueba nada por sí sola: hay que organizar los datos, resumirlos y compararlos con lo que dice la probabilidad.

La situación moviliza el sentido estocástico: organizar datos en tablas y gráficos adecuados, calcular media, mediana, moda y rango, distinguir frecuencia relativa de probabilidad, calcular probabilidades con la regla de Laplace en experimentos simples y compuestos sencillos, y usar todo ello para auditar un juego. El informe final debe poder convencer a quien dude, con datos y con cálculo.

🎯 Reto

Auditar el juego «Siete u once» y redactar un informe estadístico que, con tablas, gráficos, medidas, frecuencias y probabilidades, decida si hay una ventaja real o solo una racha casual, y si el cartel dice la verdad.

📦 Producto final

Informe estadístico y auditoría de un juego.



Vinculación curricular

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MOVILIZADAS

- CE1** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.
- CE2** Analizar las soluciones de un problema con distintas técnicas y herramientas, verificando su validez.
- CE3** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- CE6** Identificar las matemáticas en otras materias y en situaciones reales, conectándolas con el mundo.
- CE7** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados de distintas formas.
- CE8** Comunicar conceptos, procedimientos y argumentos con lenguaje matemático apropiado.

Criterios de evaluación seleccionados · síntesis operativa

- 1.1** Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.
- 2.1** Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.
- 3.1** Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.
- 6.1** Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.
- 7.1** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales.
- 8.1** Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, oralmente y por escrito, al explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.

Saberes básicos prioritarios

E

Sentido estocástico

- Variables estadísticas cualitativas y cuantitativas; tablas de frecuencias absolutas y relativas.
- Gráficos estadísticos (barras, sectores, líneas) y elección del más adecuado según los datos.
- Medidas de centralización (media, mediana, moda) y de dispersión (rango); efecto de los valores extremos.
- Experimentos aleatorios: espacio muestral, frecuencia relativa y su estabilización al aumentar las pruebas.
- Probabilidad de un suceso con la regla de Laplace; sucesos compuestos sencillos con dos dados o con moneda y dado.

F

Sentido socioafectivo

- Pensamiento crítico ante rachas, anuncios y creencias sobre el azar.
- Trabajo en equipo con roles y respeto a las conclusiones distintas basadas en datos.



Objetivos didácticos

- ✓ Organizar y resumir datos.
- ✓ Interpretar media, mediana, rango y gráficos.
- ✓ Calcular probabilidades en experimentos simples.
- ✓ Comparar probabilidad teórica y frecuencia experimental.



Metodología y papel docente

📌 Aprendizaje basado en retos

El reto organiza la secuencia y obliga a movilizar varios procedimientos, no solo a reproducir un algoritmo.

🔍 Resolución de problemas

Se explicitan comprensión, planificación, ejecución, comprobación y comunicación de la solución.

🔗 Representaciones múltiples

Se conectan expresiones, tablas, gráficas, diagramas, materiales y lenguaje verbal según la naturaleza del contenido.

💻 Tecnología con propósito

Las herramientas digitales se utilizan para explorar, representar, comprobar o automatizar; no sustituyen la argumentación.

👤 Papel docente

Presenta el reto, modela estrategias, plantea preguntas, detecta errores, gradúa ayudas y exige justificación matemática.



Secuencia de sesiones y actividades

- ① Cada sesión genera una **evidencia** que se recoge en la ficha correspondiente del Anexo 3. Las soluciones están en la guía docente (Anexo 10).

1

SESIÓN 1

Datos de una prueba ficticia

 **Evidencia:** Ficha 1: clasificación de variables, tabla de frecuencias de 15 jugadores y primera opinión sobre la racha de Sergio.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 1

2

SESIÓN 2

Tabla y gráficos adecuados

 **Evidencia:** Ficha 2: diagrama de barras de los aciertos, lectura de los dados A y B, elección de gráficos y reparto de las 90 partidas del registro.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 2

3

SESIÓN 3

Media, mediana y rango

 **Evidencia:** Ficha 3: media, mediana, moda y rango de los 15 jugadores, efecto de un valor extremo, dos equipos con la misma media y verdadero o falso.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 3

4

SESIÓN 4

Experimentos de azar y frecuencia relativa

 **Evidencia:** Ficha 4: frecuencias relativas de los dados A y B, diferencias con lo esperado, experimento propio con dos dados y lectura de la estabilización.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 4

5

SESIÓN 5

Probabilidad teórica y comparación

 **Evidencia:** Ficha 5: probabilidades de sumas de dos dados con la tabla de 36 casos, orden en la recta de probabilidad, moneda y dado y probabilidad de dos sucesos independientes.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 5

6

SESIÓN 6

Auditoría de un juego de dados/cartas simplificado

 **Evidencia:** Ficha 6: auditoría del juego: cartel frente a probabilidad y registro, beneficio de la caseta, probabilidad de una racha de cuatro y decisión razonada.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 6

7

SESIÓN 7

Informe y defensa

 **Evidencia:** Ficha 7: reto individual con un juego nuevo, un conjunto con valor extremo, un dado sospechoso y la explicación de la estabilización.

 **Ficha:** Anexo 3 · ficha 7



Recursos, interdisciplinariedad y transversalidad

 Recursos

Datos ficticios

datos/cartas

hoja de cálculo opcional

 Interdisciplinariedad y transversalidad

Según el contexto, la situación puede conectarse con Tecnología y Digitalización, Física y Química, Biología y Geología, Economía, Geografía, Educación Física o competencia digital. Se promueven consumo responsable, sostenibilidad, lectura crítica de datos, igualdad, cooperación y comunicación rigurosa cuando son pertinentes al reto.



DUA y atención a la diversidad

 Implicación

Metas visibles, elección entre contextos equivalentes, retos graduados, trabajo cooperativo con roles y retroalimentación frecuente.

 Representación

Enunciados segmentados, ejemplos modelados, recta numérica, tablas, diagramas, representaciones gráficas, material manipulativo y herramientas digitales cuando aporten valor.

 Acción y expresión

Posibilidad de expresar el razonamiento con cálculos, esquema, explicación oral, tabla, gráfica o breve informe, manteniendo la exigencia del criterio evaluado.

 Refuerzo

Anexo 8

Conjuntos de datos pequeños y espacio de resultados listado.

 Ampliación

Anexo 9

Diseñar un juego con probabilidad de ganar entre 30 % y 40 % y demostrarlo.



Evaluación

Evaluación continua y formativa: diagnóstico breve al inicio, evidencias de cada sesión, revisión de borradores o estrategias y valoración final del producto junto con una evidencia individual. La ponderación debe adaptarse a la normativa autonómica y a los acuerdos del departamento.

FASE 1
Inicial

Diagnóstico breve de conocimientos previos en la primera ficha del Anexo 3 y lectura del reto (Anexo 1).

FASE 2
Formativa

Evidencias de cada sesión, revisión de estrategias y errores, y retroalimentación con la lista de cotejo (Anexo 5).

FASE 3
Final

Valoración del producto con la rúbrica (Anexo 6), evidencia individual y reflexión del Anexo 7.

Criterios, evidencias e instrumentos

Criterio	Evidencia principal	Instrumento
1.1	Comprensión de la situación: identificación de qué se quiere decidir, qué datos hay y qué variables se estudian, y distinción entre racha y ventaja.	Ficha 1 / lista de cotejo
2.1	Comprobación de la corrección de los cálculos (frecuencias suman 100 %, probabilidades entre 0 y 1) y de la coherencia entre datos, probabilidad teórica y conclusión.	Fichas 3, 4 y 5 / escala de valoración
3.1	Formulación y contraste de conjeturas sobre si un dado o un juego es justo comparando frecuencias relativas con la probabilidad teórica.	Fichas 4 y 6 y Anexo 9 / rúbrica
6.1	Modelización del juego de la caseta con un experimento de dos dados, su espacio muestral y su rentabilidad para la caseta.	Ficha 6 e informe (Anexo 4) / rúbrica
7.1	Tablas de frecuencias, gráficos elegidos con criterio, tabla de 36 casos y recta de probabilidad del informe.	Fichas 2 y 5 e informe (Anexo 4) / rúbrica
8.1	Redacción y defensa oral de las conclusiones de la auditoría con lenguaje estadístico preciso y argumentos basados en datos.	Ficha 7 y defensa del informe / rúbrica

☆ **Evidencias clave de esta SdA**

Informe, medidas, experimento y auditoría.

+ Rúbrica del producto final

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.



Variantes de aplicación

↗ Versión abreviada

Reducir a 4-5 sesiones, ofrecer datos cerrados y un único producto de una página, manteniendo una evidencia individual.

↘ Versión ampliada

Añadir datos reales del entorno, herramientas digitales, comparación de estrategias y una fase pública de comunicación o investigación.

Ficha de lanzamiento del reto

SdA 10 · ¿Azar o patrón?

ALUMNADO

En la caseta «Siete u once» de la feria pagas 1 € y lanzas dos dados: si la suma es 7 u 11, te dan 3 €. El cartel dice: «¡Casi uno de cada dos gana!». Sergio ha ganado cuatro veces seguidas y ya corre el rumor: «¡Está trucado!». Pero un compañero replica: «Las rachas pasan». ¿Cómo distinguimos una racha casual de una ventaja real? Vais a ser el equipo de auditoría de la feria: recoger datos, resumirlos, calcular probabilidades y decidir si el juego es justo y si el cartel dice la verdad.

“ ¿Cómo distinguimos una racha casual de una ventaja real? ”

🎯 Vuestro reto

Auditar el juego «Siete u once» y redactar un informe estadístico que, con tablas, gráficos, medidas, frecuencias y probabilidades, decida si hay una ventaja real o solo una racha casual, y si el cartel dice la verdad.

📦 Lo que vais a producir

Informe estadístico y auditoría de un juego.

📍 Hoja de ruta · 7 sesiones

- 1 Organizamos los datos de la prueba y de la caseta.
- 2 Elegimos tablas y gráficos adecuados para cada pregunta.
- 3 Resumimos con media, mediana, moda y rango.
- 4 Experimentamos con dados y observamos las frecuencias relativas.
- 5 Calculamos probabilidades teóricas con el espacio de resultados.
- 6 Auditamos el juego: comparamos cartel, probabilidad y registro.
- 7 Redactamos y defendemos el informe de auditoría.

📖 Al terminar seré capaz de...

- ✓ Organizar y resumir datos.
- ✓ Interpretar media, mediana, rango y gráficos.
- ✓ Calcular probabilidades en experimentos simples.
- ✓ Comparar probabilidad teórica y frecuencia experimental.

📝 ¿Cómo me evaluarán?

Con la rúbrica del producto final (Anexo 6), la lista de cotejo (Anexo 5) y una reflexión personal (Anexo 7). ¡Revisadlas antes de empezar!

Dossier de fuentes y materiales base

SdA 10 · ¿Azar o patrón?

ALUMNADO

El caso de la caseta, datos de 15 jugadores, dos dados que se comparan, la tabla de las 36 sumas, una gráfica de estabilización, la recta de probabilidad y un protocolo de auditoría. Todos los datos son ficticios, creados para el aula.

F1 La racha de Sergio en la caseta «Siete u once»

ESTUDIO DE CASO

Las normas. Se pagan 1 €. Se lanzan dos dados (uno rojo y otro azul) y se suman sus puntos. Si la suma es **7 u 11**, la caseta paga 3 € al jugador (su euro más 2 €). Si no, la caseta se queda con el euro.

El cartel. «¡Casi uno de cada dos gana!»

La racha. Sergio ha ganado cuatro partidas seguidas y dice que la caseta está trucada. El responsable afirma que es pura suerte.

El libro de registro. La caseta anota todas las partidas del día: **90 partidas, 19 ganadas por los jugadores**. Hoy han pasado por la caseta 180 personas distintas, una vez cada una.

Fuente: Situación ficticia creada para el aula.

🔍 ¿Qué datos necesitas para saber si el juego es justo? ¿Qué te dice una racha de cuatro?

F2 Tiro a canasta: aciertos de 15 jugadores

DATOS

Jugador	Aciertos	Jugador	Aciertos
1	5	9	6
2	3	10	5
3	6	11	10
4	5	12	4
5	8	13	5
6	4	14	3
7	5	15	6
8	7	—	—

Fuente: Datos ficticios creados para el aula: aciertos de 10 intentos cada jugador.

🔍 Organiza estos 15 datos antes de calcular nada. ¿Qué valores se repiten más?

F3

Dos dados bajo sospecha: 60 lanzamientos cada uno

DATOS

Cara	Dado A (frecuencia)	Dado B (frecuencia)
1	8	4
2	9	5
3	11	6
4	10	7
5	12	9
6	10	29
Total	60	60

Fuente: Datos ficticios creados para el aula: resultados de lanzar 60 veces cada dado.

?

Si un dado es correcto, ¿cuántas veces esperas que salga cada cara en 60 lanzamientos?

F4

Los mismos datos en diagramas de barras

GRÁFICO

DADO A: 60 LANZAMIENTOS

Cara	Frecuencia
1	8
2	9
3	11
4	10
5	12
6	10

DADO B: 60 LANZAMIENTOS

Cara	Frecuencia
1	4
2	5
3	6
4	7
5	9
6	29

Fuente: Gráficos calculados con los datos de F3.

?

Un gráfico no sustituye al cálculo, pero ayuda a ver. ¿Qué dado parece equilibrado y cuál no?

F5

Las 36 sumas de dos dados

DATOS

Rojo \ Azul	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

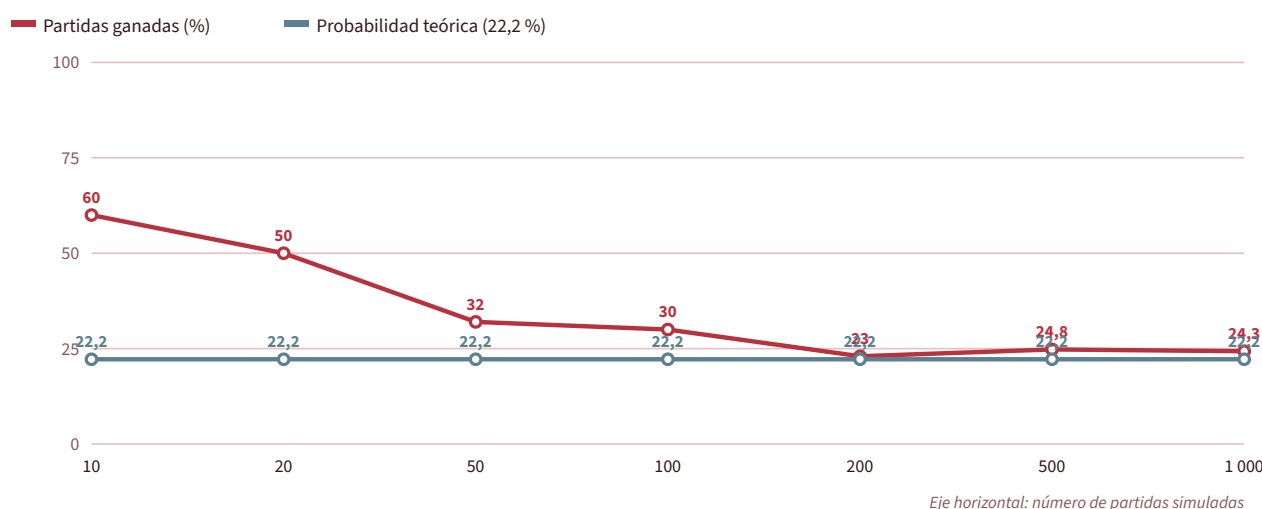
Hay **36 resultados** posibles, todos igualmente probables si los dados son correctos. Por ejemplo, la suma 7 aparece 6 veces y la suma 12, una sola vez.

Fuente: Elaboración propia: suma de los puntos del dado rojo (filas) y del dado azul (columnas).

🔍 Cuenta cuántas veces aparece cada suma. ¿Cuáles son las más frecuentes?

F6 La frecuencia relativa se estabiliza

GRÁFICO



Fuente: Gráfica elaborada con una simulación de ordenador de partidas de «Siete u once» (datos simulados para el aula).

🔍 ¿Qué pasa con la frecuencia relativa al aumentar las partidas? ¿Y con las primeras 10?

F7 Fórmulas y reglas esenciales

TEXTO

Frecuencia absoluta f : número de veces que aparece un dato. **Frecuencia relativa**: f/n (se puede dar en %).

Media: suma de los datos entre el número de datos. **Mediana**: dato central al ordenarlos (si hay dos centrales, su media). **Moda**: dato que más se repite. **Rango**: máximo — mínimo (mide la dispersión).

Regla de Laplace (casos igualmente probables): $P(\text{suceso}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$. Siempre $0 \leq P \leq 1$.

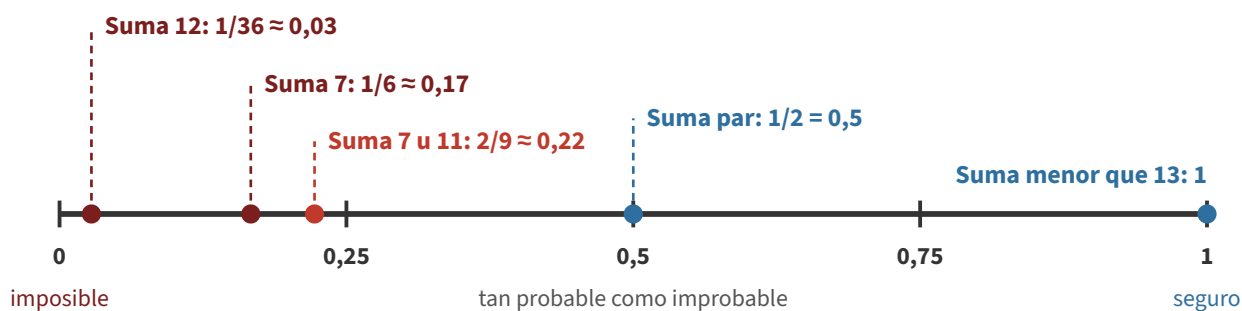
Dos sucesos independientes: $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$. Por ejemplo, 6 en el dado rojo y 6 en el azul: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Fuente: Elaboración propia.

🔍 La frecuencia relativa es lo que **ha pasado**; la probabilidad es lo que **se espera** que pase.

F8 La recta de la probabilidad

ESQUEMA



Fuente: Esquema de elaboración propia con sucesos de la suma de dos dados.

Q ¿Qué suceso de la recta es más probable: que la suma sea 7 o que sea 12? ¿Cuánto más?

F9 Protocolo de auditoría de un juego

PROTOCOLO

Para auditar un juego de azar, sigue estos seis pasos:

- **1. Reglas.** ¿Cuánto se paga, cuánto se gana y cuándo?
- **2. Espacio de resultados.** Lista o tabla de todos los casos posibles.
- **3. Probabilidad teórica** de ganar con la regla de Laplace.
- **4. Datos reales.** Frecuencia relativa de victorias en el registro o en un experimento.
- **5. Comparación.** ¿Se parecen la frecuencia y la probabilidad? ¿Con cuántas partidas?
- **6. Decisión y cartel.** ¿El juego es justo? ¿Lo que anuncia el cartel es cierto? Escribe la conclusión con los datos que la sostienen.

Fuente: Elaboración propia.

Fichas de actividades del alumnado

SdA 10 · ¿Azar o patrón?

ALUMNADO

FICHA 1

Datos de la prueba y de la caseta

Sesión 1

Nombre:

Curso/grupo:

Fecha:

Usa F1 y F2. Antes de opinar, organiza los datos.

1 Diagnóstico inicial. Marca la respuesta correcta.

La media de 2, 4 y 6 es...

☐ 3 ☐ 4 ☐ 6

La probabilidad de sacar un 3 con un dado correcto es...

☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{3}{6}$ ☐ $\frac{1}{6}$

Si en 10 lanzamientos de una moneda salen 6 caras, la frecuencia relativa de cara es...

☐ 6 ☐ 0,6 ☐ 0,4

2 Clasifica cada variable como cualitativa o cuantitativa y escribe sus valores posibles.

Variable	Tipo	Valores posibles
Aciertos en 10 intentos (F2)		
Cara que sale en un dado		
Color favorito de los jugadores		
Euros que gana un jugador en una partida (F1)		

3 Con los datos de F2, completa la tabla de frecuencias.

Aciertos	Recuento	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa (%)
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
Total			

- 4 Sergio ha ganado cuatro partidas seguidas. ¿Crees que eso prueba que la caseta está trucada? Escribe tu opinión y qué datos necesitarías para decidirlo.
-
-
-
-

FICHA 2

Tablas y gráficos adecuados

Sesión 2

Usa F2, F3 y F4. Cada pregunta pide un tipo de gráfico.

- 1 Dibuja el diagrama de barras de los aciertos de F2 con la tabla de frecuencias de la ficha 1. Rotula los ejes.



- 2 Observa los diagramas de F4. Si un dado es correcto, ¿qué altura debería tener cada barra en 60 lanzamientos? ¿Qué dado parece equilibrado y cuál no? ¿Qué cara llama la atención?
-
-
-
-
-

- 3 Elige el gráfico más adecuado (barras, sectores o líneas) y explica por qué.

Situación	Gráfico	Por qué
Cuántas veces sale cada cara de un dado		
Qué parte de las 90 partidas gana el jugador y qué parte pierde la caseta		
Cómo cambia la frecuencia relativa al aumentar el número de partidas		

- 4 Reparto de las 90 partidas del registro de F1: completa la tabla con el porcentaje y el ángulo del sector (un círculo tiene 360°).

Resultado	Partidas	Porcentaje (%)	Ángulo del sector
Gana el jugador	19		
Gana la caseta	71		
Total	90		

FICHA 3 Media, mediana, moda y rango

Sesión 3

Usa F2 y F7. Resumir es quedarse con lo importante sin perder el sentido.

- 1 Calcula las medidas de los 15 aciertos de F2. Deja claro el cálculo.

Medida	Cálculo	Resultado
Media (dos decimales)		
Mediana		
Moda		
Rango		

- 2 El jugador 11 (10 aciertos) abandona la prueba. Recalcula la media y la mediana de los 14 que quedan. ¿Cuál de las dos medidas cambia más?

- 3 Dos equipos de 5 personas han hecho estos aciertos: equipo X: 4, 5, 5, 6, 5; equipo Y: 1, 5, 5, 5, 9. Calcula y compara.

Equipo	Media	Mediana	Rango
X			
Y			

4 Verdadero o falso. Corrige las falsas.

	V	F
La media siempre coincide con alguno de los datos.	☐	☐
Un dato extremo cambia la mediana menos que la media.	☐	☐
El rango mide cuánto se dispersan los datos.	☐	☐
Dos conjuntos con la misma media tienen el mismo rango.	☐	☐

FICHA 4 Experimentos y frecuencia relativa

Sesión 4

Usa F3 y F6. Para saber si un dado es correcto, compara lo ocurrido con lo esperado.

1 Completa las frecuencias relativas de los dados de F3 (en %, con un decimal).

Cara	A: frecuencia	A: frec. relativa (%)	B: frecuencia	B: frec. relativa (%)
1	8		4	
2	9		5	
3	11		6	
4	10		7	
5	12		9	
6	10		29	

2 Si un dado es correcto, cada cara sale 10 veces de 60. Calcula la diferencia (frecuencia – 10) de cada cara y decide qué dado te parece trucado y por qué.

Cara	1	2	3	4	5	6
Diferencia dado A						
Diferencia dado B						

3 Experimento. Lanzad dos dados 30 veces (o simulad con un generador) y anotad cuántas veces la suma es 7 u 11, en tres bloques de 10.

Bloque	Nº de «7 u 11»	Frecuencia relativa del bloque	Frecuencia relativa acumulada
1-10			
11-20			
21-30			
Total (30)			

- 4 Con la gráfica de F6: ¿qué frecuencia relativa había con 10 partidas y con 1 000? ¿Hacia qué valor se acerca? ¿Por qué con pocas partidas hay tanta diferencia?

FICHA 5 Probabilidad teórica

Sesión 5

Usa F5, F7 y F8. Cuenta casos favorables y casos posibles con la tabla de 36 resultados.

- 1 Calcula con F5 la probabilidad de cada suceso (como fracción simplificada y en decimal).

Suceso	Casos favorables	Casos posibles	Probabilidad
La suma es 7			
La suma es 11			
La suma es 7 u 11			
La suma es 10 o más			
La suma es par			
La suma no es 7			

- 2 Ordena de menos a más probable: «la suma es 12», «la suma es 7», «la suma es menor que 13», «la suma es par». Sitúalos en la recta de F8 y explica el orden.

- 3 Se lanzan una moneda y un dado. Escribe todos los resultados posibles y calcula $P(\text{cara y número par})$ y $P(\text{cruz y 5 o 6})$.

- 4 Con dos dados, calcula multiplicando probabilidades: a) $P(6 \text{ en el rojo y } 6 \text{ en el azul})$; b) $P(\text{rojo par y azul impar})$. Comprueba b) contando casos en F5.

FICHA 6 Auditoría del juego

Sesión 6

Trabaja en equipo con roles: coordinador, calculista, comprobador y portavoz. Seguid el protocolo de F9 con F1, F5 y F6.

- 1 Compara lo que dice el cartel, la probabilidad teórica y el registro de la caseta.

Fuente	Cálculo	% de victorias
Cartel («casi uno de cada dos»)		
Probabilidad teórica		
Registro (90 partidas)		

- 2 Economía de la caseta. Si hoy juegan 180 personas, ¿cuántas se espera que ganen? ¿Cuánto paga y cuánto recauda la caseta? ¿Cuál es su beneficio esperado? Calcula también el beneficio real del registro (90 partidas, 19 ganadas).

- 3 La racha. Calcula la probabilidad de ganar cuatro partidas seguidas. ¿Prueba esto que la caseta está trucada? Razona con la probabilidad, con el registro y con el número de jugadores.

4

Decisión de auditoría.

Afirmación	¿Se sostiene con los datos?	Prueba
Los dados están trucados		
El cartel dice la verdad		
Sergio ha tenido suerte		

FICHA 7

Informe y comprobación individual

Sesión 7

Resuelve sin ayuda del equipo. Escribe los cálculos y justifica con datos.

1

Una caseta nueva propone: «Lanzas una moneda y un dado; si sale cara y número par, ganas». Calcula la probabilidad de ganar, cuántas victorias se esperan en 80 partidas y si el cartel «ganas 1 de cada 3» sería cierto.

2

Los tiempos (en segundos) de 7 corredores son 12, 14, 14, 13, 15, 14 y 41. Calcula media, mediana, moda y rango, y decide qué medida representa mejor al grupo.

- 3 Con un dado se hacen 50 lanzamientos y sale 6 en 20 ocasiones. Calcula la frecuencia relativa y compárala con la probabilidad teórica. ¿Es una racha casual o sospechas del dado? ¿Qué harías para decidirlo?

- 4 Explica con tus palabras, usando F6, por qué la frecuencia relativa se acerca a la probabilidad cuando se juegan muchas partidas.

Plantilla del producto final

SdA 10 · ¿Azar o patrón?

ALUMNADO

Nombre:

Curso/grupo:

Fecha:

Informe estadístico y auditoría de «Siete u once». Todas las conclusiones deben apoyarse en datos y en cálculos.

Título, equipo y roles

Nombre del informe, integrantes y roles.

Pregunta y reglas del juego

¿Racha o ventaja? Normas y cartel.

Datos y tabla de frecuencias

Frecuencia absoluta y relativa del registro.

Gráfico elegido

Gráfico rotulado y por qué lo habéis elegido.

**Medidas estadísticas**

Media, mediana, moda y rango de un conjunto de datos.

Espacio de resultados y probabilidad teórica

Tabla de 36 casos y probabilidad de ganar.

**Experimento y comparación**

Frecuencia relativa obtenida frente a la teórica.

Economía de la caseta

Beneficio esperado y real.

Decisión y revisión

¿Racha o ventaja real? ¿Es verdad el cartel? Firma del equipo revisor.

Lista de cotejo para el proceso y la entrega

SdA 10 · ¿Azar o patrón?

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Antes de entregar **Informe estadístico y auditoría de un juego**, comprueba cada punto y marca la casilla. Si alguno falla, todavía estás a tiempo de mejorarlo.

Contenido del producto

- ☐ El informe indica con claridad las reglas del juego y la pregunta que se quiere responder.
- ☐ Las tablas de frecuencias son correctas (las frecuencias suman el total y los porcentajes suman 100 %).
- ☐ El gráfico elegido es adecuado para los datos, tiene ejes rotulados y título.
- ☐ Media, mediana, moda y rango están bien calculados y se interpretan.
- ☐ El espacio de resultados está completo (36 casos) y la probabilidad teórica está bien calculada y simplificada.
- ☐ Se compara la frecuencia relativa con la probabilidad teórica y se indica con cuántas pruebas.
- ☐ Se calcula el beneficio de la caseta y se razona si la racha de Sergio es casual.
- ☐ La conclusión responde a la pregunta y se apoya en datos y cálculos.
- ☐ Se ha revisado el informe con otro equipo (cálculos y redacción).

Calidad y rigor

- ☐ He utilizado vocabulario específico de la materia y lo he explicado cuando era necesario.
- ☐ He apoyado mis afirmaciones con evidencias (datos, citas, mapas o ejemplos concretos).
- ☐ He citado o identificado todas las fuentes utilizadas.
- ☐ He revisado la ortografía, la presentación y el orden del producto.
- ☐ He incorporado las mejoras propuestas en la coevaluación o por el docente.

Lo que más me ha costado

Firma del equipo / fecha de entrega

Rúbrica imprimible

SdA 10 · ¿Azar o patrón?

ALUMNADO · DOCENTE

Nombre:

Curso/grupo:

Fecha:

Rúbrica para valorar **Informe estadístico y auditoría de un juego**. Marca el nivel alcanzado en cada indicador.

Indicador	NIVEL 4 Avanzado	NIVEL 3 Adecuado	NIVEL 2 En proceso	NIVEL 1 Inicial	Nivel
Comprensión matemática	Relaciona conceptos, procedimientos y contexto con precisión.	Comprende los elementos esenciales y comete errores menores.	Comprensión parcial; necesita ayuda en alguna conexión.	Presenta errores esenciales o no interpreta el reto.	
Resolución y estrategia	Selecciona y compara estrategias eficaces, mostrando todos los pasos relevantes.	Aplica una estrategia adecuada y llega a una solución correcta.	La estrategia es incompleta o contiene errores que corrige con ayuda.	No plantea una estrategia válida o abandona el proceso.	
Comprobación y razonamiento	Comprueba, justifica y analiza la coherencia del resultado o sus límites.	Comprueba el resultado y ofrece una justificación suficiente.	Comprueba de forma superficial o la justificación es incompleta.	No comprueba ni justifica la solución.	
Representación y comunicación	El producto final es claro, preciso, usa lenguaje matemático y representaciones adecuadas.	El producto comunica correctamente el procedimiento y los resultados.	La comunicación es comprensible pero incompleta o poco precisa.	El producto es incompleto, confuso o no responde al reto.	
Revisión y trabajo	Incorpora retroalimentación, corrige errores y participa de forma responsable y autónoma.	Revisa el trabajo y cumple su función en el equipo.	Revisa solo con ayuda o participa de forma irregular.	No revisa el trabajo o su participación dificulta el proceso.	

Observaciones del docente

Valoración global

Autoevaluación y coevaluación

SdA 10 · ¿Azar o patrón?

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Parte 1 · Autoevaluación

Afirmación	Aún no	Con ayuda	Bien	Muy bien
Sé organizar datos, elegir un gráfico y calcular media, mediana, moda y rango.	☐	☐	☐	☐
Distingo la frecuencia relativa de la probabilidad y sé usarlas para decidir si un juego es justo.	☐	☐	☐	☐
He cumplido mi rol y mis tareas dentro del equipo.	☐	☐	☐	☐
He escuchado y tenido en cuenta las ideas de los demás.	☐	☐	☐	☐
He usado fuentes y evidencias para justificar mis ideas.	☐	☐	☐	☐
He revisado y mejorado mi trabajo a partir de la retroalimentación.	☐	☐	☐	☐

Dos aprendizajes que he logrado

Una dificultad que he tenido

Una mejora que haré la próxima vez

Parte 2 · Coevaluación de otro equipo**Equipo evaluado:** _____**Fortaleza 1**

Fortaleza 2

Propuesta de mejora

Material de apoyo y refuerzo

SdA 10 · ¿Azar o patrón?

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

Conjuntos de datos pequeños y espacio de resultados listado, con los pasos señalados.

⊗ Ejemplo modelado: medidas de 2, 4, 4, 6, 9

Media: $2 + 4 + 4 + 6 + 9 = 25$; $25 : 5 = 5$.**Mediana:** los datos ya están ordenados y el central es 4**Moda:** el 4 (aparece dos veces). **Rango:** $9 - 2 = 7$.**Probabilidad (Laplace):** $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$; por ejemplo, sacar un número par en un dado: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

⊗ Glosario y símbolos esenciales

Dato: valor observado. **Frecuencia absoluta f :** cuántas veces se repite. **Frecuencia relativa f/n :** parte del total. **Espacio muestral:** lista de todos los resultados posibles. **Suceso:** algunos de esos resultados. P siempre está entre 0 y 1.

1 Calcula las medidas del conjunto 2, 3, 3, 5, 6, 9 (ya está ordenado).

Medida	Pasos	Resultado
Media (2 decimales)		
Mediana (hay dos datos centrales)		
Moda		
Rango		

2 Completa el espacio de resultados de lanzar una moneda (C = cara, X = cruz) y un dado.

Moneda \ Dado	1	2	3	4	5	6
C	C1	C2	C3	C4	C5	C6
X						

3 Con la tabla anterior, ¿cuántos resultados hay en total? Calcula $P(\text{cara y par})$ y $P(\text{cruz y mayor que 4})$ como fracciones.

Actividad de ampliación

SdA 10 · ¿Azar o patrón?

ALUMNADO

Nombre: _____

Curso/grupo: _____

Fecha: _____

 Diseñar un juego con una probabilidad de ganar entre el 30 % y el 40 %

La caseta quiere un juego nuevo que parezca atractivo pero que dé una probabilidad de ganar de entre el 30 % y el 40 %. Hay que diseñar las reglas y demostrar con cálculos que se cumple.

 Pasos

- 1** Elige un experimento (dos dados, moneda y dado, una ruleta...) y escribe todo su espacio de resultados.
- 2** Define cuándo gana el jugador y calcula la probabilidad con la regla de Laplace. Comprueba que está entre 0,30 y 0,40.
- 3** Haz un experimento de al menos 50 partidas y compara la frecuencia relativa con tu probabilidad. ¿Se parecen? ¿Por qué no coinciden exactamente?
- 4** Escribe un cartel sincero para tu juego y explica cómo se podría saber si un competidor engaña en el suyo.

1 **Tabla de comprobación de tu juego.**

Gana el jugador si...	Casos favorables	Casos posibles	Probabilidad	¿Entre 30 % y 40 %?

 Entrega

Las reglas del juego, su espacio de resultados, la probabilidad calculada, la frecuencia relativa de un experimento de 50 partidas y un cartel sincero.

 Ficha 1

1. Diagnóstico: media $\frac{2+4+6}{3} = 4$; $\frac{1}{6}$; $\frac{6}{10} = 0,6$.
2. Aciertos: cuantitativa (valores 0 a 10); cara del dado: cuantitativa (1 a 6); color favorito: cualitativa; euros recibidos en una partida: cuantitativa (0 € o 3 €).
3. Frecuencias: $3 \rightarrow 2$ (13,3 %); $4 \rightarrow 2$ (13,3 %); $5 \rightarrow 5$ (33,3 %); $6 \rightarrow 3$ (20 %); $7 \rightarrow 1$ (6,7 %); $8 \rightarrow 1$ (6,7 %); $9 \rightarrow 0$ (0 %); $10 \rightarrow 1$ (6,7 %); total 15 (100 %).
4. Respuesta abierta: una racha de cuatro, por sí sola, no prueba que esté trucado. Hacen falta muchas partidas, el registro de la caseta y la probabilidad teórica para comparar.

 Ficha 2

1. Barras de alturas 2, 2, 5, 3, 1, 1, 0, 1 para los aciertos 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
2. En 60 lanzamientos se esperan 10 por cara. El dado A tiene barras cercanas a 10 (entre 8 y 12): parece equilibrado. El dado B tiene un 6 con 29 y las demás caras por debajo de 10: parece trucado a favor del 6.
3. Barras (frecuencias de una variable); sectores (parte de un total); líneas (evolución al aumentar las partidas, como F6).
4. Gana el jugador: $19/90 = 21,1\%$, ángulo $19 \cdot 4 = 76^\circ$; gana la caseta: $71/90 = 78,9\%$, $71 \cdot 4 = 284^\circ$ (cada partida son $360^\circ : 90 = 4^\circ$). Total 100 % y 360° .

 Ficha 3

1. Media: $82 : 15 \approx 5,47$. Mediana: el 8.º de 15 datos ordenados (3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 10) es 5. Moda: 5. Rango: $10 - 3 = 7$.
2. Sin el 10: suma 72 y $72 : 14 \approx 5,14$; mediana: con 14 datos, la media del 7.º y 8.º, $(5 + 5)/2 = 5$. La media baja de 5,47 a 5,14 y la mediana no cambia: la media es más sensible al valor extremo.
3. X: media 5, mediana 5, rango 2. Y: media 5, mediana 5, rango 8. Misma media y mediana, pero Y es mucho más irregular (más dispersión).
4. F (por ejemplo, 5,47 no es un dato); V; V; F (los equipos X e Y tienen la misma media y rangos 2 y 8).

 Ficha 4

1. Dado A: 13,3; 15,0; 18,3; 16,7; 20,0; 16,7 (%). Dado B: 6,7; 8,3; 10,0; 11,7; 15,0; 48,3 (%). Ambas columnas suman 100 %.
2. Diferencias A: $-2, -1, +1, 0, +2, 0$. Diferencias B: $-6, -5, -4, -3, -1, +19$. El A varía poco alrededor de 10: es compatible con un dado correcto. El B tiene un 6 con 19 más de lo esperado: no es casualidad razonable, el dado parece trucado.
3. Respuesta experimental: se espera cerca del 22 % (unos 6-7 de 30), pero con 30 pruebas es normal ver valores entre el 10 % y el 35 %. Se valora la tabla bien calculada (acumulada = total de victorias / partidas hechas).
4. Con 10 partidas: 60 %; con 1 000: 24,3 %. Se acerca a un valor cercano al 22 % (la probabilidad teórica). Con pocas partidas un par de victorias casuales cambia mucho la frecuencia relativa; con muchas, esas variaciones se diluyen.

Ficha 5

1. $P(7) = 6/36 = 1/6 \approx 0,167$; $P(11) = 2/36 = 1/18 \approx 0,056$; $P(7 \text{ u } 11) = 8/36 = 2/9 \approx 0,222$; $P(\geq 10) = 6/36 = 1/6$ (10: 3 casos, 11: 2, 12: 1); $P(\text{par}) = 18/36 = 1/2$; $P(\text{no } 7) = 30/36 = 5/6 \approx 0,833$.
2. Orden: suma 12 ($1/36 \approx 0,03$) < suma 7 ($1/6 \approx 0,17$) < suma par (0,5) < suma menor que 13 (1, suceso seguro).
3. Resultados: C1, C2, C3, C4, C5, C6, X1, X2, X3, X4, X5, X6 (12). $P(\text{cara y par}) = 3/12 = 1/4$; $P(\text{cruz y } 5 \text{ o } 6) = 2/12 = 1/6$.
4. a) $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$; b) $\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$; en F5, rojo par (2, 4, 6) y azul impar (1, 3, 5) da $3 \cdot 3 = 9$ casos de 36.

Ficha 6

1. Cartel: casi 1 de cada 2 $\rightarrow$ alrededor del 50 %. Teórica: $2/9 \approx 22,2$ %. Registro: $19/90 \approx 21,1$ %. El registro y la teoría coinciden; el cartel no.
2. Ganan $180 \cdot 2/9 = 40$ personas; la caseta paga $40 \cdot 3 = 120$ €; recauda 180 €; beneficio esperado $180 - 120 = 60$ €. Registro: recaudado 90 €, pagado $19 \cdot 3 = 57$ €, beneficio real $90 - 57 = 33$ €.
3. $\left(\frac{2}{9}\right)^4 = \frac{16}{6561} \approx 0,0024$ (unas 2,4 de cada 1 000 rachas de cuatro partidas). Es poco probable para una persona concreta, pero con 180 jugadores y muchas rachas posibles, que alguien la consiga no sorprende. Además, la frecuencia global (21,1 %) coincide con la teórica: no hay evidencia de trampa.
4. Los dados trucados: no se sostiene (la frecuencia del registro coincide con la teórica). El cartel: falso o engañoso (50 % frente a 22 %). Sergio: es plausible que haya tenido suerte.

Ficha 7

1. $P = 3/12 = 1/4 = 25$ %. En 80 partidas se esperan $80 \cdot 1/4 = 20$ victorias. El cartel «1 de cada 3» (33,3 %) no sería cierto.
2. Media: $123 : 7 \approx 17,57$ s; mediana (ordenados 12, 13, 14, 14, 14, 15, 41): 14 s; moda: 14 s; rango: $41 - 12 = 29$ s. Representa mejor la mediana (14 s), porque el valor extremo 41 sube mucho la media.
3. Frecuencia relativa $20/50 = 0,40$; teórica $1/6 \approx 0,167$. La diferencia es grande (en 50 lanzamientos se esperarían unos 8 seises y han salido 20): es sospechoso. Haría más lanzamientos (por ejemplo, 300-500) y comprobaría si se mantiene.
4. Con pocas pruebas la frecuencia puede variar mucho por azar; con muchas, las variaciones se compensan y la frecuencia relativa se queda cerca de la probabilidad (F6: de 60 % con 10 partidas a 24,3 % con 1 000).

Refuerzo

1. Media: $28 : 6 \approx 4,67$. Mediana: $(3 + 5)/2 = 4$. Moda: 3. Rango: $9 - 2 = 7$.
2. Fila X: X1, X2, X3, X4, X5, X6. Hay $2 \cdot 6 = 12$ resultados.
3. $P(\text{cara y par}) = 3/12 = 1/4$; $P(\text{cruz y mayor que } 4) = 2/12 = 1/6$.

Ampliación

1. Ejemplo con dos dados: gana con suma 7 u 8: $6 + 5 = 11$ casos de 36 $\rightarrow 11/36 \approx 30,6\%$ ✓. Otros válidos: suma 5, 6 u 7 es $4 + 5 + 6 = 15/36 = 41,7\%$ (no vale); suma 4, 5 o 6 $\rightarrow 3 + 4 + 5 = 12/36 = 33,3\%$ ✓; suma 9 o más: $10/36 = 27,8\%$ (no vale). Con moneda y dado: «cara y 1, 2 o 3»: $3/12 = 25\%$ (no vale); «cara y 1-4, o cruz y 6»: $4/12 + 1/12 = 5/12 = 41,7\%$ (no vale); «cara y 1-4»: $4/12 = 33,3\%$ ✓. Se acepta cualquier diseño correcto.
2. En 50 partidas se esperan unas 15-16 victorias para $p \approx 0,31$; es normal que la frecuencia relativa varíe entre el 20 % y el 42 % por azar, y se acerca más a p con más partidas.
3. Se valora que el cartel sea sincero (por ejemplo, «casi 1 de cada 3 gana») y que se explique que un competidor engaña si su frecuencia relativa con muchas partidas se aleja claramente de su probabilidad teórica.

Errores frecuentes

- Confundir frecuencia relativa (lo que ha pasado) con probabilidad (lo que se espera) o creer que tras una racha «toca» el resultado contrario.
- Calcular la mediana sin ordenar los datos o no tomar la media de los dos centrales cuando hay un número par.
- Olvidar que la suma de las frecuencias relativas es 1 (100 %) y la de las probabilidades de todos los casos también.
- Contar solo 11 resultados para dos dados (sumas distintas) en lugar de 36: no todas las sumas son igual de probables.
- Multiplicar probabilidades de sucesos que no son independientes, o sumar en lugar de multiplicar para «y».
- Elegir un gráfico inadecuado (líneas para categorías, sectores para evolución) o no empezar el eje en cero.

Criterios para valorar respuestas abiertas

- En el informe se valora que cada conclusión cite un dato o un cálculo, no que coincida con una opinión concreta.
- Se aceptan decisiones distintas sobre el dado A o el dado B si se justifican con las diferencias respecto a lo esperado y se reconoce la incertidumbre.
- Un experimento con pocos lanzamientos puede alejarse de la teoría: se valora que el alumnado lo explique con la variabilidad, no que «arregle» los datos.
- La hoja de cálculo o un simulador de dados pueden usarse para generar datos, pero el alumnado debe interpretar y escribir las tablas y probabilidades.



Créditos, fuentes y condiciones de uso

📅 Edición revisada: octubre de 2026

Situaciones de aprendizaje · Matemáticas · 2.º ESO. Material elaborado y editado por **recursoseso.com**.

🏛️ Normativa de referencia

- Ley Orgánica 2/2006, de Educación, modificada por la Ley Orgánica 3/2020 (LOMLOE).
- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la ESO.
- Currículos autonómicos correspondientes, a los que debe adaptarse esta propuesta.

📐 Gráficos, esquemas y fórmulas

Gráficas, diagramas, planos y esquemas de elaboración propia. Fórmulas compuestas con **KaTeX** (licencia MIT). Los mapas, cuando aparecen, se elaboran con datos de **Natural Earth** (dominio público).

📊 Datos y contextos

Los problemas usan datos reales cuando se indica su fuente (INE, Eurostat, Banco de España, AEMET, organismos oficiales y similares), redondeados con fines didácticos. Los catálogos de precios, tarifas, empresas, personajes y conjuntos de datos señalados como ficticios han sido creados para el aula. Las cifras económicas y tarifas deben actualizarse cuando se trabajen problemas del presente.

🛠️ Herramientas digitales

Las referencias a calculadora, hoja de cálculo o geometría dinámica (por ejemplo, GeoGebra) son orientativas: todas las actividades pueden resolverse también con lápiz, papel y los datos del dossier.

🛡️ Condiciones de uso

© 2026 recursoseso.com. Todos los derechos reservados. Se autoriza la reproducción de las páginas de este cuaderno para su uso en el aula por parte del docente o del centro educativo que lo ha adquirido u obtenido legítimamente. No está permitida su redistribución, venta, publicación en otras webs o plataformas ni su modificación para uso comercial sin autorización expresa de recursoseso.com.

- ① Si detectas algún error o quieres proponer una mejora, puedes comunicarlo a través de **recursoseso.com**. Este material se revisa y actualiza periódicamente.