1.º BACHILLERATO

TRIGONOMETRÍA

Practica, razona y comprueba tus respuestas.

01 Medida de ángulos y cuadrantes

Grados, radianes, signos y comparación.

02 Razones trigonométricas

Razones exactas, cálculo y ángulos notables.

03 Relaciones e identidades

Suma, diferencia, ángulo doble y mitad.

04 Ecuaciones y sistemas trigonométricos

Soluciones, periodicidad y condiciones.

05 Resolución de triángulos

Teoremas del seno y del coseno.

06 Problemas geométricos

Alturas, distancias, áreas y aplicaciones.

07 Profundización

Demostraciones y lugares geométricos.

08 Trigonometría y óptica

Refracción, reflexión y fibra óptica.

TU RUTA DE TRABAJO

Índice

Actividades organizadas por contenidos, con espacio para trabajar y soluciones al final.

01	Medida de ángulos y cuadrantes	3
02	Razones trigonométricas	6
03	Relaciones e identidades	17
04	Ecuaciones y sistemas trigonométricos	27
05	Resolución de triángulos	32
06	Problemas geométricos	37
07	Profundización	53
08	Trigonometría y óptica	56
•	Solucionario	57

Cómo usar el dossier
El código **1.12** identifica la actividad 12 del bloque 1. Busca ese mismo código en el solucionario. Puedes seguir el orden completo o seleccionar un contenido para repasarlo.

Antes de empezar
Comprueba si cada ángulo está expresado en grados o en radianes y selecciona el modo adecuado de la calculadora. Conserva los valores exactos cuando sea posible. En las soluciones generales, k y m representan números enteros. Las figuras son esquemas de apoyo.

BLOQUE 01

Medida de ángulos y cuadrantes

Grados, radianes, signos y comparación. · 9 actividades

1.01 Convierte los ángulos a radianes.

a) $10°$

b) $135°$

c) $-60°$

1.02 Expresa en grados los ángulos.

a) $\frac{2\pi}{3}$ rad

b) 3 rad

c) $-\frac{4\pi}{3}$ rad

1.03 Identifica el cuadrante e indica los signos de las seis razones trigonométricas.

a) 66°

b) 18°

c) 175°

d) 135°

e) 342°

f) 120°

1.04 Ordena de menor a mayor los cosenos sin usar la calculadora: 34°, 72°, 98°, 160°, 251° y 345°.

1.05 Ordena de menor a mayor las tangentes sin calculadora: 65°, 110°, 170°, 210° y 315°.

1.06 Convierte los ángulos a radianes.

a) 35°

b) 185°

c) 84° 12′

d) 62° 25′

1.07 Convierte a grados.

a) 1,5 rad

b) 3,5 rad

c) 1,5π rad

d) $\frac{6\pi}{5}$ rad

1.08 Ordena de menor a mayor, sin calculadora, los cosenos de 55°, 110°, 165°, 220°, 275° y 330°.

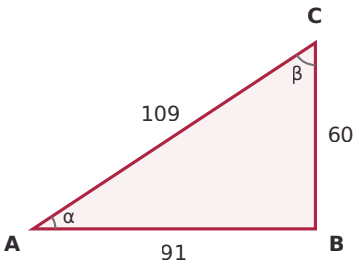
1.09 Ordena de menor a mayor, sin calculadora, los senos de 45°, 120°, 135°, 200°, 225° y 310°.

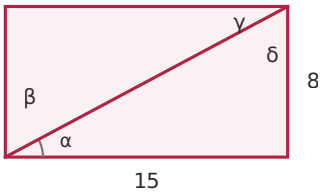
BLOQUE 02

Razones trigonométricas

Razones exactas, cálculo y ángulos notables. · 29 actividades

2.01 Calcula las seis razones trigonométricas de los ángulos agudos marcados.





a) Triángulo rectángulo con catetos 91 y 60 e hipotenusa 109.

b) Rectángulo de lados 15 y 8 dividido por su diagonal.

2.02 Demuestra las igualdades donde las expresiones estén definidas.

a) $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$

b) $\operatorname{cosec} \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$

c) $\operatorname{cotg} \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \dfrac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$

2.03 Calcula las demás razones trigonométricas. Si el dato no fija el cuadrante, indica las posibilidades.

a) $\cos \alpha = 7/25$

b) $\operatorname{tg} \alpha = 1{,}67$

c) $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{2}/2$

d) $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}3$

2.04 ¿Existe algún ángulo que cumpla cada pareja de datos? Distingue entre valores exactos y valores redondeados.

a) $\operatorname{sen} \alpha = 0{,}3$ y $\cos \alpha = 0{,}8$.

b) $\operatorname{sen} \alpha = 0{,}72$ y $\operatorname{tg} \alpha = 1{,}04$.

c) $\cos \alpha = 0{,}1$ y $\operatorname{sen} \alpha = 0{,}99$.

2.05 Calcula exactamente.

a) $\cos 30° - \operatorname{sen} 60° + \operatorname{tg} 45°$

b) $\cos^2 60° - \operatorname{sen}^2 45°$

c) $\operatorname{tg} 60° + \operatorname{sen} 45° - \cos^2 30°$

d) $\operatorname{tg} 30° + \operatorname{tg} 60° - \operatorname{sen} 30° \cdot \cos 30°$

2.06 Calcula con la calculadora. Redondea a cuatro decimales.

a) cos 79°

b) sen 43,5°

c) tg 10° 28′

2.07 Usa la calculadora en modo radianes y redondea a cuatro decimales.

a) sen(0,35 rad)

b) cos(1 rad)

c) tg(1,27 rad)

2.08 Razona las respuestas.

a) ¿Por qué no existe tg 90°?

b) ¿Ocurre lo mismo con todos los múltiplos de 90°?

2.09 Calcula seno, coseno y tangente de α.

a) $\cos \alpha = 1/4$ y $270° < \alpha < 360°$.

b) $\operatorname{tg} \alpha = -2$ y $90° < \alpha < 180°$.

2.10 En un triángulo rectángulo ABC, A = 90° y a es la hipotenusa. Cada lado se opone al ángulo de su misma letra. Calcula lo indicado.

a) sen B y tg B si b = 12 cm y c = 16 cm.

b) cos B y cotg B si a = 30 cm y c = 22 cm.

c) cos C y cosec C si a = 3 cm y b = 2 cm.

d) cos B y tg B si b = 20 cm y c = 20 cm.

2.11 Dibuja dos ángulos A y B que cumplan sen A = $\sqrt{2}/2$ y tg B = $\sqrt{5}$.

2.12 Simplifica exactamente sin calculadora.

a) sen 30° + sen 60°

b) tg(π/3) + sec(π/6)

c) cotg 90° − cotg 30°

d) cosec 60° − cos 60°

2.13 Sin calculadora, decide si las afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) sen 30°+sen 60° = sen 90°

b) cos 30°+cos 60° = cos 90°

c) sen 90° = 2 sen 45°

d) cos 90° = 2 cos 45°

2.14 Halla cosecante, secante y cotangente de cada ángulo.

a) 30°

b) 45°

c) 60°

d) 90°

2.15 Los ángulos A, B y C son agudos. Completa seno, coseno y tangente a partir del dato, sin calcular los ángulos.

a) sen A = 0,5602; cos A = □; tg A = □.

b) sen B = □; cos B = 0,1849; tg B = □.

c) sen C = □; cos C = □; tg C = 2,7804.

2.16 Determina con calculadora los ángulos agudos. Expresa el resultado en grados, con cuatro decimales.

a) cos A = 0,3453

b) tg B = 2,3688

c) cosec C = 1,9044

d) cos D = 0,9726

e) tg E = 0,3554

f) sen F = 0,0968

g) sen G = 0,2494

h) cotg H = 2,5

2.17 Calcula las razones trigonométricas. Respeta las unidades de cada ángulo.

a) sen 19° 22′ 37″

b) cos 44° 52′

c) cos(1,03 rad)

d) $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

e) sec 54° 28′

f) cosec π

g) tg 83° 41′ 57″

h) sen 37° 25′

i) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)$

j) cos(0,845 rad)

k) cotg 35° 40′

l) $\sec\left(\frac{\pi}{6}\right)$

2.18 Completa seno, coseno y tangente de cada ángulo a partir del dato y del cuadrante, sin calcular el ángulo.

a) II cuadrante: sen = 0,6702.

b) III cuadrante: cos = −0,4539.

c) IV cuadrante: tg = −0,7459.

d) III cuadrante: sen = −0,7822.

e) II cuadrante: tg = −1,9004.

f) IV cuadrante: cos = 0,6983.

2.19 Calcula sin calculadora el seno, el coseno y la tangente. Los ángulos están en radianes.

a) $-\pi$

b) $-\frac{\pi}{2}$

c) $-\frac{\pi}{6}$

d) $\frac{\pi}{4}$

e) $\frac{\pi}{3}$

f) $\frac{\pi}{2}$

g) $-\frac{3\cdot\pi}{2}$

h) π

i) $\frac{3\cdot\pi}{2}$

j) $2\cdot\pi$

k) $\frac{7\cdot\pi}{2}$

l) $\frac{9\cdot\pi}{2}$

2.20 Calcula sin calculadora seno, coseno y tangente de estos ángulos.

a) -60°

b) -45°

c) -30°

d) 0°

e) 120°

f) 135°

g) 150°

h) 180°

i) 210°

j) 225°

k) 240°

l) 270°

2.21 Utiliza la calculadora y redondea a cuatro decimales.

a) sen 319° 12′ 52″

b) cos 434° 26′

c) tg(7,03 rad)

d) $\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{5}\right)$

e) cosec 200° 16′

f) $\sec\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

g) tg 183° 13′ 53″

h) sen 333° 55′

i) $\operatorname{tg}\left(\frac{11\pi}{8}\right)$

j) cos(3,845 rad)

k) $\operatorname{cotg}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

l) cosec(5,24 rad)

2.22 Calcula los valores principales de las funciones inversas y exprésalos en grados.

a) arccos(0,4539)

b) arcsen(0,9284)

c) arctg(−0,5459)

d) arctg(2,1618)

e) arccos(−0,2926)

f) arcsen(−0,3308)

2.23 El seno de un ángulo de un triángulo vale 0,7. ¿Queda determinado ese ángulo?

2.24 El coseno de un ángulo de un triángulo vale 0,2. ¿Queda determinado ese ángulo?

2.25 Se sabe que sen $\alpha = 0{,}3$ y tg $\alpha < 0$. Determina el cuadrante y la tangente.

2.26 La tangente de un ángulo es dos veces su seno. Además, su seno es positivo y su coseno negativo. ¿Existe tal ángulo? Determina, si es posible, sus razones trigonométricas.

2.27 Un ángulo del segundo cuadrante tiene seno 0,5. Calcula las restantes razones.

2.28 La tangente de un ángulo es tres veces su seno y ambas razones son negativas. Halla las restantes razones.

2.29 Calcula las razones trigonométricas o explica por qué no existe el ángulo.

a) $\cos \gamma = -0{,}54;\ \pi < \gamma < \frac{3\pi}{2}$

b) $\operatorname{sen} \delta = 0;\ \frac{3\pi}{2} < \delta < 2\pi$

BLOQUE 03

Relaciones e identidades

Suma, diferencia, ángulo doble y mitad. · 33 actividades

3.01 Sabiendo que cos 50° ≈ 0,6428, calcula las razones de los ángulos siguientes.

a) 130°

b) 230°

c) −50°

d) 310°

3.02 Sabiendo que sen 25° ≈ 0,4226, calcula las razones de los ángulos siguientes.

a) 745°

b) 565°

c) 1055°

d) 1235°

3.03 Sabiendo que sen α = 1/5, calcula.

a) sen(90°−α)

b) sen(180°−α)

c) sen(−α)

3.04 Si sen 18° ≈ 0,309 y cos 18° ≈ 0,951, calcula.

a) sen 72°

b) cos 162°

c) tg(−72°)

3.05 Considera 25°, 65°, 115°, 155°, −25° y −65°.

a) ¿Qué parejas tienen el mismo seno? ¿Y el mismo coseno?

b) ¿Qué parejas tienen la misma tangente?

3.06 A partir de las razones de 45° y 60°, calcula las seis razones de 105° y 15°.

a) 105°

b) 15°

3.07 Calcula seno, coseno y tangente de 76° y 19°, usando cos 38° ≈ 0,788 y sen 38° ≈ 0,6157.

3.08 Calcula los cosenos usando las razones trigonométricas de 50° y las de los ángulos notables.

a) cos 40°

b) cos 130°

c) cos 310°

d) cos 80°

e) cos 5°

f) cos 100°

g) cos 25°

3.09 Calcula las razones relacionándolas con un ángulo del primer cuadrante.

a) 301° 21′ 15″

b) 902° 40′

c) 190° 43″

d) 295° 12′ 45″

e) 386° 56′

f) 612° 43′ 2″

3.10 Determina α en el primer cuadrante y calcula las seis razones trigonométricas.

a) sen α = |sen 249° 31′|.

b) cos α = |cos 249° 31′|.

c) tg α = |tg 249° 31′|.

d) tg α = |tg 183° 30′|.

3.11 Sabiendo que sen α = 0,23 y que α es agudo, calcula.

a) cos α

b) tg α

c) tg(−α)

d) cos(180°−α)

e) sen(180°+α)

f) sen(720°+α)

3.12 Simplifica las expresiones.

a) sen(α − 120°) + sen α + sen(α + 120°)

b) sen(α + 30°) + cos(α + 45°)

c) $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \frac{3\pi}{4})$

d) tg(α + π) − tg(α − π)

e) $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \cos(\ - \alpha)$

3.13 Simplifica las expresiones, conservando las restricciones de sus denominadores.

a) $2\text{tg}(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2})$

b) $2 + \cos 2\alpha - \cos^2\alpha$

c) $\dfrac{2\text{sen}\ \alpha \cos \alpha}{1 - 2\text{sen}^2\alpha}$

d) $\cos\alpha(1 + \cos\alpha) + \text{sen}^2\alpha$

e) $\dfrac{2\text{tg}(\frac{\alpha}{2})}{\cos\alpha}$

3.14 Si tg α = 2,5 y α está en el primer cuadrante, calcula tg(α+45°) e indica en qué cuadrante está α+45°.

3.15 Si α es agudo y tg α = 5/4, calcula tg 2α.

3.16 Obtén una fórmula de sen 3x en función de sen x. Aplícala si sen x = 1/3.

3.17 Usa los datos aproximados sen 56° ≈ 0,83 y cos 23° ≈ 0,92. Mantén cifras intermedias para evitar acumular redondeos.

a) Calcula las razones restantes de 56° y 23°.

b) Calcula las razones de 79°.

c) Calcula las razones de 33°.

d) Calcula las razones de 28°.

e) Calcula las razones de 46°.

3.18 Escribe una fórmula simplificada.

a) sen(30° + A)

b) cos(B − 60°)

c) tg(45° − C)

d) cos(D + 30°)

3.19 Se sabe sen x = 2/5 y π/2 < x < π.

a) Calcula sen(x+π/4) y tg(x−π/3) mediante radicales, sin determinar x.

b) Explica cómo obtener las razones de π/4 y π/3.

3.20 Se sabe $\pi < x < 3\pi/2$ y $\operatorname{tg} x = 3/4$.

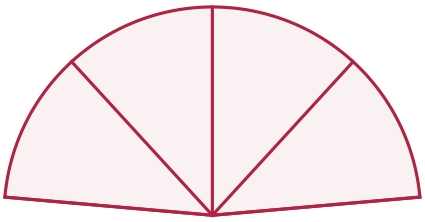
a) Halla sen x y cos x.

b) Determina mediante radicales las razones de $\pi/6$ y $\pi/4$.

c) Calcula $\cos(x-\pi/4)$ y $\operatorname{tg}(x+\pi/6)$.

d) Indica razonadamente en qué cuadrantes están los dos ángulos del apartado anterior.

3.21 Un abanico abierto forma 170° y tiene tres nervios interiores igualmente espaciados. Calcula seno, coseno y tangente de los ángulos acumulados al abrirlo nervio a nervio, usando $\cos 170° \approx -0{,}98$ y $\operatorname{sen} 170° \approx 0{,}17$.



3.22 Calcula cos 285° a partir de las razones de 330° y 45°.

3.23 Usa sen 32° ≈ 0,53 y cos 32° ≈ 0,848.

a) Calcula las razones de 62°.

b) Calcula las razones de 31°.

c) ¿Podrías obtener las razones de cualquier ángulo expresado en un número entero de grados?

3.24 Escribe cada expresión en forma de producto.

a) $\cos 2\alpha - \cos \alpha$

b) $\cos \alpha - \cos 4\alpha$

c) $\operatorname{sen} 8\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha$

d) $\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha$

e) $\cos \alpha + \operatorname{sen} 3\alpha$

f) $\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 3\alpha$

3.25 Simplifica usando una sola razón trigonométrica y conserva las restricciones de dominio.

a) $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha}{\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha}$

b) $\cos^2 5\alpha - \operatorname{sen}^2 5\alpha$

c) $\sec \alpha(\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) - \operatorname{sen} \alpha$

d) $\operatorname{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha$

3.26 Demuestra las igualdades, donde estén definidas.

a) $1 + \operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}(\alpha + 45°)\cos(\alpha - 45°)$

b) $\cos 2\alpha = 2\operatorname{sen}(\alpha + 45°)\cos(\alpha + 45°)$

c) $\operatorname{sen} 2\alpha = -2\operatorname{tg}(\alpha + \pi)[\operatorname{sen}^2(\alpha + \pi) - 1]$

d) $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \pi}{2}\right)$

3.27 Demuestra $\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$ donde la tangente esté definida.

3.28 Demuestra las identidades en sus dominios.

a) $\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \sec\alpha$

b) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha$

c) $\frac{1}{1 - \operatorname{sen}\alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{sen}\alpha} = 2\sec^2\alpha$

d) $\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{sen}\alpha = \sec\alpha$

3.29 Comprueba la igualdad $\frac{2\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}\alpha$ con un ángulo conocido y demuéstrala en su dominio.

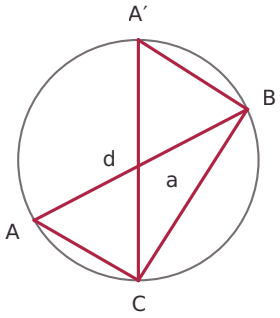
3.30 Demuestra que, si las tangentes de los tres ángulos de un triángulo están definidas, su suma coincide con su producto.

3.31 Expresa las potencias mediante razones trigonométricas de primer grado.

a) $\cos^2 x$ **b)** $\operatorname{sen}^2 x$

3.32 Si tg z = 1,5, calcula tg(z+π/2) sin determinar z. Puedes escribir π/2 = π/4+π/4.

3.33 Usa que los ángulos inscritos que abarcan un mismo arco son iguales para demostrar el teorema del seno: $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = d$, donde d es el diámetro de la circunferencia circunscrita.



BLOQUE 04

Ecuaciones y sistemas trigonométricos

Soluciones, periodicidad y condiciones. · 16 actividades

4.01 Resuelve en el intervalo [0°, 360°]. Aproxima cuando sea necesario.

a) $5 \operatorname{sen} x = 2$

b) $7 \cos x = -1$

c) $5 \operatorname{tg} x = 12$

d) $2 \operatorname{tg} x = 2$

4.02 Resuelve y expresa todas las soluciones en radianes, con k entero.

a) $\cos 2x = 1$

b) $\cos 2x + \operatorname{sen} x = 1$

c) $\operatorname{sen} 2x - \cos x = 0$

d) $2 \operatorname{tg} 4x = 1$

4.03 Resuelve en grados. En las respuestas, k es cualquier entero.

a) $\operatorname{sen}(2x+5°) = 1$

b) $\cos(2x+5°) = 1$

4.04 Resuelve en radianes, con k entero.

a) $\operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} x = 0$

b) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 0$

4.05 Resuelve $\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0$.

4.06 Resuelve $\cos 3x + \cos x = 0$.

4.07 Encuentra y dibuja todos los ángulos en $[0°, 360°)$ que cumplan cada condición.

a) $\operatorname{sen} \alpha = 0{,}8$.

b) $\cos \alpha = -0{,}4$.

c) $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}5$.

d) $\operatorname{sen} \alpha = -0{,}4$.

4.08 Resuelve en grados y expresa todas las soluciones. En las respuestas, k es un entero.

a) $\cos x \operatorname{tg} x = 1/2$

b) $\cos 2x + \operatorname{sen} 2x = 1$

c) $\cos 2x - \operatorname{sen} 2x = 0$

d) $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 1$

e) $\operatorname{sen} x \operatorname{cotg} x = -1/4$

f) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2x = 0$

g) $\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x = 0$

h) $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} 2x = 0$

4.09 Resuelve en grados; k es un entero.

a) $\frac{\operatorname{sen}(60° - x)}{\cos x} = 1$

b) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x) + \operatorname{tg} x - 1 = 0$ (π/4 equivale a 45°)

c) $\operatorname{sen}(x + 30°) + \cos(x + 60°) = 1 + \cos 2x$

4.10 Resuelve en grados; k es un entero.

a) $\operatorname{tg}(x + 45°) + \operatorname{tg}(x - 45°) = 2\operatorname{cotg} x$

b) $4\operatorname{sen}(2(x + 30°)) = 1$

c) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x) - 1 = 0$ (π/4 equivale a 45°)

d) $\operatorname{sen}(x + 30°) - \cos x = 0$

4.11 Resuelve los sistemas en grados. Los parámetros enteros de x e y son independientes.

a) $\begin{cases} \text{sen}^2 x + \text{sen}^2 y = 1 \\ \cos^2 x - \cos^2 y = 1/2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 120° \\ \cos x = \dfrac{1}{2\cos y} + \text{sen } x \text{ tg } y \end{cases}$

4.12 Resuelve en grados. En cada familia, k y m son enteros.

a) $\begin{cases} x + y = 60° \\ \cos x = \text{sen } y \end{cases}$

b) $\begin{cases} y - x = 30° \\ \text{tg } y = \text{tg}(y - 3x) \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{sen } x + 2\cos y = 2 \\ 3\text{sen } x - 4\cos y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4\text{sen } x + \cos^2 y = 2 \\ 2\text{sen } x + \cos y = 1 \end{cases}$

4.13 Resuelve en grados y comprueba las restricciones de las expresiones originales. Usa k entero.

a) $4\text{sen } x - \sec x = 0$

b) $\dfrac{\cos^2 x}{2\cos x + \text{sen } x} = \text{sen } x$

c) $\dfrac{1}{\cos x + \text{sen } x} + 2\text{sen } x = 2\cos x$

d) $\text{sen } x(\text{sen } x - 1) = 5\cos^2 x - 4$

e) $2\cos x - 1 = \sec x$

f) $2\cos x + \text{sen } x = 1$

g) $\text{sen } x + \cos x = 0$

4.14 ¿Qué ángulo agudo cumple que el triple de su tangente es el doble de su coseno?

4.15 ¿Qué ángulo obtuso cumple $\text{sen } x + 3\cos x = -1$?

4.16 Encuentra los ángulos agudos cuyo seno multiplicado por su coseno es 1/4.

BLOQUE 05

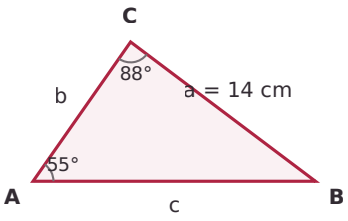
Resolución de triángulos

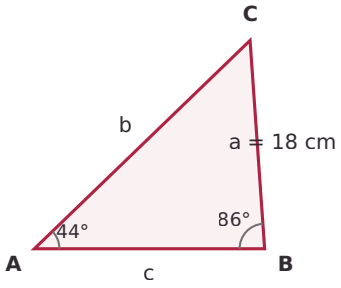
Teoremas del seno y del coseno. · 17 actividades

5.01 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 7 m y 24 m. Calcula la hipotenusa y sus ángulos.

5.02 En el triángulo rectángulo ABC, la hipotenusa a mide 1 m y C = 62°. Calcula los demás lados y ángulos.

5.03 Calcula b y c. Cada lado se nombra con la minúscula del vértice opuesto.





a) A = 55°, C = 88°, a = 14 cm.

b) A = 44°, B = 86°, a = 18 cm.

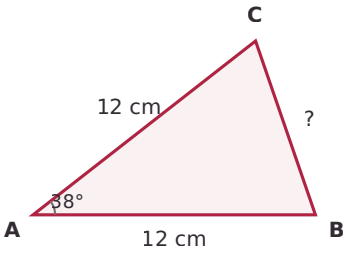
5.04 En un triángulo no degenerado, los lados a, b y c se oponen a los ángulos A, B y C. Razona si pueden cumplirse estas igualdades.

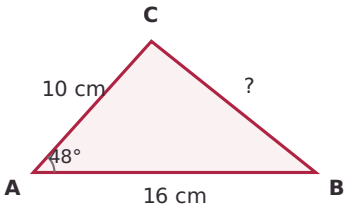
a) $a = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$

b) $a = b = \frac{c}{\text{sen } C}$

c) $a = b = c$

5.05 Calcula el tercer lado con los dos lados y el ángulo comprendido indicados.





a) 12 cm y 12 cm; ángulo comprendido 38°.

b) 10 cm y 16 cm; ángulo comprendido 48°.

5.06 Decide si las medidas pueden ser lados de un triángulo y clasifícalo como acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

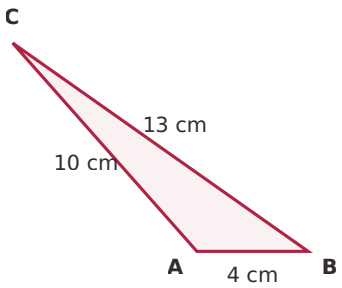
a) 12 cm, 11 cm y 9 cm.

b) 23 cm, 14 cm y 8 cm.

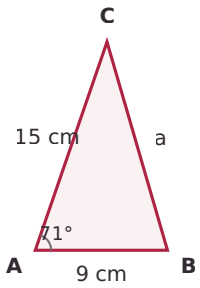
c) 26 cm, 24 cm y 10 cm.

d) 40 m, 30 m y 20 m.

5.07 Resuelve el triángulo de lados a = 13 cm, b = 10 cm y c = 4 cm.



5.08 Dos lados de un triángulo miden b = 15 cm y c = 9 cm, y el ángulo comprendido A mide 71°. Resuelve el triángulo.



5.09 Dos lados de un triángulo miden 14 cm y 18 cm, y el ángulo opuesto a uno de ellos es 70°. Determina qué lado se opone a ese ángulo, resuelve el triángulo y dibújalo.

5.10 Un triángulo tiene a = 4 m, c = 6 m y A = 25°. Comprueba que existen dos soluciones obtusángulas, resuélvelas y dibújalas.

5.11 Resuelve los triángulos rectángulos, con A = 90° y a como hipotenusa.

a) b = 7 m, B = 48°.

b) c = 12 m, B = 28°.

c) a = 13 m, c = 5 m.

d) a = 6 cm, C = 42° 12′.

e) b = 3 m, c = 6 m.

f) b = 8 m, a = 10 m.

5.12 Resuelve los triángulos. Cada lado se opone al ángulo de su misma letra.

a) a = 10 cm, b = 14 cm, c = 8 cm.

b) b = 6 cm, c = 9 cm, A = 39° 12′.

c) a = 7 cm, B = 38° 49′, C = 66° 40′.

5.13 Resuelve los triángulos.

a) a = 9 cm, c = 5 cm, B = 103° 27′.

b) b = 8,3 cm, c = 9,1 cm, A = 112° 50′.

c) c = 6 cm, A = 27° 42′, B = 98° 20′.

5.14 Encuentra todas las soluciones posibles de los triángulos.

a) a = 12 cm, b = 7 cm, c = 6 cm.

b) a = 8 cm, c = 9 cm, A = 42° 55′.

c) a = 10 cm, c = 9 cm, A = 72° 55′.

5.15 Resuelve los triángulos.

a) a = 10 cm, A = 30°, B = 70°.

b) a = 25 cm, A = 60°, C = 80°.

5.16 Dos vigas de 10 m y una tercera de 15 m forman un triángulo. Calcula los ángulos entre las vigas.

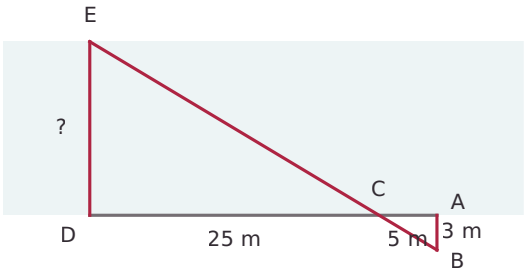
5.17 Los lados de un triángulo son proporcionales a 5, 6 y 7, y su área es $24\sqrt{6}$. Determina los lados y los ángulos.

BLOQUE 06

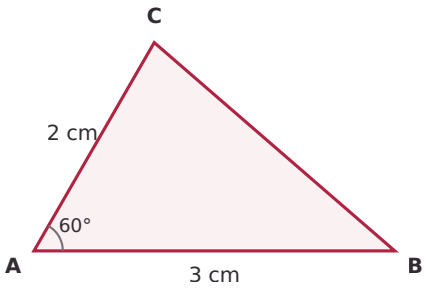
Problemas geométricos

Alturas, distancias, áreas y aplicaciones. · 34 actividades

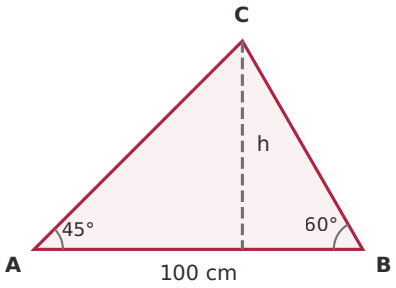
6.01 Juan mide la anchura de un río con la disposición de la figura: D, C y A están alineados en la orilla; DC = 25 m, CA = 5 m y AB = 3 m. E, C y B están alineados, y DE y AB son perpendiculares a la orilla. Calcula DE.



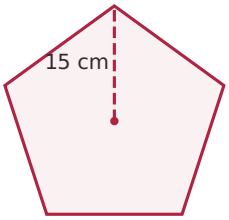
6.02 Calcula el área de un triángulo con dos lados de 2 cm y 3 cm y un ángulo comprendido de 60°.



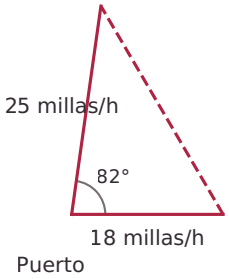
6.03 Un triángulo tiene base de 100 cm y ángulos adyacentes de 45° y 60°. Halla la altura correspondiente a la base.



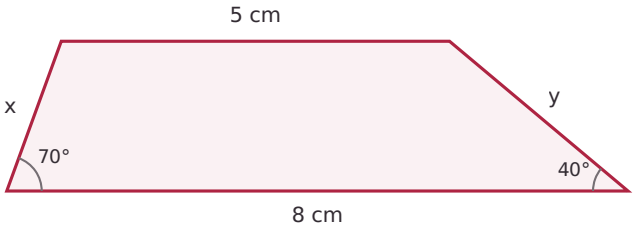
6.04 Determina el área de un pentágono regular de radio 15 cm.



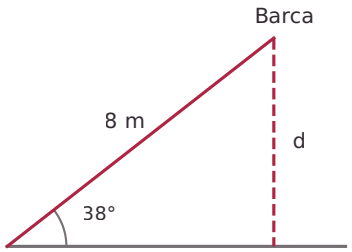
6.05 Dos barcos salen simultáneamente de un puerto siguiendo rumbos que forman 82°. Sus velocidades son 18 y 25 millas por hora. Si mantienen los rumbos y sus radios tienen un alcance de 180 millas, ¿podrán comunicarse al cabo de 3 horas?



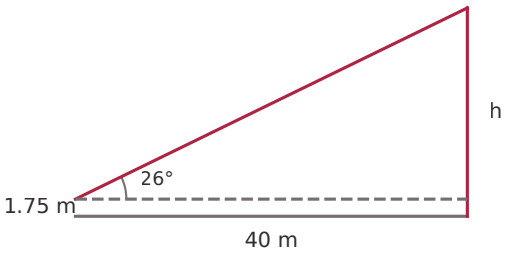
6.06 En el trapecio ABCD, AB y DC son paralelos, AB = 8 cm y DC = 5 cm. Los ángulos interiores en A y B miden 70° y 40°. Calcula los lados AD = x y BC = y.



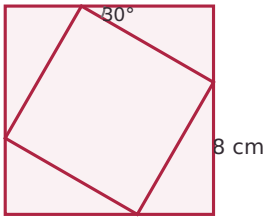
6.07 Una barca está atada a la orilla recta de un canal mediante una cuerda tensa de 8 m. La cuerda forma 38° con la orilla. ¿A qué distancia perpendicular de la orilla está la barca?



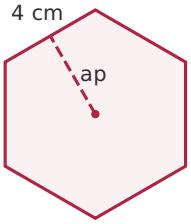
6.08 A 40 m del pie de una chimenea se observa su punto más alto con un ángulo de elevación de 26°. Los ojos están a 1,75 m del suelo. Calcula la altura de la chimenea.



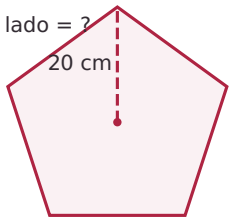
6.09 El cuadrado interior de la figura está girado 30° respecto al exterior. En el lado derecho del cuadrado exterior, el segmento desde el vértice inferior hasta el vértice del cuadrado interior mide 8 cm. Halla el área del cuadrado interior.



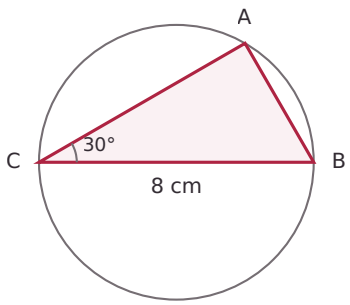
6.10 Determina la apotema de un hexágono regular de lado 4 cm.



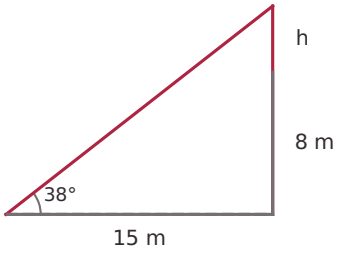
6.11 Un pentágono regular está inscrito en una circunferencia de radio 20 cm. Determina su lado.



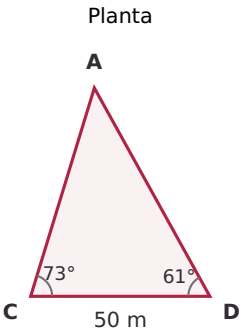
6.12 CB es un diámetro de 8 cm. El punto A está en la circunferencia y el ángulo ACB mide 30°. Calcula la longitud de la cuerda AB y la del arco menor AB.

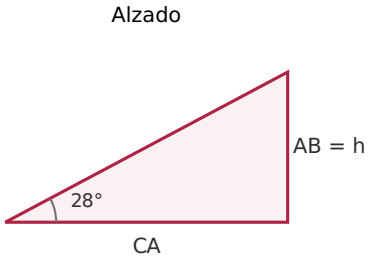


6.13 El pedestal de una estatua mide 8 m. Desde un punto del suelo a 15 m de su base se observa el extremo superior bajo un ángulo de elevación de 38°. Calcula la altura de la estatua.

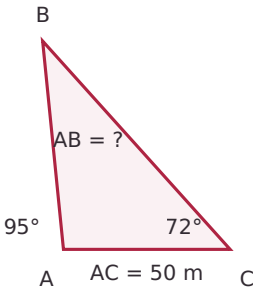


6.14 C y D son dos puntos del mismo plano horizontal que la base A de un faro. Se sabe CD = 50 m, ángulo ACD = 73°, ángulo CDA = 61° y ángulo de elevación desde C hasta la cima B = 28°. Calcula la altura AB del faro.

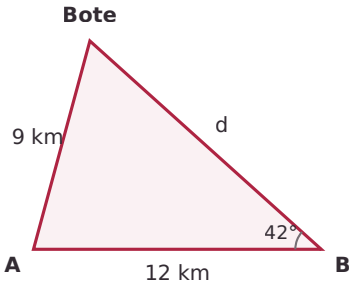




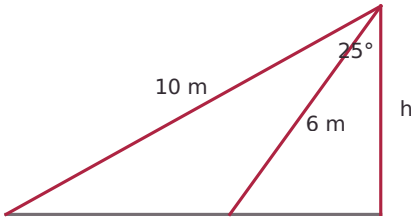
6.15 Los puntos A y C están en una orilla y B en la opuesta. Se conoce AC = 50 m, ángulo CAB = 95° y ángulo ACB = 72°. Calcula AB.



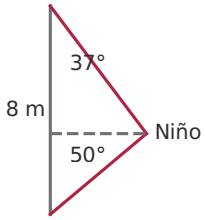
6.16 El faro A está 12 km al oeste del faro B. Un bote sale de A y navega 9 km en línea recta. Desde B, la visual al bote forma 42° con la dirección hacia A. Determina las posibles distancias del bote a B.



6.17 Dos cables de 10 m y 6 m sujetan la parte superior de una antena vertical sobre un pedestal. Los cables forman entre sí 25° y se anclan a una misma horizontal. Halla la altura del punto de sujeción sobre esa horizontal. ¿Puede deducirse la altura de la antena sin conocer la del pedestal?



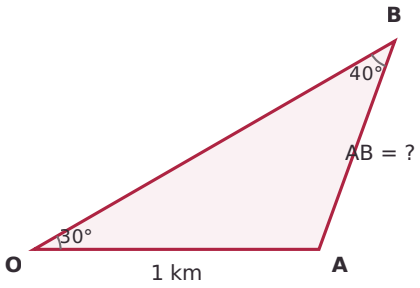
6.18 Dos argollas en una pared están separadas 8 m. Un niño ata a ellas los extremos de una cuerda y la tensa sujetándola en un punto situado frente al segmento entre las argollas. Los dos tramos forman 50° y 37° con la pared.



a) ¿Cuánto mide la cuerda?

b) ¿A qué distancia de la pared está el niño?

6.19 Un observador O ve dos cerros A y B. Se sabe OA = 1 km, ángulo AOB = 30° y ángulo ABO = 40°. Calcula la distancia entre los cerros.

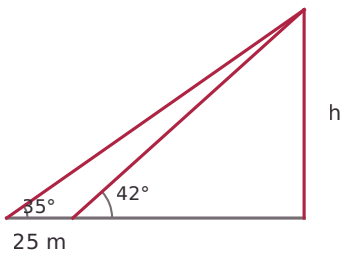


6.20 Un triángulo rectángulo tiene área 28 cm² y uno de sus ángulos mide 60°.

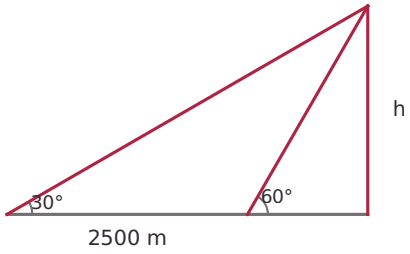
a) Calcula los tres ángulos.

b) Calcula los lados y el perímetro.

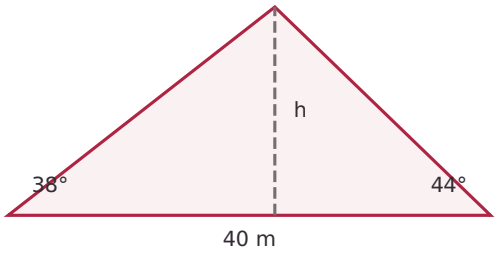
6.21 Dos puntos del mismo lado de una torre están separados 25 m sobre un terreno horizontal. Desde el más lejano se ve la cima con una elevación de 35°; desde el más próximo, con 42°. Calcula la altura de la torre.



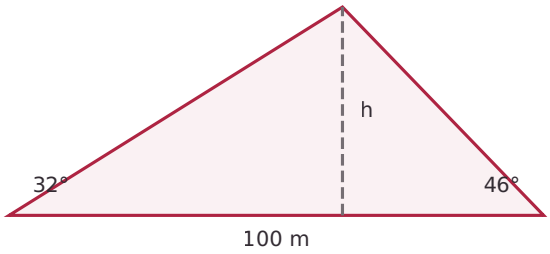
6.22 Dos puntos del mismo lado de una montaña están separados horizontalmente 2500 m. Los ángulos de elevación a la cima son 30° desde el punto lejano y 60° desde el cercano. Calcula la altura sobre ese plano horizontal.



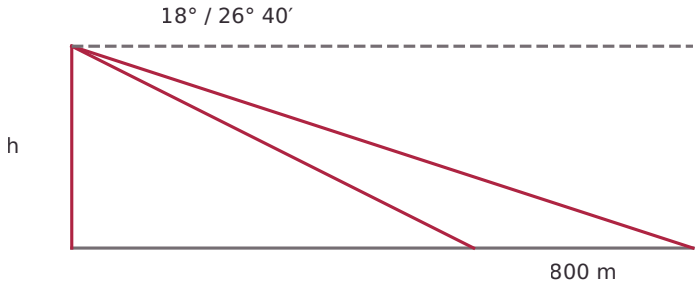
6.23 Dos amigos A y B están separados 40 m en una orilla recta. Miran un árbol C de la orilla opuesta. Los ángulos CAB y CBA son 38° y 44°, y el pie de la perpendicular desde C queda entre A y B. Calcula la anchura del río.



6.24 Dos focos situados en lados opuestos de un campanario iluminan su cima con ángulos de elevación de 32° y 46°. Sus distancias al pie de la torre suman 100 m. Calcula la altura.



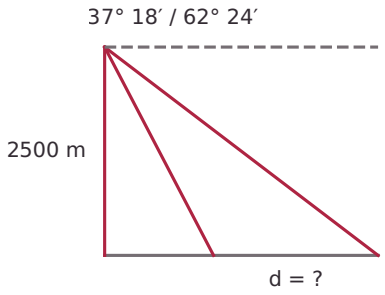
6.25 Desde la cima de una colina se observan dos barrios alineados al este, situados en un mismo plano horizontal y separados 800 m. Los ángulos de depresión son 18° para el lejano y 26° 40′ para el cercano.



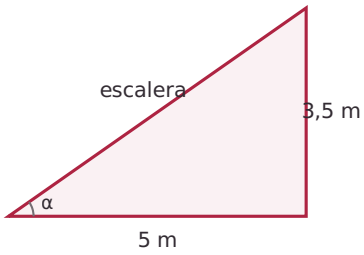
a) Calcula la altura de la colina.

b) Calcula la distancia del observador a cada barrio.

6.26 Un helicóptero vuela a 2500 m sobre el mar. Ve dos embarcaciones en el mismo plano vertical y al mismo lado de su vertical, con ángulos de depresión de 62° 24′ y 37° 18′. Calcula la separación entre ellas.



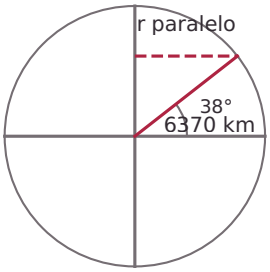
6.27 Para unir dos plantas separadas 3,5 m en altura se dispone de 5 m en horizontal.



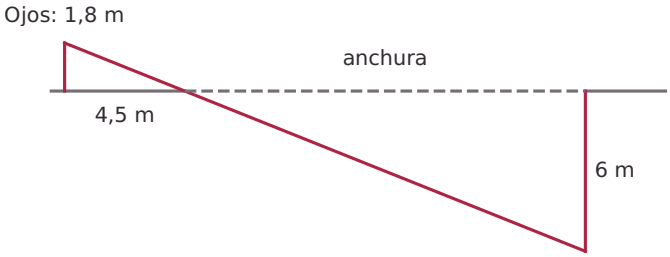
a) ¿Qué inclinación tendrá la escalera?

b) ¿Cuál será su longitud?

6.28 Calcula la longitud del paralelo 38° norte suponiendo una Tierra esférica de radio 6370 km.



6.29 Esther deja colgar verticalmente una cuerda de 6 m desde un borde de un desfiladero. María, en el borde opuesto a la misma altura, se aleja 4,5 m; sus ojos están a 1,8 m del suelo. Desde allí ve alineados el borde próximo y el extremo inferior de la cuerda.



a) Calcula la anchura del desfiladero.

b) ¿Puede resolverse sin trigonometría?

6.30 Desde una ventana a 3 m del suelo se ve la base de otro edificio con una depresión de 22°. La cima no se ve directamente, pero su reflejo en un estanque horizontal aparece con una depresión de 56°. Los dos edificios y el estanque están en un mismo plano vertical. Calcula la altura del edificio observado y la separación horizontal.

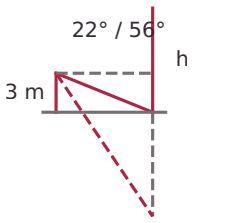
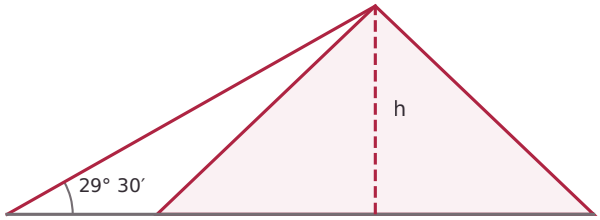


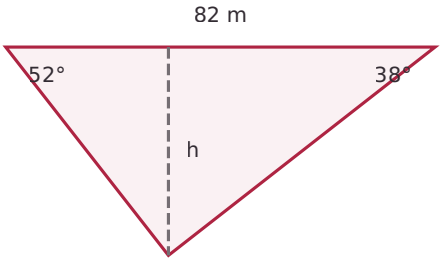
Imagen reflejada

6.31 Una pirámide recta de base cuadrada tiene 233 m de lado. Un observador se sitúa a 80 m del punto medio de un lado, sobre la perpendicular exterior a ese lado, y ve el vértice con una elevación de 29° 30′. Calcula la altura de la pirámide.



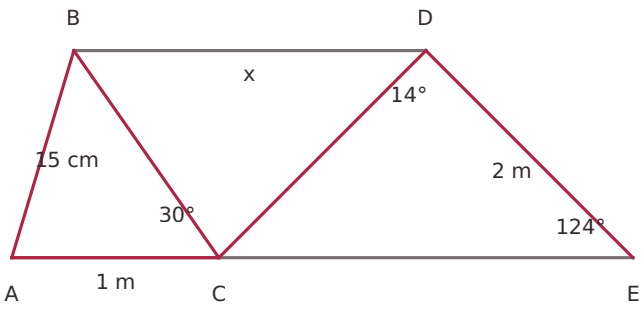
6.32 Una casa de planta rectangular mide 12 m por 8 m. Su tejado es una sola superficie plana inclinada 18°, con el borde más alto sobre uno de los lados de 12 m. Calcula el área del tejado.

6.33 Un puente horizontal de 82 m cruza un desfiladero. Desde sus extremos se observa un mismo punto del fondo, situado entre las verticales de los extremos, con ángulos de depresión de 52° y 38°. Calcula la altura del puente sobre ese punto.



6.34 En la figura A, C y E están alineados, al igual que B y D en una horizontal paralela. Se indica AB = 15 cm, AC = 1 m, DE = 2 m, ángulo BCA = 30°, ángulo CDE = 14° y ángulo CED = 124°. Estudia si los datos son compatibles antes de calcular x = BD.

Esquema de los datos: comprobar su compatibilidad



BLOQUE 07

Profundización

Demostraciones y lugares geométricos. · 8 actividades

7.01 Elige la respuesta correcta y justifícala.

a) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{32})\cos(\frac{\pi}{32})\cos(\frac{\pi}{16})\cos(\frac{\pi}{8})\cos(\frac{\pi}{4})$. Opciones: 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32.

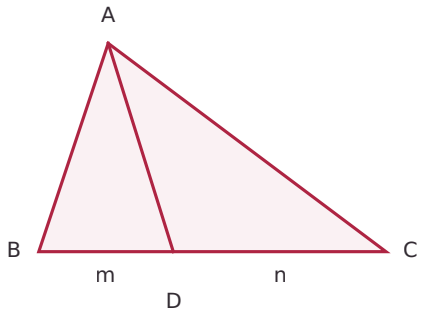
b) En ABC se cumple $\cos(2A-B)+\operatorname{sen}(A+B) = 2$. Si AB = 4, ¿cuánto mide BC? Opciones: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$.

c) Los lados a, b y c cumplen $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$. ¿Cuánto mide el ángulo opuesto a c? Opciones: 15°, 30°, 45°, 60°, 150°.

d) En un triángulo acutángulo, un lado mide 7 m, su ángulo opuesto es 60° y otro lado mide 8 m. ¿Cuánto mide el tercer lado? Opciones: 2, 3, 4, 5, 6 m.

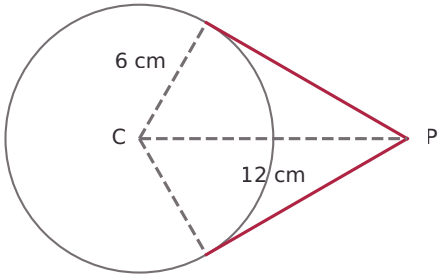
7.02 ¿Para qué valores reales de k tiene solución $\operatorname{sen} x \cos x = k$? Describe las posibles soluciones.

7.03 Demuestra que la bisectriz interior del ángulo A de un triángulo ABC divide BC en segmentos proporcionales a AB y AC.

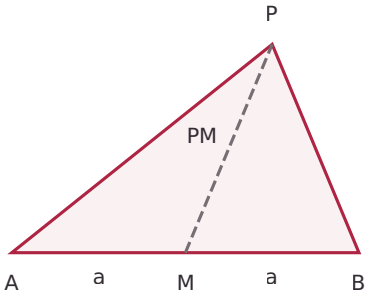


7.04 Dos barcos salen de un puerto. El primero navega con rumbo N 23° E a 11 millas/h y el segundo con rumbo S 67° E a 15 millas/h. Calcula el rumbo desde el segundo hacia el primero una hora después. Repite si el segundo rumbo es S 77° E.

7.05 Un punto P está a 12 cm del centro C de una circunferencia de radio 6 cm. Calcula el ángulo que forman las dos tangentes trazadas desde P.



7.06 Sea M el punto medio de AB. Estudia el lugar geométrico de los puntos P que cumplen que PM es media proporcional entre PA y PB, es decir, $PM^2 = PA \cdot PB$.



7.07 Calcula todos los valores de cos x que satisfacen $\text{sen}^2 x - 2\cos^2 x + \frac{1}{2}\text{sen } 2x = 0$.

7.08 Obtén los dos valores enteros de x más próximos a 2013°, uno por debajo y otro por encima, que cumplen $2^{\text{sen}^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2\sqrt{2}$.

BLOQUE 08

Trigonometría y óptica

Refracción, reflexión y fibra óptica. · 4 actividades

8.01 ¿Qué es la fibra óptica? ¿Qué condición debe cumplir un rayo para permanecer guiado por reflexión interna total en el núcleo?

8.02 Deduce, a partir de la ley de Snell, la condición de reflexión interna total entre un núcleo de índice n_1 y un revestimiento de índice n_2.

8.03 Investiga y enumera ventajas e inconvenientes de la fibra óptica frente al cable de cobre.

8.04 En una interfaz entre el material de una fibra y el aire, el índice del aire es 1,0003 y el ángulo crítico medido dentro del material respecto a la normal es 41,8°. Calcula el índice del material.

COMPRUEBA TUS RESULTADOS

Solucionario

Respuestas y justificaciones. Los códigos coinciden con los de las actividades.

01 · Medida de ángulos y cuadrantes

1.01

a) $\frac{\pi}{18}$ rad.

b) $\frac{3 \cdot \pi}{4}$ rad.

c) $-\frac{\pi}{3}$ rad.

1.02

a) 120°.

b) 540/π grados ≈ 171,8873°.

c) −240°.

1.03

a) I: todas positivas.

b) I: todas positivas.

c) II: sen y cosec positivas; cos, sec, tg y cotg negativas.

d) II: sen y cosec positivas; las demás negativas.

e) IV: cos y sec positivas; las demás negativas.

f) II: sen y cosec positivas; las demás negativas.

1.04

cos 160° < cos 251° < cos 98° < cos 72° < cos 34° < cos 345°. Se reducen los ángulos al intervalo de 0° a 180°, donde el coseno decrece.

1.05

tg 110° < tg 315° < tg 170° < tg 210° < tg 65°. Usa el período 180° y que la tangente crece entre sus asíntotas.

1.06

a) $\frac{7 \cdot \pi}{36}$ rad.

b) $\frac{37 \cdot \pi}{36}$ rad.

c) $\frac{421 \cdot \pi}{900}$ rad.

d) $\frac{749 \cdot \pi}{2160}$ rad.

1.07

a) 270/π grados ≈ 85,9437°.

b) 630/π grados ≈ 200,5352°.

c) 270°.

d) 216°.

1.08 cos 165° < cos 220° < cos 110° < cos 275° < cos 55° < cos 330°.

1.09 sen 310° < sen 225° < sen 200° < sen 45° = sen 135° < sen 120°.

02 · Razones trigonométricas

2.01 **a)** α: sen $\alpha = \frac{60}{109}$; cos $\alpha = \frac{91}{109}$; tg $\alpha = \frac{60}{91}$; cosec $\alpha = \frac{109}{60}$; sec $\alpha = \frac{109}{91}$; cotg $\alpha = \frac{91}{60}$. β: sen $\beta = \frac{91}{109}$; cos $\beta = \frac{60}{109}$; tg $\beta = \frac{91}{60}$; cosec $\beta = \frac{109}{91}$; sec $\beta = \frac{109}{60}$; cotg $\beta = \frac{60}{91}$.

b) La diagonal mide 17. Para α y γ: sen $\alpha = \frac{8}{17}$; cos $\alpha = \frac{15}{17}$; tg $\alpha = \frac{8}{15}$; cosec $\alpha = \frac{17}{8}$; sec $\alpha = \frac{17}{15}$; cotg $\alpha = \frac{15}{8}$. Para β y δ: sen $\beta = \frac{15}{17}$; cos $\beta = \frac{8}{17}$; tg $\beta = \frac{15}{8}$; cosec $\beta = \frac{17}{15}$; sec $\beta = \frac{17}{8}$; cotg $\beta = \frac{8}{15}$.

2.02 **a)** Como cos α = cateto adyacente/hipotenusa, su inversa es hipotenusa/cateto adyacente = sec α.

b) Como sen α = cateto opuesto/hipotenusa, su inversa es hipotenusa/cateto opuesto = cosec α.

c) Tomando el inverso de tg α = sen α/cos α se obtiene cotg α = cos α/sen α.

2.03 **a)** cos α = 7/25; sen α = ±24/25; tg α = ±24/7; sec α = 25/7; cosec α = ±25/24; cotg α = ±7/24. Todos los signos ± son simultáneamente positivos o negativos.

b) cos α = ±100/√37889; sen α = ±167/√37889, con el mismo signo. tg α = 1,67; cotg α = 100/167; sec α = ±√37889/100; cosec α = ±√37889/167.

c) sen α = √2/2; cos α = ±√2/2; tg α = ±1; cosec α = √2; sec α = ±√2; cotg α = ±1, con signos coordinados.

d) cos α = ±10/√109; sen α = ±3/√109, con el mismo signo. tg α = 0,3; cotg α = 10/3; sec α = ±√109/10; cosec α = ±√109/3.

2.04 **a)** No: $0{,}3^2+0{,}8^2 = 0{,}73 \neq 1$.

b) No si ambos datos son exactos: cos α = 0,72/1,04 = 9/13 y la suma de cuadrados no es 1. Sí pueden ser aproximaciones a dos decimales de un mismo ángulo: por ejemplo, sen α ≈ 0,7208 y tg α = 1,04.

c) No si son exactos: $0{,}1^2+0{,}99^2 = 0{,}9901 \neq 1$. Sí pueden ser redondeos: con sen α = 0,99, cos α = √0,0199 ≈ 0,1411, que redondeado a una décima es 0,1.

2.05 **a)** 1

b) − 1/4

c) $\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 3/4$

d) $\frac{13\sqrt{3}}{12}$

2.06 **a)** 0,1908

b) 0,6884

c) 0,1847

2.07

a) 0,3429

b) 0,5403

c) 3,2236

2.08

a) tg α = sen α/cos α y cos 90° = 0: no está definida.

b) No. En los múltiplos pares de 90° vale 0; en los impares no está definida.

2.09

a) sen α = −√15/4; cos α = 1/4; tg α = −√15.

b) sen α = 2√5/5; cos α = −√5/5; tg α = −2.

2.10

a) a = 20 cm. sen B = 12/20 = 3/5; tg B = 12/16 = 3/4.

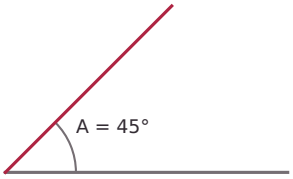
b) b = √416 = 4√26 cm. cos B = 11/15; cotg B = 11/(2√26).

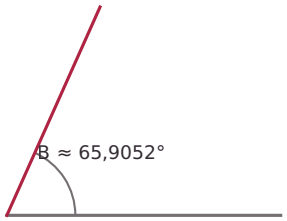
c) c = √5 cm. cos C = 2/3; cosec C = 3/√5.

d) a = 20√2 cm. cos B = √2/2; tg B = 1.

2.11

Una posibilidad: A = 45° y B = arctan(√5) ≈ 65,9052°. Para A, usa un triángulo rectángulo isósceles. Para B, usa cateto adyacente 1 y opuesto √5.





2.12

a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

c) $-\sqrt{3}$

d) $\frac{4\sqrt{3}-3}{6}$

2.13

a) Falsa: (1+√3)/2 ≠ 1.

b) Falsa: (√3+1)/2 ≠ 0.

c) Falsa: 1 ≠ √2.

d) Falsa: 0 ≠ √2.

2.14

a) cosec = 2; sec = 2√3/3; cotg = √3.

b) cosec = √2; sec = √2; cotg = 1.

c) cosec = 2√3/3; sec = 2; cotg = √3/3.

d) cosec = 1; sec no definida; cotg = 0.

2.15

a) sen A = 0,5602; cos A ≈ 0,8284; tg A ≈ 0,6763.

b) sen B ≈ 0,9828; cos B = 0,1849; tg B ≈ 5,3151.

c) sen C ≈ 0,941; cos C ≈ 0,3384; tg C = 2,7804.

2.16

a) 69,7999°.

b) 67,1127°.

c) 31,675°.

d) 13,4434°.

e) 19,5652°.

f) 5,5549°.

g) 14,442°.

h) 21,8014°.

2.17

a) 0,3318.

b) 0,7088.

c) 0,5148.

d) 0,9511.

e) 1,7206.

f) No definida: sen π = 0.

g) 9,0567.

h) 0,6076.

i) 0,4142.

j) 0,6637.

k) 1,3934.

l) 1,1547.

2.18

a) sen ≈ 0,6702; cos ≈ -0,7422; tg ≈ -0,903.

b) sen ≈ -0,8911; cos ≈ -0,4539; tg ≈ 1,9631.

c) sen ≈ -0,5979; cos ≈ 0,8016; tg ≈ -0,7459.

d) sen ≈ -0,7822; cos ≈ -0,623; tg ≈ 1,2555.

e) sen ≈ 0,885; cos ≈ -0,4657; tg ≈ -1,9004.

f) sen ≈ -0,7158; cos ≈ 0,6983; tg ≈ -1,0251.

2.19

a) sen = 0; cos = − 1; tg = 0.

b) sen = − 1; cos = 0; tg no definida.

c) sen = $-\frac{1}{2}$; cos = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; tg = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) sen = $\frac{\sqrt{2}}{2}$; cos = $\frac{\sqrt{2}}{2}$; tg = 1.

e) sen = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; cos = $\frac{1}{2}$; tg = $\sqrt{3}$.

f) sen = 1; cos = 0; tg no definida.

g) sen = 1; cos = 0; tg no definida.

h) sen = 0; cos = − 1; tg = 0.

i) sen = − 1; cos = 0; tg no definida.

j) sen = 0; cos = 1; tg = 0.

k) sen = − 1; cos = 0; tg no definida.

l) sen = 1; cos = 0; tg no definida.

2.20

a) sen = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; cos = $\frac{1}{2}$; tg = $-\sqrt{3}$.

b) sen = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; cos = $\frac{\sqrt{2}}{2}$; tg = − 1.

c) sen = $-\frac{1}{2}$; cos = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; tg = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) sen = 0; cos = 1; tg = 0.

e) sen = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; cos = $-\frac{1}{2}$; tg = $-\sqrt{3}$.

f) sen = $\frac{\sqrt{2}}{2}$; cos = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; tg = − 1.

g) sen = $\frac{1}{2}$; cos = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; tg = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

h) sen = 0; cos = − 1; tg = 0.

i) sen = $-\frac{1}{2}$; cos = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; tg = $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

j) sen = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; cos = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; tg = 1.

k) sen = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; cos = $-\frac{1}{2}$; tg = $\sqrt{3}$.

l) sen = − 1; cos = 0; tg no definida.

2.21

a) -0,6532.

b) 0,2684.

c) 0,9257.

d) -0,9511.

e) -2,8869.

f) -1,4142.

g) 0,0565.

h) -0,4397.

i) 2,4142.

j) -0,7626.

k) -1,7321.

l) -1,1574.

2.22

a) 63,0058°.

b) 68,1868°.

c) -28,6301°.

d) 65,1758°.

e) 107,0137°.

f) -19,3173°.

2.23 No: puede medir arcsen(0,7) ≈ 44,427° o su suplementario, 135,573°. Ambos pertenecen al intervalo (0°, 180°).

2.24 Sí. En (0°, 180°), el coseno es estrictamente decreciente. El ángulo mide arccos(0,2) ≈ 78,463°.

2.25 Como el seno es positivo y la tangente negativa, α pertenece al II cuadrante. $\cos \alpha = -\sqrt{91}/10$ y $\operatorname{tg} \alpha = -3/\sqrt{91} \approx -0{,}3145$.

2.26 No existe. Si $\operatorname{sen} \alpha > 0$ y $\cos \alpha < 0$, entonces $\operatorname{tg} \alpha < 0$, mientras que $2 \operatorname{sen} \alpha > 0$. También, al dividir $\operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha$ por $\operatorname{sen} \alpha$, se obtendría $\cos \alpha = 1/2$, en contradicción con el dato.

2.27 El ángulo es 150° módulo 360°. $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$; $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{cosec} \alpha = 2$; $\sec \alpha = -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{cotg} \alpha = -\sqrt{3}$.

2.28 El ángulo está en el IV cuadrante. De $\operatorname{sen} \alpha / \cos \alpha = 3 \operatorname{sen} \alpha$ se deduce $\cos \alpha = 1/3$. $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}$; $\cos \alpha = \frac{1}{3}$; $\operatorname{tg} \alpha = -2 \cdot \sqrt{2}$; $\operatorname{cosec} \alpha = -\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4}$; $\sec \alpha = 3$; $\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

2.29

a) γ está en el III cuadrante. $\operatorname{sen}\gamma = -\frac{\sqrt{1771}}{50}$; $\cos\gamma = -\frac{27}{50}$; $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sqrt{1771}}{27}$; $\operatorname{cosec}\gamma = -\frac{50\cdot\sqrt{1771}}{1771}$; $\sec\gamma = -\frac{50}{27}$; $\operatorname{cotg}\gamma = \frac{27\cdot\sqrt{1771}}{1771}$.

b) No existe: en el intervalo abierto $(3\pi/2, 2\pi)$, el seno es estrictamente negativo.

03 · Relaciones e identidades

3.01

a) sen α = 0,766; cos α = -0,6428; tg α = -1,1917; cosec α = 1,3054; sec α = -1,5557; cotg α = -0,8391.

b) sen α = -0,766; cos α = -0,6428; tg α = 1,1917; cosec α = -1,3054; sec α = -1,5557; cotg α = 0,8391.

c) sen α = -0,766; cos α = 0,6428; tg α = -1,1917; cosec α = -1,3054; sec α = 1,5557; cotg α = -0,8391.

d) sen α = -0,766; cos α = 0,6428; tg α = -1,1917; cosec α = -1,3054; sec α = 1,5557; cotg α = -0,8391.

3.02

a) sen α = 0,4226; cos α = 0,9063; tg α = 0,4663; cosec α = 2,3663; sec α = 1,1034; cotg α = 2,1446.

b) sen α = -0,4226; cos α = -0,9063; tg α = 0,4663; cosec α = -2,3663; sec α = -1,1034; cotg α = 2,1446.

c) sen α = -0,4226; cos α = 0,9063; tg α = -0,4663; cosec α = -2,3663; sec α = 1,1034; cotg α = -2,1446.

d) sen α = 0,4226; cos α = -0,9063; tg α = -0,4663; cosec α = 2,3663; sec α = -1,1034; cotg α = -2,1446.

3.03

a) sen(90°−α) = cos α = ±2√6/5. El signo es positivo en el primer cuadrante y negativo en el segundo.

b) 1/5.

c) −1/5.

3.04

a) sen 72° = cos 18° ≈ 0,951.

b) cos 162° = −cos 18° ≈ −0,951.

c) tg(−72°) = −cos 18°/sen 18° ≈ −3,0777.

3.05

a) Mismo seno: (25°, 155°) y (65°, 115°). Mismo coseno: (25°, −25°) y (65°, −65°).

b) Misma tangente: (115°, −65°) y (155°, −25°).

3.06

a) Usa 105° = 60°+45°. sen $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$; cos $\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$; tg $\alpha = -2 - \sqrt{3}$; cosec $\alpha = \frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$; sec $\alpha = \frac{4}{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}$; cotg $\alpha = -2 + \sqrt{3}$.

b) Usa 15° = 60°−45°. sen $\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$; cos $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$; tg $\alpha = 2 - \sqrt{3}$; cosec $\alpha = -\frac{4}{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}$; sec $\alpha = \frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$; cotg $\alpha = \sqrt{3} + 2$.

3.07

a) Por las fórmulas del ángulo doble: sen 76° ≈ 0,9703; cos 76° ≈ 0,2419; tg 76° ≈ 4,012.

b) Por las fórmulas del ángulo mitad: sen 19° ≈ 0,3256; cos 19° ≈ 0,9455; tg 19° ≈ 0,3443. Las pequeñas diferencias respecto a la calculadora proceden del redondeo de los datos.

3.08

a) cos 40° = sen 50° ≈ 0,7660.

b) cos 130° = −cos 50° ≈ −0,6428.

c) cos 310° = cos 50° ≈ 0,6428.

d) cos 80° = cos(30°+50°) = (√3/2)cos 50°−(1/2)sen 50° ≈ 0,1736.

e) cos 5° = cos(50°−45°) = (√2/2)(cos 50°+sen 50°) ≈ 0,9962.

f) cos 100° = 2cos²50°−1 ≈ −0,1736.

g) cos 25° = √((1+cos 50°)/2) ≈ 0,9063.

3.09

a) Ángulo de referencia: 58° 38′ 45″, IV cuadrante. sen α = -0,854; cos α = 0,5203; tg α = -1,6412; cosec α = -1,171; sec α = 1,9219; cotg α = -0,6093.

b) Ángulo de referencia: 2° 40′, III cuadrante. sen α = -0,0465; cos α = -0,9989; tg α = 0,0466; cosec α = -21,4937; sec α = -1,0011; cotg α = 21,4704.

c) Ángulo de referencia: 10° 0′ 43″, III cuadrante. sen α = -0,1739; cos α = -0,9848; tg α = 0,1765; cosec α = -5,752; sec α = -1,0155; cotg α = 5,6644.

d) Ángulo de referencia: 64° 47′ 15″, IV cuadrante. sen α = -0,9047; cos α = 0,426; tg α = -2,1239; cosec α = -1,1053; sec α = 2,3475; cotg α = -0,4708.

e) Ángulo de referencia: 26° 56′, I cuadrante. sen α = 0,453; cos α = 0,8915; tg α = 0,5081; cosec α = 2,2077; sec α = 1,1217; cotg α = 1,9683.

f) Ángulo de referencia: 72° 43′ 2″, III cuadrante. sen α = -0,9549; cos α = -0,2971; tg α = 3,214; cosec α = -1,0473; sec α = -3,366; cotg α = 0,3111.

3.10

a) α = 69° 31′. sen α = 0,9368; cos α = 0,3499; tg α = 2,677; cosec α = 1,0675; sec α = 2,8577; cotg α = 0,3736.

b) α = 69° 31′. sen α = 0,9368; cos α = 0,3499; tg α = 2,677; cosec α = 1,0675; sec α = 2,8577; cotg α = 0,3736.

c) α = 69° 31′. sen α = 0,9368; cos α = 0,3499; tg α = 2,677; cosec α = 1,0675; sec α = 2,8577; cotg α = 0,3736.

d) α = 3° 30′. sen α = 0,061; cos α = 0,9981; tg α = 0,0612; cosec α = 16,3804; sec α = 1,0019; cotg α = 16,3499.

3.11

a) 0,9732.

b) 0,2363.

c) -0,2363.

d) -0,9732.

e) -0,23.

f) 0,23.

3.12 **a)** 0: $\operatorname{sen}(\alpha-120°)+\operatorname{sen}(\alpha+120°) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos 120° = -\operatorname{sen}\alpha$.

b) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\alpha + \frac{1+\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$.

c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{2+\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\alpha$.

d) 0, donde la tangente esté definida, por su período π.

e) $\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha$.

3.13 **a)** $2\operatorname{sen}(\alpha/2)$, con $\cos(\alpha/2)\neq 0$.

b) $1+\cos^2\alpha$.

c) $\operatorname{tg} 2\alpha$, con $\cos 2\alpha \neq 0$.

d) $1+\cos\alpha$.

e) $\frac{2\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha(1+\cos\alpha)}$, con $\cos\alpha\neq 0$ y $\cos(\alpha/2)\neq 0$.

3.14 $\operatorname{tg}(\alpha+45°) = (2{,}5+1)/(1-2{,}5) = -7/3$. Como $\operatorname{tg}\alpha > 1$, $\alpha > 45°$; por tanto, $90° < \alpha+45° < 135°$ y el ángulo está en el II cuadrante.

3.15 $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha/(1-\operatorname{tg}^2\alpha) = (5/2)/(1-25/16) = -40/9$.

3.16 $\operatorname{sen}(2x+x) = \operatorname{sen} 2x\cos x+\cos 2x\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen} x\cos^2 x+(1-2\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen} x = 3\operatorname{sen} x-4\operatorname{sen}^3 x$. Para $\operatorname{sen} x = 1/3$, $\operatorname{sen} 3x = 23/27$.

3.17 **a)** Para 56°: $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}83$; $\cos\alpha = 0{,}5578$; $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}4881$; $\operatorname{cosec}\alpha = 1{,}2048$; $\sec\alpha = 1{,}7929$; $\operatorname{cotg}\alpha = 0{,}672$. Para 23°: $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}3919$; $\cos\alpha = 0{,}92$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}426$; $\operatorname{cosec}\alpha = 2{,}5516$; $\sec\alpha = 1{,}087$; $\operatorname{cotg}\alpha = 2{,}3474$.

b) $79° = 56°+23°$. $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}9822$; $\cos\alpha = 0{,}1879$; $\operatorname{tg}\alpha = 5{,}2286$; $\operatorname{cosec}\alpha = 1{,}0181$; $\sec\alpha = 5{,}3234$; $\operatorname{cotg}\alpha = 0{,}1913$.

c) $33° = 56°-23°$. $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}545$; $\cos\alpha = 0{,}8384$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}65$; $\operatorname{cosec}\alpha = 1{,}8349$; $\sec\alpha = 1{,}1927$; $\operatorname{cotg}\alpha = 1{,}5384$.

d) $28° = 56°/2$. $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}4702$; $\cos\alpha = 0{,}8825$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5328$; $\operatorname{cosec}\alpha = 2{,}1266$; $\sec\alpha = 1{,}1331$; $\operatorname{cotg}\alpha = 1{,}8768$.

e) $46° = 2\cdot 23°$. $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}7211$; $\cos\alpha = 0{,}6928$; $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}0409$; $\operatorname{cosec}\alpha = 1{,}3867$; $\sec\alpha = 1{,}4434$; $\operatorname{cotg}\alpha = 0{,}9607$.

3.18 **a)** $\frac{\cos A+\sqrt{3}\operatorname{sen} A}{2}$

b) $\frac{\cos B+\sqrt{3}\operatorname{sen} B}{2}$

c) $\frac{1-\operatorname{tg} C}{1+\operatorname{tg} C}$

d) $\frac{\sqrt{3}\cos D-\operatorname{sen} D}{2}$

3.19 **a)** $\cos x = -\sqrt{21}/5$. $\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{42}}{10}$; $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{-25 \cdot \sqrt{3} - 8 \cdot \sqrt{21}}{9}$.

b) $\pi/4$ y $\pi/3$ son 45° y 60°. En un triángulo rectángulo isósceles se obtiene $\operatorname{sen} 45° = \cos 45° = \sqrt{2}/2$; al dividir un equilátero, $\operatorname{sen} 60° = \sqrt{3}/2$ y $\cos 60° = 1/2$. Las tangentes son 1 y $\sqrt{3}$.

3.20 **a)** $\operatorname{sen} x = -3/5$ y $\cos x = -4/5$.

b) $\pi/6$: sen = 1/2, cos = $\sqrt{3}/2$, tg = $\sqrt{3}/3$. $\pi/4$: sen = cos = $\sqrt{2}/2$, tg = 1.

c) $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$; $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{48 + 25\sqrt{3}}{39}$.

d) Como $0 < \operatorname{arctg}(3/4) < \pi/4$, $x - \pi/4$ está en el II cuadrante. Además, $\operatorname{arctg}(3/4) < \pi/3$, por lo que $x + \pi/6$ está en el III cuadrante.

3.21 **a)** Los ángulos son 42,5°, 85°, 127,5° y 170°. Aplicando ángulo mitad: para 42,5°, sen ≈ 0,6708, cos ≈ 0,7416, tg ≈ 0,9045.

b) Para 85°: sen ≈ 0,995, cos ≈ 0,1, tg ≈ 9,9499.

c) 127,5° = 85°+42,5°: sen ≈ 0,805, cos ≈ -0,5933, tg ≈ -1,3568.

d) Para 170°, los datos dan sen ≈ 0,17, cos ≈ −0,98, tg ≈ −0,1735. Son estimaciones a partir de datos muy redondeados; pueden diferir de las razones calculadas directamente con el ángulo.

3.22 $\cos(330° - 45°) = \cos 330° \cos 45° + \operatorname{sen} 330° \operatorname{sen} 45° = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4 \approx 0{,}2588$.

3.23 **a)** 62° = 32°+30°. sen α = 0,883; cos α = 0,4694; tg α = 1,8812; cosec α = 1,1325; sec α = 2,1304; cotg α = 0,5316.

b) 31° = 62°/2. sen α = 0,5151; cos α = 0,8571; tg α = 0,6009; cosec α = 1,9415; sec α = 1,1667; cotg α = 1,6641.

c) Sí, en principio: de 32°−31° se obtienen las razones de 1°. Las fórmulas de suma y la periodicidad permiten obtener las de cualquier número entero de grados. Al partir de datos aproximados, las aproximaciones sucesivas pueden acumular error.

3.24 **a)** $-2\operatorname{sen}(\frac{3\alpha}{2})\operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2})$

b) $2\operatorname{sen}(\frac{5\alpha}{2})\operatorname{sen}(\frac{3\alpha}{2})$

c) $2\cos 5\alpha \operatorname{sen} 3\alpha$

d) $\sqrt{2}\operatorname{sen}(\alpha - \frac{\pi}{4})$

e) $2\operatorname{sen}(\alpha + \frac{\pi}{4})\cos(2\alpha - \frac{\pi}{4})$

f) $-2\cos 2\alpha \operatorname{sen} \alpha$

3.25 **a)** sen α, con $\cos \alpha \neq 0$: el numerador es $\operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha$ y el denominador $\cos^2 \alpha$.

b) cos 10α, por la fórmula del ángulo doble.

c) cos α, con $\cos \alpha \neq 0$: $\sec \alpha(\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) - \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha$.

d) $\operatorname{sen}^2 \alpha$: $\operatorname{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha$.

3.26 **a)** $2\operatorname{sen}(\alpha+45°)\cos(\alpha-45°) = \operatorname{sen} 2\alpha+\operatorname{sen} 90° = \operatorname{sen} 2\alpha+1$.

b) $2\operatorname{sen}(\alpha+45°)\cos(\alpha+45°) = \operatorname{sen}(2\alpha+90°) = \cos 2\alpha$.

c) $\operatorname{tg}(\alpha+\pi) = \operatorname{tg}\alpha$ y $\operatorname{sen}^2(\alpha+\pi)-1 = -\cos^2\alpha$. El segundo miembro vale $2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \operatorname{sen} 2\alpha$, si $\cos\alpha \neq 0$.

d) $\operatorname{sen}((\alpha+\pi)/2) = \operatorname{sen}(\alpha/2+\pi/2) = \cos(\alpha/2)$.

3.27 $2\operatorname{tg}\alpha/(1+\operatorname{tg}^2\alpha) = (2\operatorname{sen}\alpha/\cos\alpha)/(1/\cos^2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \operatorname{sen} 2\alpha$. Se requiere $\cos\alpha \neq 0$.

3.28 **a)** Con $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$ y $\cos\alpha \neq 0$: $\operatorname{sen} 2\alpha/\operatorname{sen}\alpha-\cos 2\alpha/\cos\alpha = 2\cos\alpha-(2\cos^2\alpha-1)/\cos\alpha = 1/\cos\alpha$.

b) Con $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \neq 0$: $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha = (\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)/(\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) = \sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$.

c) La suma de fracciones es $2/(1-\operatorname{sen}^2\alpha) = 2/\cos^2\alpha = 2\sec^2\alpha$; se requiere $\cos\alpha \neq 0$.

d) $\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{sen}\alpha = (\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha)/\cos\alpha = \sec\alpha$, con $\cos\alpha \neq 0$.

3.29 Para $\alpha = 30°$, ambos miembros valen $\sqrt{3}/3$. En general, $2\operatorname{sen}\alpha/\operatorname{tg} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos 2\alpha/\operatorname{sen} 2\alpha = \cos 2\alpha/\cos\alpha = \cos\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha/\cos\alpha$. Se exige $\operatorname{sen} 2\alpha \neq 0$ y $\cos 2\alpha \neq 0$ para que el primer miembro esté definido.

3.30 Como $A+B+C = \pi$, $\operatorname{sen}(A+B+C) = 0$. Al desarrollar y dividir por $\cos A\cos B\cos C \neq 0$, resulta $\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C-\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C = 0$.

3.31 **a)** $\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

b) $\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

3.32 $\operatorname{tg}(z+\pi/2) = -\operatorname{cotg} z = -1/\operatorname{tg} z = -2/3$. También se obtiene aplicando dos veces la fórmula de la suma con $\pi/4$.

3.33 Traza un diámetro por un extremo del lado a. El triángulo formado por ese diámetro y el otro extremo de a es rectángulo, de modo que $\operatorname{sen} A' = a/d$. El ángulo inscrito A es igual o suplementario de A'; en ambos casos sus senos coinciden. Así, $a/\operatorname{sen} A = d$. Repitiendo para b y c se obtiene la igualdad completa.

04 · Ecuaciones y sistemas trigonométricos

4.01

a) $x \approx 23{,}5782°$ y $156{,}4218°$.

b) $x \approx 98{,}2132°$ y $261{,}7868°$.

c) $x \approx 67{,}3801°$ y $247{,}3801°$.

d) $x = 45°$ y $225°$.

4.02

a) $x = k\pi$.

b) $\cos 2x = 1-2\operatorname{sen}^2 x$ da $\operatorname{sen} x(1-2\operatorname{sen} x) = 0$. Soluciones: $x = k\pi$; $x = \pi/6+2k\pi$; $x = 5\pi/6+2k\pi$.

c) $\operatorname{sen} 2x-\cos x = \cos x(2\operatorname{sen} x-1)$. Soluciones: $x = \pi/2+k\pi$; $x = \pi/6+2k\pi$; $x = 5\pi/6+2k\pi$.

d) $x = \arctan(1/2)/4+k\pi/4$. En grados: $x \approx 6{,}6413°+45°k$.

4.03

a) $2x+5° = 90°+360°k$; por tanto, $x = 42{,}5°+180°k$.

b) $2x+5° = 360°k$; por tanto, $x = -2{,}5°+180°k$.

4.04

a) $2\operatorname{sen} x(\cos x-1) = 0$. Todas las soluciones quedan recogidas en $x = k\pi$.

b) $\operatorname{sen} x(2\cos x+1) = 0$. Soluciones: $x = k\pi$; $x = 2\pi/3+2k\pi$; $x = 4\pi/3+2k\pi$.

4.05

Usando $\cos 2x = 2\cos^2 x-1$, queda $(2\cos x-1)(\cos x-1) = 0$. Soluciones: $x = 2k\pi$ y $x = \pm\pi/3+2k\pi$, con k entero.

4.06

La suma se transforma en $2\cos 2x\cos x = 0$. Por tanto, $x = \pi/4+k\pi/2$ o $x = \pi/2+k\pi$, con k entero.

4.07

a) $53{,}1301°$ y $126{,}8699°$.

b) $113{,}5782°$ y $246{,}4218°$.

c) $26{,}5651°$ y $206{,}5651°$.

d) $203{,}5782°$ y $336{,}4218°$.

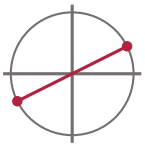
a) 53.13°, 126.87°



b) 113.58°, 246.42°



c) 26.57°, 206.57°



d) 203.58°, 336.42°



4.08

a) $x = 30°+360°k$ o $x = 150°+360°k$, con $\cos x \neq 0$.

b) $2 \operatorname{sen} x(\cos x - \operatorname{sen} x) = 0$. $x = 180°k$ o $x = 45°+180°k$.

c) $x = 22{,}5°+90°k$.

d) $x = 360°k$ o $x \approx 69{,}6466°+360°k$. Con $t = \operatorname{tg}(x/2)$, el numerador se factoriza como $-2t(t^3+2t^2+t-2)$; el cúbico tiene una sola raíz real. $x = 180°$ no es solución.

e) $x \approx 104{,}4775°+360°k$ o $x \approx 255{,}5225°+360°k$. Se requiere $\operatorname{sen} x \neq 0$.

f) $2 \operatorname{sen} 2x = 0$: $x = 90°k$.

g) $\operatorname{sen} x(1+\cos x) = 0$, con $\cos x \neq 0$. $x = 180°k$.

h) $\operatorname{sen} x(1-2\cos^2 x) = 0$, con $\cos x \neq 0$. $x = 180°k$ o $x = 45°+90°k$.

4.09

a) $(\sqrt{3}-\operatorname{tg} x)/2 = 1$, así que $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}-2$. Solución: $x = -15°+180°k$.

b) Con $t = \operatorname{tg} x$ y $t \neq -1$, la ecuación da $t(t-1) = 0$. Soluciones: $x = 180°k$ o $x = 45°+180°k$.

c) El primer miembro es $\cos x$; el segundo, $2\cos^2 x$. Así, $\cos x(2\cos x - 1) = 0$. $x = 90°+180°k$ o $x = \pm 60°+360°k$.

4.10

a) La suma del primer miembro es $2 \operatorname{tg} 2x$. Al multiplicar por $\cos 2x \cdot \operatorname{sen} x$, se obtiene $\cos 3x = 0$. Soluciones: $x = 30°+60°k$; todas cumplen las restricciones originales.

b) $2x+60° = \operatorname{arcsen}(1/4)+360°k$ o $180°-\operatorname{arcsen}(1/4)+360°k$. $x \approx -22{,}7612°+180°k$ o $x \approx 52{,}7612°+180°k$.

c) $x = 180°k$.

d) $\sqrt{3} \operatorname{sen} x - \cos x = 0$, por lo que $x = 30°+180°k$.

4.11

a) $\operatorname{sen}^2 x = 1/4$ y $\cos^2 y = 1/4$. Soluciones: $x = \pm 30°+180°k$; $y = \pm 60°+180°m$, con k, m enteros y signos independientes.

b) No tiene solución. Como $\cos y \neq 0$, la segunda ecuación equivale a $\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 1/2$, es decir, $\cos(x+y) = 1/2$. Pero $x+y = 120°$ tiene coseno $-1/2$.

4.12

a) $y = 75°+180°k$; $x = -15°-180°k$.

b) $x = 60°k$; $y = 30°+60°k$, excluyendo los enteros k de la forma $3m+1$, porque anulan los cosenos de las tangentes.

c) $\operatorname{sen} x = 1$ y $\cos y = 1/2$. $x = 90°+360°k$; $y = \pm 60°+360°m$.

d) Al eliminar $\operatorname{sen} x$ se obtiene $\cos y(\cos y - 2) = 0$. Solo $\cos y = 0$ es posible; entonces $\operatorname{sen} x = 1/2$. $x = 30°+360°k$ o $150°+360°k$; $y = 90°+180°m$.

4.13 **a)** $4 \operatorname{sen} x \cos x = 1$, luego $\operatorname{sen} 2x = 1/2$. $x = 15° + 180°k$ o $x = 75° + 180°k$.

b) $\cos 2x = \operatorname{sen} 2x$. $x = 22{,}5° + 90°k$; ninguna de estas soluciones anula $2\cos x + \operatorname{sen} x$.

c) $1 = 2(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x) = 2\cos 2x$. $x = \pm 30° + 180°k$; el denominador no se anula.

d) $6\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$, por lo que $\operatorname{sen} x = 1/2$ o $-1/3$. $x = 30° + 360°k$; $150° + 360°k$; $199{,}4712° + 360°k$; $340{,}5288° + 360°k$.

e) $(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$. $x = 360°k$ o $x = \pm 120° + 360°k$.

f) $x = 90° + 360°k$ o $x \approx 323{,}1301° + 360°k$. Al usar $t = \operatorname{tg}(x/2)$, resulta $(3t+1)(t-1) = 0$.

g) $x = 135° + 180°k$.

4.14 $3 \operatorname{sen} x = 2\cos^2 x = 2(1 - \operatorname{sen}^2 x)$, así que $2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x - 2 = 0$. La raíz válida es $\operatorname{sen} x = 1/2$, luego $x = 30°$.

4.15 La solución obtusa tiene $\operatorname{sen} x = 4/5$ y $\cos x = -3/5$. Por tanto, $x \approx 126{,}8699°$. La comprobación da $4/5 - 9/5 = -1$.

4.16 $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x = 1/2$. En $0° < 2x < 180°$ se obtiene $2x = 30°$ o $150°$. Los ángulos son $15°$ y $75°$.

05 · Resolución de triángulos

5.01 La hipotenusa es $\sqrt{(7^2+24^2)} = 25$ m. Los ángulos agudos son $\arctan(7/24) \approx 16{,}2602°$ y $73{,}7398°$; el tercero mide $90°$.

5.02 $A = 90°$, $B = 28°$. Como b se opone a B y c a C: $b = \operatorname{sen} 28° \approx 0{,}4695$ m; $c = \operatorname{sen} 62° \approx 0{,}8829$ m.

5.03 **a)** $B = 37°$. Por el teorema del seno, $b = 14 \operatorname{sen} 37°/\operatorname{sen} 55° \approx 10{,}2855$ cm y $c = 14 \operatorname{sen} 88°/\operatorname{sen} 55° \approx 17{,}0804$ cm.

b) $C = 50°$. $b = 18 \operatorname{sen} 86°/\operatorname{sen} 44° \approx 25{,}8489$ cm; $c = 18 \operatorname{sen} 50°/\operatorname{sen} 44° \approx 19{,}8498$ cm.

5.04 **a)** Sí, si $A = 90°$: el teorema del seno da $a/\operatorname{sen} A = b/\operatorname{sen} B = c/\operatorname{sen} C$.

b) No. De $a = b$ se sigue $A = B$. Además, $a = c/\operatorname{sen} C$ y el teorema del seno obligan a $\operatorname{sen} A = 1$, por lo que $A = B = 90°$, imposible.

c) Sí, en un triángulo equilátero: $A = B = C = 60°$.

5.05 **a)** Por el teorema del coseno: $\sqrt{(12^2+12^2-2\cdot12\cdot12\cos 38°)} \approx 7{,}8136$ cm.

b) $\sqrt{(10^2+16^2-2\cdot10\cdot16\cos 48°)} \approx 11{,}9113$ cm.

5.06 **a)** Sí, acutángulo: $12 < 11+9$ y $12^2 < 11^2+9^2$.

b) No: $23 > 14+8$; no se cumple la desigualdad triangular.

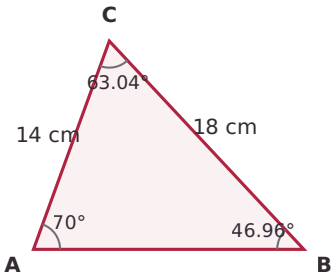
c) Sí, rectángulo: $26^2 = 24^2+10^2$.

d) Sí, obtusángulo: $40 < 30+20$ y $40^2 > 30^2+20^2$.

5.07 Ángulos opuestos a los lados a, b y c: $131{,}4908°$, $35{,}1838°$, $13{,}3254°$.

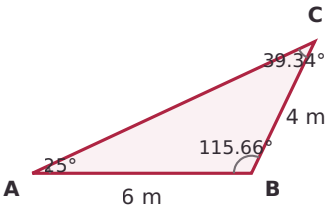
5.08 Por el teorema del coseno, $a \approx 14{,}7681$ cm. Ángulos opuestos a los lados a, b y c: $71°$, $73{,}8149°$, $35{,}1851°$.

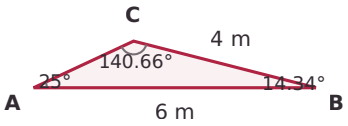
5.09 Los 70° deben oponerse al lado de 18 cm: si se opusieran al de 14 cm, el seno del otro ángulo sería 18 sen 70°/14 > 1. El ángulo opuesto a 14 cm mide 46,9596°; el tercero, 63,0404°. El tercer lado mide 17,0735 cm.



5.10 **a)** C ≈ 39,3405°, B ≈ 115,6595°, b ≈ 8,5314 m. El ángulo obtuso es B.

b) C ≈ 140,6595°, B ≈ 14,3405°, b ≈ 2,3443 m. El ángulo obtuso es C.





5.11 **a)** a ≈ 9,4194 m; b ≈ 7 m; c ≈ 6,3028 m; A = 90°, B ≈ 48°, C ≈ 42°.

b) a ≈ 13,5908 m; b ≈ 6,3805 m; c ≈ 12 m; A = 90°, B ≈ 28°, C ≈ 62°.

c) a ≈ 13 m; b ≈ 12 m; c ≈ 5 m; A = 90°, B ≈ 67,3801°, C ≈ 22,6199°.

d) a ≈ 6 cm; b ≈ 4,4448 cm; c ≈ 4,0303 cm; A = 90°, B ≈ 47,8°, C ≈ 42,2°.

e) a ≈ 6,7082 m; b ≈ 3 m; c ≈ 6 m; A = 90°, B ≈ 26,5651°, C ≈ 63,4349°.

f) a ≈ 10 m; b ≈ 8 m; c ≈ 6 m; A = 90°, B ≈ 53,1301°, C ≈ 36,8699°.

5.12 **a)** Ángulos opuestos a los lados a, b y c: 44,4153°, 101,537°, 34,0477°.

b) a ≈ 5,7711 cm. Ángulos opuestos a los lados a, b y c: 39,2°, 41,0786°, 99,7214°.

c) A = 74° 31′; b ≈ 4,5531 cm; c ≈ 6,6696 cm.

5.13 **a)** b ≈ 11,2665 cm. Ángulos opuestos a los lados a, b y c: 50,9794°, 103,45°, 25,5706°.

b) a ≈ 14,5024 cm. Ángulos opuestos a los lados a, b y c: 112,8333°, 31,8348°, 35,3319°.

c) C = 53° 58′; a ≈ 3,4489 cm; b ≈ 7,3412 cm.

5.14 **a)** Ángulos opuestos a los lados a, b y c: 134,6183°, 24,533°, 20,8487°.

b) B ≈ 87,0828°, C ≈ 50,0006°, b ≈ 11,7333 cm; B ≈ 7,0839°, C ≈ 129,9994°, b ≈ 1,4489 cm.

c) B ≈ 47,7341°, C ≈ 59,3492°, b ≈ 7,7419 cm.

5.15 **a)** C = 80°; b = 10 sen 70°/sen 30° ≈ 18,7939 cm; c ≈ 19,6962 cm.

b) B = 50°; b ≈ 22,1138 cm; c ≈ 28,429 cm.

5.16 El ángulo opuesto al lado de 15 m es 97,1808°. Los otros dos son iguales y miden 41,4096° cada uno.

5.17 Sean 5t, 6t y 7t; el semiperímetro es 9t. Por Herón, el área es $\sqrt{(9t \cdot 4t \cdot 3t \cdot 2t)} = 6\sqrt{6} \cdot t^2$. Así, t = 2, y los lados son 10, 12 y 14 unidades. Ángulos opuestos a los lados a, b y c: 44,4153°, 57,1217°, 78,463°.

06 · Problemas geométricos

6.01 Los triángulos EDC y BAC son semejantes. DE/25 = 3/5, así que la anchura del río es 15 m.

6.02 Área = (1/2)·2·3·sen 60° = 3√3/2 ≈ 2,5981 cm².

6.03 La altura divide la base en h/tg 45° y h/tg 60°. Por tanto, h+h/√3 = 100 y h = 100√3/(√3+1) = 50(3−√3) ≈ 63,3975 cm.

6.04 Se divide en cinco triángulos isósceles de ángulo central 72°. Área = (5/2)·15²·sen 72° ≈ 534,9693 cm².

6.05 Recorren 54 y 75 millas. La separación es √(54²+75²−2·54·75 cos 82°) ≈ 86,1028 millas. Como es menor que 180 millas, sí pueden comunicarse.

6.06 Prolongando un lado o trasladando el otro se obtiene un triángulo de base 3 cm y ángulos 70°, 40° y 70°. Por el teorema del seno, y = 3 cm y x = 3 sen 40°/sen 70° ≈ 2,0521 cm.

6.07 La distancia es el cateto opuesto: d = 8 sen 38° ≈ 4,9253 m.

6.08 La diferencia de altura respecto a los ojos es 40 tg 26°. La altura total es h = 1,75+40 tg 26° ≈ 21,2593 m.

6.09 Si l es el lado interior, l cos 30° = 8. Así, l = 16√3/3 cm y el área es l² = 256/3 ≈ 85,3333 cm².

6.10 El radio del hexágono coincide con el lado. La apotema es 4 cos 30° = 2√3 ≈ 3,4641 cm.

6.11 El lado es una cuerda de ángulo central 72°: l = 2·20·sen 36° ≈ 23,5114 cm.

6.12 El ángulo CAB es recto, así que AB = 8 sen 30° = 4 cm. El arco tiene ángulo central 60° y radio 4 cm; su longitud es 4·π/3 ≈ 4,1888 cm.

6.13 Si h es la altura de la estatua, (8+h)/15 = tg 38°. Por tanto, h = 15 tg 38°−8 ≈ 3,7193 m.

6.14 En ACD, el ángulo en A es 46°. CA = 50 sen 61°/sen 46° ≈ 60,7932 m. La altura es AB = CA·tg 28° ≈ 32,3243 m.

6.15 El tercer ángulo es 13°. Por el teorema del seno, AB = 50 sen 72°/sen 13° ≈ 211,3919 m.

6.16 El teorema del seno da sen C = 12 sen 42°/9. Hay dos configuraciones: C ≈ 63,1477° o 116,8523°. Las distancias a B son 12,983 km y 4,8525 km. El dibujo muestra la primera; la otra también cumple los datos numéricos.

6.17 La separación de los anclajes es d = $\sqrt{(10^2+6^2-2\cdot10\cdot6\cos25°)}$ ≈ 5,2195 m. Igualando dos expresiones del área: dh/2 = 10·6·sen 25°/2, así que h ≈ 4,8582 m. Esta es la altura total hasta el punto de sujeción; para obtener solo la antena hay que restar la altura del pedestal.

6.18 **a)** La distancia perpendicular es h = 8/(cotg 50°+cotg 37°) ≈ 3,6932 m. Los tramos miden h/sen 50° y h/sen 37°; la cuerda mide 10,9579 m. No se suman los 8 m entre argollas, porque no forman parte de la cuerda.

b) El niño está a 3,6932 m de la pared.

6.19 Por el teorema del seno, AB/sen 30° = 1/sen 40°. Resulta AB ≈ 0,7779 km.

6.20 **a)** Los ángulos son 30°, 60° y 90°.

b) Si t es el cateto menor, el mayor es t$\sqrt{3}$ y el área $t^2\sqrt{3}/2 = 28$. Los lados miden aproximadamente 5,6861 cm, 9,8486 cm y 11,3722 cm. El perímetro es 26,9069 cm.

6.21 Si x es la distancia del punto próximo al pie: h = x tg 42° = (x+25)tg 35°. Así, x ≈ 87,44 m y h ≈ 78,7314 m.

6.22 h(cotg 30°−cotg 60°) = 2500. Se obtiene h = 1250$\sqrt{3}$ ≈ 2165,0635 m.

6.23 Si h es la anchura, h cotg 38°+h cotg 44° = 40. Por tanto, h ≈ 17,2751 m.

6.24 Si h es la altura, h cotg 32°+h cotg 46° = 100. Resulta h ≈ 38,9708 m.

6.25 **a)** La altura cumple h(cotg 18°−cotg 26°40′) = 800; h ≈ 736,2958 m.

b) Las distancias directas desde el observador son h/sen 18° ≈ 2382,7033 m al barrio lejano y h/sen 26°40′ ≈ 1640,5908 m al cercano.

6.26 Las distancias horizontales a la vertical son 2500 cotg 62°24′ y 2500 cotg 37°18′. Su diferencia es 1974,7507 m.

6.27 **a)** α = arctg(3,5/5) ≈ 34,992°.

b) La longitud es $\sqrt{(5^2+3{,}5^2)}$ ≈ 6,1033 m.

6.28 El radio del paralelo es 6370 cos 38°. Su longitud es L = 2π·6370·cos 38° ≈ 31539,26 km.

6.29 **a)** Por semejanza, 6/x = 1,8/4,5. La anchura es x = 15 m.

b) Sí. Basta aplicar la semejanza de los dos triángulos rectángulos; no es necesario calcular ningún ángulo.

6.30 La separación es d = 3/tg 22° ≈ 7,4253 m. El reflejo equivale a observar una imagen virtual de la cima por debajo del estanque: tg 56° = (h+3)/d. Así, h = d tg 56°−3 ≈ 8,0084 m.

6.31 La distancia horizontal al centro de la base es 80+233/2 = 196,5 m. La altura es h = 196,5 tg 29,5° ≈ 111,1744 m.

6.32 La longitud inclinada en la dirección de los 8 m es 8/cos 18°. El área es 12·8/cos 18° ≈ 100,9404 m².

6.33 Si h es la altura, h cotg 52°+h cotg 38° = 82. Resulta h ≈ 39,7821 m.

6.34 No son compatibles. En ABC, el teorema del seno exigiría sen B = AC·sen 30°/AB = 1·0,5/0,15 = 10/3, imposible. Por ello no existe una figura con todos esos datos y no puede asignarse un valor válido a x.

07 · Profundización

7.01 **a)** 1/16. Aplicando repetidamente 2sen t cos t = sen 2t, el producto se transforma en sen(π/2)/16.

b) 2. Como cada sumando es ≤ 1, ambos deben valer 1. Entonces 2A−B = 0 y A+B = 90°, de donde A = 30°, B = 60°, C = 90°. BC = 4 sen 30° = 2.

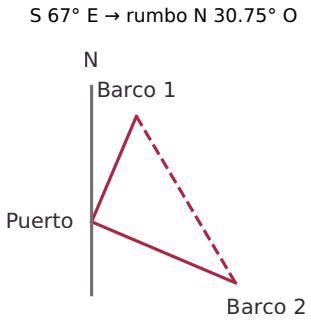
c) 60°. Al desarrollar (a+b+c)(a+b−c) = 3ab se obtiene $c^2 = a^2+b^2-ab$. Comparando con el teorema del coseno, cos C = 1/2.

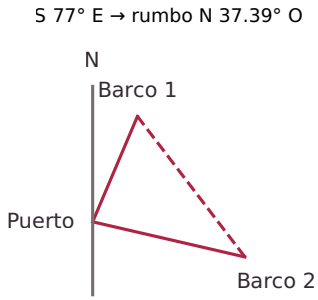
d) 5 m. El teorema del coseno da $7^2 = 8^2+x^2-16x\cos 60°$, luego $x^2-8x+15 = 0$. Las opciones son 3 o 5 m; con 3, el triángulo sería obtusángulo, por lo que se descarta.

7.02 Como sen x cos x = (1/2)sen 2x, existe solución si y solo si $-1/2 \le k \le 1/2$. Si θ = arcsen(2k), en radianes, las soluciones son x = θ/2+nπ o x = (π−θ)/2+nπ, con n entero. Basta describirlas en un intervalo de longitud π y repetir por periodicidad.

7.03 Sea D la intersección de la bisectriz con BC. Los triángulos ABD y ACD tienen la misma altura desde A, así que sus áreas están en razón BD/DC. También, por la fórmula del área, la razón es (AB·AD·sen(A/2))/(AC·AD·sen(A/2)) = AB/AC. Por tanto, BD/DC = AB/AC.

7.04 Con ejes este y norte, la posición del primero es (11 sen 23°, 11 cos 23°), y la del segundo es (15 sen q°, −15 cos q°). La diferencia tiene componente oeste y norte. Para q = 67°, el rumbo es N 30,7462° O; para q = 77°, es N 37,3896° O. Los ángulos del rumbo se miden desde el norte.





7.05 Si A es un punto de tangencia, CA ⊥ PA y sen(APC) = CA/CP = 1/2. Por simetría, PC biseca el ángulo entre las tangentes: este mide 2·30° = 60°.

7.06 Sea AM = MB = d > 0. Por el teorema de la mediana, $PA^2+PB^2 = 2PM^2+2d^2$. Sustituyendo $PM^2 = PA\cdot PB$: $(PA-PB)^2 = 2d^2$. El lugar es la hipérbola $|PA-PB| = d\sqrt{2}$, de focos A y B. Su semieje real es $a = d/\sqrt{2}$ y c = d; por tanto, $b^2 = c^2-a^2 = d^2/2 = a^2$. Es una hipérbola equilátera.

7.07 cos x no puede ser 0, porque entonces el primer miembro sería 1. Dividiendo por $\cos^2 x$ se obtiene $\tg^2 x+\tg x-2 = 0$, es decir, (tg x−1)(tg x+2) = 0. Así, $\cos x = \pm\sqrt{2}/2$ o $\cos x = \pm\sqrt{5}/5$. Ambos pares de valores se alcanzan con el signo del seno correspondiente.

7.08 Los dos términos positivos tienen producto 2; su suma mínima es $2\sqrt{2}$ y solo se alcanza si son iguales. Por tanto, $\operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x = 1/2$ y $x = 45° + 90°n$. Los enteros más cercanos por defecto y exceso son 1935° y 2025°.

08 · Trigonometría y óptica

8.01 Es un filamento transparente que guía luz. En el modelo de índices constantes, el núcleo debe tener mayor índice que el revestimiento. El ángulo de incidencia en esa interfaz, medido desde la normal, debe superar el ángulo crítico.

8.02 La ley de Snell es $n_1 \operatorname{sen} i = n_2 \operatorname{sen} r$. En el límite, $r = 90°$, de modo que $\operatorname{sen} i_c = n_2/n_1$. Se requiere $n_1 > n_2$. Para $i > i_c$ no existe un ángulo refractado real y se produce reflexión interna total. No basta con que el ángulo de incidencia sea menor que el de refracción.

8.03 Respuesta abierta. Ventajas: transmisión de señales luminosas con gran capacidad, baja atenuación y ausencia de interferencias eléctricas entre fibras. Inconvenientes: las uniones deben alinearse con precisión y las curvaturas excesivas pueden causar pérdidas; su instalación y reparación requieren herramientas adecuadas. El coste depende de la instalación y no es siempre menor.

8.04 $\operatorname{sen} i_c = n_{aire}/n_{material}$. Así, $n_{material} = 1{,}0003/\operatorname{sen} 41{,}8° \approx 1{,}5008$. El ángulo crítico se mide en el medio de mayor índice; no es el ángulo de entrada desde el aire.