

**4.º ESO**

Sucesiones y progresiones

Practica, resuelve y comprueba
tus respuestas.

01 Patrones y término general

Términos y regularidades.

03 Sumas aritméticas y problemas

Sumas finitas y aplicaciones.

05 Sumas y productos geométricos

Sumas finitas, infinitas y productos.

02 Progresiones aritméticas

Diferencia y posición.

04 Progresiones geométricas

Razón, términos e interpolación.

06 Problemas de progresiones

Modelos aritméticos y geométricos.

Índice

Ejercicios organizados por contenidos, con espacio para trabajar y respuestas al final.

01	Patrones y término general	3
02	Progresiones aritméticas	4
03	Sumas aritméticas y problemas	7
04	Progresiones geométricas	10
05	Sumas y productos geométricos	13
06	Problemas de progresiones	16
•	Solucionario	25

Cómo usar el dossier

El código **2.12** identifica la actividad 12 del bloque 2. Busca el mismo código en el solucionario. Las actividades marcadas como **ampliación** proponen un reto adicional.

BLOQUE 01

Patrones y término general

Términos y regularidades. · 2 actividades

1.01 Escribe los cinco primeros términos ($n = 1, 2, 3, 4, 5$).

a) $a_n = \frac{2}{n}$

b) $b_n = \frac{5-n}{2}$

c) $c_n = \frac{n-4}{n-1}$

d) $d_n = 3 - (-1)^n \cdot n$

1.02 Propón un término general que continúe el patrón de cada sucesión, empezando en $n = 1$.

a) 1; 4; 9; 16; ...

b) 3; 6; 9; 12; ...

c) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$

d) 2; 6; 18; 54; ...

e) 0; 3; 8; 15; 24; ...

f) $8; 2; \frac{1}{2}; \frac{1}{8}; \dots$

BLOQUE 02

Progresiones aritméticas

Diferencia y posición. · 13 actividades

2.01 Interpolar 3 medios aritméticos entre 7 y 37.

2.02 Indica cuáles son progresiones aritméticas y calcula su diferencia. En la última, n es un parámetro fijo distinto de cero.**a)** 8; 5; 2; -1; -4; ...**b)** 6; 10; 14; 18; 22; ...**c)** $4; \frac{10}{3}; \frac{11}{2}; \frac{29}{6}; \dots$ **d)** $\frac{1}{n}; \frac{n+1}{n}; \frac{2n+1}{n}; \frac{3n+1}{n}; \dots$

2.03 Calcula el término indicado.**a)** Término 30 de 1; 6; 11; 16; ...**b)** Término 16 de 1; 5; 9; 13; ...**c)** Término 24 de -8; -5; -2; 1; ...

2.04 Interpola los medios aritméticos indicados.

a) Cuatro entre 5 y 25.

b) Tres entre 12 y -2 .

c) Cinco entre 3 y 27.

2.05 Hallar el término a_{20} de una progresión en la que $a_1 = 7$ y $d = -2$.

2.06 Encuentra el primer múltiplo de 47 mayor de 5000.

2.07 Hallar el múltiplo de 39 inmediatamente inferior a 8000.

2.08 En una progresión aritmética $a_1 = 3$ y $d = 4$. Hallar a_{22} y a_{13} .

2.09 Sabiendo que $a_{12} = 42$ y $d = 2$, hallar a_1 .

2.10 En una progresión $a_{40} = 59$ y $a_{27} = 33$, hallar a_1 y d .

2.11 Obtener el término a_{40} en una progresión, sabiendo que $a_{25} = 53$ y $d = -3$.

2.12 En una progresión aritmética $d = 7$ y $a_{55} = 232$, hallar a_{30} .

2.13 Interpolar tres medios aritméticos entre 10 y -10

BLOQUE 03

Sumas aritméticas y problemas

Sumas finitas y aplicaciones. · 12 actividades

- 3.01** En una progresión aritmética, la suma de los términos tercero y quinto es 28 y la de los términos segundo y décimo-segundo es 40. Calcular la suma de los veinte primeros términos.

- 3.02** En una progresión aritmética, el sexto término es igual al cuadrado del primero y el tercero vale 13. Calcular la suma de los tres primeros términos.

- 3.03** Calcula la suma de los 40 primeros múltiplos positivos de 8 y la suma de los primeros 50 múltiplos de 8 mayores que 60.

- 3.04** Calcular la suma de todos los números impares de cuatro cifras.

3.05 ¿Cuántos números pares consecutivos es preciso tomar a partir del número 2 para que su suma sea 423.150?

3.06 Calcula las sumas indicadas.

- a) Los 25 primeros términos de 3; 8; 13; ...
- b) Los 22 primeros términos de 42; 39; 36; ...
- c) Los 40 primeros términos de $\frac{1}{2}; \frac{5}{8}; \frac{3}{4}; \dots$

3.07 Hallar la suma de los cien primeros números naturales.

3.08 Hallar la suma de una progresión de 12 términos, sabiendo que $a_3 = 24$ y $a_{10} = 66$.

3.09 El primer término de una progresión aritmética vale -7, y la diferencia es 4. Hallar el término a_{34} y la suma de los 34 primeros términos.

3.10 En una progresión aritmética en que $a_1 = 3$ y $a_{20} = 79$, hallar la suma de los veinte primeros términos.

- 3.11** ¿Cuántos términos de la progresión aritmética: 3, 1, -1, -3, -5, ... se deben tomar para que la suma sea -140? 1 1 1

- 3.12** ¿Cuántos términos de la progresión aritmética 6,5; 4,5; 2,5; ... hay que tomar para que la suma sea -396?

BLOQUE 04

Progresiones geométricas

Razón, términos e interpolación. · 14 actividades

4.01 Indica cuáles son progresiones geométricas.

a) 2; $\frac{4}{3}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{16}{27}$; ...

b) 12; 20; 50; 16; 20; ...

c) 27; 45; 75; 125; ...

d) $\frac{x}{x+1}, 1, \frac{x+1}{x}, \frac{x+2}{x}, \dots$

4.02 Construye tres progresiones geométricas con las condiciones siguientes:

a) Que sea creciente, y el primer término valga 3.

b) Que sea decreciente, y el $a_3 = 12$

c) Que sea alternante, y el $a_5 = -16$

4.03 Halla el octavo término de la progresión geométrica 1, 2, 4, ...

4.04 Halla el término decimosegundo de la progresión $\frac{1}{1.000}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{10}$; ...

4.05 Sabiendo que $a_1 = 3$ y $r = 2$, hallar a_{10} en una progresión geométrica.

4.06 Hallar los términos a_8 y a_6 en una progresión geométrica de razón $1/2$ cuyo primer término vale 8.

4.07 El término a_7 de una progresión geométrica vale 243 y la razón es 3. Hallar el primer término.

4.08 En una progresión geométrica se sabe que $a_{15} = 512$ y $a_{10} = 16$. Hallar el primer término y la razón.

4.09 Dados $a_{12} = 72$ y $r = 1/2$, en una progresión geométrica, obtener a_8 .

4.10 En una progresión geométrica $a_1 = 6$ y $a_{15} = 54$, halla a_6 .

4.11 Interpolar 5 medios geométricos entre 7 y 5103.

4.12 Interpolar 5 medios geométricos entre 8 y $\frac{1}{8}$.

4.13 Interpolar 4 medios geométricos entre $\frac{1}{3}$ y 81.

4.14 Hallar tres números en progresión geométrica cuya suma sea 26 y su producto 216.

BLOQUE 05

Sumas y productos geométricos

Sumas finitas, infinitas y productos. · 12 actividades

- 5.01** Sabemos que $a_1 = 7$ y $a_{15} = 1575$ en una progresión geométrica, halla el producto de los 15 primeros términos.

- 5.02** El primer término de una progresión geométrica vale 1 y la razón es 2. Hallar el término a_7 y el producto de los siete primeros términos.

- 5.03** Nos dan el primer término y la razón de una progresión geométrica, que valen respectivamente 27 y $1/3$. Nos piden hallar el producto de los ocho primeros términos.

- 5.04** Hallar el producto de los once primeros términos de una progresión geométrica, si sabemos que el término central vale 2.

- 5.05** Sabiendo que $a_1 = 7$ y $r = 2$, hallar la suma de los nueve primeros términos de una progresión geométrica.

- 5.06** Hallar la suma de los quince primeros términos de una progresión geométrica, si $a_{15} = 2/1594323$, $a_1 = 6$ y $r = 1/3$.

- 5.07** Hallar la suma de diez términos geométricos de $4/3, 2/3, 1/3, \dots$

- 5.08** La suma de los términos de una progresión geométrica decreciente ilimitada es 4, y su primer término es 3. ¿Cuál será la suma de los términos de la progresión que tuviera como términos a los cuadrados de los del anterior?

- 5.09** Obtener la suma de una progresión geométrica ilimitada de razón $2/3$ y cuyo primer término vale 6.

- 5.10** Calcula $\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots}{\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots}$.

- 5.11** La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente es 16, y la diferencia entre el primero y segundo términos es 1. Determinar la progresión.

- 5.12** Demuestra que $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{4}{3}$.

BLOQUE 06

Problemas de progresiones

Modelos aritméticos y geométricos. · 33 actividades

- 6.01** Dos planes proponen transformar seco en regadío. El primero transforma $\frac{1}{8}$ del total el primer año y, cada año posterior, $\frac{1}{4}$ de lo transformado el año anterior. El segundo transforma $\frac{1}{9}$ del total el primer año y después $\frac{1}{3}$ de lo transformado el año anterior. Compara ambos planes tras 6 años, tras 15 años y a largo plazo.

- 6.02** Hallar los cuatro ángulos de un cuadrilátero que se hallan en progresión geométrica sabiendo que el último es 9 veces el segundo.

- 6.03** Una familia tiene 3 hijos. Sus edades están en progresión aritmética cuya suma es 36. Si a la edad del segundo le añadimos 2 y a la del mayor 11, los tres números forman una progresión geométrica Hallar la edad de los tres hijos.

- 6.04** El alquiler de una bicicleta cuesta 1,50 € por la primera hora y 0,30 € por cada hora adicional. Calcula el precio total de 2, 3, 4 y n horas. ¿Cuántas horas la alquila Andrés si paga 4,50 €?

- 6.05** Al terminar el primer día de vacaciones, una familia conserva 4.400 €. Gasta 290 € cada día. ¿Cuánto le queda después de 2, 3 y n días? ¿Cuántos días completos de vacaciones puede pagar con el dinero inicial?

- 6.06** El cateto menor de un triángulo rectángulo mide 15 m. Calcular sus otros lados sabiendo que los tres forman una progresión aritmética

- 6.07** Un nadador, durante los seis primeros días de la temporada, se somete al siguiente entrenamiento: 11 largos de piscina el primer día y cada día siguiente aumenta en tres largos su dosis de entrenamiento diario. ¿Cuántos largos hizo en los seis días? ¿Cuántos habría hecho de seguir así durante 40 días?

- 6.08** Se quiere construir un tejado de forma que en la primera fila haya 10 tejas, en la segunda 11, y así sucesivamente, hasta un total de 20 filas de tejas. ¿Cuántas tejas se necesitan?

- 6.09** ¿Cuanto dinero llevaba a sus vacaciones una persona si el primer día gastó 210 i, fue disminuyendo gastos en 10 € por día y el dinero le duró 20 días?

- 6.10** En un cine, la segunda fila de butacas está a 10 metros de la pantalla y la séptima fila está a 16 metros. ¿En qué fila debe sentarse una persona que le guste ver la pantalla a una distancia de 28 metros?

- 6.11** A Isabel y Andrés les cuentan un secreto a las 9:00. Cada uno se lo cuenta a tres personas a los 15 minutos, y cada nuevo grupo hace lo mismo 15 minutos después. Supón que nadie lo sabía y que no se repite ninguna persona. ¿Cuántas lo sabrán a las 14:00, incluidos Isabel y Andrés?

- 6.12** Una cafetera cuesta inicialmente 1.500 €. Cada vez que cambia de propietario se vende por la mitad del precio anterior. Escribe la sucesión de precios, calcula cuánto paga el quinto propietario y la suma de todos los precios si el proceso continúa indefinidamente.

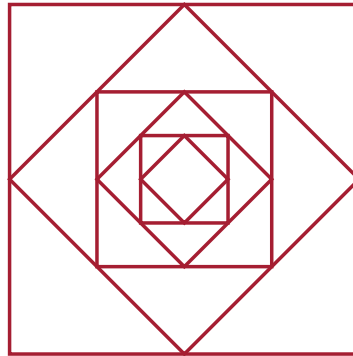
- 6.13** En el punto kilométrico 238 hay una gasolinera. Se instalan cinco nuevas hasta el punto 562, incluida una en este último, todas separadas la misma distancia. ¿En qué puntos kilométricos se sitúan las nuevas?

- 6.14** La asignación semanal de un hijo pasa de 20 € la primera semana a 41 € la semana 15. Si el aumento semanal es constante, ¿cuánto aumenta cada semana?

- 6.15** Todos los números naturales que divididos entre 7 dan resto 3 forman una progresión. Hallar la suma de los 100 primeros.

- 6.16** Un cultivo empieza con 10.000 bacterias y se duplica cada 24 horas. ¿Cuántas habrá transcurridos 5 días completos y 10 días completos?

- 6.17** Dibuja un cuadrado de 8 cm. de lado. Uniendo los puntos medios se obtiene otro cuadrado inscrito en el anterior. Repitiendo este proceso se obtiene una sucesión de infinitos cuadrados. Comprobar que los valores de las áreas de los infinitos cuadrados forman una progresión geométrica y calcular la suma de todas las áreas.



8 cm

- 6.18** Calcular las dimensiones de un ortoedro sabiendo que están en progresión aritmética, que suman 24 m. y que el volumen del ortoedro es 384 m^3 .

- 6.19** Se reparten 100 medidas de trigo entre cinco personas de modo que las cantidades formen una progresión aritmética. La suma de las dos primeras cantidades es la séptima parte de la suma de las tres restantes. ¿Qué recibe cada persona?

- 6.20** Los números 2, 4, 8, 16, 32, 64, ..., 524.288 siguen una ley. A partir de estos datos, ¿cuántos términos tendríamos que escribir hasta llegar al último?

- 6.21** Los números 4, 8, 16, 32, 64, ..., 131.072 siguen una ley. A partir de estos datos, ¿cuántos términos tendríamos que escribir hasta llegar al último?

- 6.22** Los números 6, 18, 54, 162, ..., 9.565.938 siguen una ley. A partir de estos datos, ¿cuántos términos tendríamos que escribir hasta llegar al último?

- 6.23** Los números 2, 6, 18, 54, 162, ..., 9.565.938 siguen una ley. A partir de estos datos, ¿cuántos términos tendríamos que escribir hasta llegar al último?

- 6.24** Los números 18, 54, 162, ..., 9.565.938 siguen una ley. A partir de estos datos, ¿cuántos términos tendríamos que escribir hasta llegar al último?

- 6.25** Un tipo de bacteria puede reproducirse partiéndose por la mitad en una hora. ¿Cuánto tiempo ha pasado si tenemos una colonia de 16.777.216 bacterias? Supón que la colonia comenzó con una sola bacteria.

- 6.26** Otro tipo de bacteria puede reproducirse partiéndose por la mitad en tan solo 37 minutos. ¿Cuánto tiempo ha pasado si tenemos una colonia de 2.097.152 bacterias? Supón que la colonia comenzó con una sola bacteria.

- 6.27** Una matrioska es un souvenir típico de Rusia, y consiste en una muñeca que contiene en su interior otra de igual forma pero algo más pequeña, y así sucesivamente. El volumen de cada muñeca es $\frac{2}{3}$ el de la anterior. Si la muñeca mayor ocupa 360 cm^3 , ¿cuántas muñecas hay si la más pequeña ocupa $31,6 \text{ cm}^3$?

- 6.28** Una piscina pierde la mitad de su volumen de agua cada semana. Si en un momento dado almacenaba 80.000 litros ¿Cuánto tiempo debe pasar para que quede reducido a sólo 312'5 litros?

- 6.29** La población de cierta aldea se triplica cada año. Si hoy tiene 6.561.000 habitantes ¿Cuántos años hace que sólo vivían 1000 personas?

- 6.30** El inventor del ajedrez pidió como pago que se llenase cada escaque (cuadrado del tablero) con el doble de trigo que el escaque anterior. Si se comienza con 1 grano de trigo ¿Cuántos granos habrá que poner en el último escaque? ¿En qué escaque habrá que colocar 4.194.304 granos de trigo?

- 6.31** Cierta país reduce a la mitad el número de coches contaminantes cada 15 años. Si ahora hay 7.000.000 de esos coches ¿dentro de cuántos años habrá sólo 6.836 coches contaminantes?

- 6.32** La extensión de zona desértica se triplica en cierta comarca cada 5 años. Si hoy existen 40 hectáreas desérticas ¿dentro de cuantos años ocupara toda la comarca que tiene 29.160 hectáreas de superficie?

6.33

Cada vez que cae al suelo una pelota rebota los $\frac{3}{5}$ de la altura desde la que ha caído. Si se la deja caer de una altura de 125 metros, ¿a qué altura llegará después del tercer bote?

COMPRUEBA TUS RESULTADOS

Solucionario

Respuestas finales. Los códigos coinciden con los de las actividades.

01 · Patrones y término general

- 1.01** **a)** $2; 1; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{5}$ **b)** $2; \frac{3}{2}; 1; \frac{1}{2}; 0$
c) El término $n = 1$ no está definido; los siguientes son $-2; -1/2; 0; 1/4$. **d)** $4; 1; 6; -1; 8$.

- 1.02** **a)** $a_n = n^2$ **b)** $a_n = 3n$ **c)** $a_n = \frac{n}{n+1}$ **d)** $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ **e)** $a_n = n^2 - 1$ **f)** $a_n = 8\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

02 · Progresiones aritméticas

2.01 14,5; 22; 29,5.

2.02 **a)** Sí; $d = -3$. **b)** Sí; $d = 4$. **c)** No. **d)** Sí; $d = 1$.

2.03 **a)** 146. **b)** 61. **c)** 61.

2.04 **a)** 9; 13; 17; 21. **b)** $17/2$; 5; $3/2$. **c)** 7; 11; 15; 19; 23.

2.05 $a_{20} = -31$.

2.06 5.029.

2.07 7.995.

2.08 $a_{22} = 87$; $a_{13} = 51$.

2.09 $a_1 = 20$.

2.10 $a_1 = -19$; $d = 2$.

2.11 $a_{40} = 8$.

2.12 $a_{30} = 57$.

2.13 5; 0; -5.

03 · Sumas aritméticas y problemas

3.01 $a_1 = 8$; $d = 2$; $S_{20} = 540$.

3.02 Dos posibilidades: $a_1 = 5$, $d = 4$ y $S_3 = 27$; o $a_1 = -13/2$, $d = 39/4$ y $S_3 = 39/4$.

3.03 6.560; 13.000.

3.04 24.750.000.

3.05 650 números pares.

3.06 **a)** 1.575. **b)** 231. **c)** 235/2.

3.07 5.050, considerando 1, 2, ..., 100.

3.08 $a_1 = 12$; $d = 6$; $S_{12} = 540$.

3.09 $a_{34} = 125$; $S_{34} = 2.006$.

3.10 820.

3.11 14 términos.

3.12 24 términos.

04 · Progresiones geométricas

4.01 **a)** Sí; $r = 2/3$. **b)** No. **c)** Sí; $r = 5/3$.
d) No hay un valor permitido de x que haga geométrica toda la sucesión.

4.02 **a)** Por ejemplo: 3; 6; 12; 24; ... **b)** Por ejemplo: 108; 36; 12; 4; ...
c) Por ejemplo: -1; 2; -4; 8; -16; ...

4.03 128.

4.04 100.000.000.

4.05 1.536.

4.06 $a_8 = 1/16$; $a_6 = 1/4$.

4.07 $a_1 = 1/3$.

4.08 $a_1 = 1/32$; $r = 2$.

4.09 $a_8 = 1.152$.

4.10 $r = \pm\sqrt[7]{3}$; $a_6 = \pm 6\sqrt[7]{3^5}$

4.11 Razón 3: 21; 63; 189; 567; 1.701. Razón -3: -21; 63; -189; 567; -1.701.

4.12 Razón $1/2$: 4; 2; 1; $1/2$; $1/4$. Razón $-1/2$: -4; 2; -1; $1/2$; $-1/4$.

4.13 1; 3; 9; 27.

4.14 2; 6; 18, o en orden inverso.

05 · Sumas y productos geométricos

5.01 $P_{15} = \pm 105^{15}$; el signo depende del de la razón.

5.02 $a_7 = 64$; $P_7 = 2.097.152$.

5.03 $P_8 = 1/81$.

5.04 $P_{11} = 2.048$.

5.05 $S_9 = 3.577$.

5.06 $S_{15} = \frac{3^{15} - 1}{3^{13}}$

5.07 $S_{10} = 341/128$.

5.08 $48/5$.

5.09 18 .

5.10 La suma del numerador es $1/2$ y la del denominador $1/4$. El cociente es 2 .

5.11 $a_1 = 4$; $r = \frac{3}{4}$; $a_n = 4(\frac{3}{4})^{n-1}$

5.12 $S_{\infty} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

06 · Problemas de progresiones

- 6.01** Tras n años, los planes transforman $(1 - 4^{-n})/6$ y $(1 - 3^{-n})/6$ del total, respectivamente. El primero transforma más tras 6 y tras 15 años. Ambos tienden a $1/6$ del total a largo plazo.
-
- 6.02** 9° , 27° , 81° y 243° (cuadrilátero cóncavo).
-
- 6.03** 7, 12 y 17 años.
-
- 6.04** 2 h: 1,80 €; 3 h: 2,10 €; 4 h: 2,40 €. $P(n) = 1,50 + 0,30(n - 1)$. Andrés: 11 horas.
-
- 6.05** 4.110 €; 3.820 €; 4.690 – 290n euros. Puede pagar 16 días completos desde el inicio.
-
- 6.06** 20 m y 25 m.
-
- 6.07** 111 largos en 6 días; 2.780 largos en 40 días.
-
- 6.08** 390 tejas.
-
- 6.09** 2.300 €.
-
- 6.10** Fila 17.
-
- 6.11** $3^{21} - 1 = 10.460.353.202$ personas en el modelo, sin limitar la población.
-
- 6.12** $a_n = 1500(\frac{1}{2})^{n-1}$; quinto propietario: 93,75 €; suma infinita: 3.000 €.
-
- 6.13** 302,8; 367,6; 432,4; 497,2 y 562.
-
- 6.14** 1,50 € por semana.
-
- 6.15** 34.950.
-
- 6.16** 320.000 y 10.240.000 bacterias.
-
- 6.17** Las áreas son 64, 32, 16, ... cm^2 ; razón $1/2$; suma infinita: 128 cm^2 .
-
- 6.18** 4 m, 8 m y 12 m.
-
- 6.19** $\frac{5}{3}$; $\frac{65}{6}$; 20; $\frac{175}{6}$; $\frac{115}{3}$ medidas.
-
- 6.20** 19 términos.
-
- 6.21** 16 términos.
-
- 6.22** 14 términos.
-

6.23 15 términos.

6.24 13 términos.

6.25 Si parte de una bacteria: 24 horas, porque $16.777.216 = 2^{24}$.

6.26 Si parte de una bacteria: 21 duplicaciones; 777 minutos, es decir, 12 horas y 57 minutos.

6.27 7 muñecas: $360 \cdot (2/3)^6 \approx 31,6 \text{ cm}^3$.

6.28 8 semanas.

6.29 8 años.

6.30 Último escaque: $2^{63} = 9.223.372.036.854.775.808$ granos. $4.194.304 = 2^{22}$, por lo que corresponde al escaque 23.

6.31 Aproximadamente 150 años: 10 reducciones a la mitad.

6.32 30 años: seis periodos de 5 años.

6.33 27 m: $125 \cdot (3/5)^3$.
