1.º BACHILLERATO

NÚMEROS REALES

Practica, razona y comprueba tus respuestas.

01 Números reales y operaciones

Fracciones, decimales, clasificación y recta real.

02 Intervalos y conjuntos

Intervalos, semirrectas, uniones e intersecciones.

03 Aproximaciones y notación científica

Precisión, errores y operaciones con potencias de diez.

04 Potencias, radicales y racionalización

Cálculo exacto y transformación de expresiones.

05 Logaritmos

Definición, propiedades y cambio de base.

06 Razonamiento y aplicaciones

Demostraciones, retos y problemas de contexto.

TU RUTA DE TRABAJO

Índice

Actividades organizadas por contenidos, con espacio para trabajar y soluciones al final.

01 Números reales y operaciones **3**

02 Intervalos y conjuntos **17**

03 Aproximaciones y notación científica **23**

04 Potencias, radicales y racionalización **31**

05 Logaritmos **49**

06 Razonamiento y aplicaciones **54**

• Solucionario **58**

Cómo usar el dossier
El código **2.12** identifica la actividad 12 del bloque 2. Busca ese mismo código en el solucionario. Puedes seguir el orden completo o seleccionar un contenido para repasarlo.

Antes de empezar
Trabaja con números reales y conserva los valores exactos cuando sea posible. En los decimales periódicos, los dígitos entre paréntesis forman el período. «log» indica logaritmo decimal y «ln», logaritmo natural. En las expresiones con letras, respeta las condiciones del enunciado y evita denominadores nulos.

BLOQUE 01

Números reales y operaciones

Fracciones, decimales, clasificación y recta real. · 46 actividades

1.01 Calcula el representante canónico de cada número.

a) $\frac{-16}{24}$

b) 18/39

c) $\frac{-24}{-60}$

1.02 Escribe dos representantes de cada racional.

a) 7/12

b) 9/2

c) 8/25

1.03 ¿Cuántos racionales distintos aparecen? 5/3; −5/3; (−5)/3; 5/(−3); 10/6; 1,666… .

1.04 ¿Una fracción con un solo término negativo y otra con ambos términos positivos pueden representar el mismo racional?

1.05 Escribe cuatro irracionales e indica su regla de formación.

1.06 Decide si son irracionales.

a) 0,51015202530...

b) $\frac{3\pi}{4\pi}$

c) $2 - \pi$

d) 10/17

1.07 Encuentra un irracional entre $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ sin operar con decimales.

1.08 Razona si las afirmaciones son ciertas.

a) La raíz cuadrada real de un irracional es irracional.

b) Un irracional al cuadrado no es racional.

1.09 Indica el conjunto numérico mínimo de cada número.

a) 8,0999...

b) 1,223334444...

c) $\sqrt{15}$

d) 6,126126126...

e) 2,5

f) -11

1.10 Representa las raíces en la recta real.

a) $\sqrt{11}$

b) $\sqrt{101}$

c) $\sqrt{5}$

d) $\sqrt{36}$

1.11 Sitúa en la recta real $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1.12 Representa 1 y 2 usando las referencias 0 y $\sqrt{3}$ de la recta.



1.13 Aplica la distributiva y opera.

a) $3/4 \cdot (2/7 - 2/5)$

b) $3/4 \cdot 2/7 - 2/5 \cdot 2/7 + 3 \cdot 2/7$

1.14 Encuentra tres números entre los extremos.

a) 301/200 y 302/200

b) $\sqrt{5}$ y $\sqrt{5} + 1/10$

1.15 Ordena de menor a mayor: 3; 22/7; π; 2827/900.

1.16 Calcula mediante la distributiva, sin realizar directamente los cuadrados.

a) 99^2

b) 999^2

1.17 Suma y resta. Los dígitos entre paréntesis forman el período.

a) $2,(7) + 4,(3)$

b) $20,2(1) - 7,(5)$

c) $6,(13) + 5,(2)$

d) $5,(4) + 7,(6)$

e) $6,(34) + 4,2(13)$

f) $1,(23) - 1,0(12)$

1.18 Opera. Los dígitos entre paréntesis forman el período.

a) $1,2 \cdot 2,(1)$

b) $1,2 : 2,(1)$

c) $6,3(7) \cdot 8,(4)$

d) $6,3(7) : 8,(4)$

1.19 Opera.

a) $(5/6 + 4/5)^{-2} \cdot (3/2)^{-1} + (2/3)^2$

b) $(5/6 - 4/5)^2 : (3/2)^{-1} + (2/3)^{-2}$

1.20 Factoriza y simplifica.

a) $6/35 - 30/105 + 54/245$

b) $9/4 + 45/32 + 81/100$

1.21 Clasifica como reducibles o irreducibles.

a) $-5/12$

b) $9/6$

c) $15/18$

d) $3/8$

e) $-15/28$

f) $104/(-206)$

1.22 Calcula la fracción irreducible.

a) $5/200$

b) $-1080/432$

c) $26/130$

d) $-702/1053$

e) $12/400$

f) $72/243$

g) $88/176$

h) $104/216$

1.23 Halla x para obtener fracciones equivalentes.

a) $3/5 = \frac{6}{x}$

b) $\frac{-5}{2} = \frac{x}{8}$

c) $\frac{x}{-3} = 4/6$

d) $\frac{4}{x} = -1/3$

1.24 Halla los enteros positivos x para que la fracción sea irreducible.

a) Fracción propia x/18.

b) Fracción impropia 12/x.

1.25 Opera.

a) $1/2 + (2/3)^{-2} \cdot (2/3 - 1/6)^2$

b) $(4/3 : 1/6)^{-2} + (5/2 \cdot 1/6)^2$

1.26 Opera.

a) $(5/6 - 4/5)^{-2} \cdot (2/3)^{-1} + (1/2)^2$

b) $(5/2 + 2/5)^{-1} : (7/3)^{-1} - (4/3)^2$

1.27 Expresa en forma decimal.

a) 22/13

b) 43/1000

c) 12/1100

d) 42/5

1.28 Indica el tipo de decimal y justifica qué puede deducirse de su escritura.

a) 2,331

b) 4,1234...

c) 6,2727...

d) 0,03131...

e) 4

f) −32,207

1.29 Halla la fracción generatriz. Los paréntesis delimitan el período.

a) 0,2

b) 3,(5)

c) 2,37

d) 8,0002

e) 42,(78)

f) 10,5(23)

g) 0,01

h) 5,(902)

i) 0,01(57)

1.30 Opera mediante fracciones generatrices. Los paréntesis delimitan el período.

a) 1,(3) + 3,4

b) 10,2(5) − 5,(7)

c) 6,3(4) + 2,(5)

d) 4,32 − 7,0(2)

1.31 Opera. Los paréntesis delimitan el período.

a) $1{,}25 \cdot 2{,}(5)$

b) $0{,}0(3) : 2{,}9(2)$

c) $3{,}7(6) \cdot 4{,}(8)$

d) $1{,}25 : 2{,}2(5)$

1.32 Comprueba las igualdades usando fracciones generatrices. Los paréntesis delimitan el período.

a) $1{,}(9) = 2$

b) $1{,}(3) : 3 = 0{,}(4)$

c) $1{,}8(9) + 0{,}1(1) = 2$

d) $0{,}(3) + 0{,}(6) = 1$

1.33 Ordena de menor a mayor. Los paréntesis delimitan el período.

a) $2{,}9(95);\ 2{,}(9);\ 2{,}(95);\ 2{,}9(59);\ 2{,}9(5)$

b) $4{,}75;\ 4{,}(75);\ 4{,}7(5);\ 4{,}775;\ 4{,}757;\ 4{,}7(57)$

1.34 Da un racional y un irracional entre cada pareja. Los paréntesis delimitan el período.

a) 3,4 y 3,400(23)

b) 2,5(2) y 2,(52)

c) 1 y 2

d) 5,6 y 5,(68)

e) $-2{,}6(8)$ y $-2{,}(68)$

f) 0,2 y 0,25

1.35 Encuentra un irracional entre $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ sin operar con decimales.

1.36 Demuestra que $2\sqrt{5}$ es irracional.

1.37 Distingue racionales e irracionales.

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{8}$

c) $\sqrt{11}$

d) $\sqrt{15}$

e) $\sqrt{16}$

f) $\sqrt{20}$

1.38 Señala cuáles son irracionales.

a) $2 + \sqrt{3}$

b) $2\sqrt{9}$

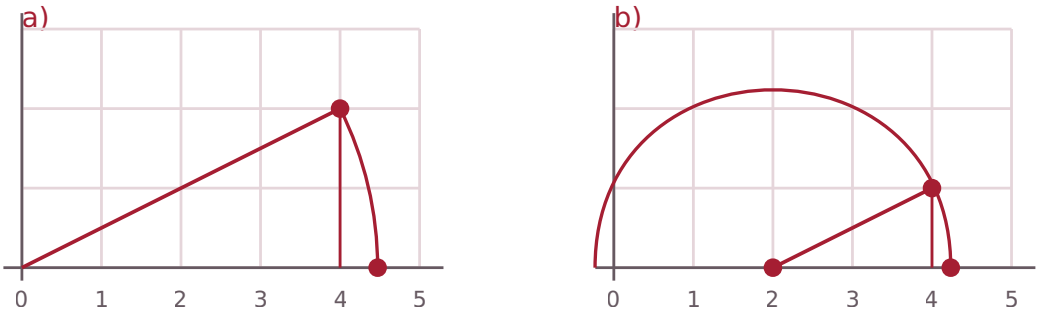
c) $\sqrt{12} - 2$

d) $\sqrt{16} + \sqrt{2}$

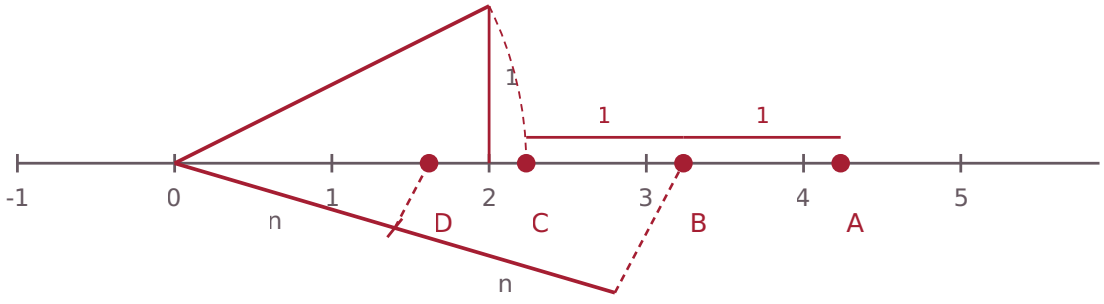
e) $1 - \sqrt{16}$

f) $5\sqrt{19}$

1.39 ¿Qué números representan las construcciones?



1.40 ¿Qué números representan A, B, C y D? Los segmentos marcados n tienen igual longitud.



1.41 Representa en la recta real.

a) $\sqrt{10}$

b) $-\sqrt{6}$

c) $1 - \sqrt{2}$

d) $\sqrt{3} - 1$

e) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

f) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$

1.42 Representa en la recta real.

a) $\sqrt{5}/2$

b) $\sqrt{13}/3$

c) $\sqrt{18}/5$

1.43 Ordena y representa: 2,3; $\sqrt{5}$; 9/4.

1.44 Opera y clasifica. Los paréntesis delimitan el período.

a) Raíz cuadrada de 2,(7).

b) Raíz cuadrada de 4,(9).

c) Raíz cuadrada del cociente 1,(3) : 3.

1.45 Razona si las afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Todos los números decimales se pueden escribir como fracción.

b) Todos los números reales son racionales.

c) Cualquier número irracional es real.

d) Hay números enteros que son irracionales.

e) Existen números reales que son racionales.

f) Todo número decimal es racional.

g) Cada número irracional tiene infinitas cifras decimales.

h) Todos los racionales tienen infinitas cifras decimales que se repiten.

i) Todos los racionales se pueden escribir como fracciones.

1.46 ¿Qué tipo de decimal se obtiene de $\frac{a}{2^2 \cdot 5^3}$, siendo a un número entero?

BLOQUE 02

Intervalos y conjuntos

Intervalos, semirrectas, uniones e intersecciones. · 15 actividades

2.01 Expresa cada conjunto como intervalo y desigualdad; represéntalo.

a) Números menores que π.

b) Mayores que √3 y menores o iguales que 7.

c) Menores o iguales que 2 y mayores que −2.

d) Entre los dos primeros pares positivos, incluidos ambos.

e) Estrictamente entre √2 y √3.

2.02 Escribe los conjuntos dibujados como intervalos y desigualdades.



2.03 Representa {x: |x − 3| ≤ 1} de todas las formas que conozcas.

2.04 Halla las uniones.

a) $(-4, -2] \cup (-3, 0)$

b) $(2, 8] \cup [-2, 0)$

2.05 Halla las intersecciones.

a) $(-4, -2] \cap (-3, 0)$

b) $(2, 8] \cap [-2, 0)$

2.06 Expresa como intervalos y desigualdades.



2.07 Describe mediante desigualdades y representa.

a) $(0, 10)$

b) $(3, 7]$

c) $(-\infty, -2)$

d) $[2, 5]$

e) $[5, 10)$

f) $[-4, +\infty)$

g) $(-\infty, 6]$

h) $(100, +\infty)$

i) $(-7, \sqrt{2})$

2.08 Escribe los intervalos correspondientes.

a) $1 < x < 3$

b) $6 < x \leq 7$

c) $5 \leq x < 9$

d) $10 \leq x \leq 12$

2.09 Escribe los intervalos correspondientes.

a) $x \leq -2$

b) $x < 5$

c) $x > -3$

d) $x \geq 7$

e) $x < -9$

f) $x \geq -6$

2.10 Calcula las uniones.

a) $(3, 16) \cup (-2, 5)$

b) $[-2, 2) \cup [-11, 0]$

c) $(5/4, 7/3] \cup [-15/2, 9/5]$

d) $[-\sqrt{7}, \sqrt{5}] \cup [-\sqrt{5}, \sqrt{7}]$

2.11 Halla las intersecciones.

a) $(-1, 10) \cap (-3, 8)$

b) $[-4/7, 5) \cap [-5/8, 0]$

c) $(-\sqrt{5}/2, 7/3] \cap [-15/4, 9/5]$

d) $[-\sqrt{7}, \sqrt{5}] \cap [-\sqrt{5}, \sqrt{7}]$

2.12 $A = [-4, -1]$, $B = [-3, 2)$, $C = (-2, 4)$. Calcula.

a) $A \cup B$

b) $A \cup C$

c) $B \cap C$

d) $A \cap B \cap C$

2.13 $A = (-\infty, 1]$, $B = [0, 5)$, $C = [-1, 3]$. Calcula.

a) $A \cup B$

b) $A \cup C$

c) $B \cap C$

d) $A \cap B \cap C$

2.14 Expresa cada conjunto como intersección de dos semirrectas.

a) $(-1, 13/2]$

b) $[5, 5\sqrt{3}]$

c) $\{x: 6 < x \leq \sqrt{40}\}$

d) $\{x: -51/4 \leq x \leq 3\}$

e) $[-3, \sqrt{2}/2]$

f) $(\sqrt{30}/2, \sqrt{90})$

g) $\{x: -7/2 \leq x < -\sqrt{3}\}$

h) $\{x: -\sqrt[3]{5} < x < \sqrt[3]{5}\}$

2.15 Expresa cada situación como intervalo e intersección de semirrectas.

a) Temperatura entre -1 °C de mínima y 13 °C de máxima.

b) Un jugador de fútbol tiene menos de 27 años.

c) El agua permanece líquida entre 0 y 100 °C en las condiciones consideradas.

d) A partir de 18 años se puede votar.

e) Presupuesto máximo de 11 000 € para un coche.

BLOQUE 03

Aproximaciones y notación científica

Precisión, errores y operaciones con potencias de diez. · 29 actividades

3.01 Escribe √3 en decimal y aproxímalo por exceso y defecto a las diezmilésimas y cienmilésimas.

3.02 Propón dos mediciones con igual error absoluto y distinto error relativo.

3.03 Da dos ejemplos de medidas con sus cotas de error.

3.04 Calcula cotas de los errores absoluto y relativo al redondear √2.

a) A las centésimas.

b) A las milésimas.

3.05 Una población, redondeada a las decenas, tiene 310 habitantes. ¿Puedes conocer los errores exactos y sus cotas?

3.06 Da una cota del error absoluto al truncar a décimas y a centésimas.

3.07 Escribe en notación científica.

a) 0,0000085

b) 5000000000000

c) 31940000000

d) 0,000000000479

3.08 Opera y expresa en notación científica.

a) $\dfrac{5{,}2\cdot 10^{3} + 4{,}75\cdot 10^{-2}}{8{,}05\cdot 10^{-4}}$

b) $3{,}79\cdot 10^{8}\cdot(7{,}73\cdot 10^{4} - 6{,}54\cdot 10^{-2})$

3.09 Escribe cinco intervalos encajados de $\sqrt{22}$, π y $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$, y una cota del error al aproximarlos por un extremo.

3.10 Opera en notación científica.

a) $6{,}4\cdot 10^{-6} - 5{,}1\cdot 10^{-4} + 9{,}3\cdot 10^{-2}$

b) $5{,}1\cdot 10^{6} - 5{,}2\cdot 10^{4} + 5{,}3\cdot 10^{2}$

3.11 Opera y redondea a las décimas.

a) 43,295 + 4,57 − 7,367

b) 5,32 + 4,05 · 7,361

c) 3,56 · (7,4009 − 3,48)

d) 7,37 − 5,3519 : 3,1

3.12 Calcula errores absoluto y relativo de estas aproximaciones de π, tomando 3,14159265 como valor exacto.

a) 3

b) 256/81

c) 3,125

d) 355/113

e) 3,14

3.13 Redondea a las diezmilésimas.

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

b) $6/7 + \sqrt{7}$

c) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

d) $4/15 + \sqrt{8}$

3.14 Calcula los errores al truncar 5,73691 a centésimas.

3.15 Calcula los errores absoluto y relativo al redondear.

a) 3/11 a diezmilésimas.

b) 4,3964 a centésimas.

c) 29/4 a décimas.

3.16 Aproxima 1/7 con error absoluto < 0,01.

3.17 Aproxima 12,3456 con error absoluto < 0,001.

3.18 ¿De qué número es 5 432,723 una aproximación a las milésimas por defecto? ¿Cuántas respuestas hay?

3.19 Encuentra aproximaciones con las cotas indicadas.

a) π: error < 0,001.

b) $\sqrt{2}$: error < 0,005.

c) $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$: error < 0,0001.

d) 22/7: error < 0,00001.

3.20 Indica qué números están en notación científica.

a) 4,678

b) $0{,}45 \cdot 10^{5}$

c) $3{,}001 \cdot 10^{17}$

d) $9{,}34 \cdot 2^{10}$

e) $4{,}62 \cdot 10^{-6}$

f) $34{,}709 \cdot 10^{5}$

3.21 Escribe en notación científica e indica mantisa y exponente de 10.

a) 15 000 000 000

b) 0,00000051

c) 31 940 000

d) 0,0000000009

e) 4 598 000 000

f) 0,0967254

g) 329 000 000

h) 111 000

3.22 Opera y expresa en notación científica.

a) $1{,}32\cdot10^{4} + 2{,}57\cdot10^{4}$

b) $8{,}75\cdot10^{2} + 9{,}46\cdot10^{3}$

c) $3{,}62\cdot10^{4} + 5{,}85\cdot10^{-3}$

d) $2{,}3\cdot10^{2} + 3{,}5\cdot10^{-1} + 4{,}75\cdot10^{-2}$

e) $3{,}46\cdot10^{-2} + 5{,}9\cdot10^{4} + 3{,}83\cdot10^{2}$

3.23 Opera y expresa en notación científica.

a) $9{,}5\cdot10^{4} - 3{,}72\cdot10^{4}$

b) $8{,}6\cdot10^{3} - 5{,}45\cdot10^{2}$

c) $7{,}9\cdot10^{-4} - 1{,}3\cdot10^{-6}$

d) $4{,}6\cdot10^{6} + 5{,}3\cdot10^{4} - 3{,}9\cdot10^{2}$

e) $5\cdot10^{2} - 3\cdot10^{-1} + 7\cdot10^{-2}$

3.24 Opera y expresa en notación científica.

a) $7{,}3\cdot10^{4}\cdot5{,}25\cdot10^{-3}$

b) $8{,}91\cdot10^{-5}\cdot5{,}7\cdot10^{14}$

c) $\dfrac{8{,}3\cdot10^{6}}{5{,}37\cdot10^{2}}$

d) $\dfrac{9{,}5\cdot10^{-6}}{3{,}2\cdot10^{3}}$

3.25 Opera y expresa en notación científica.

a) $\dfrac{6{,}147\cdot 10^{-2}\cdot 4{,}6\cdot 10^{3}}{7{,}9\cdot 10^{8}\cdot 6{,}57\cdot 10^{-5}}$

b) $\dfrac{3{,}92\cdot 10^{4}\cdot 5{,}86\cdot 10^{-6}}{7\cdot 10^{-8}\cdot 9{,}2\cdot 10^{13}}$

3.26 $A = 2{,}7\cdot 10^{8}$; $B = 5{,}4\cdot 10^{9}$; $C = 7{,}1\cdot 10^{12}$. Calcula.

a) $A\cdot B:C$

b) $B - A + C$

c) $A + B\cdot C$

d) $(B + C):A$

3.27 $A = 3{,}2\cdot 10^{6}$; $B = 8{,}2\cdot 10^{11}$; $C = 5{,}1\cdot 10^{-6}$. Calcula.

a) $A\cdot B\cdot C$

b) $(A:C)\cdot B$

c) $A + B\cdot C$

d) $A\cdot C^{2}$

3.28 Escribe estas cantidades en notación científica.

a) 9 460 000 000 km

b) 300 000 km/s

c) 1 400 000 km

d) 0,000000000000000001602 C

e) 0,00000000000000000001673 kg

f) 58 000 000 km

g) 0,00000000000000000000000009109 kg

h) 384 000 000 m

3.29 ¿Pueden coincidir las aproximaciones por defecto y por exceso de un número? ¿Con cuál coincide el redondeo?

BLOQUE 04

Potencias, radicales y racionalización

Cálculo exacto y transformación de expresiones. · 48 actividades

4.01 Comprueba las igualdades y razona.

a) $\sqrt[4]{-16} = -2$

b) $\sqrt[8]{256} = \pm 4$

c) $\sqrt[3]{1000000} = \pm 1000$

d) $\sqrt[5]{32} = \pm 2$

4.02 Calcula el valor real, si existe.

a) $\sqrt[4]{16}$

b) $\sqrt[3]{-8}$

c) $\sqrt[4]{-10000}$

d) $\sqrt[5]{243}$

4.03 Transforma potencias en radicales y viceversa.

a) $3^{1/4}$

b) $5^{2/3}$

c) $2^{1/6}$

d) $7^{3/5}$

e) $10^{2/7}$

f) $\sqrt[4]{5^7}$

4.04 Decide si las parejas de radicales son equivalentes.

a) $\sqrt[4]{3^6}$ y $\sqrt{3^3}$

b) $\sqrt[5]{2^{10}}$ y $\sqrt{2}$

c) $\sqrt[4]{36}$ y $\sqrt{6}$

d) $\sqrt[4]{5^{10}}$ y $\sqrt{5^4}$

4.05 Opera.

a) $\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 2\sqrt{45}$

b) $7\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[6]{3^2} + \dfrac{\sqrt[3]{3}}{5}$

4.06 Opera y simplifica.

a) $4\sqrt{27}\cdot 5\sqrt{6}$

b) $\left(\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$

c) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}}$

4.07 Racionaliza.

a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{-3}{5\sqrt[4]{2^3}}$

c) $\frac{2+\sqrt{3}}{6\sqrt[5]{7^3}}$

4.08 Racionaliza y opera.

a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

b) $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}+7}$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{9-\sqrt{5}}$

4.09 Escribe como un solo radical.

a) $5^{-2/3}$

b) $-5^{2/3}$

c) $(-5)^{2/3}$

d) $(-5)^{-2/3}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{23}}$

f) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$

4.10 Introduce los factores en el radical. Considera positivas las variables.

a) $3x^2\sqrt[3]{3y}$

b) $8b\sqrt{8a^3b}$

c) $2ab^2c\sqrt[4]{4}$

d) $(2a-b)\sqrt{b}$

4.11 Racionaliza.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{5}}$

b) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(2-\sqrt{5})}$

4.12 Halla el valor real de cada radical.

a) $\sqrt[4]{81}$

b) $\sqrt[3]{-27}$

c) $\sqrt[5]{-100000}$

d) $\sqrt[3]{-216}$

e) $\sqrt[4]{625}$

f) $\sqrt[7]{-128}$

4.13 Escribe dos radicales equivalentes a cada uno.

a) $\sqrt[3]{2^5}$

b) $\sqrt[12]{7^4}$

c) $\sqrt[6]{5^3}$

d) $\sqrt[2]{2^3}$

e) $\sqrt[8]{2^6}$

f) $\sqrt[20]{3^{15}}$

4.14 Simplifica los radicales.

a) $\sqrt[3]{16}$

b) $\sqrt[3]{54}$

c) $\sqrt[4]{32}$

d) $\sqrt{27}$

e) $\sqrt{75}$

f) $\sqrt[5]{128}$

g) $\sqrt[6]{27}$

h) $\sqrt[8]{625}$

i) $\sqrt[3]{343}$

4.15 Comprueba las igualdades y corrige las que sean falsas.

a) $\sqrt{8} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[3]{8^3}$

b) $\sqrt[3]{3^4} = \sqrt[6]{9^4} = \sqrt{3^8}$

c) $\sqrt[5]{25^{10}} = \sqrt{5^{10}} = \sqrt[3]{5^{12}}$

d) $\sqrt[8]{3^6} = \sqrt[4]{27} = \sqrt[12]{3^9}$

4.16 Opera y expresa mediante un solo radical.

a) $\dfrac{2^{3/2}\cdot 2^{4/3}}{2^{1/5}}$

b) $3^{-1/4}\cdot(3^{-2}:3^{1/3})^{-2/3}$

c) $(5\cdot 5^{-2/5})^{1/3}\cdot 5^{3}$

d) $\dfrac{(7^{1/5}\cdot 7)^{-1/2}}{7^{4/5}}$

4.17 Expresa como potencia de exponente fraccionario, con $a > 0$.

a) $\sqrt{a\sqrt{a}}$

b) $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

c) $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{a}}}$

d) $\sqrt[4]{a^{-5}}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$

g) $(\sqrt{a})^{3}$

h) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}$

i) $\sqrt[4]{\sqrt{\dfrac{1}{a}}}$

4.18 Reduce cada expresión a un solo radical.

a) $\sqrt[5]{3\sqrt{5}}$

b) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}$

d) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$

e) $\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

f) $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{\sqrt[3]{3}}}}$

g) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$

h) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}}$

i) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{256}}}}}$

4.19 Extrae los factores posibles. Considera positivas las variables.

a) $\sqrt{a^3b^4}$

b) $\sqrt{a^2b^5c^3}$

c) $\sqrt[3]{a^3b^2c^7}$

d) $\sqrt{a^3b^4 + a^2b^2}$

e) $\sqrt[3]{a^3b^3 + c^3}$

f) $\sqrt{a^4c^2 + a^4b^2}$

4.20 Extrae factores de cada radical.

a) $\sqrt{125}$

b) $\sqrt{80}$

c) $\sqrt[3]{189}$

d) $\sqrt[3]{250}$

e) $\sqrt[3]{1080}$

f) $\sqrt[4]{720}$

g) $\sqrt[4]{224}$

h) $\sqrt[5]{-486}$

i) $\sqrt{3528}$

4.21 Demuestra que $2\sqrt{10}\cdot\sqrt[4]{25}\cdot\sqrt[6]{8}$ es un número entero.

4.22 Extrae factores. Considera positivas las variables.

a) $\sqrt{32x^3y^2}$

b) $\sqrt[3]{5^5x^6}$

c) $\sqrt[3]{125x^7y^2}$

d) $\sqrt[4]{256x^3y^{15}}$

e) $\sqrt[4]{x^{12}y^9z^{19}}$

f) $\sqrt[5]{729x^4y^{22}z^{15}}$

4.23 Simplifica $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

4.24 Opera y simplifica. Considera positivas las variables.

a) $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^{12}}{a^{18}}}}$

b) $\sqrt[4]{32a^5b^{-8}c^{-12}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{8a^4}{81b^3}}$

d) $\frac{-\sqrt[3]{8a^3b^5c^{-2}}}{\sqrt[3]{-32a^6b^4}}$

e) $\sqrt[6]{729a^7b^{-12}}$

f) $\left(\frac{a^{1/2}}{a^{3/2}}\right)^{-1/2}$

4.25 Completa los exponentes que faltan.

a) $2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^{\square}\cdot 5}$

b) $3^{\square}\sqrt{2}=\sqrt{3^6\cdot 2}$

c) $1/2\cdot\sqrt[4]{5}=\sqrt[4]{\frac{5}{2^{\square}}}$

d) $2/3\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{\frac{2^{\square}\cdot 7}{3^{\square}}}$

e) $3^{\square}\sqrt{2/5}=\sqrt{\frac{3^6\cdot 2}{5}}$

f) $\frac{\sqrt[3]{5}}{3^2}=\sqrt[3]{\frac{5}{3^{\square}}}$

4.26 Opera y simplifica.

a) $\sqrt{32} - \sqrt{8} + \sqrt{98}$

b) $5\sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{108}$

c) $\sqrt{6} + 7\sqrt{24} - 2/3 \cdot \sqrt{54} - \sqrt{18}$

d) $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} - \sqrt{363} + 4\sqrt{3}$

4.27 Introduce los factores en el radical.

a) $2\sqrt[3]{5}$

b) $4\sqrt[4]{20}$

c) $3\sqrt[5]{15}$

d) $3/5 \cdot \sqrt{2}$

e) $1/2 \cdot \sqrt[4]{6}$

f) $2\sqrt[3]{7}$

4.28 Introduce los factores en el radical.

a) $5\sqrt[3]{1/5}$

b) $3/5 \cdot \sqrt[3]{2/3}$

c) $1/7 \cdot \dfrac{\sqrt[3]{3}}{4}$

4.29 Introduce los factores en el radical cuando sea posible. Considera positivas las variables y exige que las expresiones estén definidas.

a) $a\sqrt{\frac{4a-1}{2a}}$

b) $\frac{4ab}{c}\cdot\sqrt[4]{\frac{c^2b}{8a}}$

c) $-2ab^2\sqrt[3]{ab}$

d) $\frac{2}{a}\cdot\sqrt{\frac{3a}{8}}$

e) $5+\sqrt{2}$

f) $-a^2\sqrt[3]{a}$

4.30 Opera y simplifica.

a) $(5\sqrt{2}+3)(2+\sqrt{2})$

b) $(1-2\sqrt{5})(3+\sqrt{2})$

c) $(-\sqrt{3}+5)(5-2\sqrt{3})$

d) $(\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3-\sqrt{2})$

e) $(\sqrt{2}-5)(4\sqrt{2}-3)$

f) $(-2\sqrt{7}-5)(\sqrt{7}-3\sqrt{5})$

4.31 Opera y reduce a un solo radical.

a) $\sqrt[4]{5^3}\cdot\sqrt[6]{5^3}\cdot\sqrt{5^3}$

b) $(\sqrt[3]{7^2\cdot 8}\cdot\sqrt[4]{8^5}):\sqrt{7\cdot 8^3}$

c) $\sqrt{3\cdot 4\cdot 5}\cdot\sqrt[4]{2\cdot 4^2}\cdot\sqrt[8]{4^5\cdot 5^3}$

d) $\sqrt[3]{2\cdot 3\cdot 5}:(\sqrt{2\cdot 3}\cdot\sqrt[3]{2\cdot 3})$

4.32 Opera y simplifica. Considera positivas las variables.

a) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^5}:\sqrt[6]{a^4}$

b) $\sqrt[3]{3a^2b}\cdot\sqrt{2ab^3}$

c) $\sqrt[5]{2a^3b^4}:\sqrt[3]{4ab^2}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{b}}$

4.33 Opera utilizando las identidades notables.

a) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{6}}$

b) $\sqrt[3]{5\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{3}+1}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

d) $\sqrt[3]{4\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

4.34 Calcula y simplifica.

a) $\dfrac{\sqrt[4]{2^3}\cdot 2^{-4}\cdot\sqrt[3]{2}}{2^2\cdot\sqrt{2}\cdot 2^{-5/2}}$

b) $\left(81^{1/4}\cdot\sqrt[4]{1/3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[8]{3}}\right):\sqrt{3}$

c) $\left(\sqrt{14+\sqrt{7-\sqrt[4]{81}}}\right)^{-1/2}$

d) $\sqrt{6+\sqrt[3]{20+\sqrt{47+\sqrt[4]{16}}}}$

4.35 Simplifica, con $a > 0$.

a) $(\sqrt{a/9 + a/16})^{-2}$

b) $(\sqrt{a/2 + 2a/5})^{-4}$

c) $(\sqrt{a/2} - \sqrt{2a})^2$

d) $(\sqrt{6a} + \sqrt{2a/3})^2$

4.36 Simplifica para cualquier valor real de a.

a) $\sqrt{a^2 + 4 - 4a}$

b) $\sqrt{1/2 + 2a^2 + 2a}$

4.37 Racionaliza y simplifica.

a) $\dfrac{3}{4\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{12}}$

c) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{9}}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt[4]{3^3}}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{4}}$

f) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}}$

4.38 Racionaliza.

a) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}}$

b) $\dfrac{7\sqrt{7}-7}{\sqrt[3]{7}}$

c) $\dfrac{3\sqrt{5}-2}{\sqrt[4]{5^3}}$

d) $\dfrac{3\sqrt{5}-1}{\sqrt[5]{-5^3}}$

4.39 Racionaliza y simplifica.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{-5}{\sqrt{3}-2}$

d) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

e) $\dfrac{7}{\sqrt{11}-3}$

f) $\dfrac{-5}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$

4.40 Racionaliza.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-2}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

c) $\dfrac{-3}{\sqrt{2}-2}$

d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}$

e) $\dfrac{2\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

f) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$

g) $\dfrac{\sqrt{8}\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}$

h) $\dfrac{3\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

4.41 Racionaliza y simplifica.

a) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{1-2\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}-5\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}-3\sqrt{5}}$

d) $\dfrac{\sqrt{8}(5-\sqrt{18})}{\sqrt{2}(\sqrt{8}-2)}$

e) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}(\sqrt{5}+2)}$

f) $\dfrac{3\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{5}}$

4.42 Racionaliza.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3+\sqrt{6}}}$

b) $\dfrac{1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

c) $\dfrac{5\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

d) $\dfrac{4\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{12}}$

4.43 Opera y racionaliza.

a) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}+\dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$

b) $\dfrac{12\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$

4.44 Racionaliza los denominadores.

a) $\dfrac{3}{(3\sqrt{2}-5)(4\sqrt{2}-3)}$

b) $\dfrac{-2}{\sqrt[3]{4}(5\sqrt{3}-1)}$

c) $\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}(\sqrt{125}+2)}$

d) $\dfrac{-4}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{2}}$

4.45 Racionaliza y suma.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[9]{6}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$

4.46 Opera después de racionalizar.

a) $\dfrac{2}{3-2\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3}-7}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}+\dfrac{1}{\sqrt[6]{5}}$

d) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{10}}+\dfrac{4}{\sqrt{2}-5}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

4.47 Simplifica $\dfrac{\sqrt{128}+2\sqrt{8}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{32}}-4\sqrt{2}$.

4.48 Decide si estas identidades son válidas en general. Considera a, b, c > 0 e índices naturales n, m ≥ 2.

a) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{ab}$

b) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[n+m]{ab}$

c) $\sqrt[n]{a+b}=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$

d) $a\sqrt[n]{b^m}=\sqrt[n]{(ab)^m}$

e) $\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{b}=a\sqrt{ab}$

f) $a\sqrt{b+c}=\sqrt{ab+ac}$

g) $\sqrt[4]{a^8b^2}=a\sqrt{b}$

h) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

BLOQUE 05

Logaritmos

Definición, propiedades y cambio de base. · 17 actividades

5.01 Calcula por definición.

a) $\log_2 8$

b) $\log_3 81$

c) $\log 1000$

d) $\log 0{,}0001$

e) $\ln e^{33}$

f) $\ln e^{-4}$

g) $\log_4 16$

h) $\log_4 0{,}25$

5.02 Calcula por definición.

a) $\log_3 243$

b) $\log_9 81$

c) $\log 1000000$

d) $\log 0{,}00001$

e) $\ln e^{2}$

f) $\ln e^{-14}$

g) $\log_7 343$

h) $\log_4 0{,}0625$

5.03 Calcula y deja indicado el resultado exacto.

a) $\log_4 32$

b) $\log_2 32$

c) $\log_3 100$

d) $\log_5 32$

e) $\log_{32} 4$

f) $\log_2 304$

5.04 Con $\log 2 \approx 0{,}3010$, $\log 3 \approx 0{,}4771$ y $\log 7 \approx 0{,}8451$, calcula los logaritmos de 1 a 10, y los de 3,5 y 1,5.

5.05 Expresa $\log_2 5$ y $\log_5 2$ sin calculadora y demuestra que su producto vale 1.

5.06 Halla x.

a) $\log_x 256 = -8$

b) $\log_3 x = 2/3$

c) $\log_5 \sqrt[6]{625} = x$

d) $\log_x 3 = 2$

5.07 Calcula $\log_a b \cdot \log_b a$.

5.08 Calcula usando la definición de logaritmo.

a) $\log_3 243$

b) $\log_9 81$

c) $\log 1000000$

d) $\log 0{,}00001$

e) $\ln e^2$

f) $\ln e^{-14}$

g) $\log_7 343$

h) $\log_4 0{,}0625$

5.09 Calcula los logaritmos.

a) $\log_9 243$

b) $\log_{25} 125$

c) $\log_{32} 4$

d) $\log_4 512$

5.10 Indica si las igualdades son verdaderas. Considera positivos a y b.

a) $\log(a + b) = \log a + \log b$

b) $\log 0 = 1$

c) $\log(a:b) = \log a - \log b$

d) $\log(a^b) = \log b \cdot \log a$

5.11 Opera.

a) $2\log_4 16 + \log_2 32 - 3\log_7 49$

b) $\log_2 8 + \log_3 27 + \log_5 125$

c) $\log_5 625 - \log_9 81 + \log_8 64$

5.12 Sabiendo que $\log 7 \approx 0{,}8451$, calcula $\log 28 + \log 15 - \log 6$.

5.13 Calcula con ayuda de una calculadora. Redondea a cuatro decimales.

a) $\log_5(36^2)$

b) $\log_2 \sqrt{31}$

c) $\log_6 100$

d) $\log_4(31^5)$

5.14 Utiliza $\log e \approx 0{,}4343$ para calcular $\ln 10$ y $\ln 0{,}1$.

5.15 Sabiendo que $\log 4 \approx 0{,}6021$, calcula.

a) $\log 2$

b) $\log(1/4)$

c) $\log 0{,}2$

d) $\log 4000$

5.16 Sabiendo que $\ln a = 0{,}6$ y $\ln b = 2{,}2$, calcula.

a) $\ln \sqrt{a}$

b) $\ln \sqrt[3]{b}$

c) $\ln \sqrt[4]{\frac{ab}{e^2}}$

d) $\ln\left(\frac{\sqrt{a^{-5}}}{\sqrt[3]{b}}\right)$

5.17 Halla x.

a) $\log_3 x = 5$

b) $\log_5 x = 3$

c) $\log_2 x = -1$

d) $\log_{2/3} x = 4$

e) $\log_3 x = -5$

f) $\log_5 x = -3$

g) $\log_2 x = 0$

h) $\log_{23} x = 4$

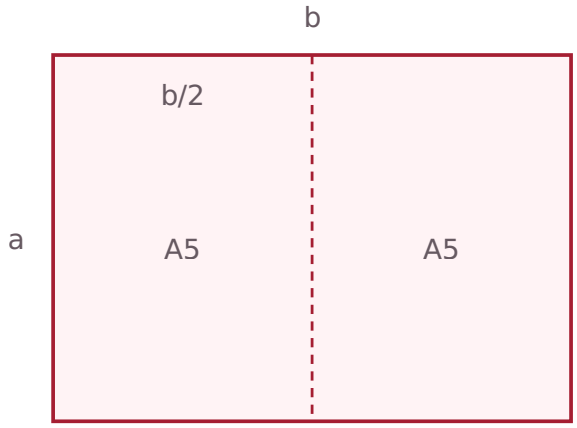
BLOQUE 06

Razonamiento y aplicaciones

Demostraciones, retos y problemas de contexto. · 19 actividades

6.01 ¿Por qué la raíz cuadrada de cualquier entero positivo terminado en 2 es irracional? ¿Qué otras terminaciones tienen esta propiedad?

6.02 Al cortar un rectángulo A4 por la mitad de su lado largo b se obtienen dos rectángulos A5 semejantes al primero. Llama a al lado corto.



a) ¿Qué relación hay entre los lados?

b) Si un A0 tiene 1 m² y cada formato se obtiene dividiendo el anterior por la mitad, ¿cuáles son las dimensiones de A4?

6.03 Una nave debe recorrer una distancia de $6{,}32\cdot10^{6}$ km en un año de 365 días. ¿Qué velocidad media, en km/h, necesita?

6.04 Comprueba que el número áureo $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ cumple $\dfrac{1}{\Phi} = \Phi - 1$.

6.05 Utiliza $\log 2 \approx 0{,}3010$ y $\sqrt{10} \approx 3{,}1622$.

a) Expresa 2^{500} aproximadamente en notación científica.

b) ¿Puede obtenerse con calculadora? Explica un procedimiento.

c) Calcula de manera análoga 5^{500}.

6.06 Elige la respuesta correcta y justifica tu elección.

a) Si $\log_x y + \log_y x = 7$, ¿cuánto vale $(\log_x y)^2 + (\log_y x)^2$? Opciones: 40; 43; 45; 47; 49.

b) ¿Cuánto vale $\sqrt{9 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{9 + 6\sqrt{2}}$? Opciones: $3\sqrt{2}$; $2\sqrt{6}$; $7\sqrt{2}/2$; $3\sqrt{3}$; -6.

c) ¿Cuántos números de tres cifras consecutivas, no necesariamente ordenadas, tienen un número impar de divisores? Opciones: 1; 2; 3; 4; 5.

d) ¿En qué intervalo está $\dfrac{1}{\log_{1/2}(1/3)} + \dfrac{1}{\log_{1/5}(1/3)}$? Opciones: $(-2, -1)$; $(1, 2)$; $(-3, -2)$; $(2, 3)$; $(3, 4)$.

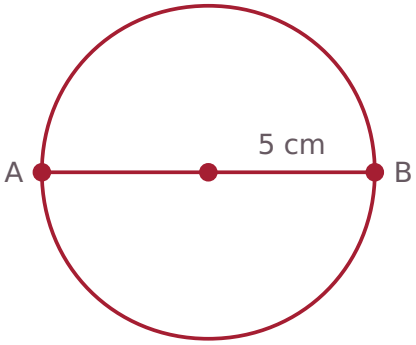
e) Si $y = \dfrac{x}{x + \dfrac{x}{x + y}}$, ¿para qué valor de x no puede ser y un número real? Opciones: -6; -3; 1; 3; 6.

6.07 Si a/b es irreducible y a, b son enteros no nulos, ¿son irreducibles $\dfrac{a + b}{ab}$ y $\dfrac{a - b}{ab}$?

6.08 Racionaliza $\dfrac{1}{\sqrt[2n]{a} - \sqrt[2n]{b}}$ para $a, b > 0$, $a \neq b$ y n entero positivo.

6.09 Dos piezas parten a la vez de un extremo de un diámetro de una circunferencia de radio 5 cm, con la misma rapidez constante. Una recorre la circunferencia y la otra va y vuelve por el diámetro. ¿Volverán a coincidir?

Recorrido circular y recorrido por el diámetro



6.10 Calcula $\log \sqrt{2/1} + \log \sqrt{3/2} + \log \sqrt{4/3} + \ldots + \log \sqrt{100/99}$.

6.11 Demuestra que $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ es un decimal periódico mixto para todo entero $n \geq 1$.

6.12 Un montón de naranjas se apila por capas: cada naranja de una capa superior ocupa el hueco de cuatro de la inferior. La base tiene m filas y n columnas; la última capa tiene una sola fila. m es el número de diagonales de un decágono y n es el menor entero positivo que al dividirlo entre 4 deja resto 3, entre 5 deja resto 4 y entre 6 deja resto 5. ¿Cuántas naranjas hay?

6.13 Responde sobre una frenada de un automóvil.

a) ¿Por qué pueden aparecer marcas en la carretera al frenar bruscamente?

b) ¿Qué valor aproximado se utiliza para la aceleración de la gravedad g?

6.14 Explica qué es el coeficiente de rozamiento entre dos superficies.

6.15 En el modelo de frenada $v = \sqrt{2\mu g x}$, identifica μ, g y x e indica sus unidades.

6.16 ¿Es correcta la igualdad $\sqrt{2\mu g x} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\mu}\cdot\sqrt{g}\cdot\sqrt{x}$? Razona tu respuesta.

6.17 ¿Cuál es el índice del radical en $v = \sqrt{2\mu g x}$?

6.18 Un automóvil deja una distancia de frenado de 30 m sobre asfalto. Estima su velocidad inicial con $v = \sqrt{2\mu g x}$, tomando $\mu = 0{,}75$ y $g = 9{,}8$ m/s². Exprésala en m/s y en km/h.

6.19 Investiga campañas de tu localidad para prevenir accidentes de tráfico. Resume sus objetivos y las medidas que proponen.

COMPRUEBA TUS RESULTADOS

Solucionario

Respuestas y justificaciones. Los códigos coinciden con los de las actividades.

01 · Números reales y operaciones

1.01 **a)** $-\,2/3$ **b)** $6/13$ **c)** $2/5$

1.02 **a)** $14/24$ y $21/36$. **b)** $18/4$ y $27/6$. **c)** $16/50$ y $24/75$.

1.03 Dos: $5/3$ y $-5/3$. El primero coincide con $10/6$ y $1{,}666\ldots$; el segundo, con las otras fracciones negativas.

1.04 No: la primera es negativa y la segunda positiva.

1.05 Respuesta orientativa: $0{,}369121518\ldots$ y $0{,}48121620\ldots$ concatenando múltiplos positivos de 3 y de 4, respectivamente; $\sqrt{2}+1$ y $\sqrt{2}+2$, sumando 1 o 2 a $\sqrt{2}$.

1.06 **a)** Sí: decimal no periódico formado con múltiplos de 5. **b)** No: $3\pi/(4\pi) = 3/4$.

c) Sí: racional menos irracional. **d)** No: es una fracción de enteros.

1.07 Por ejemplo, $\sqrt{2}/2$: es irracional y $0 < \sqrt{2}/2 < \sqrt{2}$.

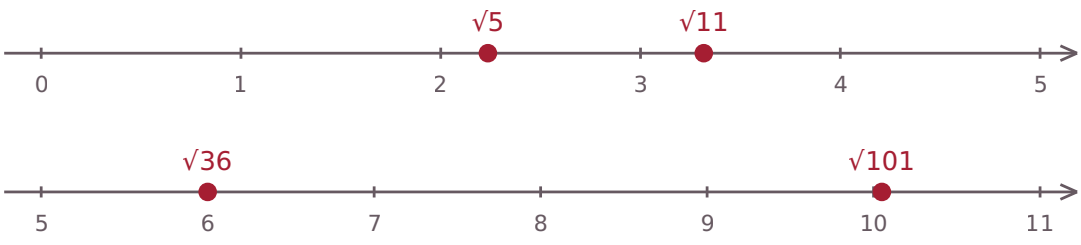
1.08 **a)** Verdadera cuando la raíz es real: si $\sqrt{x}$ fuera racional, su cuadrado también lo sería.

b) Falsa: $(\sqrt{2})^2 = 2$.

1.09 **a)** Racionales: equivale a 8,1. **b)** Irracionales. **c)** Irracionales. **d)** Racionales: decimal periódico.

e) Racionales. **f)** Enteros.

1.10 **a)** $\sqrt{11} \approx 3{,}3166$. **b)** $\sqrt{101} \approx 10{,}0499$. **c)** $\sqrt{5} \approx 2{,}2361$. **d)** $\sqrt{36} = 6$.



1.11 $\Phi \approx 1{,}6180$, entre 1 y 2.



1.12 La distancia de 0 a 1 es $1/\sqrt{3}$ de la distancia de 0 a $\sqrt{3}$. El 2 está al doble de distancia desde 0.



1.13 **a)** $-3/35$ **b)** $67/70$

1.14 **a)** 1,506; 1,507; 1,508. **b)** $\sqrt{5}+0{,}01$; $\sqrt{5}+0{,}02$; $\sqrt{5}+0{,}03$.

1.15 $3 < 2827/900 < \pi < 22/7$.

1.16 **a)** $(100-1)^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801$. **b)** $(1\,000-1)^2 = 1\,000\,000 - 2\,000 + 1 = 998\,001$.

1.17 **a)** $\frac{64}{9}$ **b)** $\frac{1139}{90}$ **c)** $\frac{1124}{99}$ **d)** $\frac{118}{9}$ **e)** $\frac{10451}{990}$ **f)** $\frac{109}{495}$

1.18 **a)** $\frac{38}{15}$ **b)** $\frac{54}{95}$ **c)** $\frac{21812}{405}$ **d)** $\frac{287}{380}$

1.19 **a)** $\frac{15004}{21609}$ **b)** $\frac{1351}{600}$

1.20 **a)** $\frac{6}{35}\left(1-\frac{5}{3}+\frac{9}{7}\right) = \frac{26}{245}$ **b)** $\frac{9}{4}\left(1+\frac{5}{8}+\frac{9}{25}\right) = \frac{3573}{800}$

1.21 **a)** Irreducible. **b)** Reducible: 3/2. **c)** Reducible: 5/6. **d)** Irreducible. **e)** Irreducible.
f) Reducible: $-52/103$.

1.22 **a)** $\frac{1}{40}$ **b)** $-\frac{5}{2}$ **c)** $\frac{1}{5}$ **d)** $-\frac{2}{3}$ **e)** $\frac{3}{100}$ **f)** $\frac{8}{27}$ **g)** $\frac{1}{2}$ **h)** $\frac{13}{27}$

1.23 **a)** 10 **b)** -20 **c)** -2 **d)** -12

1.24 **a)** $x \in \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$. **b)** $x \in \{1, 5, 7, 11\}$.

1.25 **a)** $\frac{17}{16}$ **b)** $\frac{109}{576}$

1.26 **a)** $\frac{5401}{4}$ **b)** $-\frac{254}{261}$

1.27 **a)** 1,692307692307... **b)** 0,043 **c)** 0,01090909... **d)** 8,4

1.28 **a)** Exacto. **b)** No se puede determinar sin saber cómo continúa.
c) Periódico puro, si se repite 27. **d)** Periódico mixto, si tras el 0 se repite 31. **e)** Exacto: entero.
f) Exacto.

1.29 **a)** $\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{32}{9}$ **c)** $\frac{237}{100}$ **d)** $\frac{40001}{5000}$ **e)** $\frac{1412}{33}$ **f)** $\frac{5209}{495}$ **g)** $\frac{1}{100}$ **h)** $\frac{5897}{999}$ **i)** $\frac{13}{825}$

1.30 **a)** $\frac{71}{15}$ **b)** $\frac{403}{90}$ **c)** $\frac{89}{10}$ **d)** $-\frac{608}{225}$

1.31 **a)** $\frac{115}{36}$ **b)** $\frac{3}{263}$ **c)** $\frac{2486}{135}$ **d)** $\frac{225}{406}$

1.32 **a)** Verdadera: 1 + 9/9 = 2. **b)** Verdadera: (4/3)/3 = 4/9. **c)** Falsa: 19/10 + 1/9 = 181/90 ≠ 2.
d) Verdadera: 1/3 + 2/3 = 1.

1.33 **a)** 2,9(5) < 2,(95) = 2,9(59) < 2,9(95) < 2,(9).
b) 4,75 < 4,7(5) < 4,757 < 4,(75) = 4,7(57) < 4,775.

1.34 **a)** 3,4001 y 3,4 + √2/10 000. **b)** 2,523 y 2,523 + √2/10 000. **c)** 1,5 y √2.
d) 5,65 y 5,6 + √2/100. **e)** −2,688 y −2,688 + √2/10 000. **f)** 0,225 y √2/6.

1.35 Por ejemplo, √2/2.

1.36 Si fuese racional, dividir entre 2 haría racional a √5, contradicción.

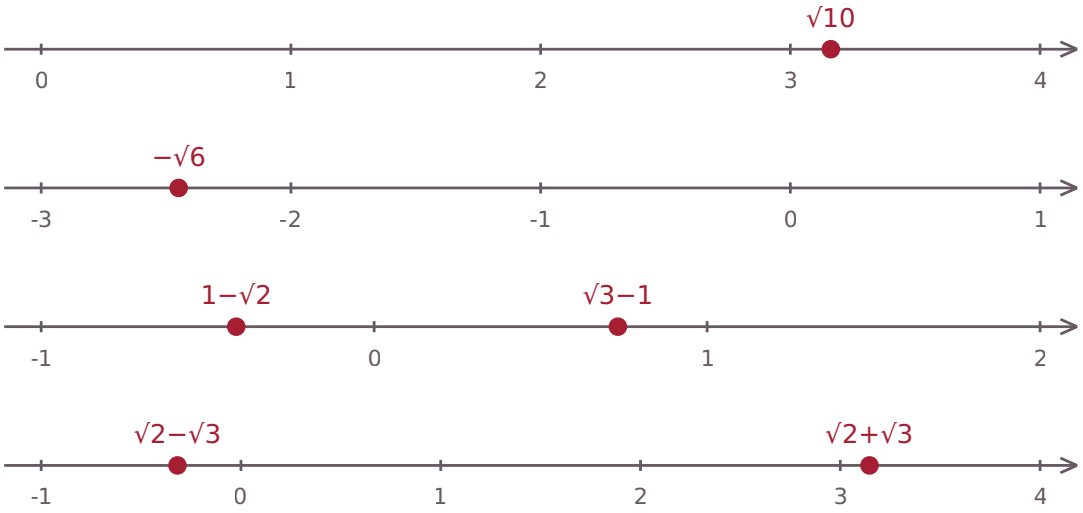
1.37 **a)** Irracional. **b)** Irracional. **c)** Irracional. **d)** Irracional. **e)** Racional: 4. **f)** Irracional.

1.38 **a)** Irracional. **b)** Racional: 6. **c)** Irracional. **d)** Irracional. **e)** Racional: −3. **f)** Irracional.

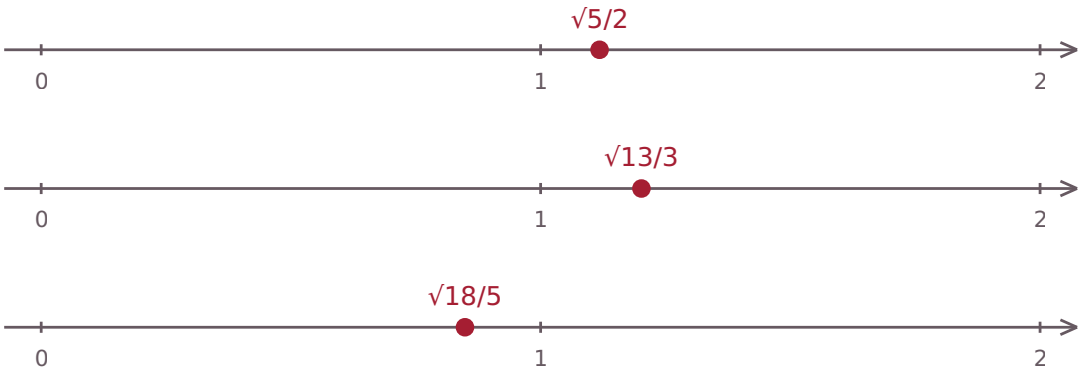
1.39 **a)** $\sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}4721$. **b)** $2 + \sqrt{5} \approx 4{,}2361$.

1.40 C = √5; B = √5 + 1; A = √5 + 2; D = (1 + √5)/2, el punto medio de 0 y B.

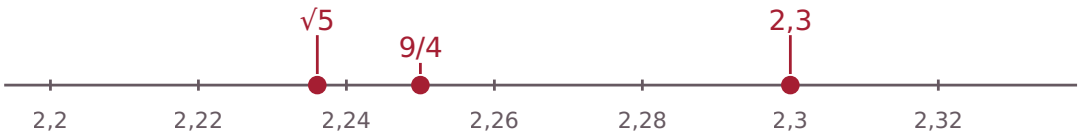
1.41 **a)** 3,1623... **b)** −2,4495... **c)** −0,4142... **d)** 0,7321... **e)** 3,1463... **f)** −0,3178...



1.42 **a)** 1,1180... **b)** 1,2019... **c)** 0,8485...



1.43 $\sqrt{5} \approx 2{,}2361 < 9/4 = 2{,}25 < 2{,}3$.



1.44 **a)** $\sqrt{(25/9)} = 5/3$, racional. **b)** $\sqrt{5}$, irracional. **c)** $\sqrt{(4/9)} = 2/3$, racional.

1.45 **a)** Falsa: los irracionales no admiten fracción de enteros. **b)** Falsa: también existen irracionales.

c) Verdadera. **d)** Falsa: todo entero es racional. **e)** Verdadera.

f) Falsa: los decimales infinitos no periódicos son irracionales.

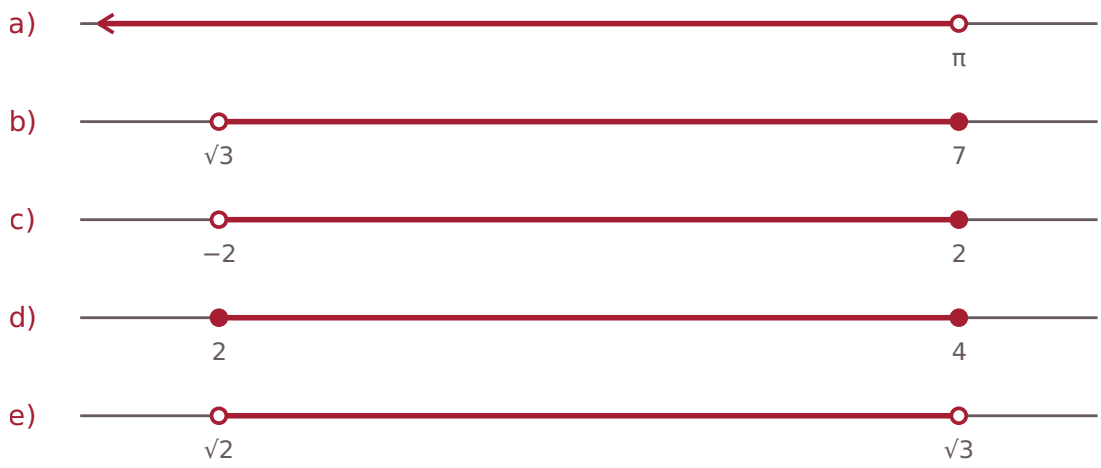
g) Verdadera: infinitas cifras no periódicas. **h)** Falsa: hay decimales exactos. **i)** Verdadera.

1.46 Decimal exacto: $a/500 = 2a/1\,000$, con un máximo de tres cifras decimales. Puede ser entero si a es múltiplo de 500.

02 · Intervalos y conjuntos

2.01 **a)** $(-\infty, \pi)$; $x < \pi$. **b)** $(\sqrt{3}, 7]$; $\sqrt{3} < x \leq 7$. **c)** $(-2, 2]$; $-2 < x \leq 2$. **d)** $[2, 4]$; $2 \leq x \leq 4$.

e) $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$; $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$.



2.02 **a)** $(-\infty, -3)$; $x < -3$. **b)** $[-3, 2)$; $-3 \leq x < 2$. **c)** $(3, +\infty)$; $x > 3$. **d)** $(-1, 1)$; $-1 < x < 1$.

2.03 $-1 \leq x - 3 \leq 1$ equivale a $2 \leq x \leq 4$. Intervalo $[2, 4]$, extremos cerrados.

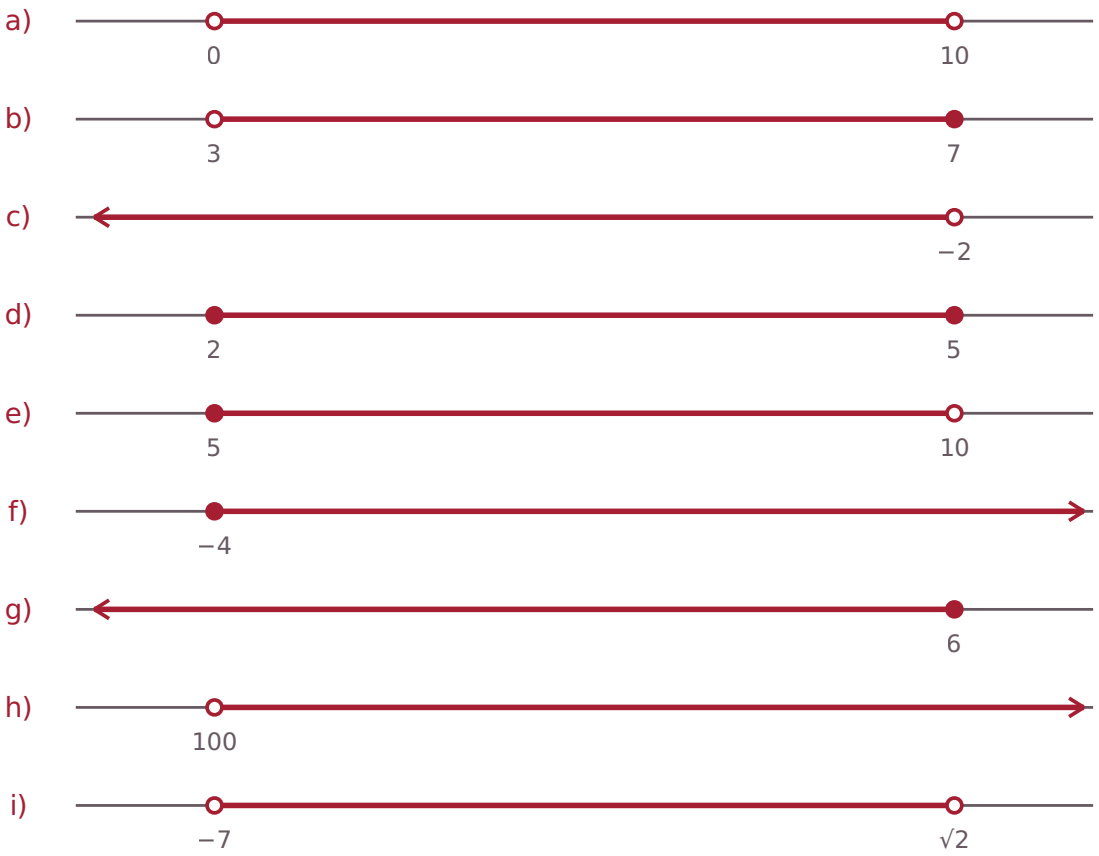


2.04 **a)** $(-4, 0)$ **b)** $[-2, 0) \cup (2, 8]$

2.05 **a)** $(-3, -2]$ **b)** $\varnothing$

2.06 **a)** $(-2, 3]$; $-2 < x \leq 3$. **b)** $[1, 4]$; $1 \leq x \leq 4$. **c)** $(-\infty, 0]$; $x \leq 0$. **d)** $[8, +\infty)$; $x \geq 8$.

2.07 **a)** $0 < x < 10$ **b)** $3 < x \leq 7$ **c)** $x < -2$ **d)** $2 \leq x \leq 5$ **e)** $5 \leq x < 10$ **f)** $x \geq -4$ **g)** $x \leq 6$ **h)** $x > 100$ **i)** $-7 < x < \sqrt{2}$



2.08 **a)** $(1, 3)$ **b)** $(6, 7]$ **c)** $[5, 9)$ **d)** $[10, 12]$

2.09 **a)** $(-\infty, -2]$ **b)** $(-\infty, 5)$ **c)** $(-3, +\infty)$ **d)** $[7, +\infty)$ **e)** $(-\infty, -9)$ **f)** $[-6, +\infty)$

2.10 **a)** $(-2, 16)$ **b)** $[-11, 2)$ **c)** $[-15/2, 7/3]$ **d)** $[-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$

2.11 **a)** $(-1, 8)$ **b)** $[-4/7, 0]$ **c)** $(-\sqrt{5}/2, 9/5]$ **d)** $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

2.12 **a)** $[-4, 2)$ **b)** $[-4, 4)$ **c)** $(-2, 2)$ **d)** $(-2, -1]$

2.13 **a)** $(-\infty, 5)$ **b)** $(-\infty, 3]$ **c)** $[0, 3]$ **d)** $[0, 1]$

2.14 **a)** $(-1, +\infty) \cap (-\infty, 13/2]$ **b)** $[5, +\infty) \cap (-\infty, 5\sqrt{3}]$ **c)** $(6, +\infty) \cap (-\infty, \sqrt{40}]$ **d)** $[-51/4, +\infty) \cap (-\infty, 3]$ **e)** $[-3, +\infty) \cap (-\infty, \sqrt{2}/2]$ **f)** $(\sqrt{30}/2, +\infty) \cap (-\infty, \sqrt{90})$ **g)** $[-7/2, +\infty) \cap (-\infty, -\sqrt{3})$ **h)** $(-\sqrt[3]{5}, +\infty) \cap (-\infty, \sqrt[3]{5})$

2.15 **a)** $[-1, 13] = [-1, +\infty) \cap (-\infty, 13]$. **b)** $[0, 27) = [0, +\infty) \cap (-\infty, 27)$, para edades no negativas.

c) $(0, 100) = (0, +\infty) \cap (-\infty, 100)$. **d)** $[18, +\infty)$; ya es una semirrecta, igual a $[18, +\infty) \cap \mathbb{R}$.

e) $[0, 11\,000] = [0, +\infty) \cap (-\infty, 11\,000]$, para importes no negativos.

03 · Aproximaciones y notación científica

3.01 $\sqrt{3} = 1{,}732050807\ldots$. Diezmilésimas: defecto 1,7320 y exceso 1,7321. Cienmilésimas: defecto 1,73205 y exceso 1,73206.

3.02 Por ejemplo: medir 10 m como 9 m y 100 m como 99 m. Ambos errores absolutos son 1 m; los relativos, 10 % y 1 %, respectivamente.

3.03 115 km/h redondeados a la unidad: $Ea \leq 0{,}5$ km/h; $Er \leq 0{,}5/114{,}5 \approx 0{,}004367$. Una edad media de 64 años redondeada a la unidad: $Ea \leq 0{,}5$ años; $Er \leq 0{,}5/63{,}5 \approx 0{,}007874$.

3.04 **a)** 1,41: $Ea \leq 0{,}005$; $Er \leq 0{,}005/\sqrt{2} \approx 0{,}003536$.

b) 1,414: $Ea \leq 0{,}0005$; $Er \leq 0{,}0005/\sqrt{2} \approx 0{,}000354$.

3.05 No los errores exactos, sin la población real. $Ea \leq 5$ habitantes; la población está entre 305 y 314, así que $Er \leq 5/305 \approx 0{,}01639$.

3.06 Décimas: $Ea < 0{,}1$. Centésimas: $Ea < 0{,}01$.

3.07 **a)** $8{,}5\cdot10^{-6}$ **b)** $5\cdot10^{12}$ **c)** $3{,}194\cdot10^{10}$ **d)** $4{,}79\cdot10^{-10}$

3.08 **a)** $6{,}459686335\ldots\cdot10^{6}$ **b)** $2{,}92966752134\cdot10^{13}$

3.09 $\sqrt{22}$: (4;5), (4,6;4,7), (4,69;4,70), (4,690;4,691), (4,6904;4,6905). π: (3;4), (3,1;3,2), (3,14;3,15), (3,141;3,142), (3,1415;3,1416). Φ: (1;2), (1,6;1,7), (1,61;1,62), (1,618;1,619), (1,6180;1,6181). Cotas: 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001. El punto y coma separa extremos.

3.10 **a)** $9{,}24964\cdot10^{-2}$ **b)** $5{,}04853\cdot10^{6}$

3.11 **a)** 40,5 **b)** 35,1 **c)** 14,0 **d)** 5,6

3.12 **a)** $Ea \approx 0{,}14159265$; $Er \approx 0{,}04507034036$ **b)** $Ea \approx 0{,}01890117716$; $Er \approx 0{,}006016431558$

c) $Ea \approx 0{,}01659265$; $Er \approx 0{,}005281604539$ **d)** $Ea \approx 2{,}703539823e\text{-}07$; $Er \approx 8{,}605634543e\text{-}08$

e) $Ea \approx 0{,}00159265$; $Er \approx 0{,}0005069562408$

3.13 **a)** 3,1463 **b)** 3,5029 **c)** 0,5040 **d)** 3,0951

3.14 Aproximación: 5,73. $Ea = 0{,}00691$; $Er = 0{,}00691/5{,}73691 \approx 0{,}00120448$.

3.15 **a)** 0,2727; $Ea = 3/110\,000$; $Er = 0{,}0001$. **b)** 4,40; $Ea = 0{,}0036$; $Er \approx 0{,}000818852$.

c) 7,3; $Ea = 0{,}05$; $Er = 1/145 \approx 0{,}00689655$.

3.16 0,14; $Ea = 1/350 \approx 0{,}002857$.

3.17 12,346; Ea = 0,0004.

3.18 Infinitas: cualquier número en [5 432,723; 5 432,724), por ejemplo 5 432,7235. Si se exige una aproximación estrictamente inferior, se excluye el extremo izquierdo.

3.19 **a)** 3,142; Ea ≈ 0,00040735. **b)** 1,414; Ea ≈ 0,00021356. **c)** 1,6180; Ea ≈ 0,00003399.
d) 3,142857; Ea ≈ 0,000000142857.

3.20 **a)** Falta expresar $\cdot 10^{0}$. **b)** No: mantisa < 1. **c)** Sí. **d)** No: la potencia es de base 2. **e)** Sí.
f) No: mantisa ≥ 10.

3.21 **a)** $1{,}5\cdot 10^{10}$; mantisa 1,5; exponente 10. **b)** $5{,}1\cdot 10^{-7}$; mantisa 5,1; exponente -7.
c) $3{,}194\cdot 10^{7}$; mantisa 3,194; exponente 7. **d)** $9\cdot 10^{-10}$; mantisa 9; exponente -10.
e) $4{,}598\cdot 10^{9}$; mantisa 4,598; exponente 9. **f)** $9{,}67254\cdot 10^{-2}$; mantisa 9,67254; exponente -2.
g) $3{,}29\cdot 10^{8}$; mantisa 3,29; exponente 8. **h)** $1{,}11\cdot 10^{5}$; mantisa 1,11; exponente 5.

3.22 **a)** $3{,}89\cdot 10^{4}$ **b)** $1{,}0335\cdot 10^{4}$ **c)** $3{,}620000585\cdot 10^{4}$ **d)** $2{,}303975\cdot 10^{2}$ **e)** $5{,}93830346\cdot 10^{4}$

3.23 **a)** $5{,}78\cdot 10^{4}$ **b)** $8{,}055\cdot 10^{3}$ **c)** $7{,}887\cdot 10^{-4}$ **d)** $4{,}65261\cdot 10^{6}$ **e)** $4{,}9977\cdot 10^{2}$

3.24 **a)** $3{,}8325\cdot 10^{2}$ **b)** $5{,}0787\cdot 10^{10}$ **c)** $1{,}54562383613\cdot 10^{4}$ **d)** $2{,}96875\cdot 10^{-9}$

3.25 **a)** $5{,}44789318537\cdot 10^{-3}$ **b)** $3{,}56695652174\cdot 10^{-8}$

3.26 **a)** $2{,}05352112676\cdot 10^{5}$ **b)** $7{,}10513\cdot 10^{12}$ **c)** $3{,}834\cdot 10^{22}$ **d)** $2{,}63162962963\cdot 10^{4}$

3.27 **a)** $1{,}33824\cdot 10^{13}$ **b)** $5{,}14509803922\cdot 10^{23}$ **c)** $7{,}382\cdot 10^{6}$ **d)** $8{,}3232\cdot 10^{-5}$

3.28 **a)** $9{,}46\cdot 10^{9}$ km **b)** $3\cdot 10^{5}$ km/s **c)** $1{,}4\cdot 10^{6}$ km **d)** $1{,}602\cdot 10^{-19}$ C **e)** $1{,}673\cdot 10^{-22}$ kg **f)** $5{,}8\cdot 10^{7}$ km
g) $9{,}109\cdot 10^{-29}$ kg **h)** $3{,}84\cdot 10^{8}$ m

3.29 Si el número no es exacto en el orden elegido, la aproximación inferior y la superior son distintas. Si ya es exacto, ambas pueden coincidir con él. El redondeo coincide con la inferior cuando la siguiente cifra es menor que 5, y con la superior cuando es mayor o igual que 5 (para números positivos y redondeo escolar).

04 · Potencias, radicales y racionalización

4.01 **a)** Falsa: no existe raíz cuarta real de -16. **b)** Falsa: vale 2. **c)** Falsa: vale 100. **d)** Falsa: vale 2, no ± 2.

4.02 **a)** 2 **b)** -2 **c)** No existe en $\mathbb{R}$ **d)** 3

4.03 **a)** $\sqrt[4]{3}$ **b)** $\sqrt[3]{5^2}$ **c)** $\sqrt[6]{2}$ **d)** $\sqrt[5]{7^3}$ **e)** $\sqrt[7]{10^2}$ **f)** $5^{7/4}$

4.04 **a)** Sí: ambos son $3^{3/2}$. **b)** No: $4 \neq \sqrt{2}$. **c)** Sí: ambos son $\sqrt{6}$. **d)** No: $5^{5/2} \neq 25$.

4.05 **a)** $-7\sqrt{5}$ **b)** $\dfrac{96\sqrt[3]{3}}{5}$

4.06 **a)** $180\sqrt{2}$ **b)** $1/4$ **c)** $\sqrt[6]{108}$ **d)** $\sqrt[12]{3^7}$

4.07 **a)** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ **b)** $\dfrac{-3\sqrt[4]{2}}{10}$ **c)** $\dfrac{(2+\sqrt{3})\sqrt[5]{49}}{42}$

4.08 **a)** $\sqrt{2}-1$ **b)** $\dfrac{4\sqrt{2}(7-\sqrt{3})}{23}$ **c)** $\dfrac{5\sqrt{3}(9+\sqrt{5})}{76}$

4.09 **a)** $\sqrt[3]{1/25}$ **b)** $\sqrt[3]{-25}$ **c)** $\sqrt[3]{25}$ **d)** $\sqrt[3]{1/25}$ **e)** $\sqrt[12]{23}$ **f)** $\sqrt[9]{3}$

4.10 **a)** $\sqrt[3]{81x^6y}$ **b)** $\sqrt{512a^3b^3}$ **c)** $\sqrt[4]{64a^4b^8c^4}$ **d)** $\sqrt{(2a-b)^2b}$ si $2a \geq b$; su opuesto si $2a<b$

4.11 **a)** $\dfrac{\sqrt{3}\sqrt[4]{125}}{5}$ **b)** $3\sqrt[3]{4}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ **c)** $-(\sqrt{6}+2)(2+\sqrt{5})$

4.12 **a)** 3 **b)** -3 **c)** -10 **d)** -6 **e)** 5 **f)** -2

4.13 **a)** $\sqrt[6]{2^{10}}$ y $\sqrt[9]{2^{15}}$ **b)** $\sqrt[24]{7^8}$ y $\sqrt[36]{7^{12}}$ **c)** $\sqrt[12]{5^6}$ y $\sqrt[18]{5^9}$ **d)** $\sqrt[4]{2^6}$ y $\sqrt[6]{2^9}$ **e)** $\sqrt[16]{2^{12}}$ y $\sqrt[24]{2^{18}}$ **f)** $\sqrt[40]{3^{30}}$ y $\sqrt[60]{3^{45}}$

4.14 **a)** $2\sqrt[3]{2}$ **b)** $3\sqrt[3]{2}$ **c)** $2\sqrt[4]{2}$ **d)** $3\sqrt{3}$ **e)** $5\sqrt{3}$ **f)** $2\sqrt[5]{4}$ **g)** $\sqrt{3}$ **h)** $\sqrt{5}$ **i)** 7

4.15 **a)** Falsa: los dos primeros términos valen $2^{3/2}$ y el último vale 8. Puede sustituirse el último por $\sqrt[6]{2^9}$.

b) Falsa: los dos primeros valen $3^{4/3}$. El último debe ser $\sqrt[6]{3^8}$.

c) Falsa: el primero y el tercero valen 625. El segundo debe ser $\sqrt{5^8}$.

d) Verdadera: todos valen $3^{3/4}$.

4.16 **a)** $\sqrt[30]{2^{79}}$ **b)** $\sqrt[36]{3^{47}}$ **c)** $\sqrt[5]{5^{16}}$ **d)** $\sqrt[5]{\frac{1}{7^7}}$

4.17 **a)** $a^{3/4}$ **b)** $a^{7/12}$ **c)** $a^{1/4}$ **d)** $a^{-5/4}$ **e)** $a^{-1/2}$ **f)** $a^{-1/4}$ **g)** $a^{3/2}$ **h)** $a^{-1/3}$ **i)** $a^{-1/8}$

4.18 **a)** $\sqrt[10]{45}$ **b)** $\sqrt[12]{2}$ **c)** $\sqrt[3]{2}$ **d)** $\sqrt[8]{3}$ **e)** $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ **f)** $\sqrt[24]{\frac{64}{3}}$ **g)** $\sqrt[12]{2}$ **h)** $\sqrt[4]{\frac{1}{5}}$ **i)** $\sqrt[15]{2}$

4.19 **a)** $ab^2\sqrt{a}$ **b)** $ab^2c\sqrt{bc}$ **c)** $ac^2\sqrt[3]{b^2c}$ **d)** $ab\sqrt{ab^2+1}$ **e)** $\sqrt[3]{a^3b^3+c^3}$ **f)** $a^2\sqrt{c^2+b^2}$

4.20 **a)** $5\sqrt{5}$ **b)** $4\sqrt{5}$ **c)** $3\sqrt[3]{7}$ **d)** $5\sqrt[3]{2}$ **e)** $6\sqrt[3]{5}$ **f)** $2\sqrt[4]{45}$ **g)** $2\sqrt[4]{14}$ **h)** $-3\sqrt[5]{2}$ **i)** $42\sqrt{2}$

4.21 $2\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{100} = 20$

4.22 **a)** $4xy\sqrt{2x}$ **b)** $5x^2\sqrt[3]{25}$ **c)** $5x^2\sqrt[3]{xy^2}$ **d)** $4y^3\sqrt[4]{x^3y^3}$ **e)** $x^3y^2z^4\sqrt[4]{yz^3}$ **f)** $3y^4z^3\sqrt[5]{3x^4y^2}$

4.23 Como $3\pm2\sqrt{2} = (\sqrt{2}\pm1)^2$, las raíces son $\sqrt{2}+1$ y $\sqrt{2}-1$. La diferencia vale 2.

4.24 **a)** $\frac{1}{a}$ **b)** $\frac{2a^4\sqrt{2a}}{b^2c^3}$ **c)** $\frac{2a}{3b}\sqrt[3]{\frac{a}{3}}$ **d)** $\frac{1}{a}\sqrt[3]{\frac{b}{4c^2}}$ **e)** $\frac{3a^6\sqrt{a}}{b^2}$ **f)** $\sqrt{a}$

4.25 **a)** 3 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 3, 3 **e)** 3 **f)** 6

4.26 **a)** $9\sqrt{2}$ **b)** $15\sqrt[3]{3}+12\sqrt[3]{4}$ **c)** $13\sqrt{6}-3\sqrt{2}$ **d)** $-6\sqrt{3}$

4.27 **a)** $\sqrt[3]{40}$ **b)** $\sqrt[4]{5120}$ **c)** $\sqrt[5]{3645}$ **d)** $\sqrt{18/25}$ **e)** $\sqrt[4]{3/8}$ **f)** $\sqrt[3]{56}$

4.28 **a)** $\sqrt[3]{25}$ **b)** $\sqrt[3]{18/125}$ **c)** $\sqrt[3]{3/21952}$

4.29 **a)** $\sqrt{\frac{a(4a-1)}{2}}$ **b)** $\sqrt[4]{\frac{32a^3b^5}{c^2}}$ **c)** $\sqrt[3]{-8a^4b^7}$ **d)** $\sqrt{\frac{3}{2a}}$

e) 5 es un sumando, no un factor. No se aplica esta propiedad. Si se pide una sola raíz, resulta $\sqrt{27+10\sqrt{2}}$.

f) $\sqrt[3]{-a^7}$

4.30 **a)** $16+13\cdot\sqrt{2}$ **b)** $-6\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{10}+\sqrt{2}+3$ **c)** $31-15\cdot\sqrt{3}$

d) $-2\cdot\sqrt{6}-2+3\cdot\sqrt{2}+6\cdot\sqrt{3}$ **e)** $23-23\cdot\sqrt{2}$ **f)** $-14-5\cdot\sqrt{7}+15\cdot\sqrt{5}+6\cdot\sqrt{35}$

4.31 **a)** $\sqrt[4]{5^{11}}$ **b)** $\sqrt[12]{392}$ **c)** $\sqrt[8]{2^{28}\cdot3^4\cdot5^7}$ **d)** $\sqrt[6]{25/216}$

4.32 **a)** $a^3\sqrt[12]{a}$ **b)** $ab^6\sqrt{72ab^5}$ **c)** $\sqrt[15]{\frac{a^4b^2}{128}}$ **d)** $\sqrt[3]{a^2b}$

4.33 **a)** 5 **b)** $\sqrt[3]{74}$ **c)** 1 **d)** $\sqrt[3]{20}$

4.34 **a)** $2^{-35/12}$ **b)** $\sqrt[8]{3}$ **c)** 1/2 **d)** 3

4.35 **a)** $\frac{144}{25a}$ **b)** $\frac{100}{81a^2}$ **c)** a/2 **d)** $\frac{32a}{3}$

4.36 **a)** $|a-2|$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}|2a+1|$

4.37 **a)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **b)** $\frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{18}}{6}$ **c)** $4\sqrt[3]{3}$ **d)** $\frac{\sqrt[4]{27}}{9}$ **e)** 1 **f)** $3\sqrt[3]{3}$

4.38 **a)** $\frac{(3+\sqrt{2})\sqrt[3]{2}}{2}$ **b)** $(\sqrt{7}-1)\sqrt[3]{49}$ **c)** $\frac{(3\sqrt{5}-2)\sqrt[4]{5}}{5}$ **d)** $\frac{(1-3\sqrt{5})\sqrt[5]{25}}{5}$

4.39 **a)** $-1+\sqrt{2}$ **b)** $-3\cdot\sqrt{2}+3\cdot\sqrt{3}$ **c)** $5\cdot\sqrt{3}+10$ **d)** $\frac{4\cdot\sqrt{10}+24}{13}$ **e)** $\frac{21+7\cdot\sqrt{11}}{2}$
f) $-5\cdot\sqrt{7}+5\cdot\sqrt{6}$

4.40 **a)** $-4-2\cdot\sqrt{3}$ **b)** $\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{7}}{2}$ **c)** $\frac{3\cdot\sqrt{2}+6}{2}$ **d)** $\frac{2\cdot\sqrt{2}+6}{7}$ **e)** $-3-\sqrt{3}$ **f)** $-\sqrt{6}-2$
g) $\frac{-2\cdot\sqrt{6}+4\cdot\sqrt{3}}{3}$ **h)** $\frac{-30+3\cdot\sqrt{15}}{17}$

4.41 **a)** $\frac{-\sqrt[3]{5}(1+2\sqrt{5})}{19}$ **b)** $\frac{-\sqrt[5]{2}(\sqrt{2}+3\sqrt{3})}{25}$ **c)** $\frac{-\sqrt{3}\sqrt[3]{5}(\sqrt{2}+3\sqrt{5})}{43}$ **d)** $2\sqrt{2}-1$ **e)** $2/3\cdot(\sqrt{5}-2)$
f) $\frac{3\sqrt[4]{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{5})}{13}$

4.42 **a)** $\frac{(3-\sqrt{6})\cdot\sqrt{\sqrt{6}+3}}{3}$ **b)** $\frac{-3\cdot\sqrt{5}-\sqrt{7}+11+2\cdot\sqrt{35}}{19}$ **c)** $-\frac{1}{3}+\frac{5\cdot\sqrt{3}}{3}$ **d)** $\frac{\sqrt{21}}{6}+2$

4.43 **a)** $\frac{-19\cdot\sqrt{15}-12\cdot\sqrt{3}+4\cdot\sqrt{30}+12\cdot\sqrt{6}+15\cdot\sqrt{35}}{12}$ **b)** $-12\cdot\sqrt{3}-12\cdot\sqrt{2}$

4.44 **a)** $\frac{-3(39+29\sqrt{2})}{161}$ **b)** $\frac{-\sqrt[3]{2}(5\sqrt{3}+1)}{74}$ **c)** $\frac{-\sqrt{2}\sqrt[3]{4}(5\sqrt{5}-2)}{242}$ **d)** $\frac{-2\sqrt[4]{27}\sqrt[3]{4}}{3}$

4.45 **a)** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt[9]{6^8}}{6}+\frac{\sqrt{6}\sqrt[3]{4}}{2}$

4.46 **a)** $\frac{-30-9\sqrt{5}}{55}$ **b)** $\frac{39\sqrt{3}-30}{37}$ **c)** $\frac{\sqrt{5}-\sqrt[3]{25}+\sqrt[6]{3125}}{5}$ **d)** $\frac{15\sqrt{2}-86}{46}$

4.47 $\frac{15}{8}-4\sqrt{2}$

4.48 **a)** Falsa. El producto es $\sqrt[nm]{a^m\,b^n}$.

b) Falsa. El índice común es nm, con las potencias correspondientes: $\sqrt[nm]{a^m\,b^n}$.

c) Falsa: por ejemplo, $\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\neq 2$. **d)** Falsa. La expresión correcta es $\sqrt[n]{a^n\,b^m}$.

e) Verdadera: $\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{b}=a\sqrt{ab}$. **f)** Falsa. Debe ser $\sqrt{a^2b+a^2c}$. **g)** Falsa. Resulta $a^2\sqrt{b}$.

h) Falsa: al elevar a+b al cuadrado aparece además 2ab.

05 · Logaritmos

5.01 **a)** 3 **b)** 4 **c)** 3 **d)** -4 **e)** 33 **f)** -4 **g)** 2 **h)** -1

5.02 **a)** 5 **b)** 2 **c)** 6 **d)** -5 **e)** 2 **f)** -14 **g)** 3 **h)** -2

5.03 **a)** 5/2 **b)** 5 **c)** $\frac{\log 100}{\log 3}$ **d)** $\frac{\log 32}{\log 5}$ **e)** 2/5 **f)** $\frac{\log 304}{\log 2}$

5.04 De 1 a 10: 0; 0,3010; 0,4771; 0,6020; 0,6990; 0,7781; 0,8451; 0,9030; 0,9542; 1. $\log 3{,}5 \approx 0{,}5441$; $\log 1{,}5 \approx 0{,}1761$.

5.05 Son $\log 5/\log 2$ y $\log 2/\log 5$. Su producto es 1 al cancelar los factores.

5.06 **a)** $x = 1/2$ **b)** $x = \sqrt[3]{9}$ **c)** $x = 2/3$ **d)** $x = \sqrt{3}$

5.07 Vale 1 si $a, b > 0$ y $a, b \neq 1$, por cambio de base: $(\ln b/\ln a)(\ln a/\ln b) = 1$.

5.08 **a)** 5 **b)** 2 **c)** 6 **d)** -5 **e)** 2 **f)** -14 **g)** 3 **h)** -2

5.09 **a)** 5/2 **b)** 3/2 **c)** 2/5 **d)** 9/2

5.10 **a)** Falsa: la propiedad corresponde al producto, no a la suma. **b)** Falsa: log 0 no está definido. **c)** Verdadera, con $a, b > 0$. **d)** Falsa: log(a^b) = b·log a.

5.11 **a)** 3 **b)** 9 **c)** 4

5.12 $\log(28 \cdot 15/6) = \log 70 = 1 + \log 7 \approx 1{,}8451$.

5.13 **a)** 4,4531 **b)** 2,4771 **c)** 2,5702 **d)** 12,3855

5.14 $\ln 10 = 1/\log e \approx 2{,}3026$; $\ln 0{,}1 = -\ln 10 \approx -2{,}3026$.

5.15 **a)** 0,30105 **b)** $-0{,}6021$ **c)** $-0{,}69895$ **d)** 3,6021

5.16 **a)** 0,3 **b)** 11/15 **c)** 0,2 **d)** $-67/30$

5.17 **a)** 243 **b)** 125 **c)** 1/2 **d)** 16/81 **e)** 1/243 **f)** 1/125 **g)** 1 **h)** 279841

06 · Razonamiento y aplicaciones

6.01 Un cuadrado perfecto solo puede terminar en 0, 1, 4, 5, 6 o 9, como se comprueba al elevar al cuadrado las diez cifras. Por tanto, los enteros positivos terminados en 2, 3, 7 u 8 no son cuadrados perfectos y sus raíces son irracionales.

6.02 **a)** Por semejanza, $\frac{b}{a} = \frac{a}{b/2}$, así que $b^2 = 2a^2$ y $b/a = \sqrt{2}$.

b) El área de A4 es 1/16 m². Como $ab = a^2\sqrt{2} = 1/16$, se obtiene $a = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}}$ m ≈ 21,02 cm; b ≈ 29,73 cm. Las dimensiones nominales son 21 × 29,7 cm.

6.03 Un año tiene 8 760 h. v = 6 320 000/8 760 ≈ 721,46 km/h, aproximadamente $7{,}2\cdot10^2$ km/h.

6.04 $\frac{1}{\Phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \Phi - 1$

6.05 **a)** Con esos datos, $\log(2^{500}) \approx 150{,}5$ y $2^{500} \approx 3{,}1622\cdot10^{150}$. La precisión limitada de log 2 produce una aproximación poco ajustada: el valor más preciso es $3{,}273390608\cdot10^{150}$.

b) Depende del rango de la calculadora. Aunque la potencia directa desborde, puede calcularse el exponente 500·log 2 y separar la parte entera para obtener la mantisa.

c) log 5 = 1 − log 2 ≈ 0,6990, de modo que $5^{500} \approx 3{,}1622\cdot10^{349}$ con esos datos. Una aproximación más precisa es $3{,}054936363\cdot10^{349}$.

6.06 **a)** 47. Si $u = \log_x y$ y $v = \log_y x$, entonces uv = 1 y $u^2 + v^2 = (u+v)^2 - 2uv = 49 - 2$.

b) $2\sqrt{6}$. El cuadrado de la suma es $18 + 2\sqrt{9} = 24$ y la suma es positiva.

c) 2. Un número tiene una cantidad impar de divisores si es cuadrado perfecto. Entre los cuadrados de tres cifras, solo 324 y 576 tienen tres cifras consecutivas.

d) (2, 3). Por cambio de base, la expresión es $\log_3 2 + \log_3 5 = \log_3 10$, y $3^2 < 10 < 3^3$.

e) −3. Al eliminar denominadores se obtiene $y^2 + xy - x = 0$; su discriminante es $x^2 + 4x$. Para x = −3 vale −3 y no hay raíces reales.

6.07 Sí. Si un primo dividiera a±b y ab, dividiría a o b. En cualquiera de los dos casos también dividiría el otro, contradiciendo que a y b son coprimos.

6.08 Llama $u = \sqrt[2^n]{a}$ y $v = \sqrt[2^n]{b}$. Multiplica numerador y denominador por $(u+v)(u^2+v^2)\ldots(u^{2^{n-1}} + v^{2^{n-1}})$. El denominador se transforma sucesivamente en $u^2 - v^2$, $u^4 - v^4$, …, $u^{2^n} - v^{2^n} = a - b$. El resultado tiene ese producto en el numerador y a−b en el denominador.

6.09 Solo pueden coincidir en los extremos del diámetro. Al llegar a ellos, la primera ha recorrido 5πk cm y la segunda 10m cm, con k, m enteros positivos. La misma rapidez y tiempo exigirían 5πk = 10m, es decir, π = 2m/k, imposible por ser π irracional. No vuelven a coincidir.

6.10 Al sumar logaritmos se multiplican los argumentos. Los factores intermedios se cancelan: $\log \sqrt{100} = \log 10 = 1$.

6.11 La suma es $\frac{3n^2 + 6n + 2}{n(n+1)(n+2)}$. El denominador es múltiplo de 3 y el numerador deja resto 2 al dividirlo entre 3: ese factor no se cancela. También queda algún factor 2: si n es impar, el numerador es impar; si n es par, el numerador tiene exactamente un factor 2 y el denominador tiene al menos tres. El denominador reducido contiene 2 y 3, por lo que el decimal es periódico mixto.

6.12 $m = 10 \cdot 7/2 = 35$. Como n+1 es múltiplo de 4, 5 y 6, $n = \text{mcm}(4,5,6) - 1 = 59$. Las 35 capas contienen $35 \cdot 59$, $34 \cdot 58$, …, $1 \cdot 25$ naranjas. Su suma es 30030 naranjas.

6.13 **a)** El deslizamiento del neumático sobre el firme puede dejar restos de goma y marcas por el rozamiento. No toda frenada deja marcas visibles.

b) Se toma $g \approx 9{,}8\ \text{m/s}^2$ cerca de la superficie terrestre.

6.14 Es una magnitud sin unidades que relaciona la fuerza de rozamiento con la fuerza normal de contacto: $\mu = F_r/N$. Depende de los materiales y de las condiciones de las superficies.

6.15 μ es el coeficiente de rozamiento, adimensional; g es la aceleración de la gravedad, en m/s^2; x es la distancia de frenado, en m. Así, v se obtiene en m/s.

6.16 Sí, cuando los factores son no negativos, como ocurre en este modelo. Se aplica la propiedad de la raíz de un producto.

6.17 El índice es 2: se trata de una raíz cuadrada.

6.18 $v = \sqrt{2 \cdot 0{,}75 \cdot 9{,}8 \cdot 30} = \sqrt{441} = 21$ m/s. Multiplicando por 3,6: 75,6 km/h. Es la estimación del modelo para la fase de frenado.

6.19 Respuesta abierta. Debe identificar campañas reales, indicar quién las promueve y resumir su objetivo y sus medidas. Conviene contrastar la información con la página de la administración responsable y anotar la fecha de consulta.