1.º BACHILLERATO

NÚMEROS COMPLEJOS

Practica, razona y comprueba tus respuestas.

01 Forma binómica y plano complejo

Afijos, partes real e imaginaria y simetrías.

02 Operaciones en forma binómica

Cálculo algebraico, inversos y parámetros.

03 Módulo, argumento y forma polar

Conversiones, productos y cocientes.

04 Potencias y raíces

De Moivre, periodicidad y raíces n-ésimas.

05 Ecuaciones y sistemas

Soluciones, polinomios y coeficientes.

06 Geometría con complejos

Giros, polígonos, áreas y espirales.

07 Demostraciones y profundización

Propiedades, razonamiento y retos.

08 Complejos y circuitos eléctricos

Impedancia, admitancia y aplicaciones.

TU RUTA DE TRABAJO

Índice

Actividades organizadas por contenidos, con espacio para trabajar y soluciones al final.

01 Forma binómica y plano complejo **3**

02 Operaciones en forma binómica **8**

03 Módulo, argumento y forma polar **14**

04 Potencias y raíces **23**

05 Ecuaciones y sistemas **27**

06 Geometría con complejos **33**

07 Demostraciones y profundización **36**

08 Complejos y circuitos eléctricos **40**

• Solucionario **41**

Cómo usar el dossier
El código **1.12** identifica la actividad 12 del bloque 1. Busca ese mismo código en el solucionario. Puedes seguir el orden completo o seleccionar un contenido para repasarlo.

Antes de empezar
La unidad imaginaria cumple $i^2 = -1$. La notación $r \angle \alpha$ indica módulo r y argumento α; «conj(z)» es el conjugado. Los argumentos se consideran módulo $360°$ o 2π. Salvo indicación de valor principal, calcula todas las raíces. El cero no tiene argumento ni inverso y se excluye de los imaginarios puros.

BLOQUE 01

Forma binómica y plano complejo

Afijos, partes real e imaginaria y simetrías. · 12 actividades

1.01 Escribe los números en forma binómica. En los radicales, toma el valor principal complejo.

a) $\sqrt{-3}$

b) $\sqrt[4]{-16}$

c) 3

d) -3

1.02 Halla los valores reales de a y b que hacen ciertas las igualdades.

a) $2 + 3bi = a - 1$

b) $4a - 2b = 2 - ai$

1.03 Sea $z = -2x + \frac{y}{2}i$, con x e y reales. Determina las condiciones para que z sea:

a) Un número real.

b) Un imaginario puro.

c) Un complejo que no sea real ni imaginario puro.

1.04 Halla el opuesto y el conjugado.

a) $\sqrt{2} - 3 \cdot i$

b) $\frac{2}{3} - \frac{i}{5}$

c) $3 - 2 \cdot i$

d) $-3 + \frac{2 \cdot i}{5}$

e) $\frac{3 \cdot i}{5}$

f) -7

g) 0

h) $-2 \cdot i$

1.05 Representa los complejos e indica en qué ejes se sitúan los números reales y los imaginarios puros.

a) $\frac{1}{2} + i$

b) $-\frac{1}{2} + i$

c) $\frac{1}{2} - i$

d) $-\frac{1}{2} - i$

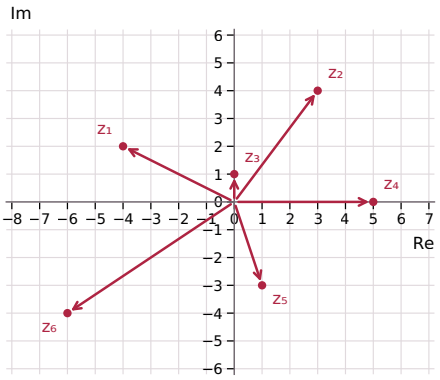
e) i

f) -5

g) $\frac{5}{2}$

h) 0

1.06 Escribe en forma binómica los seis complejos representados en el plano.



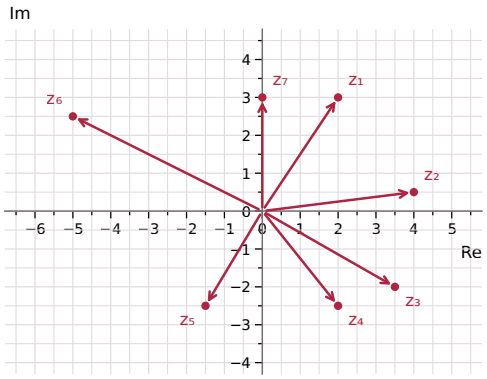
1.07 Expresa en forma binómica. Usa las raíces cuadradas principales.

a) $\sqrt{-16}+3$

b) $-2-\sqrt{-4}$

c) $\sqrt{-8}+\sqrt{2}$

1.08 Expresa en forma binómica los números representados.



1.09 Representa estos números en el plano complejo.

a) $5 + i$

b) $\sqrt{2} - 3 \cdot i$

c) $-3 - i$

d) $6 \cdot i$

e) -4

f) $-2 \cdot i$

g) $\frac{3}{2} - \frac{5 \cdot i}{3}$

h) $\sqrt{3} - 2 \cdot i$

i) $\sqrt{3} \cdot i$

1.10 Escribe y dibuja el conjugado y el opuesto.

a) $-3 + 2 \cdot i$

b) $-3 \cdot i$

c) $1 - 3 \cdot i$

d) -4

e) $-2 - 2 \cdot i$

f) $4 + i$

1.11 Halla el conjugado y el opuesto de $2-3i$, $3-2i$ y $-2+i$. Deduce cómo se representan respecto al complejo original.

a) ¿Cómo se representa el conjugado?

b) ¿Cómo se representa el opuesto?

1.12 Halla k real para que $k+(k-3)i$ cumpla la condición.

a) Sea imaginario puro.

b) Sea real.

BLOQUE 02

Operaciones en forma binómica

Cálculo algebraico, inversos y parámetros. · 22 actividades

2.01 Calcula y expresa el resultado en forma binómica.

a) $(-1-i)+(-4+5i)$

b) $\dfrac{-1-i}{-4+5i}$

c) $(-1-i)(-4+5i)$

d) $\dfrac{(-2+i)(1+3i)}{-1+2i}-2i$

2.02 Halla el inverso y exprésalo en forma binómica.

a) i

b) $3+4\cdot i$

c) $-1-i$

d) $3+i$

e) $4-3\cdot i$

f) $6+5\cdot i$

2.03 Calcula y expresa el resultado en forma binómica.

a) $\dfrac{i^{241}}{1-i}-\dfrac{2i^{42}}{1+i^{9}}+i^{83}$

b) $i^{333}-\dfrac{i^{27}}{1-i^{27}}+\dfrac{i^{72}}{1-i^{25}}$

2.04 Halla los inversos.

a) $2 - 2 \cdot i$

b) $-1 + i$

c) $1 + 4 \cdot i$

2.05 Calcula y expresa el resultado en forma binómica.

a) $(4 - i) + (-2 + 3i)$

b) $(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i) - (-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}i)$

c) $5 - (2 - i)$

d) $(\frac{2}{5} - i) + (\frac{1}{3} - \frac{2}{5}i)$

2.06 Calcula y expresa el resultado en forma binómica.

a) $(3 - 5i) + (2 - 7i) + (-4 + 8i)$

b) $(-1 + 2i) - (3 + 6i) - (-4 - i)$

c) $-(1 - 2i) - (-7i) - (-4 - 3i)$

d) $2(1 - 4i) - 2(1 + 4i) - 3(4 - 4i)$

e) $2(\sqrt{3} + i) - 3(2\sqrt{3} + 4i)$

f) $(\sqrt{2} - 3i) + 2(2 - \sqrt{3}i)$

2.07 Calcula y expresa el resultado en forma binómica.

a) $(1 - 3i)(2 - 6i)$

b) $(- 3 - 4i)(7 - i)$

c) $(- 2 + 5i)^2$

d) $(5 - 4i)(5 + 4i)$

e) $(- 3 - 2\sqrt{2}i)(- 3 + 2\sqrt{2}i)$

f) $(\sqrt{2} - i)^3$

2.08 Calcula y expresa el resultado en forma binómica.

a) $\dfrac{ - 1 + 5i}{3 - 2i}$

b) $\dfrac{20 + 40i}{8 + 6i}$

c) $\dfrac{ - 1 + 5i}{2 - i}$

2.09 Calcula y expresa el resultado en forma binómica.

a) $\dfrac{3 - i}{1 - i}$

b) $\dfrac{5}{2 + 4i}$

c) $\dfrac{5 + 2i}{2i}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}i}$

2.10 Calcula y expresa el resultado en forma binómica.

a) $\frac{30(1-i)}{-4-2i}+(2-3i)i$

b) $2i-\frac{3(2+3i)}{-3+i}$

c) $\frac{4(10-i)+8}{2-6i}-(3-i)(2+6i)$

d) $(-2-5i)-\frac{10-10i-5(1+i)}{(8+2i)-(5+3i)}$

e) $\frac{(1+3i)^2-(2i)^2}{-3+4i}$

2.11 Calcula y expresa el resultado en forma binómica.

a) $\frac{1}{i}+\frac{1+i}{i^3}-\frac{(1+i)(1-i)}{i^2-1}-\frac{2(1+i)}{i-1}$

2.12 Calcula y expresa el resultado en forma binómica.

a) $i^{49}\cdot i^{87}$

b) $i^{34}\cdot i^{103}+i^{78}\cdot i^{116}$

c) $(-3i)^3+\frac{(2i)^6}{12i^{18}}$

d) $i^{19}(2i^{33}-3i^{28})$

2.13 Halla k real para que cada expresión sea un número imaginario puro.

a) $\frac{3+ki}{k+2i}$

b) $3ki\cdot\frac{1-ki}{1-i}$

2.14 Encuentra p y q reales para que $(p+3i)(4+qi) = 15+9i$.

2.15 Demuestra que $z = 1-3i$ verifica $\frac{z^2}{2} = z - 5$.

2.16 ¿Qué complejo hay que sumar a $-3+2i$ para obtener cada resultado?

a) $5 \angle 270°$

b) $6 \angle (5\pi/3)$ rad

2.17 ¿Qué valor real de k hace que $\frac{2+i}{k-i}$ sea real? ¿Qué número se obtiene?

2.18 ¿Qué valor real de k hace que $\frac{k-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-i}$ sea imaginario puro? ¿Qué número se obtiene?

2.19 Calcula a real para que $\frac{6-2i}{1+ai}$ cumpla la condición.

a) Sea imaginario puro.

b) Sea real.

c) Sea $2-4i$.

d) Tenga módulo 1.

e) Tenga argumento $7\pi/4$ rad.

2.20 Halla a real para que el cuadrado de a + $\frac{\sqrt{3}}{2}$i sea igual a su conjugado.

2.21 Calcula c real para que el afijo de $\frac{12 + ci}{-5 + 2i}$ esté sobre la bisectriz del primer cuadrante. Distingue la recta completa y la semirrecta contenida en ese cuadrante.

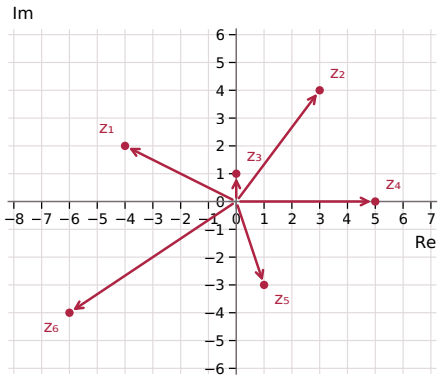
2.22 Calcula la suma de los diez primeros términos de una progresión aritmética de diferencia 1+2i y primer término −6−2i.

BLOQUE 03

Módulo, argumento y forma polar

Conversiones, productos y cocientes. · 27 actividades

3.01 Expresa en forma polar los complejos representados. Usa argumentos en [0°, 360°).



3.02 Expresa en forma polar, con argumento en [0°, 360°).

a) $2 + i$

b) $-2 - i$

c) $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

d) $2 - \sqrt{3} \cdot i$

e) $-4 \cdot i$

f) 12

3.03 Expresa los complejos en formas binómica y trigonométrica. La notación r ∠ α indica módulo r y argumento α.

a) $1 \angle 120°$

b) $3 \angle 240°$

c) $2 \angle \frac{\pi}{3}$ rad

d) $3 \angle \frac{3\pi}{2}$ rad

3.04 Expresa en formas polar y trigonométrica.

a) $3 - 4 \cdot i$

b) $2 + 2 \cdot i$

c) $-\sqrt{3} + i$

d) $-1 - i$

3.05 Opera y expresa el resultado en forma polar.

a) $(4 \angle 120°) \cdot (3 \angle 60°)$

b) $(2 \angle 230°) \cdot (3 \angle 130°)$

c) $(1 \angle 260°) : (6 \angle 120°)$

d) $(4 \angle 0°) : (2 \angle 180°)$

e) $(3 \angle 100°) : (3 \angle 40°)$

f) $(1 \angle 260°) \cdot (6 \angle 120°)$

3.06 Sean $z_1 = 1 \angle 210°$ y $z_2 = 3[\cos(-30°)+i\,\text{sen}(-30°)]$. Calcula en forma polar.

a) $\dfrac{z_1}{z_2}$

b) $\dfrac{z_1^{\,2}\cdot \text{conj}(z_2)}{z_2}$

3.07 Calcula los conjugados en forma polar.

a) $2 \angle 33°$

b) $3 \angle 22°$

c) $1 \angle 105°$

d) $2 \angle 222°$

3.08 Calcula los opuestos en forma polar.

a) $2 \angle 33°$

b) $3 \angle 22°$

c) $1 \angle 105°$

d) $2 \angle 222°$

3.09 Calcula los inversos en forma polar.

a) $2 \angle 33°$

b) $3 \angle 22°$

c) $1 \angle 105°$

d) $2 \angle 222°$

3.10 Opera y expresa el resultado en forma binómica.

a) $2 \angle 30° + 3 \angle 135° - 3 \angle 270°$

b) $1 \angle 45° + 1 \angle 135° + 1 \angle 225° + 1 \angle 315°$

3.11 Calcula y expresa el resultado en formas polar y binómica: $\dfrac{(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^4(-\sqrt{7}-\sqrt{7}i)^2}{(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i)^3}$.

3.12 Representa cada complejo y exprésalo en forma binómica.

a) $1 \angle 60°$

b) $5 \angle 90°$

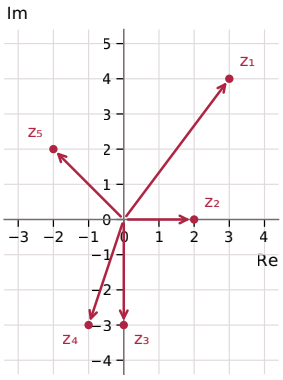
c) $2 \angle 135°$

d) $3 \angle 120°$

e) $\sqrt{5} \angle 60°$

f) $\sqrt{3} \angle 45°$

3.13 Expresa en forma polar los complejos del gráfico.



3.14 Escribe en forma polar y representa gráficamente.

a) $3 - 4 \cdot i$

b) $\sqrt{3} + i$

c) $\sqrt{2} \cdot (-1 - i)$

d) $-3 \cdot i$

e) -3

f) $\frac{i}{2}$

3.15 Escribe en forma binómica. Aproxima a cuatro decimales si el ángulo no es notable.

a) $4 \angle 60°$

b) $2 \angle 215°$

c) $3 \angle 90°$

d) $2 \angle 180°$

e) $3 \angle 150°$

f) $1 \angle 270°$

g) $\sqrt{2} \angle 315°$

h) $\sqrt{3} \angle 300°$

3.16 Escribe en formas polar y binómica el conjugado y el opuesto de cada complejo.

a) $5 \angle 240°$

b) $3 \angle 135°$

c) $\sqrt{3} \angle 30°$

3.17 Escribe en forma polar.

a) $\sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6})$

b) $3(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2})$

3.18 Dado $z = r \angle \alpha$, con $r > 0$, expresa su opuesto y su conjugado.

3.19 Efectúa las operaciones y simplifica el argumento.

a) $(4 \angle 120°)\cdot(3 \angle 60°)$

b) $(6 \angle \pi):(2 \angle \pi/4)$

c) $(4 \angle \pi/3)\cdot(2 \angle 270°)$

d) $(8 \angle 170°):(2 \angle 50°)$

e) $(5 \angle \pi/3)^2$

f) $(2 \angle 260°)\cdot(5 \angle 130°)$

g) $(7 \angle 2\pi/3):(5 \angle 5\pi/2)$

h) $(2 \angle 120°)^5$

i) $(\sqrt{3} \angle 5\pi/2)^6$

3.20 Expresa en forma polar el inverso.

a) $2 \angle 150°$

b) $3 \angle \pi/2$

c) $4 \angle \pi/3$

d) $(1/4) \angle \pi$

e) $e \angle \pi/6$

f) $\sqrt{7} \angle 35°$

3.21 Efectúa las operaciones combinadas y expresa el resultado en forma polar.

a) $(4 \angle 20° \cdot 1 \angle 50°) \cdot 3 \angle 35°$

b) $(9 \angle 39° : 3 \angle 25°) \cdot 5 \angle 100°$

c) $(6 \angle 60° \cdot 3 \angle 40°) : (9 \angle 56°)$

d) $(1 \angle 105°)^8 \cdot (1 \angle 65°)^5$

3.22 Opera y expresa el resultado en forma binómica.

a) $[(4 - 2i) - (3 - 2\sqrt{2}i)(2 \angle 30°)]^2$

b) $\dfrac{(1 + \sqrt{3}i)^2 - (4 \angle \frac{3\pi}{2})}{-3 + 3i}$

3.23 Halla b real para que $(4 \angle 72°)(1+bi) = 8 \angle 132°$.

3.24 Encuentra el complejo que, al sumarle 1/2, da un número de módulo $c > 0$ y argumento 60°.

3.25 Busca el complejo que, al sumarle $\dfrac{1 + i}{2 - 2i}$, da otro de módulo $\sqrt{2}$ y argumento 45°.

3.26 El argumento de z_1 es 150°, el módulo de z_2 es 2 y $z_1 z_2 = -8i$. Calcula z_1 y z_2.

3.27 El complejo $a+bi$ tiene módulo $m > 0$ y argumento α. Expresa en forma binómica el complejo con:

a) Módulo $6m$ y argumento $2\pi-\alpha$.

b) Módulo $3m$ y argumento $\alpha+3\pi/2$.

BLOQUE 04

Potencias y raíces

De Moivre, periodicidad y raíces n-ésimas. · 17 actividades

4.01 Calcula las potencias y expresa el resultado en forma binómica.

a) $(3 \angle 45°)^2$

b) $(3 - 3i)^5$

c) $(2 \angle \frac{\pi}{6})^6$

d) $(\sqrt{5} + \sqrt{5}i)^8$

e) $(4 \angle 330°)^3$

f) $(- 3i)^5$

4.02 Calcula $[16(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)] \cdot (2 \angle 210°)^4$.

4.03 Calcula todas las raíces complejas indicadas.

a) $\sqrt{3 \angle 150°}$

b) $\sqrt[3]{-27}$

c) $\sqrt[4]{-i}$

d) $\sqrt[3]{-1+i}$

4.04 Calcula y representa las raíces cúbicas de $\frac{1+i}{-1-i}$.

4.05 Calcula y representa i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, ... Investiga también i^{-1}, i^{-2}, i^{-3}, i^{-4}, i^{-5}, i^{-6}, ...

4.06 Calcula las potencias en forma polar.

a) $(2 \angle 105°)^4$

b) $(4 \angle \pi/3)^2$

c) $(3 \angle -25°)^6$

d) $(\sqrt{5} \angle 3\pi/4)^6$

4.07 Calcula las potencias, expresando primero las bases en forma polar.

a) $(1 - i)^4$

b) $(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^6$

c) $(-1 + \sqrt{3}i)^4$

d) $(\sqrt{2} - i)^7$

4.08 Calcula las potencias empleando la fórmula de De Moivre.

a) $[3(\cos 25° + i \operatorname{sen} 25°)]^4$

b) $[2(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)]^9$

c) $[5(\cos 115° + i \operatorname{sen} 115°)]^7$

d) $(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3})^3$

e) $[3(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2})]^4$

4.09 Calcula todas las raíces complejas indicadas.

a) $\sqrt[3]{64 \angle 120°}$

b) $\sqrt[5]{1 \angle 150°}$

c) $\sqrt[5]{32 \angle \frac{5\pi}{4}}$

d) $\sqrt[6]{64 \angle 180°}$

e) $\sqrt[4]{9 \angle 220°}$

f) $\sqrt[6]{2 \angle 75°}$

4.10 Calcula todas las raíces complejas.

a) $\sqrt{1}$

b) $\sqrt[3]{1}$

c) $\sqrt[4]{1}$

d) $\sqrt{i}$

e) $\sqrt[3]{i}$

f) $\sqrt[4]{i}$

4.11 Calcula todas las raíces y represéntalas.

a) $\sqrt[6]{-16}$

b) $\sqrt[3]{-i}$

c) $\sqrt[3]{16i}$

d) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}$

e) $\sqrt[5]{1 - \sqrt{3}i}$

f) $\sqrt[4]{625}$

4.12 Una de las raíces cúbicas de un complejo es 2+4i. Halla las otras dos.

4.13 Encuentra n y z de modo que dos raíces n-ésimas de z sean $6 \angle 30°$ y $6 \angle 120°$. ¿Hay una única solución? ¿Cuál es el menor n?

4.14 Calcula todas las raíces complejas.

a) $\sqrt[4]{\frac{16}{i}}$

b) $\sqrt{\frac{-1+i}{1+i}}$

c) $\sqrt[3]{(2-i)^2-3(1-i)}$

4.15 Calcula todas las raíces y exprésalas en forma binómica: $\sqrt[4]{\frac{(12 \angle 70°)\cdot(1 \angle 20°)^4}{3+3\sqrt{3}i}}$.

4.16 El complejo 3+5i es una de las raíces cúbicas de z. Halla las otras dos.

4.17 Simplifica $1+i+i^2+i^3+\cdots+i^n$ para cada entero $n \geq 0$.

BLOQUE 05

Ecuaciones y sistemas

Soluciones, polinomios y coeficientes. · 26 actividades

5.01 Resuelve las ecuaciones en el conjunto de los números complejos.

a) $z^3 - 1 = 0$

b) $z^5 + 32 = 0$

c) $z^4 + 16 = 0$

d) $z^4 - 81 = 0$

5.02 Resuelve las ecuaciones y expresa las soluciones con números complejos.

a) $x^2 + 2 \cdot x + 2 = 0$

b) $x^2 + 6 \cdot x + 10 = 0$

c) $x^2 + 10 \cdot x + 29 = 0$

d) $x^2 - 10 \cdot x + 26 = 0$

5.03 Resuelve las ecuaciones con incógnita compleja z.

a) $\frac{3 - zi + 2i}{2} = z + i$

b) $\frac{5 + 2zi - 4i}{3} = z - 2i$

5.04 Halla todas las soluciones complejas.

a) $z^4 - 16 = 0$

b) $z^3 + 8 = 0$

c) $z^4 - 9 = 0$

d) $z^3 + 9 = 0$

5.05 Resuelve las ecuaciones y expresa las soluciones mediante números complejos.

a) $x^2 + 7 = -42$

b) $-x^2 - 64 = 0$

c) $1 - (-x^2) = -120$

d) $-3 + x^2 = 2x^2 + 1$

e) $(x - 10)^2 = -20x$

5.06 Comprueba por sustitución si cada valor de z es solución de la ecuación.

a) $z = 1 + 2i$; $z^2 - 2z + 5 = 0$

b) $z = 1 + i$; $z^2 + (3 - i)z - (4 + 4i) = 0$

c) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z^3 + 1 = 0$

5.07 Dos complejos suman 3+2i, la parte real del segundo es 2 y el cociente del primero entre el segundo es imaginario puro. Halla los dos números.

5.08 Encuentra dos números complejos cuya suma sea 3 y cuyo cociente sea i.

5.09 Calcula todas las soluciones complejas.

a) $x^5 + 1 = 0$

b) $x^4 - 625 = 0$

c) $x^5 - 1 = 0$

d) $x^4 + 16 = 0$

5.10 Resuelve las ecuaciones en los números complejos.

a) $x^2 - 4x + 13 = 0$

b) $x^4 - 8x = 0$

c) $x^4 - 6x^2 - 9 = 0$

d) $x^4 + 27x = 0$

5.11 Escribe una ecuación de segundo grado con coeficientes reales que tenga la raíz indicada.

a) $1-i$

b) $3-2i$

5.12 Calcula m para que x^2-6x-m tenga la raíz $3-i$. Halla la otra raíz.

5.13 Calcula los complejos p y q para que x^3+px^2+qx-2 tenga raíces i y 2i. Halla la raíz restante.

5.14 Resuelve las ecuaciones en los números complejos.

a) $x^2 + ix + 1 = 0$

b) $x^2 - 2x + 3i = 0$

c) $ix^2 + 7x - 12i = 0$

d) $ix^3 + 27 = 0$

5.15 Resuelve $\frac{xi}{1+3i} - \frac{2x}{4-i} = 1$.

5.16 Halla todos los complejos cuyo cubo sea real y cuya parte real sea una unidad mayor que la imaginaria.

5.17 Halla los números complejos cuyo cubo sea igual a su conjugado.

5.18 Halla dos complejos conjugados cuya diferencia sea 6i y cuyo cociente sea i.

5.19 La ecuación $z^3+az^2+bz-6i = 0$ tiene raíces 2 y 3. Calcula a, b y la raíz restante.

5.20 Halla z y w tales que $z+w = i$ y $2i$ sea una raíz cuadrada del cociente z/w.

5.21 Escribe una ecuación de segundo grado que tenga las raíces indicadas.

a) $3+i$ y $3-i$.

b) $-2-5i$ y $-2+5i$.

5.22 Resuelve las ecuaciones en los números complejos.

a) $z^2 - 2z - 2 + 4i = 0$

b) $z^4 + (4 - 2i)z^2 - 8i = 0$

c) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$

5.23 Resuelve las ecuaciones con incógnita compleja z.

a) $\frac{z}{5 - i} + (2 - i)6i = -3 + 2i$

b) $z(-2 + 6i) + \frac{-41 + 37i}{4 - 3i} + 10 - 8i = z(1 + 7i)$

5.24 Resuelve en los números complejos.

a) $x^2 - 8ix + 4i - 19 = 0$

b) $\begin{cases} x - iy = 0 \\ y - ix = 4 - 6i \end{cases}$

5.25 Dos complejos conjugados suman 16 y sus módulos suman 20. ¿Cuáles son?

5.26 Calcula las cinco soluciones complejas de $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 = 0$.

BLOQUE 06

Geometría con complejos

Giros, polígonos, áreas y espirales. · 17 actividades

6.01 Un cuadrado centrado en el origen tiene un vértice A(3, 2). Determina los otros tres vértices.

6.02 Los afijos de las raíces cúbicas de −27 son los vértices de un triángulo ABC. Determina sus coordenadas.

6.03 Representa 5+2i, multiplícalo por i y representa el resultado. Multiplica dos veces por i y explica qué ocurre.

6.04 Representa los números y el resultado de cada operación. Explica qué ocurre con módulos y argumentos.

a) $(2 \angle 150°)\cdot(3 \angle 120°)$

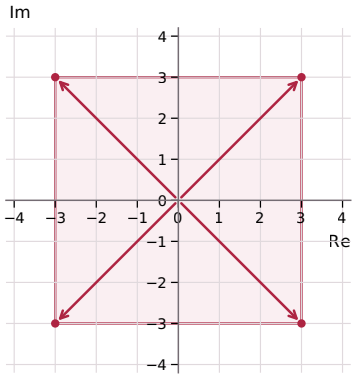
b) $(6 \angle 150°):(2 \angle 60°)$

c) $(2 \angle 2\pi/3)^4$

6.05 Dibuja $2 \angle 30°$ y $6 \angle 150°$. ¿Por qué complejo hay que multiplicar al primero para obtener el segundo?

6.06 Dibuja $12 \angle 300°$ y $4 \angle 120°$. ¿Por qué complejo hay que dividir el primero para obtener el segundo?

6.07 Los vértices del cuadrado representado son las raíces cuartas de un complejo. Cada cuadrícula representa una unidad. Determina el número y sus raíces.



6.08 El complejo $2 \angle 30°$ es un vértice de un pentágono regular centrado en el origen. Calcula los otros cuatro vértices y el complejo cuyas raíces quintas son esos cinco números.

6.09 Halla el área del cuadrilátero cuyos vértices son las soluciones de $x^4+4 = 0$.

6.10 Un pentágono regular centrado en el origen tiene un vértice en $(-3, -2)$. Halla los otros vértices usando complejos.

6.11 ¿Qué complejos forman un triángulo equilátero con su conjugado y con -5?

6.12 Calcula el área del hexágono regular determinado por los afijos de las raíces sextas de -64.

6.13 Las raíces cuartas de -4096 forman un cuadrado y sus raíces cúbicas, un triángulo equilátero. Calcula las dos áreas.

a) Área del cuadrado.

b) Área del triángulo.

6.14 Dos vértices consecutivos de un cuadrado son los afijos de $6+5i$ y $3+i$. Determina los otros dos, sabiendo que uno está en el cuarto cuadrante.

6.15 Representa $1+2\sqrt{3}i$ y realiza un giro antihorario de $60°$ centrado en el origen. Halla las formas binómica y polar del resultado.

6.16 Un vértice de un cuadrado centrado en el origen es $(-1, 3)$. Usa complejos para hallar los otros vértices y el área.

6.17 Representa $1+i$, pásalo a forma polar y calcula y representa sus diez primeras potencias. Describe la espiral que forman sus afijos.

BLOQUE 07

Demostraciones y profundización

Propiedades, razonamiento y retos. · 17 actividades

7.01 Usa la fórmula de De Moivre para expresar cos 3α y sen 3α en función de cos α y sen α.

7.02 Comprueba que la suma de las raíces indicadas es cero.

a) Las raíces cuartas de $-1+\sqrt{3}i$.

b) Las raíces sextas de 64.

7.03 Demuestra que las raíces no reales de una ecuación de segundo grado con coeficientes reales son conjugadas.

7.04 Calcula el producto de las dos raíces cuadradas de 1 y el de las tres raíces cúbicas de 1. Deduce una fórmula para el producto de las n raíces n-ésimas de 1.

7.05 Averigua la relación entre el módulo de la suma de dos complejos y la suma de sus módulos.

7.06 ¿Es cierto que al multiplicar un real por un complejo z el resultado tiene siempre el mismo argumento que z? Si no lo es, formula una propiedad correcta.

7.07 ¿Es cierto que el inverso del producto de dos complejos coincide con el producto de sus inversos? Razona las condiciones.

7.08 Demuestra que $\text{conj}(z_1+z_2) = \text{conj}(z_1)+\text{conj}(z_2)$ y $\text{conj}(z_1z_2) = \text{conj}(z_1)\text{conj}(z_2)$. Úsalo para probar que, si un polinomio de coeficientes reales tiene una raíz z, también tiene la raíz $\text{conj}(z)$.

7.09 Sea $u = -1/2+(\sqrt{3}/2)i$. Comprueba que, para $z = -2+5i$, los números z, uz y u^2z son las raíces cúbicas de un complejo. Demuestra la propiedad para cualquier z. ¿Qué tiene de particular u?

7.10 Sea $z = r \angle \alpha$, con $r > 0$, y sea $\text{conj}(z)$ su conjugado. Simplifica el cociente, donde n es un entero positivo y el denominador no se anula: $\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\ldots\cdot\cos n\alpha}{[z+\text{conj}(z)]\cdot[z^2+\text{conj}(z)^2]\cdot\ldots\cdot[z^n+\text{conj}(z)^n]}$.

7.11 Sean a, b, c y d reales. Encuentra una condición necesaria y suficiente para que las dos raíces de $z^2+(a+bi)z+c+di = 0$ sean no nulas y tengan el mismo argumento.

7.12 Elige la respuesta correcta y justifícala.

a) ¿Cuántas ternas ordenadas (x,y,z) de enteros no negativos menores que 20 hacen que el conjunto $\{i^x, (1+i)^y, z\}$ tenga exactamente dos elementos distintos? Opciones: 149, 205, 215, 225, 235.

b) ¿Cuál puede ser z si $zt = 6 \angle 60°$ y $z/t = 3 \angle 30°$? Opciones: $2+2\sqrt{3}i$, $2\sqrt{3}-2i$, $3+3i$, $2+2i$, $1/2+(\sqrt{3}/2)i$.

c) ¿Cuál no es raíz de z^4-5z^2-36? Opciones: $2i$, $2 \angle 180°$, $2 \angle 270°$, $3 \angle 180°$, 3.

d) ¿Para qué n se cumple $i+2i^2+3i^3+\cdots+ni^n = 48+49i$? Opciones: 24, 48, 49, 97, 98.

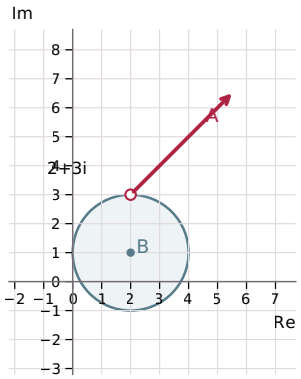
e) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i}\right)^{12}$. Opciones: 1, 16, 243, 1024, $-1-\sqrt{3}$.

7.13 Demuestra que, si z es raíz de $P(x) = ax^2+bx+c$, con a, b y c reales, su conjugado también es raíz.

7.14 Halla todos los complejos z cuyos afijos, junto a los de 1 y z^2, están alineados.

7.15 Los polinomios ax^2+bx+c, cx^2+ax+b y bx^2+cx+a son de segundo grado y tienen las mismas raíces. Determina esas raíces; distingue coeficientes reales y complejos.

7.16 Sean A = {z: arg[z−(2+3i)] = π/4} y B = {z: |z−(2+i)| < 2}. Determina la proyección ortogonal de A ∩ B sobre el eje real.



7.17 Sea $a_n = (1+i)(1+i/\sqrt{2})\cdots(1+i/\sqrt{n})$, para $n \geq 1$. Halla m natural tal que la suma $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_m-a_{m+1}|$ sea 1990.

BLOQUE 08

Complejos y circuitos eléctricos

Impedancia, admitancia y aplicaciones. · 8 actividades

8.01 ¿Qué es un circuito eléctrico y qué elementos puede contener?

8.02 ¿Qué son la impedancia y la admitancia en un circuito de corriente alterna?

8.03 ¿Qué relación numérica existe entre impedancia y admitancia?

8.04 Investiga aplicaciones de la impedancia y la admitancia. ¿Qué representa la impedancia del cuerpo humano y por qué puede ser importante?

8.05 Un circuito tiene impedancia $Z = 3+4j\ \Omega$, donde $j^2 = -1$. Calcula su módulo y su admitancia en forma compleja.

8.06 La admitancia de un circuito es 0,25 S. Calcula su impedancia.

8.07 Racionaliza $Y = 1/(R+Xj)$ y determina la conductancia G y la susceptancia B.

8.08 Si $Z = 6-4j\ \Omega$, halla la conductancia y la susceptancia.

COMPRUEBA TUS RESULTADOS

Solucionario

Respuestas y justificaciones. Los códigos coinciden con los de las actividades.

01 · Forma binómica y plano complejo

1.01

a) $\sqrt{3} \cdot i$

b) $\sqrt{2} \cdot (1 + i)$

c) $3 + 0i$

d) $-3 + 0i$

1.02

a) $a = 3$, $b = 0$.

b) $a = 0$, $b = -1$.

1.03

a) $y = 0$; x puede ser cualquier real.

b) $x = 0$ e $y \neq 0$. Se excluye el cero al hablar de imaginario puro.

c) $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

1.04

a) Opuesto: $-\sqrt{2} + 3 \cdot i$; conjugado: $\sqrt{2} + 3 \cdot i$.

b) Opuesto: $-\frac{2}{3} + \frac{i}{5}$; conjugado: $\frac{2}{3} + \frac{i}{5}$.

c) Opuesto: $-3 + 2 \cdot i$; conjugado: $3 + 2 \cdot i$.

d) Opuesto: $3 - \frac{2 \cdot i}{5}$; conjugado: $-3 - \frac{2 \cdot i}{5}$.

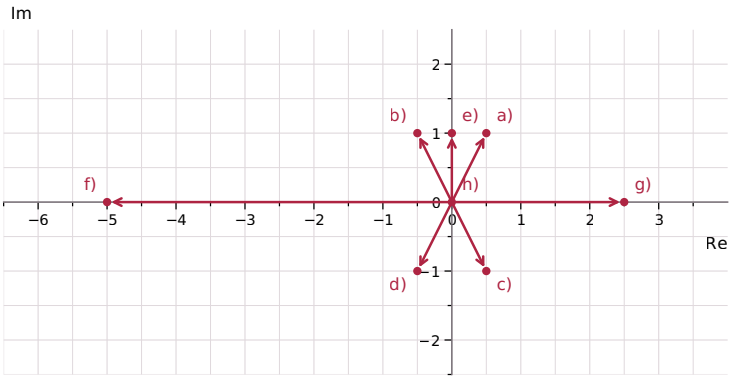
e) Opuesto: $-\frac{3 \cdot i}{5}$; conjugado: $-\frac{3 \cdot i}{5}$.

f) Opuesto: 7; conjugado: -7.

g) Opuesto: 0; conjugado: 0.

h) Opuesto: $2 \cdot i$; conjugado: $2 \cdot i$.

1.05 Afijos: (1/2,1), (−1/2,1), (1/2,−1), (−1/2,−1), (0,1), (−5,0), (5/2,0) y (0,0), respectivamente. Los reales están en el eje horizontal; los imaginarios puros, en el vertical, excluido el origen.



1.06

a) $z1 = -4 + 2 \cdot i$.

b) $z2 = 3 + 4 \cdot i$.

c) $z3 = i$.

d) $z4 = 5$.

e) $z5 = 1 - 3 \cdot i$.

f) $z6 = -6 - 4 \cdot i$.

1.07

a) $3 + 4 \cdot i$

b) $-2 - 2 \cdot i$

c) $\sqrt{2} \cdot (1 + 2 \cdot i)$

1.08

a) $z1 = 2 + 3 \cdot i$.

b) $z2 = 4 + \frac{i}{2}$.

c) $z3 = \frac{7}{2} - 2 \cdot i$.

d) $z4 = 2 - \frac{5 \cdot i}{2}$.

e) $z5 = -\frac{3}{2} - \frac{5 \cdot i}{2}$.

f) $z6 = -5 + \frac{5 \cdot i}{2}$.

g) $z7 = 3 \cdot i$.

1.09

a) Afijo: (5, 1).

b) Afijo: $(\sqrt{2}, -3)$.

c) Afijo: $(-3, -1)$.

d) Afijo: (0, 6).

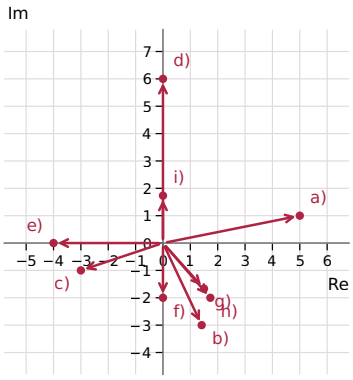
e) Afijo: $(-4, 0)$.

f) Afijo: (0, − 2).

g) Afijo: $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{3})$.

h) Afijo: $(\sqrt{3}, -2)$.

i) Afijo: $(0, \sqrt{3})$.



1.10 **a)** Conjugado: $-3-2\cdot i$; opuesto: $3-2\cdot i$.

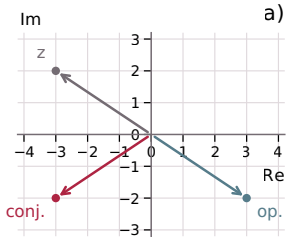
b) Conjugado: $3\cdot i$; opuesto: $3\cdot i$.

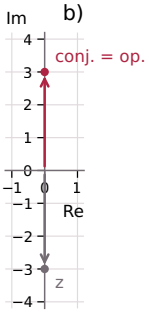
c) Conjugado: $1+3\cdot i$; opuesto: $-1+3\cdot i$.

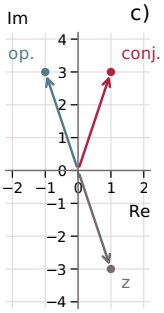
d) Conjugado: -4; opuesto: 4.

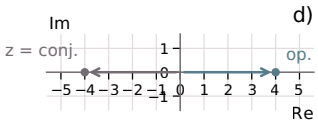
e) Conjugado: $-2+2\cdot i$; opuesto: $2+2\cdot i$.

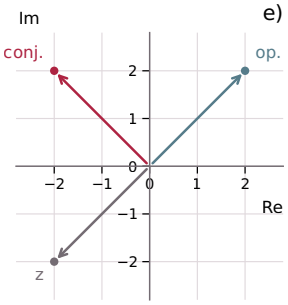
f) Conjugado: $4-i$; opuesto: $-4-i$.

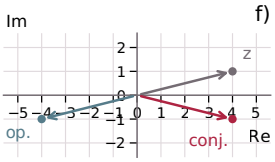












1.11 **a)** Conjugados: 2+3i, 3+2i, −2−i. Son los simétricos respecto al eje real.

b) Opuestos: −2+3i, −3+2i, 2−i. Son los simétricos respecto al origen.

1.12 **a)** k = 0, que da −3i.

b) k = 3, que da el real 3.

02 · Operaciones en forma binómica

2.01

a) $-5+4\cdot i$

b) $-\frac{1}{41}+\frac{9\cdot i}{41}$

c) $9-i$

d) $-1+i$

2.02

a) $-i$

b) $\frac{3}{25}-\frac{4\cdot i}{25}$

c) $-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$

d) $\frac{3}{10}-\frac{i}{10}$

e) $\frac{4}{25}+\frac{3\cdot i}{25}$

f) $\frac{6}{61}-\frac{5\cdot i}{61}$

2.03

a) $\frac{1}{2}-\frac{3\cdot i}{2}$

b) $1+2\cdot i$

2.04

a) $\frac{1}{4}+\frac{i}{4}$

b) $-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$

c) $\frac{1}{17}-\frac{4\cdot i}{17}$

2.05

a) $2+2\cdot i$

b) $\frac{2}{3}-\frac{3\cdot i}{4}$

c) $3+i$

d) $\frac{11}{15}-\frac{7\cdot i}{5}$

2.06

a) $1-4\cdot i$

b) $-3\cdot i$

c) $3+12\cdot i$

d) $-12-4\cdot i$

e) $-4\cdot\sqrt{3}-10\cdot i$

f) $\sqrt{2}+4-i\cdot(3+2\cdot\sqrt{3})$

2.07

a) $-16-12\cdot i$

b) $-25-25\cdot i$

c) $-21-20\cdot i$

d) 41

e) 17

f) $-\sqrt{2}-5\cdot i$

2.08

a) $-1+i$

b) $4+2\cdot i$

c) $-\frac{7}{5}+\frac{9\cdot i}{5}$

2.09

a) $2+i$

b) $\frac{1}{2}-i$

c) $1-\frac{5\cdot i}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{2\cdot i}{3}$

2.10

a) $11\cdot i$

b) $\frac{9}{10}+\frac{53\cdot i}{10}$

c) $-9-9\cdot i$

d) $-5-i$

e) $\frac{36}{25}-\frac{2\cdot i}{25}$

2.11 $2\cdot i$

2.12

a) 1

b) $-1+i$

c) $\frac{16}{3}+27\cdot i$

d) $2+3\cdot i$

2.13

a) La parte real es $5k/(k^2+4)$, así que $k=0$. El resultado es $-3i/2$, distinto de cero.

b) La parte real es $3k(k-1)/2$. $k=0$ da cero y se descarta; $k=1$ da $3i$. Por tanto, $k=1$.

2.14 Al igualar las partes: $4p-3q=15$ y $pq+12=9$. Se obtiene $(p,q)=(3,-1)$ o $(3/4,-4)$.

2.15 $z^2/2=(-8-6i)/2=-4-3i$; $z-5=-4-3i$. Ambos miembros coinciden.

2.16 **a)** $3-7i$.

b) $6-(2+3\sqrt{3})i$.

2.17 La parte imaginaria es $(k+2)/(k^2+1)$. Se anula si $k = -2$. El cociente vale -1.

2.18 La parte real es $\sqrt{2}(k+1)/3$. Se anula si $k = -1$. La parte imaginaria es $(k-2)/3 = -1$, por lo que el resultado es $-i$.

2.19 **a)** $a = 3$; el resultado es $-2i$.

b) $a = -1/3$; el resultado es 6.

c) $a = 1$.

d) $a = \pm\sqrt{39}$, porque el módulo es $\sqrt{40}/\sqrt{(1+a^2)}$.

e) $a = 1/2$; el resultado es $4-4i$, de argumento $7\pi/4$.

2.20 Al igualar partes imaginarias: $a\sqrt{3} = -\sqrt{3}/2$, luego $a = -1/2$. La parte real también coincide: $a^2-3/4 = -1/2 = a$.

2.21 Las partes real e imaginaria son $(-60+2c)/29$ y $(-24-5c)/29$. Igualándolas resulta $c = 36/7$, y el complejo vale $-12/7-(12/7)i$: pertenece a la recta $y = x$, pero está en el tercer cuadrante. Si se exige la semirrecta del primer cuadrante, no existe solución.

2.22 El décimo término es $-6-2i+9(1+2i) = 3+16i$. La suma es $10[(-6-2i)+(3+16i)]/2 = -15+70i$.

03 · Módulo, argumento y forma polar

3.01

a) z1: $2 \cdot \sqrt{5} \angle 153{,}4349°$.

b) z2: $5 \angle 53{,}1301°$.

c) z3: $1 \angle 90°$.

d) z4: $5 \angle 0°$.

e) z5: $\sqrt{10} \angle 288{,}4349°$.

f) z6: $2 \cdot \sqrt{13} \angle 213{,}6901°$.

3.02

a) $\sqrt{5} \angle 26{,}5651°$.

b) $\sqrt{5} \angle 206{,}5651°$.

c) $\frac{\sqrt{2}}{2} \angle 135°$.

d) $\sqrt{7} \angle 319{,}1066°$.

e) $4 \angle 270°$.

f) $12 \angle 0°$.

3.03

a) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}$; $1[\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°]$.

b) $-\frac{3}{2} - \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot i}{2}$; $3[\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°]$.

c) $1 + \sqrt{3} \cdot i$; $2[\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°]$.

d) $-3 \cdot i$; $3[\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°]$.

3.04

a) $5 \angle 306{,}8699°$; $5[\cos(306{,}8699°) + i \operatorname{sen}(306{,}8699°)]$.

b) $2 \cdot \sqrt{2} \angle 45°$; $2 \cdot \sqrt{2}[\cos(45°) + i \operatorname{sen}(45°)]$.

c) $2 \angle 150°$; $2[\cos(150°) + i \operatorname{sen}(150°)]$.

d) $\sqrt{2} \angle 225°$; $\sqrt{2}[\cos(225°) + i \operatorname{sen}(225°)]$.

3.05

a) $12 \angle 180°$.

b) $6 \angle 0°$.

c) $(1/6) \angle 140°$.

d) $2 \angle 180°$.

e) $1 \angle 60°$.

f) $6 \angle 20°$.

3.06

a) $(1/3) \angle 240°$.

b) $1 \angle 120°$: el argumento es $2 \cdot 210° + 30° - 330°$.

3.07

a) $2 \angle 327°$.

b) $3 \angle 338°$.

c) $1 \angle 255°$.

d) $2 \angle 138°$.

3.08

a) $2 \angle 213°$.

b) $3 \angle 202°$.

c) $1 \angle 285°$.

d) $2 \angle 42°$.

3.09

a) $\frac{1}{2} \angle 327°$.

b) $\frac{1}{3} \angle 338°$.

c) $1 \angle 255°$.

d) $\frac{1}{2} \angle 138°$.

3.10

a) $-\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} + \frac{i \cdot (3 \cdot \sqrt{2} + 8)}{2}$

b) 0

3.11

$112 \angle 30° = 56 \cdot \sqrt{3} + 56 \cdot i$.

3.12

a) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}$

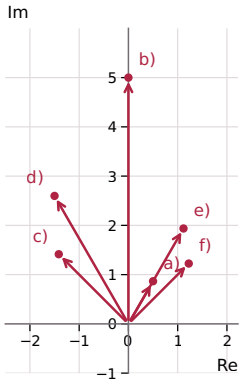
b) $5 \cdot i$

c) $\sqrt{2} \cdot (-1 + i)$

d) $-\frac{3}{2} + \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot i}{2}$

e) $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{15} \cdot i}{2}$

f) $\frac{\sqrt{6} \cdot (1 + i)}{2}$



3.13

a) z1: $5 \angle 53{,}1301°$.

b) z2: $2 \angle 0°$.

c) z3: $3 \angle 270°$.

d) z4: $\sqrt{10} \angle 251{,}5651°$.

e) z5: $2 \cdot \sqrt{2} \angle 135°$.

3.14

a) $5 \angle 306{,}8699°$.

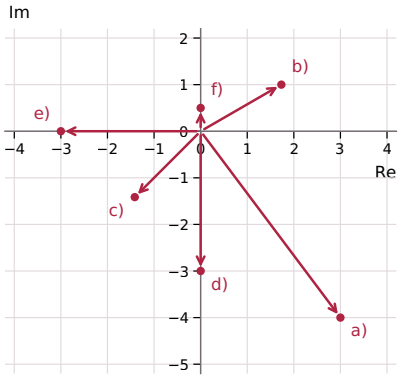
b) $2 \angle 30°$.

c) $2 \angle 225°$.

d) $3 \angle 270°$.

e) $3 \angle 180°$.

f) $\frac{1}{2} \angle 90°$.



3.15

a) $2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot i$

b) $2\cos 215° + 2i \operatorname{sen} 215° \approx -1{,}6383 - 1{,}1472i$.

c) $3 \cdot i$

d) -2

e) $-\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{3 \cdot i}{2}$

f) $-i$

g) $1 - i$

h) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3 \cdot i}{2}$

3.16

a) Conjugado: $5 \angle 120° = -\frac{5}{2} + \frac{5 \cdot \sqrt{3} \cdot i}{2}$. Opuesto: $5 \angle 60° = \frac{5}{2} + \frac{5 \cdot \sqrt{3} \cdot i}{2}$.

b) Conjugado: $3 \angle 225° = \frac{3 \cdot \sqrt{2} \cdot (-1 - i)}{2}$. Opuesto: $3 \angle 315° = \frac{3 \cdot \sqrt{2} \cdot (1 - i)}{2}$.

c) Conjugado: $\sqrt{3} \angle 330° = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}$. Opuesto: $\sqrt{3} \angle 210° = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}$.

3.17 **a)** $\sqrt{3} \angle \frac{\pi}{6}$ rad.

b) $3 \angle \frac{\pi}{2}$ rad.

3.18 Opuesto: r ∠ (α+180°). Conjugado: r ∠ (−α). Los argumentos se consideran módulo 360°; en radianes, el giro del opuesto es π.

3.19 **a)** 12 ∠ 180°.

b) 3 ∠ (3π/4) rad.

c) 8 ∠ 330°.

d) 4 ∠ 120°.

e) 25 ∠ (2π/3) rad.

f) 10 ∠ 30°.

g) (7/5) ∠ (π/6) rad.

h) 32 ∠ 240°.

i) 27 ∠ π rad = −27.

3.20 **a)** (1/2) ∠ 210°.

b) (1/3) ∠ (3π/2) rad.

c) (1/4) ∠ (5π/3) rad.

d) 4 ∠ π rad.

e) (1/e) ∠ (11π/6) rad.

f) (√7/7) ∠ 325°.

3.21 **a)** 12 ∠ 105°.

b) 15 ∠ 114°.

c) 2 ∠ 44°.

d) 1 ∠ 85°.

3.22 **a)** $2 - 40 \cdot i + \sqrt{2} \cdot (-16 - 16 \cdot i) + \sqrt{3} \cdot (-24 + 14 \cdot i) + \sqrt{6} \cdot (32 + 16 \cdot i)$

b) $1 + \frac{\sqrt{3} \cdot (1 - i)}{3} - \frac{i}{3}$

3.23 1+bi = 2 ∠ 60° = 1+√3i. Por tanto, b = √3.

3.24 z+1/2 = c(cos 60°+i sen 60°). Por tanto, z = (c−1)/2+(c√3/2)i.

3.25 El cociente que se suma es i/2; el resultado deseado es 1+i. Así, z = 1+i/2.

3.26 El módulo de z_1 es 4 y el argumento de z_2 es 120°. Por tanto, $z_1 = 4 \angle 150° = -2\sqrt{3}+2i$ y $z_2 = 2 \angle 120° = -1+\sqrt{3}i$.

3.27 **a)** $6a-6bi$: es seis veces el conjugado.

b) $3b-3ai$: se multiplica $a+bi$ por $-3i$.

04 · Potencias y raíces

4.01

a) $9 \cdot i$

b) $-972 + 972 \cdot i$

c) -64

d) 10000

e) $-64 \cdot i$

f) $-243 \cdot i$

4.02 El módulo es $16 \cdot 2^4 = 256$; el argumento es $60° + 4 \cdot 210° = 900° \equiv 180°$. Resultado: $256 \angle 180° = -256$.

4.03

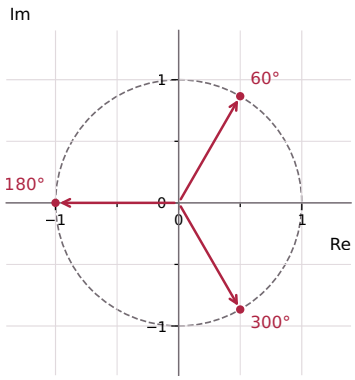
a) Módulo $\sqrt{3}$; argumentos 75°, 255°.

b) Módulo 3; argumentos 60°, 180°, 300°.

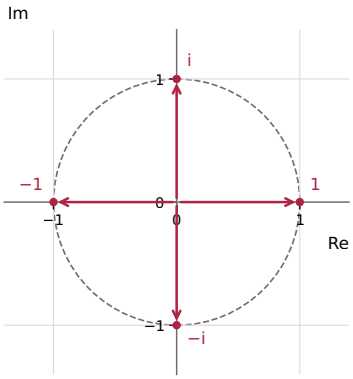
c) Módulo 1; argumentos 67,5°, 157,5°, 247,5°, 337,5°.

d) Módulo $\sqrt[6]{2}$; argumentos 45°, 165°, 285°.

4.04 El cociente vale -1. Sus raíces cúbicas son $1 \angle 60°$, $1 \angle 180°$ y $1 \angle 300°$, es decir, $1/2+(\sqrt{3}/2)i$, -1 y $1/2-(\sqrt{3}/2)i$.



4.05 Las potencias se repiten cada cuatro exponentes: i, −1, −i, 1. Para todo entero n, $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$. Con exponentes negativos, la sucesión comienza −i, −1, i, 1, −i, −1.



4.06

a) 16 ∠ 60°.

b) 16 ∠ (2π/3) rad.

c) 729 ∠ 210°.

d) 125 ∠ (π/2) rad.

4.07

a) Base: $\sqrt{2}$ ∠ 315°. Potencia: − 4.

b) Base: 2 ∠ 135°. Potencia: 64 · i.

c) Base: 2 ∠ 120°. Potencia: $-8 + 8 \cdot \sqrt{3} \cdot i$.

d) Base: $\sqrt{3}$ ∠ 324,7356°. Potencia: $-13 \cdot \sqrt{2} + 43 \cdot i$.

4.08

a) 81[cos 100°+i sen 100°].

b) 512[cos 0°+i sen 0°] = 512.

c) 78125[cos 85°+i sen 85°].

d) cos π+i sen π = −1.

e) 81[cos 0°+i sen 0°] = 81.

4.09

a) Módulo 4; argumentos 40°, 160°, 280°.

b) Módulo 1; argumentos 30°, 102°, 174°, 246°, 318°.

c) Módulo 2; argumentos 45°, 117°, 189°, 261°, 333°.

d) Módulo 2; argumentos 30°, 90°, 150°, 210°, 270°, 330°.

e) Módulo $\sqrt{3}$; argumentos 55°, 145°, 235°, 325°.

f) Módulo $\sqrt[6]{2}$; argumentos 12,5°, 72,5°, 132,5°, 192,5°, 252,5°, 312,5°.

4.10

a) Módulo 1; argumentos 0°, 180°.

b) Módulo 1; argumentos 0°, 120°, 240°.

c) Módulo 1; argumentos 0°, 90°, 180°, 270°.

d) Módulo 1; argumentos 45°, 225°.

e) Módulo 1; argumentos 30°, 150°, 270°.

f) Módulo 1; argumentos 22,5°, 112,5°, 202,5°, 292,5°.

4.11

a) Módulo $2\frac{2}{3}$; argumentos 30°, 90°, 150°, 210°, 270°, 330°.

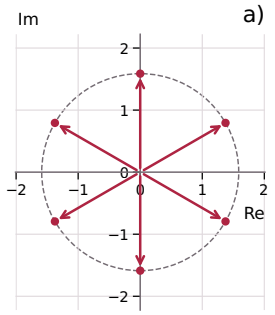
b) Módulo 1; argumentos 90°, 210°, 330°.

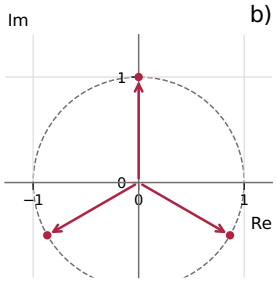
c) Módulo $2 \cdot \sqrt[3]{2}$; argumentos 30°, 150°, 270°.

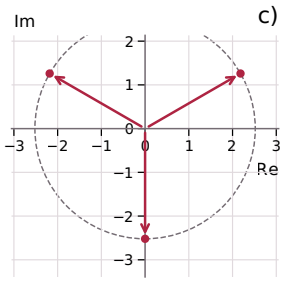
d) Módulo 1; argumentos 15°, 135°, 255°.

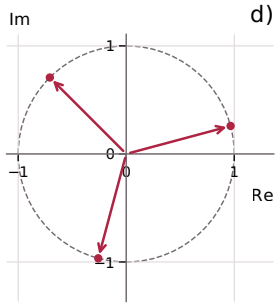
e) Módulo $\sqrt[5]{2}$; argumentos 60°, 132°, 204°, 276°, 348°.

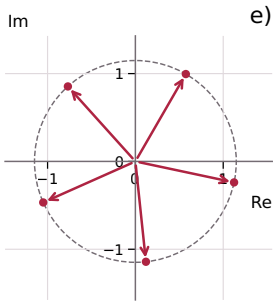
f) Módulo 5; argumentos 0°, 90°, 180°, 270°.

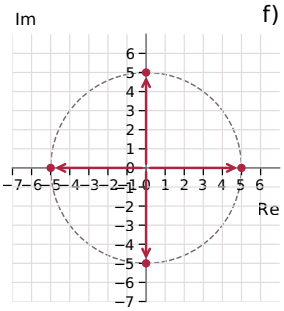




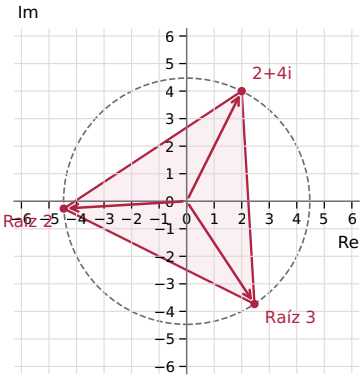








4.12 $-1-2\cdot i-\sqrt{3}\cdot(2-i)$ y $-1-2\cdot i+\sqrt{3}\cdot(2-i)$. Se obtienen girando 120° y 240° alrededor del origen.



4.13 Ambos valores elevados a n deben coincidir, por lo que n·90° es múltiplo de 360°. Así, n = 4m, con m entero positivo, y $z = 6^{4m} \angle (120°m)$. Hay infinitas soluciones. El mínimo es n = 4 y z = 1296 ∠ 120°.

4.14 **a)** El radicando es −16i. Módulo 2; argumentos 67,5°, 157,5°, 247,5°, 337,5°.

b) El cociente es i. Módulo 1; argumentos 45°, 225°.

c) El radicando es −i. Módulo 1; argumentos 90°, 210°, 330°.

4.15 El radicando es 2 ∠ 90° = 2i. Sean $A = \frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$ y $B = \frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Las raíces son A+Bi, −B+Ai, −A−Bi y B−Ai. Sus argumentos son 22,5°, 112,5°, 202,5° y 292,5°.

4.16 Se gira 120° y 240°: $-\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}$ $-\frac{i\cdot(5-3\cdot\sqrt{3})}{2}$ y $\frac{(1-i)\cdot(1-4\cdot i+\sqrt{3}\cdot(4+i))}{2}$. El módulo común es √34.

4.17 Cada grupo de cuatro potencias consecutivas suma cero. Según el resto de n al dividirlo entre 4, el resultado es: resto 0 → 1; resto 1 → 1+i; resto 2 → i; resto 3 → 0.

05 · Ecuaciones y sistemas

5.01

a) Módulo 1; argumentos 0°, 120°, 240°.

b) Módulo 2; argumentos 36°, 108°, 180°, 252°, 324°.

c) Módulo 2; argumentos 45°, 135°, 225°, 315°.

d) Módulo 3; argumentos 0°, 90°, 180°, 270°.

5.02

a) $-1-i, -1+i$.

b) $-3-i, -3+i$.

c) $-5-2\cdot i, -5+2\cdot i$.

d) $5-i, 5+i$.

5.03

a) $\frac{6}{5}-\frac{3\cdot i}{5}$

b) $\frac{11}{13}+\frac{16\cdot i}{13}$

5.04

a) Módulo 2; argumentos 0°, 90°, 180°, 270°.

b) Módulo 2; argumentos 60°, 180°, 300°.

c) Módulo $\sqrt{3}$; argumentos 0°, 90°, 180°, 270°.

d) Módulo $3^{\frac{2}{3}}$; argumentos 60°, 180°, 300°.

5.05

a) $-7\cdot i, 7\cdot i$.

b) $-8\cdot i, 8\cdot i$.

c) $-11\cdot i, 11\cdot i$.

d) $-2\cdot i, 2\cdot i$.

e) $-10\cdot i, 10\cdot i$.

5.06

a) Sí: el primer miembro vale 0.

b) Sí: el primer miembro vale 0.

c) No: $z^3 = 1$ y $z^3+1 = 2$.

5.07

Escribe $z_1 = 1+bi$, $z_2 = 2+di$. Entonces $b+d = 2$ y $2+bd = 0$. Las dos parejas son $z_1 = 1+(1+\sqrt{3})i$, $z_2 = 2+(1-\sqrt{3})i$; o $z_1 = 1+(1-\sqrt{3})i$, $z_2 = 2+(1+\sqrt{3})i$.

5.08

Si $z_1 = iz_2$ y $z_1+z_2 = 3$, entonces $z_2 = 3/(1+i) = 3/2-(3/2)i$ y $z_1 = 3/2+(3/2)i$.

5.09 **a)** Módulo 1; argumentos 36°, 108°, 180°, 252°, 324°.

b) Módulo 5; argumentos 0°, 90°, 180°, 270°.

c) Módulo 1; argumentos 0°, 72°, 144°, 216°, 288°.

d) Módulo 2; argumentos 45°, 135°, 225°, 315°.

5.10 **a)** $x = 2 \pm 3i$.

b) $x = 0, 2, -1+\sqrt{3}i, -1-\sqrt{3}i$.

c) $x = \pm\sqrt{(3+3\sqrt{2})}$ y $x = \pm i\sqrt{(3\sqrt{2}-3)}$. Se usa $t = x^2$: $t = 3 \pm 3\sqrt{2}$.

d) $x = 0, -3, 3/2+(3\sqrt{3}/2)i, 3/2-(3\sqrt{3}/2)i$.

5.11 **a)** $x^2-2x+2 = 0$; la otra raíz es $1+i$.

b) $x^2-6x+13 = 0$; la otra raíz es $3+2i$.

5.12 La sustitución da $-10-m = 0$, luego $m = -10$. La otra raíz es $3+i$, conjugada de la primera.

5.13 El producto de las tres raíces es 2. Como $i \cdot 2i = -2$, la raíz restante es -1. Al desarrollar $(x-i)(x-2i)(x+1)$ se obtiene $p = 1-3i$ y $q = -2-3i$.

5.14 **a)** $x = [-1 \pm \sqrt{5}]i/2$.

b) Las raíces son $x = 1 \pm (A-Bi)$, donde $A = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}}$ y $B = \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}}$. Se obtiene de $x = 1 \pm \sqrt{(1-3i)}$.

c) $x = 3i$ y $x = 4i$.

d) $x^3 = 27i$. Módulo 3; argumentos 30°, 150°, 270°.

5.15 $x = -\frac{29}{5} + \frac{3 \cdot i}{5}$.

5.16 Escribe $z = (b+1)+bi$. La parte imaginaria del cubo es $b(2b^2+6b+3)$. Al igualarla a cero se obtienen: 1, $\frac{(1-i) \cdot (1-2 \cdot i-\sqrt{3} \cdot i)}{2}$, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i \cdot (-3+\sqrt{3})}{2}$.

5.17 $z = 0$ es solución. Si $z \neq 0$, en forma polar $r^3 = r$ implica $r = 1$, y $3\alpha \equiv -\alpha$ (módulo 360°) da $\alpha =$ 0°, 90°, 180° o 270°. Soluciones: $0, 1, i, -1$ y $-i$.

5.18 Sean $z = a+bi$ y su conjugado. La diferencia obliga a $b = 3$. De $z = i \cdot \text{conj}(z)$ se deduce $a = b = 3$. Los números, en el orden indicado, son $3+3i$ y $3-3i$.

5.19 El producto de raíces es $6i$, así que la tercera raíz es i. Al desarrollar $(z-2)(z-3)(z-i)$: $a = -5-i$ y $b = 6+5i$.

5.20 $z/w = (2i)^2 = -4$, luego $z = -4w$. Como $z+w = i$, resulta $w = -i/3$ y $z = 4i/3$.

5.21 **a)** $x^2-6x+10 = 0$.

b) $x^2+4x+29 = 0$.

5.22 **a)** $z = -1+i$ o $z = 3-i$.

b) $z = 1+i, -1-i, 2i, -2i$.

c) $z = 2+3i, -2-3i, 2-3i, -2+3i$.

5.23 **a)** $-55-41\cdot i$

b) $-1-2\cdot i$

5.24 **a)** $x = 2+3i$ o $x = -2+5i$. Se usa $x = 4i\pm\sqrt{(3-4i)} = 4i\pm(2-i)$.

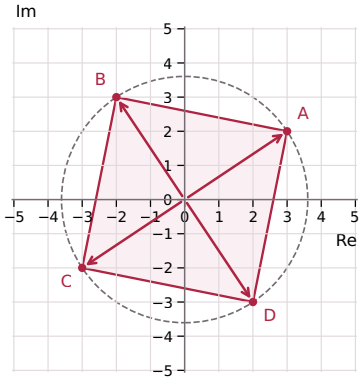
b) $x = 3+2i$, $y = 2-3i$.

5.25 La parte real es 8 y cada módulo es 10. Así, $8^2+b^2 = 100$, luego $b = \pm 6$. Los números son $8+6i$ y $8-6i$.

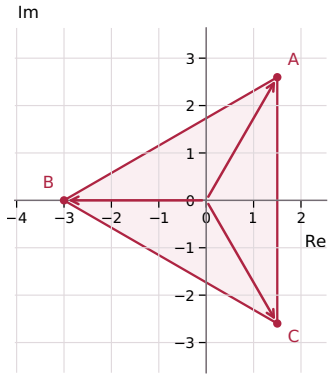
5.26 Al multiplicar por $x-1$ se obtiene $x^6-1 = 0$. $x = 1$ no cumple la ecuación inicial y se excluye. Las cinco raíces son $1\angle 60°$, $1\angle 120°$, $1\angle 180°$, $1\angle 240°$ y $1\angle 300°$.

06 · Geometría con complejos

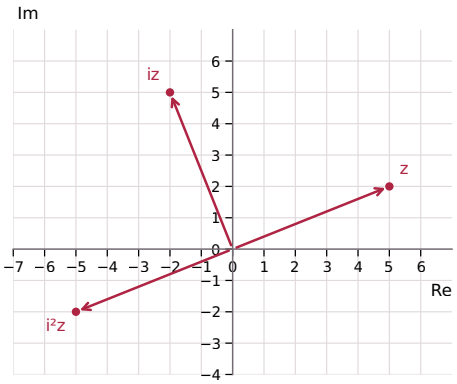
6.01 Los giros sucesivos de 90° equivalen a multiplicar por i: B(−2,3), C(−3,−2), D(2,−3). Todos están a distancia √13 del origen.



6.02 A(3/2,3√3/2), B(−3,0), C(3/2,−3√3/2). Los argumentos son 60°, 180° y 300°, y el módulo común es 3.



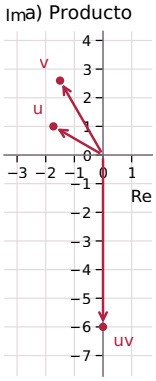
6.03 (5+2i)i = −2+5i: giro antihorario de 90° alrededor del origen. (5+2i)i² = −5−2i: giro de 180°, que da el opuesto.

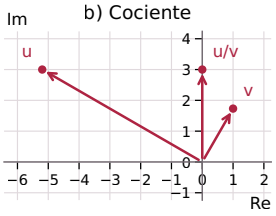


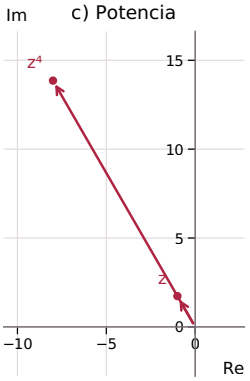
6.04 **a)** 6 ∠ 270° = −6i. Se multiplican los módulos y se suman los argumentos.

b) 3 ∠ 90° = 3i. Se dividen los módulos y se restan los argumentos.

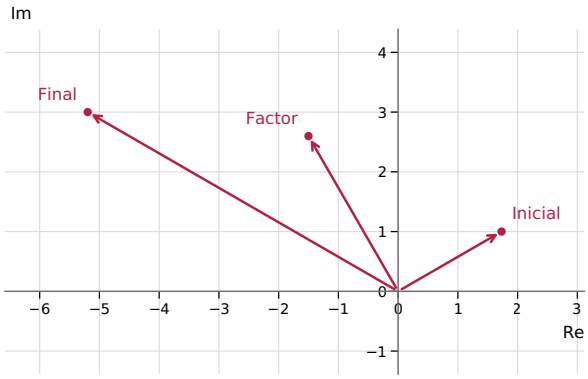
c) 16 ∠ (2π/3) rad = −8+8√3i. Se eleva el módulo a la cuarta potencia y se multiplica el argumento por 4.



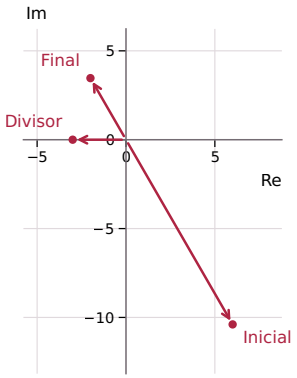




6.05 El factor es el cociente: (6 ∠ 150°):(2 ∠ 30°) = 3 ∠ 120° = −3/2+(3√3/2)i.

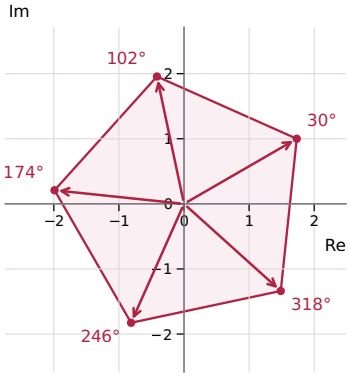


6.06 El divisor es $(12 \angle 300°):(4 \angle 120°) = 3 \angle 180° = -3$.

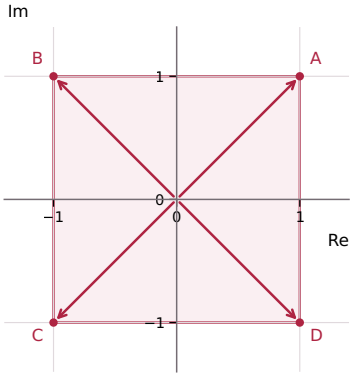


6.07 Las raíces son $3+3i$, $-3+3i$, $-3-3i$ y $3-3i$. Elevando cualquiera a la cuarta: $(3+3i)^4 = -324$. Por tanto, el número es -324.

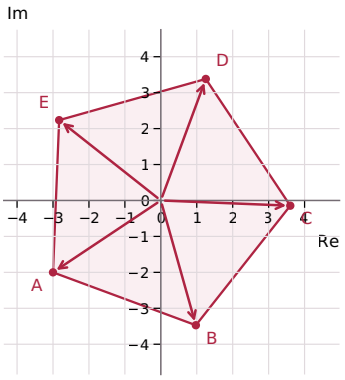
6.08 Los otros vértices son $2 \angle 102°$, $2 \angle 174°$, $2 \angle 246°$ y $2 \angle 318°$. El complejo es $(2 \angle 30°)^5 = 32 \angle 150° = -16\sqrt{3}+16i$.



6.09 Las raíces son $1+i$, $-1+i$, $-1-i$ y $1-i$. Forman un cuadrado de lado 2; el área es 4 unidades cuadradas.

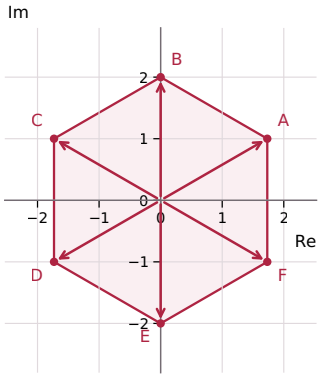


6.10 Se multiplica $-3-2i$ por $\cos(72°k)+i\,\operatorname{sen}(72°k)$, para $k = 1, 2, 3, 4$. Los afijos aproximados son (0,9751, -3,4712), (3,6026, -0,1453), (1,2515, 3,3814), (-2,8292, 2,2351).



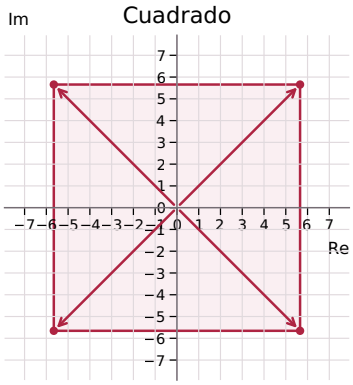
6.11 Sea $z = a+bi$, con $b \neq 0$ para que el triángulo no degenere. El lado entre conjugados mide $2|b|$. Igualando su cuadrado con la distancia a -5: $(a+5)^2+b^2 = 4b^2$, luego $a = -5\pm\sqrt{3}|b|$. Hay infinitas soluciones: $z = -5\pm\sqrt{3}|b|+bi$, con b real no nulo.

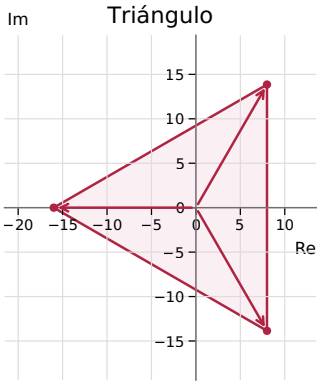
6.12 Las raíces tienen módulo 2 y argumentos 30°, 90°, 150°, 210°, 270° y 330°. El hexágono tiene lado 2 y apotema $\sqrt{3}$. Su área es $(12\cdot\sqrt{3})/2 = 6\sqrt{3}$ unidades cuadradas.



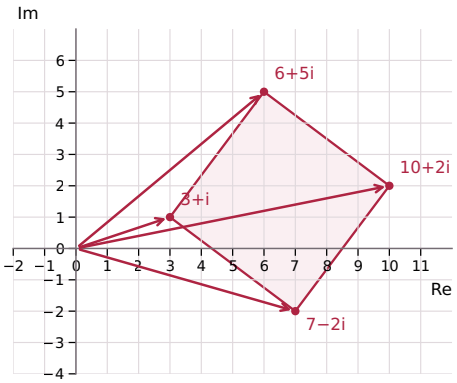
6.13 **a)** Cuadrado: radio 8, lado $8\sqrt{2}$, área 128 unidades cuadradas.

b) Triángulo equilátero: radio 16, lado $16\sqrt{3}$, área $192\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

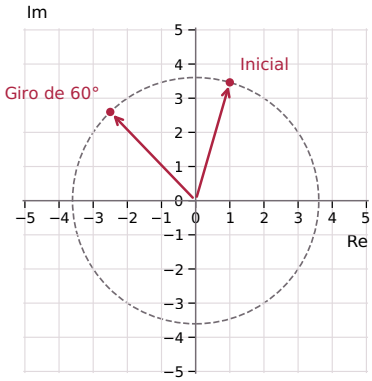




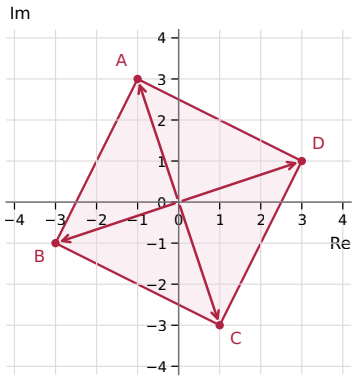
6.14 El lado tiene vector 3+4i. El giro horario de 90° es 4−3i. Sumándolo a ambos vértices se obtienen 10+2i y 7−2i; este último está en el cuarto cuadrante.



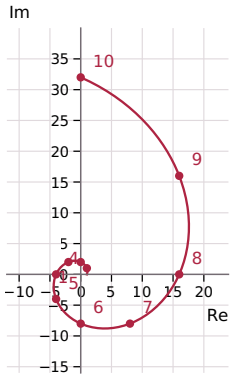
6.15 $-\frac{5}{2}+\frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot i}{2}$; $\sqrt{13}\angle 133{,}8979°$.



6.16 Los giros de 90°, 180° y 270° dan (−3,−1), (1,−3) y (3,1). El lado mide √20, por lo que el área es 20 unidades cuadradas.



6.17 1+i = √2 ∠ 45°. La potencia n-ésima es $2^{n/2}$ ∠ (45°n). Para n de 1 a 10: 1 + i, 2 · i, − 2 + 2 · i, − 4, − 4 − 4 · i, − 8 · i, 8 − 8 · i, 16, 16 + 16 · i, 32 · i. Cada paso gira 45° y multiplica la distancia al origen por √2.



07 · Demostraciones y profundización

7.01 Al desarrollar $(\cos\alpha+i\,\operatorname{sen}\alpha)^3$ e igualar partes reales e imaginarias con $\cos 3\alpha+i\,\operatorname{sen}3\alpha$: $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha-3\cos\alpha\,\operatorname{sen}^2\alpha$; $\operatorname{sen}3\alpha = 3\cos^2\alpha\,\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}^3\alpha$.

7.02 **a)** Las raíces tienen módulo $\sqrt[4]{2}$ y argumentos 30°, 120°, 210° y 300°. Se agrupan en parejas opuestas, que suman cero.

b) Las raíces tienen módulo 2 y argumentos 0°, 60°, 120°, 180°, 240° y 300°. Las parejas separadas 180° suman cero.

7.03 Si $ax^2+bx+c = 0$ tiene a, b, c reales y discriminante $\Delta < 0$, las raíces son $-b/(2a)\pm i\sqrt{(-\Delta)}/(2a)$. Comparten parte real y tienen partes imaginarias opuestas: son conjugadas.

7.04 Para n = 2, el producto es −1; para n = 3, es 1. En general, los módulos valen 1 y la suma de argumentos es $[360°/n]\cdot n(n-1)/2 = 180°(n-1)$. El producto es $(-1)^{n-1}$, equivalente a $(-1)^{n+1}$.

7.05 Se cumple $|z+w| \le |z|+|w|$ (desigualdad triangular). Hay igualdad si uno es cero o ambos tienen el mismo argumento. Se demuestra con $|z+w|^2 = |z|^2+|w|^2+2\operatorname{Re}(z\cdot\overline{w}) \le (|z|+|w|)^2$.

7.06 Para $z \neq 0$, multiplicar por un real positivo conserva el argumento. Un real negativo añade 180°; por ejemplo, $i\cdot(-1) = -i$. Si el factor o z es cero, el producto no tiene argumento definido.

7.07 Sí, siempre que ambos sean no nulos: $1/(z_1z_2) = (1/z_1)(1/z_2)$. Si alguno es cero, los inversos implicados no existen.

7.08 Si $z_1 = a+bi$ y $z_2 = c+di$, $\overline{z_1+z_2} = (a+c)-(b+d)i$, que es la suma de los conjugados. En el producto, $\overline{z_1z_2} = (ac-bd)-(ad+bc)i = (a-bi)(c-di)$. Estas reglas se extienden a sumas y potencias. Para un polinomio P de coeficientes reales, $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$; si $P(z) = 0$, también $P(\overline{z}) = 0$.

7.09 Se tiene $u^3 = 1$ y $u \neq 1$: es una raíz cúbica primitiva de la unidad, de argumento 120°. Para $z = -2+5i$, los tres valores elevados al cubo dan $142 - 65\cdot i$. En general, $(uz)^3 = (u^2z)^3 = z^3$. Si $z \neq 0$, son tres raíces distintas, separadas por giros de 120°; si $z = 0$, coinciden en cero.

7.10 Cada factor $z^k+\overline{z}^k$ vale $2r^k\cos(k\alpha)$. Se cancelan los cosenos no nulos. Como $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$, el resultado es $\dfrac{1}{2^n\cdot r^{n(n+1)/2}}$.

7.11 **a)** Es necesario $a+bi \neq 0$. La condición es que $t = (c+di)/(a+bi)^2$ sea real y cumpla $0 < t \leq 1/4$. En términos reales: $d(a^2-b^2)-2abc = 0$ y $0 < c(a^2-b^2)+2abd \leq (a^2+b^2)^2/4$.

b) Si las raíces tienen el mismo argumento, son r_1u y r_2u, con $r_1, r_2 > 0$ y $|u| = 1$. Entonces $t = r_1r_2/(r_1+r_2)^2$ pertenece a $(0,1/4]$. Recíprocamente, con ese t, las raíces son $-(a+bi)[1\pm\sqrt{(1-4t)}]/2$: los dos factores reales son positivos, por lo que comparten argumento. $t = 1/4$ corresponde a una raíz doble.

7.12 **a)** 225. Según qué pareja coincida, los casos son 95, 95, 35. Son excluyentes y su suma da el total. En el último grupo, $(1+i)^y$ es un entero entre 0 y 19 solo para $y = 0$ (valor 1) e $y = 8$ (valor 16).

b) $3+3i$. Al multiplicar las dos ecuaciones se obtiene $z^2 = 18 \angle 90°$; las raíces son $\pm(3+3i)$, y solo $3+3i$ figura entre las opciones.

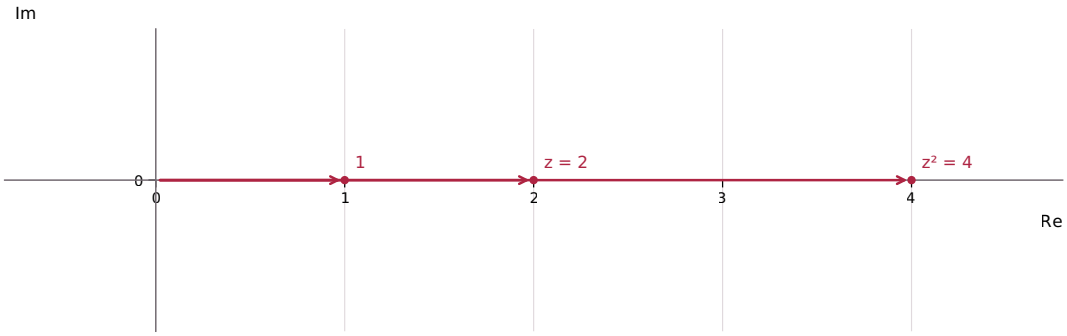
c) $2 \angle 180° = -2$. El polinomio factoriza como $(z^2-9)(z^2+4)$, con raíces ± 3 y $\pm 2i$.

d) $n = 97$. Cada bloque de cuatro términos suma $2-2i$. Los primeros 96 suman $48-48i$ y el siguiente es $97i$.

e) 1. El cociente tiene módulo 1 y argumento $-60°$; su potencia duodécima tiene argumento $-720°$, equivalente a $0°$.

7.13 Como los coeficientes son reales, $P(\text{conj}(z)) = a\cdot\text{conj}(z)^2+b\cdot\text{conj}(z)+c = \text{conj}(az^2+bz+c) = \text{conj}(P(z)) = 0$.

7.14 Sea $z = a+bi$. El determinante de los vectores $(a-1,b)$ y $(a^2-b^2-1,2ab)$ es $b[(a-1)^2+b^2]$. Se anula únicamente si $b = 0$, pues el segundo factor solo es cero cuando $a = 1$ y $b = 0$. Por tanto, z puede ser cualquier número real. Si se exigen tres afijos distintos, se excluyen 0, 1 y -1.



7.15 **a)** Como a, b y c son no nulos, los polinomios normalizados deben coincidir. Se deduce $(a,b,c) = a(1,k,k^2)$, con $k^3 = 1$. La ecuación normalizada es $x^2+kx+k^2 = 0$; sus raíces son $k\omega$ y $k\omega^2$, donde $\omega = -1/2+(\sqrt{3}/2)i$.

b) Si los coeficientes son reales, necesariamente $k = 1$, luego $a = b = c$ y las raíces son $-1/2\pm(\sqrt{3}/2)i$.

7.16 A es la semirrecta $z = 2+3i+t(1+i)$, con $t > 0$. La distancia al centro $2+i$ cumple $|z-(2+i)|^2 = t^2+(2+t)^2 > 4$. Por tanto, $A \cap B$ es vacío y también lo es su proyección. La recta completa $y = x+1$ daría otro problema: los puntos de la parte que atraviesa el disco tienen argumento $5\pi/4$ respecto a $2+3i$, no $\pi/4$.

7.17 El módulo de a_n es $\sqrt{2}\cdot\sqrt{(3/2)}\cdot\cdots\cdot\sqrt{((n+1)/n)} = \sqrt{(n+1)}$. Además, $a_{n+1} = a_n(1+i/\sqrt{(n+1)})$, de modo que $|a_n-a_{n+1}| = |a_n|/\sqrt{(n+1)} = 1$. La suma de m términos vale m; por tanto, $m = 1990$.

08 · Complejos y circuitos eléctricos

8.01 Es un conjunto de elementos conectados que permite el paso de corriente cuando existe un camino cerrado. Puede contener fuentes, conductores, resistencias, condensadores, bobinas y dispositivos de control.

8.02 La impedancia Z relaciona los fasores de tensión y corriente: $Z = V/I$. Reúne resistencia y reactancia en un número complejo. La admitancia Y es su inversa. Z se mide en ohmios (Ω) e Y en siemens (S).

8.03 $Y = 1/Z$, para $Z \neq 0$; recíprocamente, $Z = 1/Y$, para $Y \neq 0$.

8.04 Se utilizan para analizar circuitos de corriente alterna y su respuesta a distintas frecuencias. La impedancia corporal describe la relación entre tensión y corriente en los tejidos mediante un modelo eléctrico; depende de la frecuencia y de las condiciones de medida. Su estudio tiene aplicaciones en bioimpedancia y en el análisis de la seguridad eléctrica.

8.05 $|Z| = \sqrt{(3^2+4^2)} = 5\ \Omega$. $Y = 1/(3+4j) = (3-4j)/25\ S = 0{,}12-0{,}16j\ S$.

8.06 $Z = 1/0{,}25 = 4\ \Omega$.

8.07 Para $R^2+X^2 \neq 0$: $Y = (R-Xj)/(R^2+X^2)$. Por tanto, $G = R/(R^2+X^2)$ y $B = -X/(R^2+X^2)$, ambas en siemens si R y X están en ohmios.

8.08 $Y = (6+4j)/(6^2+4^2) = 3/26+j/13\ S$. Conductancia $G = 3/26\ S$; susceptancia $B = 1/13\ S$.