DOSSIER DE EJERCICIOS

1.º BACHILLERATO

Límites y continuidad

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

01 Aproximaciones y lectura de gráficas

02 Límite en un punto

03 Límites en el infinito

04 Continuidad

05 Asíntotas

06 Aplicaciones y repaso

74 actividades · 6 apartados

Índice · Ejercicios · Solucionario final

CONTENIDOS

Índice

Actividades organizadas por conceptos para practicar, repasar y comprobar las respuestas. Cada ejercicio tiene un código que lo identifica también en el solucionario.

01 Aproximaciones y lectura de gráficas **3**

02 Límite en un punto **6**

03 Límites en el infinito **10**

04 Continuidad **15**

05 Asíntotas **22**

06 Aplicaciones y repaso **27**

S Solucionario **30**

Cómo trabajar. Resuelve los ejercicios en el espacio disponible o en tu cuaderno. Comprueba los procedimientos y resultados al terminar cada bloque.

APARTADO 01

Aproximaciones y lectura de gráficas

7 actividades

001 ACTIVIDAD

Sea $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 45}{2x - 10}$. Comprueba que $f(4) = 6{,}5$; $f(4{,}9) = 6{,}95$ y $f(4{,}99) = 6{,}995$. Calcula $f(4{,}999)$, $f(4{,}9999)$ y $f(4{,}99999)$. ¿Qué valor se aproxima a tomar $f(x)$ cuando x se acerca a 5?

Calcula de forma análoga el límite, cuando $x \to 3$, de $\dfrac{x^2 + 6x - 27}{2x - 6}$.

002 ACTIVIDAD

Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 1)$

003 ACTIVIDAD

Calcula estos límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$

b) $\lim\limits_{x \to 0{,}1} \log_{10} x$

004 ACTIVIDAD

Calcula k para que la función $y = f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + k, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$$

005 ACTIVIDAD

Calcula los límites de las funciones siguientes en los puntos que se indican. Donde convenga, especifica el valor del límite a la izquierda y a la derecha del punto. Representa gráficamente los resultados:

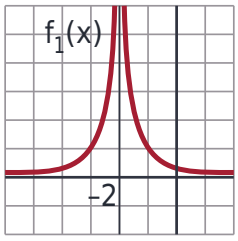
a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ en -2, 0 y 2

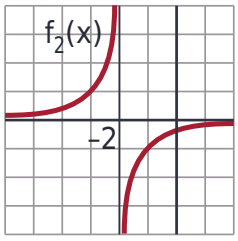
b) $f(x) = \dfrac{4x - 12}{(x - 2)^2}$ en 2, 0 y 3

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$ en 1 y -3

d) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 + 3x^2}$ en 0 y -3

006 ACTIVIDAD





Estas son, respectivamente, las gráficas de las funciones:

$$f_1(x) = \frac{1}{(x + 2)^2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = \frac{-1}{x + 2}$$

¿Cuál es el límite de cada una de estas funciones cuando $x \to -2$?

$\to$

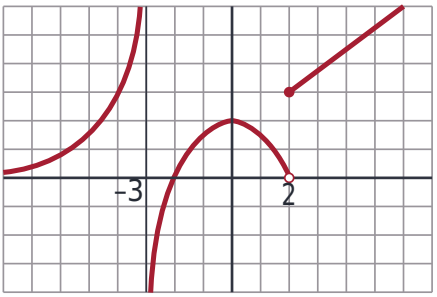
$\lfloor$

007 ACTIVIDAD

Sobre la gráfica de la función $f(x)$, halla:

a) $\lim_{x \to -3^-} f(x)$ b) $\lim_{x \to -3^+} f(x)$ c) $\lim_{x \to 0} f(x)$ d) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

e) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ f) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ g) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ h) $\lim_{x \to -2} f(x)$



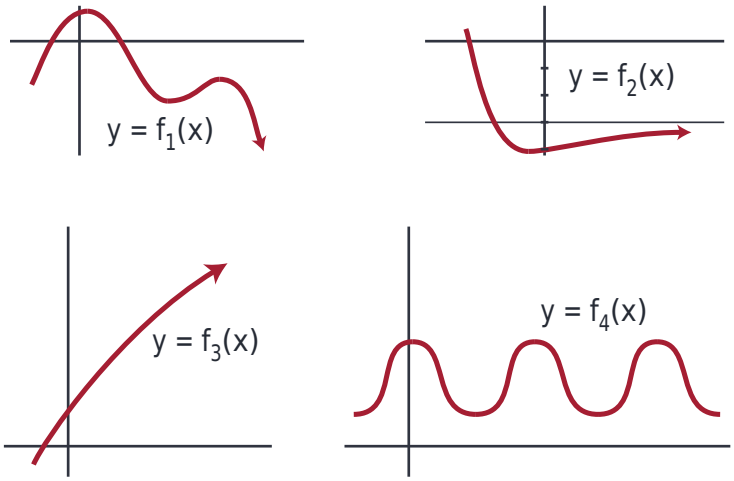
APARTADO 02

Límite en un punto

12 actividades

008 ACTIVIDAD

Di el límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:



009 ACTIVIDAD

Di el valor del límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$

b) $f(x) = 5x^3 + 7x$

c) $f(x) = x - 3x^4$

d) $f(x) = \frac{1}{3x}$

e) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

f) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$

010 ACTIVIDAD

Calcula $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y representa sus ramas:

a) $f(x) = \frac{1}{3x}$

b) $f(x) = \frac{3}{x}$

c) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

d) $f(x) = 3x - 5$

011 ACTIVIDAD

Calcula $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y representa sus ramas:

a) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$

d) $f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$

012 ACTIVIDAD

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} \left(5 - \frac{x}{2}\right)$

b) $\lim_{x \to -1} (x^3 - x)$

c) $\lim_{x \to 3} \frac{1 - x}{x - 2}$

d) $\lim_{x \to 0,5} 2^x$

e) $\lim_{x \to -2} \sqrt{10 + x - x^2}$

f) $\lim_{x \to 4} \log_2 x$

g) $\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x^2}$

h) $\lim_{x \to 2} e^x$

013 ACTIVIDAD

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, halla:

a) $\lim_{x \to -2} f(x)$ b) $\lim_{x \to 3} f(x)$ c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

014 ACTIVIDAD

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{4x}{x^2 - 2x}$ b) $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 3x}{x}$

c) $\lim_{h \to 0} \frac{3h^3 - 2h^2}{h}$ d) $\lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 7h}{4h}$

015 ACTIVIDAD

Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ b) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x}$

c) $\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$ d) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

e) $\lim_{x \to -3} \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$ f) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

016 ACTIVIDAD

Calcula el límite de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x}$ en $x = 3$, $x = 0$ y $x = -1$.

017 ACTIVIDAD

Calcula los límites de las siguientes funciones en los puntos que anulan su denominador:

a) $f(x) = \dfrac{3x}{2x + 4}$

b) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 2x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$

d) $f(t) = \dfrac{t^3 - 2t^2}{t^2}$

018 ACTIVIDAD

Calcula los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

019 ACTIVIDAD

Calcula los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4}$

APARTADO 03

Límites en el infinito

12 actividades

020 ACTIVIDAD

Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:

a) $y = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$

b) $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$

021 ACTIVIDAD

Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:

a) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$

b) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 1}$

022 ACTIVIDAD

Halla las ramas infinitas, $x \to +\infty$, de estas funciones. Sitúa la curva respecto a su asíntota:

a) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

b) $y = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$

023 ACTIVIDAD

Halla las ramas infinitas, $x \to +\infty$, de estas funciones. Sitúa la curva respecto a sus asíntotas, si las hay:

a) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$

b) $y = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 7}{x}$

024 ACTIVIDAD

Calcula los siguientes límites y representa la información que obtengas:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 + x - x^3)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 10x - 32}{5}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{x^4}{3} + \dfrac{x}{2} - 17\right)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 - x)^2$

Calcula el límite de las funciones del apartado anterior cuando $x \to -\infty$ y representa la información que obtengas.

025 ACTIVIDAD

Comprueba, dando valores grandes a x, que las siguientes funciones tienden a 0 cuando $x \to +\infty$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 10}$

b) $f(x) = \dfrac{100}{3x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{-7}{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \dfrac{2}{10x^2 - x^3}$

026 ACTIVIDAD

Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de cada una de las siguientes funciones. Representa los resultados que obtengas.

a) $f(x) = x^3 - 10x$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \dfrac{3 - x}{2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{-3}$

027 ACTIVIDAD

Calcula los siguientes límites y representa las ramas que obtengas:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{(x - 1)^2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3 - x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2 - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(2 - x)^3}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{x + 2}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 5}{1 - x}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - 3x}{x + 3}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 - 2x}{5 - 2x}$

Calcula el límite de todas las funciones del apartado anterior cuando $x \to -\infty$.

028 ACTIVIDAD

Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{(x-1)^2}$

b) $\lim_{x \to -\infty} 1 - (x-2)^2$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1-x}{(2x+1)^2}$

d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3+1}{5x}$

029 ACTIVIDAD

Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de las siguientes funciones y representa las ramas que obtengas:

a) $f(x) = \frac{-1}{x^2}$

b) $f(x) = 10x - x^3$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

d) $f(x) = \frac{1-12x^2}{3x^2}$

030 ACTIVIDAD

Puesto que $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3x) = +\infty$ halla un valor de x para el cual $x^2 - 3x$ sea mayor que 5 000.

031 ACTIVIDAD

Halla un valor de x para el cual $f(x) = \dfrac{1}{3x - 5}$ sea menor que 0,001.

APARTADO 04

Continuidad

16 actividades

032 ACTIVIDAD

Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y qué tipo de discontinuidad presenta:

a) $y = \dfrac{x+2}{x-3}$ b) $y = \dfrac{x^2-3x}{x}$ c) $y = \dfrac{x^2-3}{x}$ d) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

033 ACTIVIDAD

Explica por qué son continuas las siguientes funciones y determina el intervalo en el que están definidas:

a) $y = x^2 - 5$

b) $y = \sqrt{5-x}$

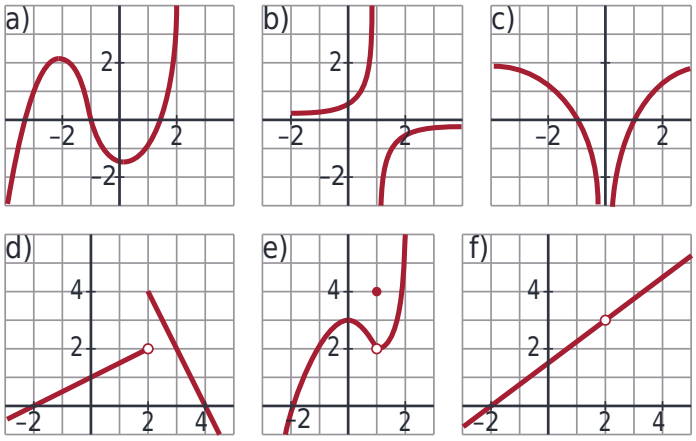
c) $y = \begin{cases} 3x-4, & x < 3 \\ x+2, & x \geq 3 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2 \\ 2, & 2 \leq x < 5 \end{cases}$

034 ACTIVIDAD

a) ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función continua?

b) Señala, en cada una de las otras cinco, la razón de su discontinuidad.



035 ACTIVIDAD

Halla los puntos de discontinuidad, si los hay, de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + x - 6$

b) $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

c) $y = \frac{x-1}{2x+1}$

d) $y = \frac{1}{x^2+2x+3}$

e) $y = \frac{2}{5x-x^2}$

f) $y = \frac{1}{x^2+2}$

036 ACTIVIDAD

Comprueba si las siguientes funciones son continuas en $x = 0$ y en $x = -2$:

a) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

b) $y = \frac{x}{x^2-4}$

c) $y = \sqrt{x^2-4}$

d) $y = \sqrt{7-2x}$

037 ACTIVIDAD

Indica para qué valores de $\mathbb{R}$ son continuas las siguientes funciones:

a) $y = 5 - \frac{x}{2}$

b) $y = \sqrt{x - 3}$

c) $y = \frac{1}{x}$

d) $y = \sqrt{-3x}$

e) $y = \sqrt{5 - 2x}$

f) $y = x^2 - x$

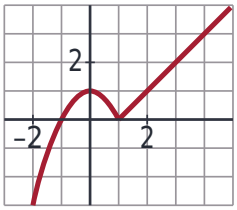
038 ACTIVIDAD

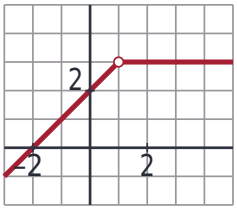
Comprueba que las gráficas de estas funciones corresponden a la expresión analítica dada y di si son continuas o discontinuas en $x = 1$.

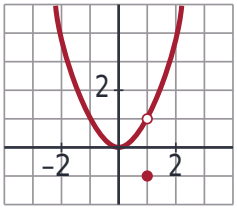
a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$







039 ACTIVIDAD

Comprueba si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$.

$\rightarrow$ ( ) ( )

040 ACTIVIDAD

Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \begin{cases} (3 - x)/2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ en $x = -1$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ (x/2) - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

041 ACTIVIDAD

Representa las siguientes funciones y explica si son discontinuas en alguno de sus puntos:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

042 ACTIVIDAD

Para las funciones de la actividad **041**:

a) Calcula los límites en $x = -3$ y $x = 5$.

b) Halla los límites cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

043 ACTIVIDAD

Calcula, en cada caso, el valor de k para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 3 \\ x + k & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 6 - (x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

044 ACTIVIDAD

Estudia la continuidad de estas funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 1 \\ 1/x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -1 \geq x \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

045 ACTIVIDAD

Calcula a para que las siguientes funciones sean continuas en $x = 1$:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/(x - 1) & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$

046 ACTIVIDAD

¿Se puede calcular el límite de una función en un punto en el que la función no esté definida? ¿Puede ser la función continua en ese punto?

047 ACTIVIDAD

El denominador de una función $f(x)$ se anula en $x = a$. ¿Podemos asegurar que tiene una asíntota vertical en $x = a$? Pon ejemplos.

APARTADO 05

Asíntotas

16 actividades

048 ACTIVIDAD

Halla $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y representa la rama correspondiente:

$$f(x) = -2x^3 + 7x^4 - 3$$

049 ACTIVIDAD

Halla $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y traza las ramas correspondientes:

a) $f(x) = (x^2 + 3)/(-x^3)$

b) $f(x) = -x^3/(x^2 + 3)$

050 ACTIVIDAD

Halla las ramas infinitas, $x \to -\infty$, de estas funciones, y sitúa la curva respecto a las asíntotas:

a) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

b) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

c) $y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$

d) $y = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$

051 ACTIVIDAD

Halla las ramas infinitas, cuando $x \to -\infty$, y si tienen asíntotas, sitúa la curva respecto a ellas:

a) $y = \dfrac{x^4}{x^2+1}$

b) $y = \dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$

c) $y = \dfrac{x^2+3x}{x+1}$

d) $y = \dfrac{2x^3-3x^2}{x}$

052 ACTIVIDAD

Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

a) $y = \dfrac{2x}{x-3}$

b) $y = \dfrac{x-1}{x+3}$

c) $y = \dfrac{2x+3}{4-x}$

d) $y = \dfrac{2}{1-x}$

053 ACTIVIDAD

Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas:

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2+4}$

b) $y = \dfrac{3}{x^2+1}$

c) $y = \dfrac{2x^2-1}{x^2}$

d) $y = \dfrac{x^4}{x-1}$

054 ACTIVIDAD

Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas:

a) $f(x) = \frac{4x + 1}{2x - 3}$ b) $f(x) = \frac{3x}{2x - 5}$ c) $f(x) = \frac{1}{2 - x}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 9}$ e) $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$ f) $f(x) = \frac{-1}{(x + 2)^2}$

055 ACTIVIDAD

Cada una de las siguientes funciones tiene una asíntota oblicua. Hállala y estudia la posición de la curva respecto a ella:

a) $f(x) = \frac{3x^2}{x + 1}$ b) $f(x) = \frac{3 + x - x^2}{x}$ c) $f(x) = \frac{4x^2 - 3}{2x}$

d) $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 3}$ e) $f(x) = \frac{2x^3 - 3}{x^2 - 2}$ f) $f(x) = \frac{-2x^2 + 3}{2x - 2}$

056 ACTIVIDAD

Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

a) $y = \frac{3 - x}{2x + 1}$ b) $y = \frac{5x - 2}{2x - 7}$ c) $y = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$

d) $y = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$ e) $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ f) $y = \frac{3x^2}{x^2 + 2}$

057 ACTIVIDAD

Halla las ramas infinitas de estas funciones. Cuando tengan asíntotas, sitúa la curva:

a) $y = \frac{x^4 - 1}{x^2}$ b) $y = \frac{(x+3)^2}{(x+1)^2}$ c) $y = \frac{1}{9 - x^2}$

d) $y = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$ e) $y = \frac{2x^2}{x + 3}$ f) $y = \frac{x^3}{2x - 5}$

058 ACTIVIDAD

Prueba que la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$ solo tiene una asíntota vertical y otra horizontal.

$\rightarrow$ ( ) ∞

059 ACTIVIDAD

Halla las asíntotas de estas funciones:

a) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ b) $y = x^2 + \frac{1}{x}$

c) $y = \frac{2x^2 + 5}{x^2 - 4x + 5}$ d) $y = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$

e) $y = x + \frac{4}{x - 5}$ f) $y = x + 1 + \frac{5}{x}$

060 ACTIVIDAD

¿Puede tener una función más de dos asíntotas verticales? ¿Y más de dos asíntotas horizontales? Pon ejemplos.

061 ACTIVIDAD

Representa una función que cumpla estas condiciones:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

¿Es discontinua en algún punto?

062 ACTIVIDAD

Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones exponenciales:

a) $y = 2^{x+3}$

b) $y = 0{,}75^{x}$

c) $y = 2 + e^{x}$

d) $y = e^{-x}$

063 ACTIVIDAD

¿Cuál es la asíntota vertical de estas funciones logarítmicas? Halla su límite cuando $x \to +\infty$:

a) $y = \log_2(x - 3)$

b) $y = \ln(x + 2)$

APARTADO 06

Aplicaciones y repaso

11 actividades

064 ACTIVIDAD

En una empresa se hacen montajes en cadena. El número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento según la función $M(t) = \frac{30t}{t+4}$ (t en días).

a) ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Y el décimo?

b) Representa la función sabiendo que el periodo de entrenamiento es de un mes.

c) ¿Qué ocurriría con el número de montajes si el entrenamiento fuera mucho más largo?

065 ACTIVIDAD

Los gastos de una empresa dependen de sus ingresos, x. Así:

$$g(x) = \begin{cases} 0{,}6x + 200 & \text{si } 0 \le x \le 1\,000 \\ 1\,000x/(x + 250) & \text{si } x > 1\,000 \end{cases}$$

donde los ingresos y los gastos vienen expresados en euros.

a) Representa $g(x)$ y di si es función continua.

b) Calcula el límite de $g(x)$ cuando $x \to +\infty$ y explica su significado.

066 ACTIVIDAD

Calcula los límites de la función $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \le 3 \\ x^2 - x - 7, & x > 3 \end{cases}$ en $x = 0$, $x = 3$ y $x = 5$.

Explica si la función es continua en $x = 3$.

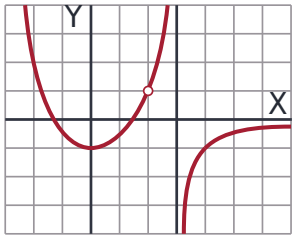
067 ACTIVIDAD

Halla los siguientes límites:

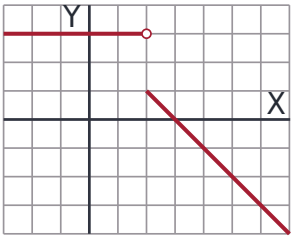
a) $\lim_{x \to 0} 2^{x-1}$ b) $\lim_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x+4}}$ c) $\lim_{x \to 4} \frac{x}{(x-4)^2}$

068 ACTIVIDAD

a)



b)



Sobre la gráfica de estas dos funciones, halla, en cada caso, los siguientes límites:

$\lim_{x \to 3} f(x)$; $\lim_{x \to 2} f(x)$; $\lim_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

069 ACTIVIDAD

Calcula el valor que debe tomar a para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x - 5, & x < 1 \\ 4x - a, & x \geq 1 \end{cases}$ sea continua en $x = 1$. ¿Puede ser discontinua en otro punto?

070 ACTIVIDAD

Justifica qué valor debe tomar a para que la función sea continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

071 ACTIVIDAD

Halla las asíntotas de la función $y = \dfrac{2x + 1}{4 - x}$ y estudia la posición de la curva respecto a ellas.

072 ACTIVIDAD

Representa una función que cumpla las siguientes condiciones:

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

073 ACTIVIDAD

Estudia las ramas infinitas de la función $y = \dfrac{x^3}{x + 3}$ y representa la información que obtengas.

074 ACTIVIDAD

¿Cuál de las siguientes funciones tiene una asíntota oblicua? Hállala y sitúa la curva respecto a ella:

a) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ b) $y = \dfrac{x^3 + 2}{x^2}$ c) $y = \dfrac{x^2}{(x - 2)^2}$

COMPRUEBA TUS RESPUESTAS

Solucionario

Busca el código de cada actividad. En las preguntas abiertas se ofrece una respuesta orientativa.

01 · Aproximaciones y lectura de gráficas

001 SOLUCIÓN

Si $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 45}{2x - 10}$, entonces:

$f(4{,}999) = 6{,}9995;\ f(4{,}9999) = 6{,}99995;\ f(4{,}99999) = 6{,}999995$

$\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 7$

$f(2) = 5{,}5;\ f(2{,}9) = 5{,}95;\ f(2{,}99) = 5{,}995;\ f(2{,}999) = 5{,}9995;\ f(2{,}9999) = 5{,}99995$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 6$

---

002 SOLUCIÓN

a) $-\dfrac{3}{2}$ b) 0

---

003 SOLUCIÓN

a) $\sqrt{3}$ b) -1

---

004 SOLUCIÓN

$\lim\limits_{x \to 3} (x^3 - 2x + k) = 21 + k$ ∥ $21 + k = 7 \rightarrow k = -14$

$f(3) = 7$

---

005 SOLUCIÓN

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+2)(x-2)}$

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

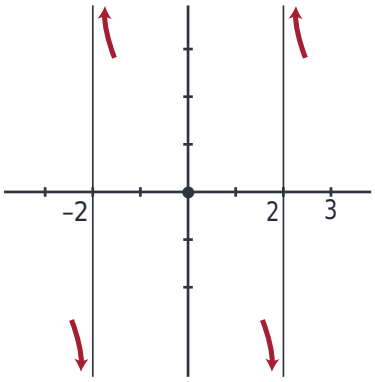
} No existe $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

} No existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

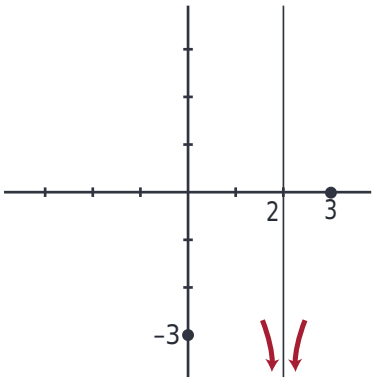


b) $f(x) = \dfrac{4(x-3)}{(x-2)^2}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -3$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$



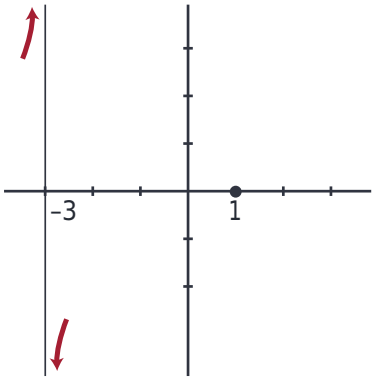
c) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+3)}$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$

} No existe $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$.



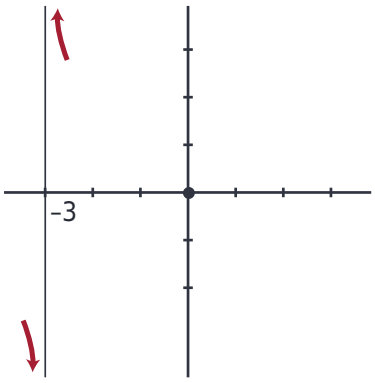
d) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2(x+3)}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$

No existe $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$.



006 SOLUCIÓN

$\lim\limits_{x \to -2^-} f_1(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f_1(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2} f_1(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} f_2(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f_2(x) = -\infty$

No existe $\lim\limits_{x \to -2} f_2(x)$.

007 SOLUCIÓN

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 2 d) 0

e) 0 f) 3 g) $+\infty$ h) 0

02 · Límite en un punto

008 SOLUCIÓN

$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = -3$

$\lim_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f_4(x)$ no existe.

009 SOLUCIÓN

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $-\infty$

d) 0 e) 0 f) $-\infty$

010 SOLUCIÓN

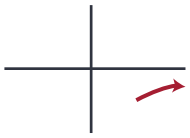
a) 0



b) 0



c) 0



d) $+\infty$

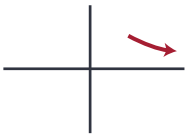


011 SOLUCIÓN

a) $-\infty$



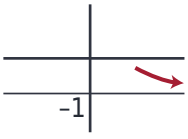
b) 0



c) $+\infty$



d) –1



012 SOLUCIÓN

a) 5 b) 0 c) –2 d) $\sqrt{2}$

e) 2 f) 2 g) 0 h) e^2

013 SOLUCIÓN

a) 5

b) 4

c) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$

014 SOLUCIÓN

a) $\lim_{x \to 0} \frac{4x}{x(x-2)} = \lim_{x \to 0} \frac{4}{x-2} = -2$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{x(2x+3)}{x} = \lim_{x \to 0} 2x + 3 = 3$

c) $\lim_{h \to 0} \frac{h^2(3h-2)}{h} = \lim_{h \to 0} h(3h-2) = 0$

d) $\lim_{h \to 0} \frac{h(h-7)}{4h} = \lim_{h \to 0} \frac{h-7}{4} = -\frac{7}{4}$

015 SOLUCIÓN

a) $\lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = 2$

b) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x^2+x} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)} = \frac{3}{-1} = -3$

c) $\lim_{x \to -2} \frac{(x+2)}{(x+2)(x-2)} = -\frac{1}{4}$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)} = 3$

e) $\lim_{x \to -3} \frac{(x+3)}{(x+3)(x+1)} = -\frac{1}{2}$

f) $\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = 2$

016 SOLUCIÓN

$\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{3}{4}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

$\rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$

017 SOLUCIÓN

a) $\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

b) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x(x - 2)}$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

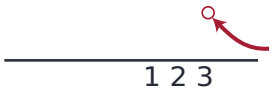
c) $f(x) = \dfrac{x(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)}$

$\lim_{x \to 2} f(x) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$; $\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

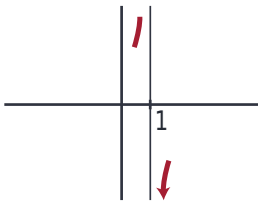
d) $f(t) = \dfrac{t^2(t - 2)}{t^2}$; $\lim_{t \to 0} f(t) = -2$

018 SOLUCIÓN

a) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to 3} \dfrac{(x - 3)(x + 2)}{x(x - 3)} = \dfrac{5}{3}$



b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x - 2)(x - 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \to 1} \dfrac{x - 2}{x - 1}$



Calculamos los límites laterales:

$\lim_{x \to 1^-} \dfrac{x - 2}{x - 1} = +\infty$; $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x - 2}{x - 1} = -\infty$

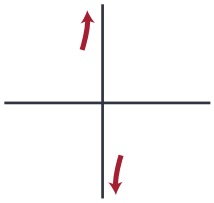


019 SOLUCIÓN

a) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x-2)}{x^2(x+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x-2}{x(x+1)}$

Calculamos los límites laterales:

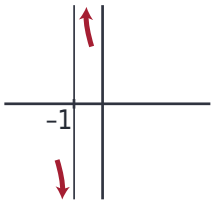
$\lim_{x \to 0^-} \frac{x-2}{x(x+1)} = +\infty$; $\lim_{x \to 0^+} \frac{x-2}{x(x+1)} = -\infty$



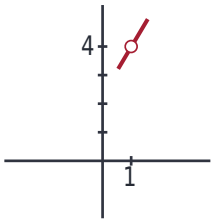
b) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2}{x+1}$

Calculamos los límites laterales:

$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2}{x+1} = -\infty$; $\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$



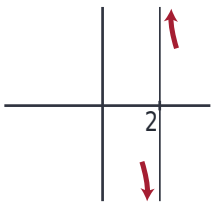
c) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)}{x - 1} = 4$



d) $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x+2)}{x-2}$

Calculamos los límites laterales:

$\lim_{x \to 2^-} \frac{2(x+2)}{x-2} = -\infty$; $\lim_{x \to 2^+} \frac{2(x+2)}{x-2} = +\infty$



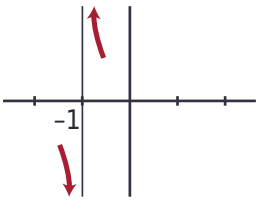
03 · Límites en el infinito

020 SOLUCIÓN

a) $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

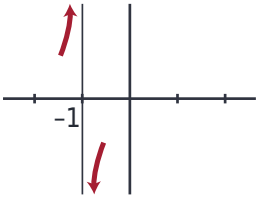
$x = -1$ es asíntota vertical.



b) $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

$x = -1$ es asíntota vertical.

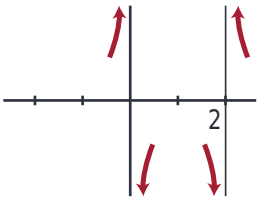


021 SOLUCIÓN

a) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$x = 0$ es asíntota vertical.



$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

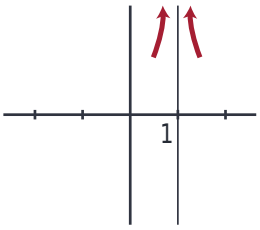
$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$x = 2$ es asíntota vertical.

b) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

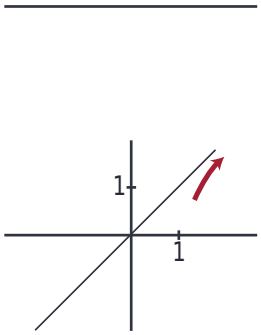
$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

$x = 1$ es asíntota vertical.



022 SOLUCIÓN

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal.



b) $y = x + \dfrac{-x}{1 + x^2} \rightarrow y = x$ es asíntota oblicua.

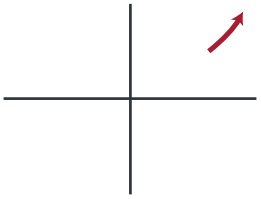
023 SOLUCIÓN

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$ es asíntota horizontal.



b) grado de P − grado de Q ≥ 2

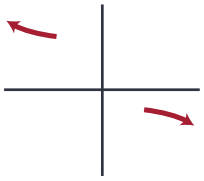
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \rightarrow$ rama parabólica hacia arriba.



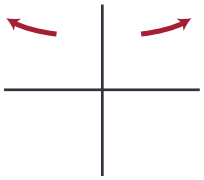


024 SOLUCIÓN

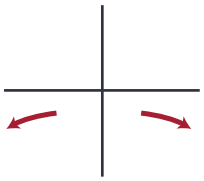
a) $\lim_{x \to +\infty} (7 + x - x^3) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} (7 + x - x^3) = +\infty$



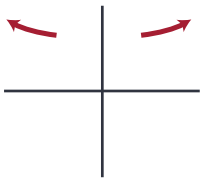
b) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 10x - 32}{5} = +\infty$



c) $\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{-x^4}{3} + \frac{x}{2} - 17\right) = -\infty$



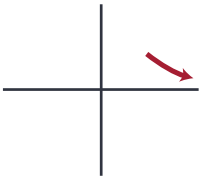
d) $\lim_{x \to \pm\infty} (7 - x)^2 = +\infty$



025 SOLUCIÓN

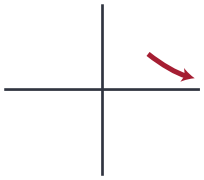
a) $f(100) = 0{,}0001$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$



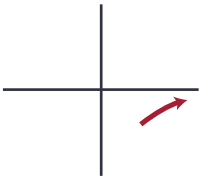
b) $f(100) = 0{,}003$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$



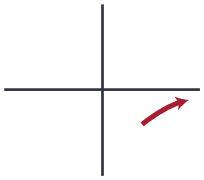
c) $f(10\,000) = -0{,}07$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$



d) $f(100) = -0{,}000002$

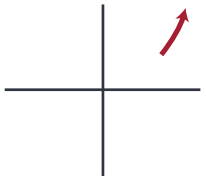
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$



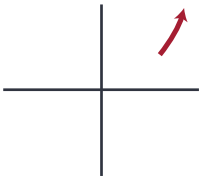
026 SOLUCIÓN

Cuando $x \to +\infty$:

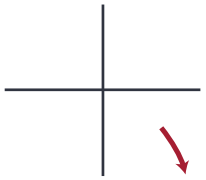
a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



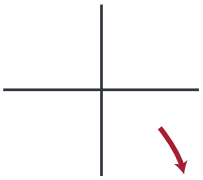
b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

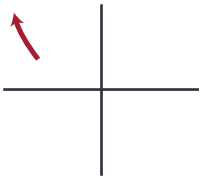


Cuando $x \to -\infty$:

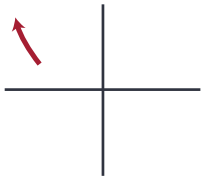
a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



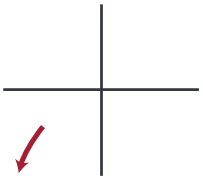
b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

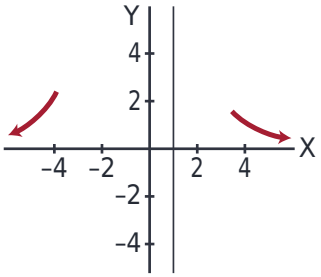


d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

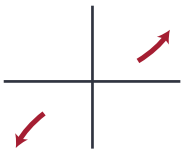


027 SOLUCIÓN

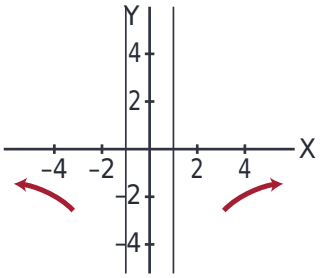
a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = 0$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = 0$



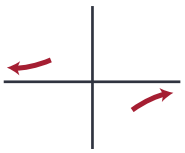
b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2}{3-x} = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x^2}{3-x} = -\infty$



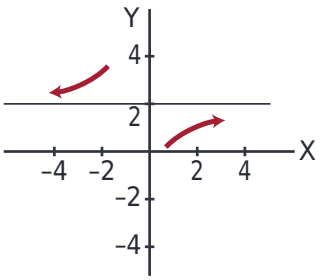
c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x^2-1} = 0$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x^2-1} = 0$



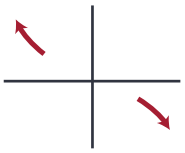
d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(2-x)^3} = 0$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{(2-x)^3} = 0$



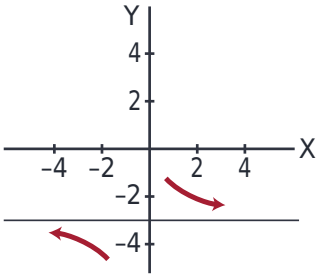
e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$



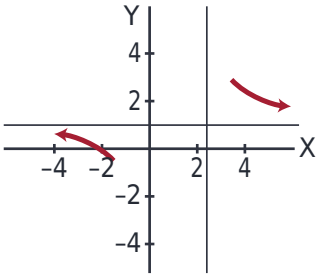
f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 5}{1 - x} = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 5}{1 - x} = +\infty$



g) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2 - 3x}{x + 3} = -3$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{2 - 3x}{x + 3} = -3$



h) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3 - 2x}{5 - 2x} = 1$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{3 - 2x}{5 - 2x} = 1$



028 SOLUCIÓN

a) 3 b) $-\infty$ c) 0 d) $+\infty$

029 SOLUCIÓN

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$



b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

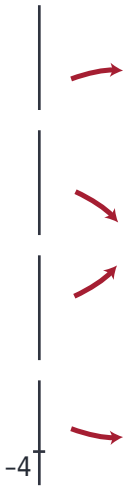


c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -4$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -4$





030 SOLUCIÓN

Por ejemplo, para $x = 100$, $f(x) = 9\,700$.

031 SOLUCIÓN

Por ejemplo, para $x = 1\,000$, $f(x) = 0{,}00033$.

04 · Continuidad

032 SOLUCIÓN

a) Discontinuidad infinita en x = 3: asíntota vertical.

b) Discontinuidad evitable en x = 0: falta el punto.

c) Discontinuidad infinita en x = 0: asíntota vertical.

d) Discontinuidad evitable en x = 4: el límite es 3, pero f(4) = 1. Se hace continua asignando f(4) = 3.

---

033 SOLUCIÓN

a) Está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Está definida y es continua en $(-\infty, 5]$.

Las funciones dadas mediante una expresión analítica sencilla (las que conocemos) son continuas donde están definidas.

c) Está definida en todo $\mathbb{R}$. Es continua, también, en todo $\mathbb{R}$. El único punto en que se duda es el 3: las dos ramas toman el mismo valor para $x = 3$:

$$3 \cdot 3 - 4 = 9 - 4 = 5 \qquad 3 + 2 = 5$$

Por tanto, las dos ramas empalman en el punto (3, 5). La función es también continua en $x = 3$.

d) También las dos ramas empalman en el punto (2, 2). Por tanto, la función es continua en el intervalo en el que está definida: [0, 5).

---

034 SOLUCIÓN

a) Solo la a).

b) b) Rama infinita en $x = 1$ (asíntota vertical).

c) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).

d) Salto en $x = 2$.

e) Punto desplazado en $x = 1$; $f(1) = 4$; $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

f) No está definida en $x = 2$.

---

035 SOLUCIÓN

a) Continua.

b) 2

c) $-\frac{1}{2}$

d) Continua.

e) 0 y 5

f) Continua.

036 SOLUCIÓN

a) No es continua ni en $x = 0$ ni en $x = -2$.

b) Sí es continua en $x = 0$, no en $x = -2$.

c) No es continua en $x = 0$, sí en $x = -2$.

d) Continua en $x = 0$ y en $x = -2$.

037 SOLUCIÓN

a) $\mathbb{R}$

b) $[3, +\infty)$

c) $\mathbb{R} - \{0\}$

d) $(-\infty, 0]$

e) $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$

f) $\mathbb{R}$

038 SOLUCIÓN

a) Continua.

b) Discontinua.

c) Discontinua.

039 SOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = -1 = f(0)$$

Es continua en $x = 0$.

040 SOLUCIÓN

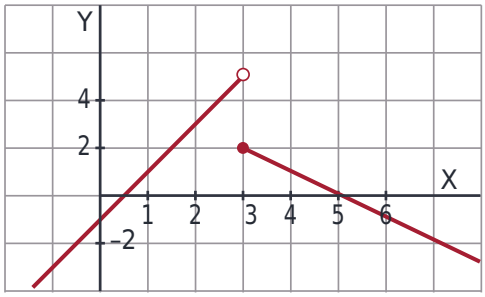
a) No, pues no existe $f(-1)$.

b) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = -2$. Sí es continua en $x = 2$.

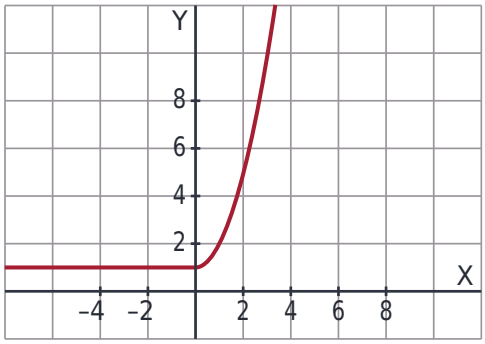
c) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) = 4$. No es continua en $x = 1$.

041 SOLUCIÓN

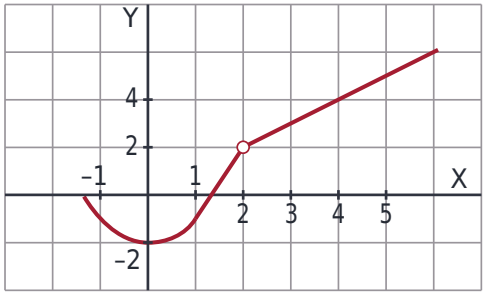
a) Discontinua en $x = 3$.



b) Función continua.



c) Discontinua en $x = 2$.



042 SOLUCIÓN

a) $\lim_{x \to -3} f(x) = -7$; $\lim_{x \to 5} f(x) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \to -3} f(x) = 1$; $\lim_{x \to 5} f(x) = 26$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

c) $\lim_{x \to -3} f(x) = 7$; $\lim_{x \to 5} f(x) = 5$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

043 SOLUCIÓN

a) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 3^-} f(x) = 5 = f(3) \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = 3 + k \end{array}\right\} 5 = 3 + k \to k = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} f(x) = 5 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4 + 2k = f(2) \end{array}\right\} 5 = 4 + 2k \to k = 1/2$

c) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x(x+1)}{x} = 1 \to k = 1$

044 SOLUCIÓN

a) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 1 \to$ Continua en $x = 1$.

$x \neq 1 \to$ Continua.

Es continua en $\mathbb{R}$.

b) $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = 0 \to$ Continua en $x = 1$.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 0 \to$ Continua en $x = 1$.

$x \neq 1$ y $x \neq -1 \to$ Continua.

Es continua en $\mathbb{R}$.

c) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = 2 \to$ Discontinua en $x = 0$.

Si $x \neq 0$, es continua.

045 SOLUCIÓN

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 = f(1) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4 - a \end{array}\right\} 2 = 4 - a \to a = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2 \\ f(1) = a \end{array}\right\} a = 2$

046 SOLUCIÓN

Sí se puede calcular, pero no puede ser continua.

047 SOLUCIÓN

No. Por ejemplo, $f(x) = \dfrac{3x^2 + x}{x}$ en $x = 0$; puesto que:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x(3x+1)}{x} = 1$$

05 · Asíntotas

048 SOLUCIÓN

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 7x^4 = +\infty$$

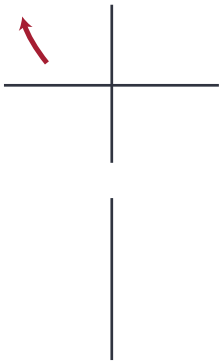


049 SOLUCIÓN

a) $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{-x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-x} = 0$$



b) $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$$

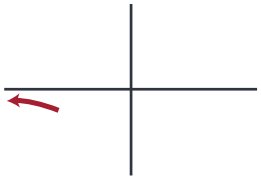


050 SOLUCIÓN

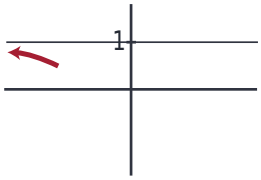
a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal.



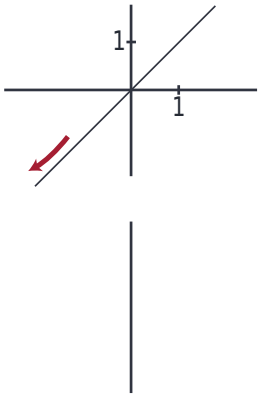
b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal.



c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$ es asíntota horizontal.



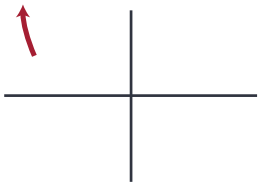
d) $y = x + \dfrac{-x}{1 + x^2} \rightarrow y = x$ es asíntota oblicua.



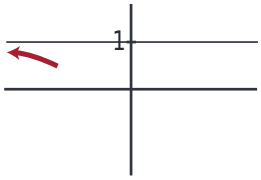
051 SOLUCIÓN

a) grado P – grado Q ≥ 2

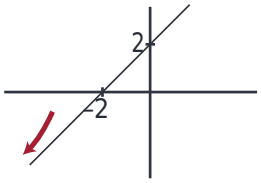
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \rightarrow$ rama parabólica.



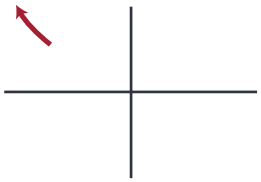
b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$ es asíntota horizontal.



c) $y = x + 2 + \dfrac{-2}{x+1} \rightarrow y = x + 2$ es asíntota oblicua.



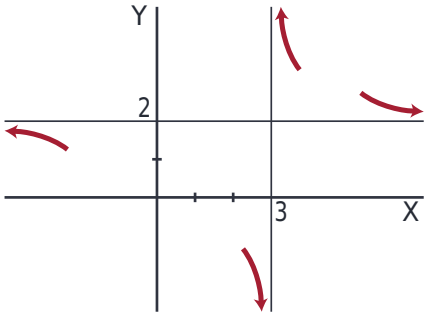
d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x^2 - 3x) = +\infty$



052 SOLUCIÓN

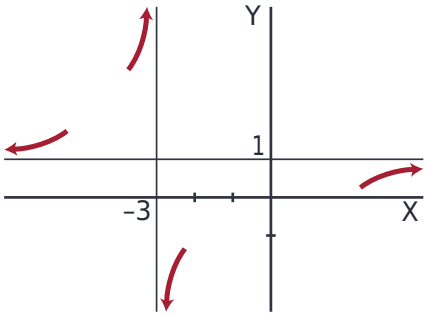
a) Asíntotas:

$x = 3;\ y = 2$



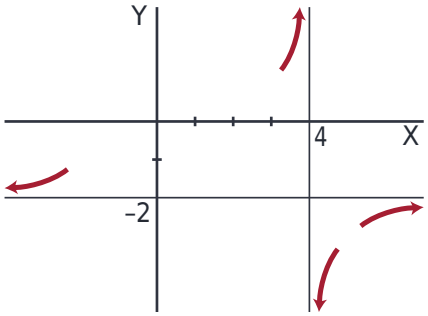
b) Asíntotas:

$x = -3;\ y = 1$



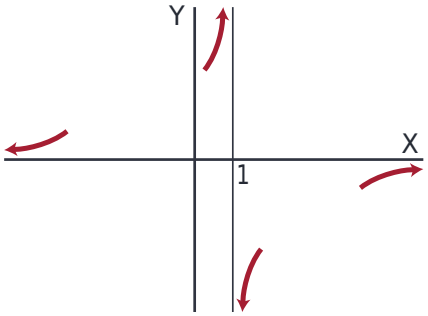
c) Asíntotas:

$x = 4;\ y = -2$



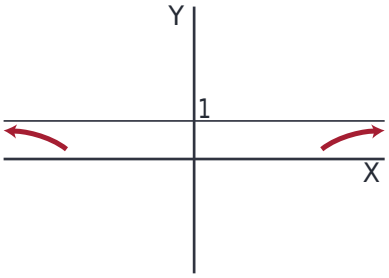
d) Asíntotas:

$x = 1;\ y = 0$

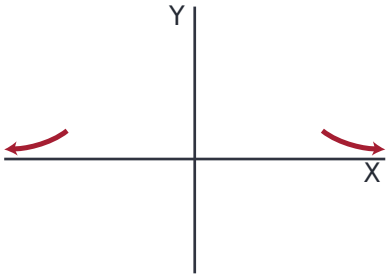


053 SOLUCIÓN

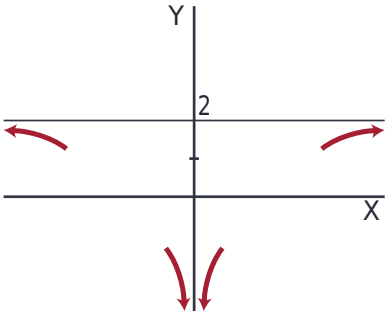
a) Asíntota: $y = 1$



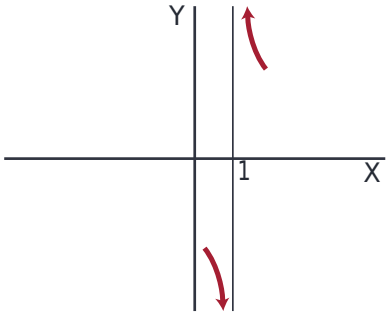
b) Asíntota: $y = 0$



c) Asíntotas: $x = 0;\ y = 2$



d) Asíntota: $x = 1$



054 SOLUCIÓN

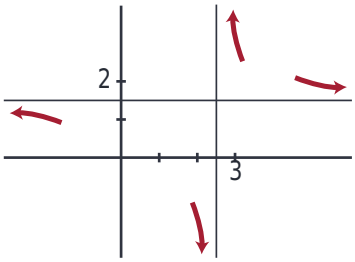
a) Asíntota vertical: $x = \frac{3}{2}$

Asíntota horizontal: $y = 2$



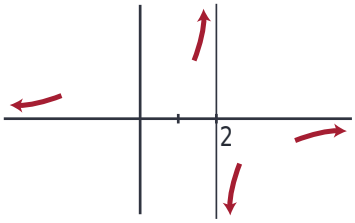
b) Asíntota vertical: $x = \frac{5}{2}$

Asíntota horizontal: $y = \frac{3}{2}$



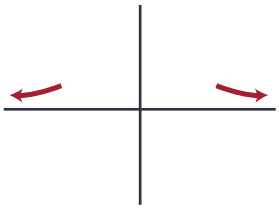
c) Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 0$



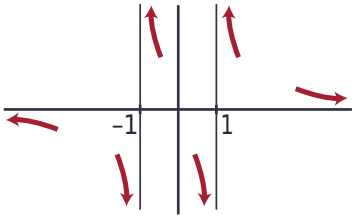
d) Asíntota vertical: $y = 0$

No tiene más asíntotas.



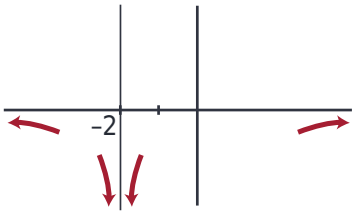
e) Asíntota vertical: $x = 1$, $x = -1$

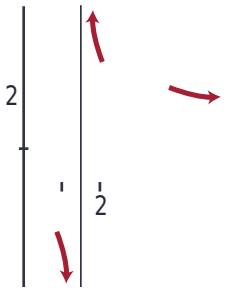
Asíntota horizontal: $y = 0$



f) Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota horizontal: $y = 0$

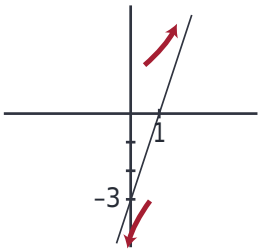




055 SOLUCIÓN

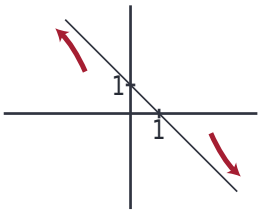
a) $\frac{3x^2}{x+1} = 3x - 3 + \frac{3}{x+1}$

Asíntota oblicua: $y = 3x - 3$



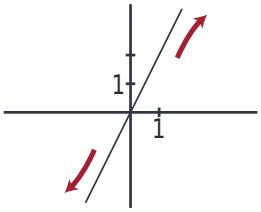
b) $\frac{3 + x - x^2}{x} = -x + 1 + \frac{3}{x}$

Asíntota oblicua: $y = -x + 1$



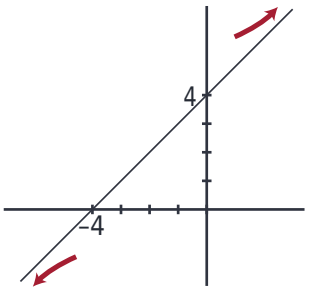
c) $\frac{4x^2 - 3}{2x} = 2x - \frac{3}{2x}$

Asíntota oblicua: $y = 2x$



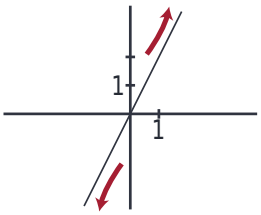
d) $\frac{x^2 + x - 2}{x - 3} = x + 4 + \frac{10}{x - 3}$

Asíntota oblicua: $y = x + 4$



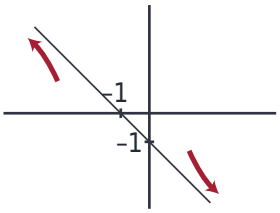
e) $\frac{2x^3 - 3}{x^2 - 2} = 2x + \frac{4x - 3}{x^2 - 2}$

Asíntota oblicua: $y = 2x$



f) $\frac{-2x^2 + 3}{2x - 2} = -x - 1 + \frac{1}{2x - 2}$

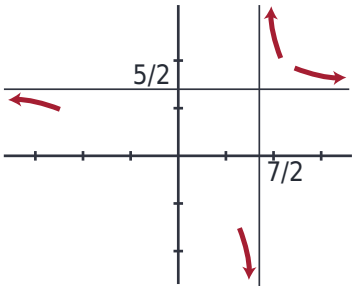
Asíntota oblicua: $y = -x - 1$



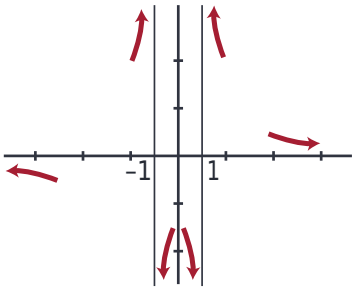
056 SOLUCIÓN

a) Asíntotas: $x = -\frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}$

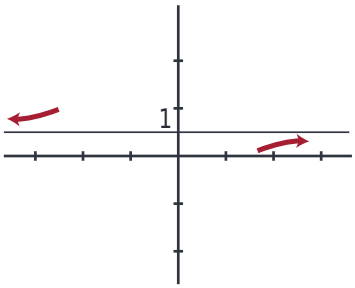
b) Asíntotas: $y = \frac{5}{2}$; $x = \frac{7}{2}$



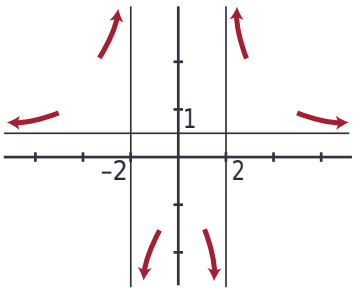
c) Asíntotas: $y = 0$; $x = \pm 1$



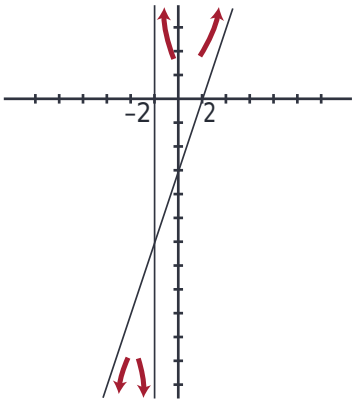
d) Asíntota: $y = 1$

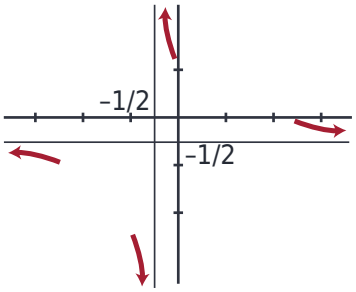


e) Asíntotas: $y = 1$; $x = -2$, $x = 2$



f) Asíntotas: $x = -2$; $y = 3x - 6$

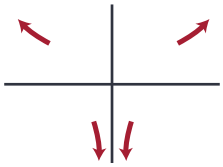




057 SOLUCIÓN

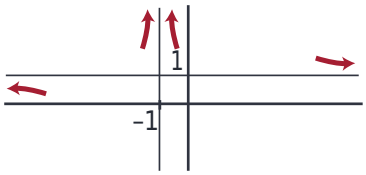
a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota vertical: $x = 0$



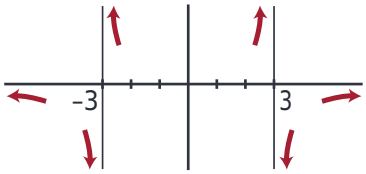
b) Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota horizontal: $y = 1$

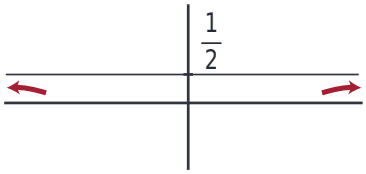


c) Asíntotas verticales: $x = 3$, $x = -3$

Asíntota horizontal: $y = 0$

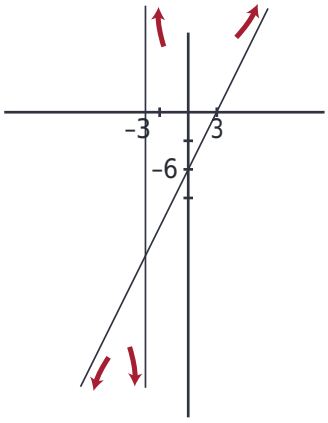


d) Asíntota horizontal: $y = \frac{1}{2}$



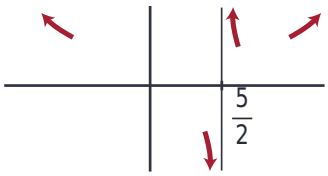
e) Asíntota vertical: $x = -3$

Asíntota oblicua: $y = 2x - 6$



f) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota vertical: $x = \frac{5}{2}$



058 SOLUCIÓN

$\lim_{x \to 2} f(x) = 2$; $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota horizontal: $y = 1$

059 SOLUCIÓN

a) $y = x + \dfrac{x}{(x-1)(x+1)}$

Asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 1$

Asíntota oblicua: $y = x$

b) Asíntota vertical: $x = 0$

c) Asíntota horizontal: $y = 2$

d) Asíntota horizontal: $y = 0$

Asíntotas verticales: $x = \pm 1$

e) Asíntota vertical: $x = 5$

Asíntota oblicua: $y = x$

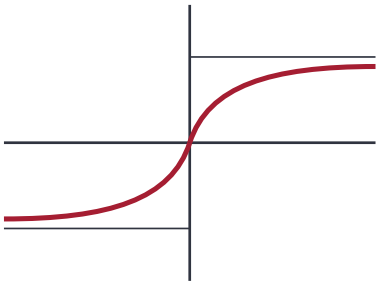
f) Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota oblicua: $y = x + 1$

060 SOLUCIÓN

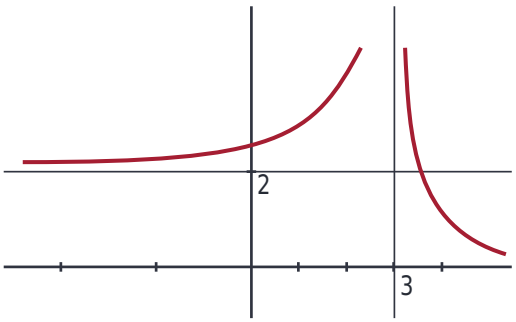
Sí. Por ejemplo, $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)(x-2)}$ tiene $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$ como asíntotas verticales.

No puede tener más de dos asíntotas horizontales, una hacia $+\infty$ y otra hacia $-\infty$, como en esta gráfica:



061 SOLUCIÓN

Sí, es discontinua al menos en $x = 3$.



062 SOLUCIÓN

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$: $y = 0$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$: $y = 0$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

Asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$: $y = 2$

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$: $y = 0$

063 SOLUCIÓN

a) Asíntota vertical: $x = 3$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

b) Asíntota vertical: $x = -2$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

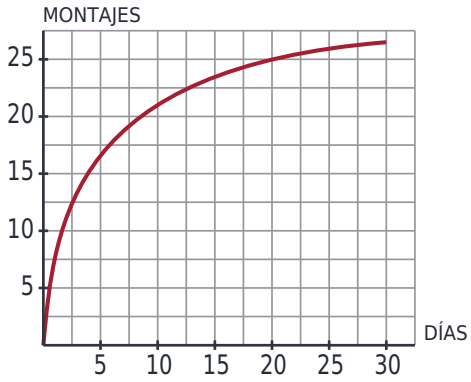
06 · Aplicaciones y repaso

064 SOLUCIÓN

a) M (1) = 6 montajes el primer día.

M (10) = 21,43 → 21 montajes el décimo día.

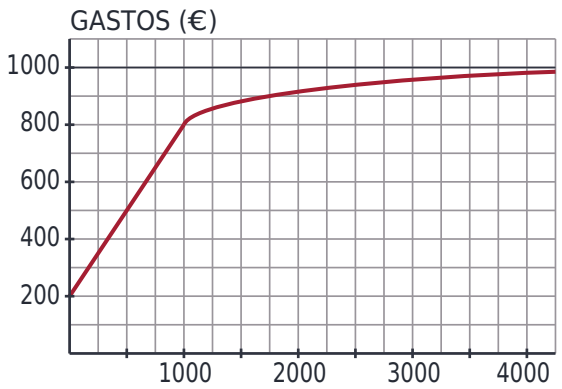
b)



c) Se aproxima a 30 $\left(\text{pues } \lim_{t \to +\infty} \frac{30t}{t+4} = 30\right)$.

065 SOLUCIÓN

a)



Es continua.

b) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1\,000$.

Como máximo gasta 1 000 € al mes.

066 SOLUCIÓN

- $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (2x - 5) = -5$
- $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (2x - 5) = 1$

  $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x^2 - x - 7) = -1$

  No existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 3.
- $\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} (x^2 - x - 7) = 13$
- La función no es continua en $x = 3$, porque no existe el límite de la función en ese punto.

---

067 SOLUCIÓN

a) $\lim_{x \to 0} 2^{x-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

c) $\lim_{x \to 4} \frac{x}{(x-4)^2} = +\infty$

(Si $x \to 4^+$ o si $x \to 4^-$, los valores de la función son positivos.)

---

068 SOLUCIÓN

a) $\lim_{x \to 3} f(x)$ $\begin{cases} \lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \end{cases}$ No tiene límite en $x = 3$.

$\lim_{x \to 2} f(x) = 1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \to 3} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 2} f(x)$ $\begin{cases} \lim_{x \to 2^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1 \end{cases}$ No tiene límite en $x = 2$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

069 SOLUCIÓN

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, debe cumplir que: $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

Veamos:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x - 5) = -2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (4x - a) = 4 - a$$

Como deben coincidir:

$$-2 = 4 - a \rightarrow a = 6$$

Por tanto, $f(x) = \begin{cases} 3x - 5, \text{ si } x < 1 \\ 4x - 6, \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

No puede ser discontinua en ningún otro punto, por estar definida mediante funciones polinómicas.

070 SOLUCIÓN

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función es continua para valores de x menores que 1 y mayores que 1, porque ambos tramos son rectas.

Para que sea continua en $x = 1$, debe cumplirse: $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$f(1) = a - 2$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} f(x) = a - 2 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = 4 - 2a \end{cases}$$

Para que exista el límite, debe ser:

$a - 2 = 4 - 2a \rightarrow 3a = 6 \rightarrow a = 2$

---

071 SOLUCIÓN

- Asíntota vertical:

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

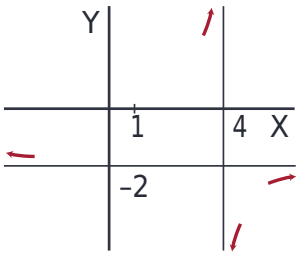
Así, $x = 4$ es una asíntota vertical.

- Asíntota horizontal:

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -2 \rightarrow y = -2$

Si $x \to +\infty$, $f(x) < 0$ → la curva está por debajo de la asíntota.

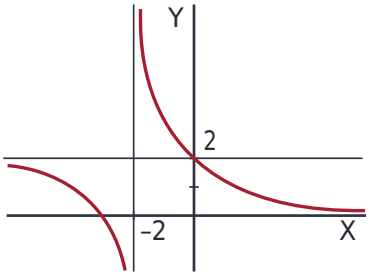
Si $x \to -\infty$, $f(x) > 0$ → la curva está por encima de la asíntota.



- No tiene asíntotas oblicuas.

---

072 SOLUCIÓN



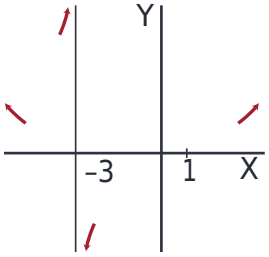
073 SOLUCIÓN

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x+3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x+3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x^3}{x+3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x^3}{x+3} = -\infty$$



074 SOLUCIÓN

La única que tiene asíntota oblicua es la función b) $y = \frac{x^3+2}{x^2}$.

$$\begin{array}{r|l} x^3+2 & x^2 \\ \hline -x^3 & x \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$y = \frac{x^3+2}{x^2} = x + \frac{2}{x^2}$$

La asíntota es $y = x$. Como $\frac{2}{x^2} > 0$, la curva está por encima de la asíntota.