1.º BACHILLERATO

LÍMITES

Practica, razona y comprueba tus respuestas.

01 Sucesiones y términos generales

Patrones, recurrencias y tablas de valores.

02 Límites de sucesiones

Comparación de crecimientos y convergencia.

03 Límites en el infinito

Comportamiento de las funciones en los extremos.

04 Límites laterales y en un punto

Lectura de gráficas y aproximación local.

05 Indeterminaciones y técnicas de cálculo

Factorización, racionalización y acotación.

06 Asíntotas y ramas infinitas

Rectas de referencia y posición de las ramas.

07 Continuidad y parámetros

Discontinuidades, extensiones y Bolzano.

08 Aplicaciones y razonamiento

Modelos, retos y función siglo.

TU RUTA DE TRABAJO

Índice

Actividades organizadas por contenidos, con espacio para trabajar y soluciones al final.

01	Sucesiones y términos generales	3
02	Límites de sucesiones	6
03	Límites en el infinito	14
04	Límites laterales y en un punto	18
05	Indeterminaciones y técnicas de cálculo	23
06	Asíntotas y ramas infinitas	28
07	Continuidad y parámetros	35
08	Aplicaciones y razonamiento	46
•	Solucionario	49

Cómo usar el dossier
El código **1.12** identifica la actividad 12 del bloque 1. Busca ese mismo código en el solucionario. Puedes seguir el orden completo o seleccionar un contenido para repasarlo.

Antes de empezar
Los ángulos se expresan en radianes salvo indicación contraria. log es decimal y ln, natural. Un punto abierto no está incluido. Distingue los límites laterales y conserva el dominio al simplificar. En los extremos del dominio se considera la continuidad desde el lado permitido. ±∞ indica divergencia, no un límite finito.

BLOQUE 01

Sucesiones y términos generales

Patrones, recurrencias y tablas de valores. · 7 actividades

1.01 Calcula a_{100}, a_{101} y a_{102} para la sucesión $a_n = \dfrac{n-2}{n^2}$.

1.02 Propón un término general compatible con cada sucesión, empezando en n = 1.

a) 1, 3, 5, 7, …

b) 3/5, 7/15, 11/45, …

c) 0, 2, 6, 12, 20, …

d) 3, 1/4, −1/9, −3/16, …

1.03 Escribe una sucesión con cada límite indicado. En los dos últimos apartados, a es una constante real.

a) 0

b) $+\infty$

c) $-\infty$

d) 4

e) -3

f) 0,5

g) Que no tenga límite.

h) Un número a.

i) a^2.

1.04 Propón un término general compatible con los primeros términos, empezando en n = 1.

a) 0, 1/3, 2/4, 3/5, ...

b) $-1/2$, 1/4, $-1/8$, 1/16, ...

c) $-1/2$, 0, 3/4, 8/5, ...

d) 2, 3/8, 4/27, 5/64, ...

1.05 Con la calculadora, aproxima el límite de la sucesión recurrente $a_1 = 1$, $a_n = \frac{3a_{n-1} + 2}{4a_{n-1} + 3}$ para $n \geq 2$.

1.06 Completa una tabla para $a_n = \frac{3n - 1}{6n + 5}$ usando n = 1, 10, 100, 1000 y 10000. ¿Cuál es su límite?

1.07 Completa una tabla para $a_n = \frac{5n + 1}{n^2 + 5}$ usando n = 1, 10, 100, 1000 y 10000. Halla su límite.

BLOQUE 02

Límites de sucesiones

Comparación de crecimientos y convergencia. · 20 actividades

2.01 Usa la calculadora para explorar los términos y halla el límite cuando $n \to +\infty$.

a) $a_n = (-1)^{2n+4}$

b) $a_n = n^2$

c) $a_n = n^2 - n^3$

d) $a_n = 0{,}2^n$

e) $a_n = \dfrac{n+3}{n}$

f) $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 7$

2.02 Calcula los límites.

a) $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}$

b) $\lim_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{2}n^2 - 2n + 7$

c) $\lim_{n \to +\infty} n^3$

d) $\lim_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

2.03 Halla el límite de cada sucesión.

a) $a_n = \dfrac{8n}{2n^2 + 3n - 1}$

b) $a_n = \dfrac{(n-1)^{10}}{(n+2)^{10}}$

2.04 Calcula los límites.

a) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{4n^5 - n^2}{2n^6 + 1} - \dfrac{3n^2 - 1}{n^2 + 1}$

b) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2 - 1}{n^3} \cdot \dfrac{4n^4}{2n^4 + 3}$

c) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 + 7}{2n}$

d) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{3n^2 + 1}{n^2 + n + 2}}$

e) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n-1} - \dfrac{n-1}{n+1}$

f) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^3(1-n)}{2n^4 - n - 1} + \dfrac{4}{n^2}$

2.05 Calcula los límites.

a) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^4 + 1}{2n^4 + 1} + \dfrac{-n^3}{3n^3 + n + 1}$

b) $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2n^3 + 1}{2n^3 + n}\right)$

c) $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2}{n}\right) \cdot \dfrac{(n+1)(n-1)}{(n+1)^2}$

d) $\lim_{n\to+\infty} 9^{\frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1}}$

e) $\lim_{n\to+\infty} 0{,}1^{\frac{n+1}{n^2}}$

f) $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n^2 + 1}{n^2}\right)^{\frac{n+1}{n^2}}$

2.06 Calcula los límites y justifica el comportamiento dominante.

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{-n-5} - \frac{2n^2}{n+2}$

b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{-2n+1}{n^2-5} - \frac{n^2}{n+2}$

c) $\lim_{n\to+\infty} (\frac{5}{2})^n \cdot \frac{1}{3n-2}$

d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{-n-3}{0{,}3^n}$

2.07 Calcula los límites; si alguno no existe, razona por qué.

a) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n}{n-2}}$

b) $\lim_{n\to+\infty} \log(\frac{3n^2-6}{3n^2})$

c) $\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{n+5})^n$

d) $\lim_{n\to+\infty} (\frac{1-n}{n-2})^n$

2.08 Calcula los límites comparando los órdenes de crecimiento.

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^3-2n^2+6}}{n-3}$

b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+3n^2}{\sqrt{n^3-n^2-5}}$

2.09 Calcula los límites con raíces cúbicas.

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{8n^4+3n-1}}{3n^2-1}$

b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+3}{\sqrt[3]{-3n^3+5n^2+7n-1}}$

2.10 Resuelve los límites reduciendo las restas a un solo cociente.

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n} - \frac{n^2}{n+1}$

b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-2n^2}{3n-2} - \frac{-3n^2}{n-4}$

c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+2}{4n^2-n-1} - \frac{n^3+2n+1}{n^2+1}$

2.11 Calcula los límites con radicales.

a) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n-2} - \sqrt{n}$

b) $\lim_{n\to+\infty} 2n - \sqrt{n^2-1}$

c) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{3n+1} - n$

d) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+4n-1} - \sqrt{n^2+1}$

2.12 Calcula los límites de tipo 1 elevado a infinito.

a) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{5}}$

b) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n-1}$

c) $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{3}}$

d) $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{\frac{n-1}{3}}$

2.13 Calcula los límites.

a) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n}$

b) $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n}$

c) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{3n-2}$

d) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)^{2n}$

2.14 Calcula los límites comparando las potencias dominantes.

a) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{2n^3+3n-1}}{\sqrt{1+2n^2}}$

b) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2-6n+1}}{7n^3-7}$

c) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{2n^2+n+7}}{8n-1}$

2.15 Calcula los límites de potencias.

a) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2n}{n^2-1}\right)^{3n}$

b) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n-1}{5+2n}\right)^{n^2-3}$

c) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-n^2}{-n^2+2}\right)^{3n}$

2.16 Calcula los límites de cocientes.

a) $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^6+1}{5n^4+3n^3+2n-1}$

b) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1-n^3+2n-5n^2}{2n^3-3n^2+6n-1}$

c) $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2-5n^4+2n-1}{3n-2n^3+5-n^4}$

d) $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^5+n^3-n^4}{1-4n-n^5}$

e) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n(4n^2-1)}{n+n^2-2n^3}$

f) $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n^4+4n^3+2)n^2}{n^5+3n^4+4}$

2.17 Obtén los límites con radicales.

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{4n^2+n-3}}{3n+1}$

b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{8n^2+3n+2}{\sqrt{n^3+2n^4}}$

c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{5-2n+6n^3}}{n^2-n-6}$

d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+3n^2+1}{\sqrt{3(n^4+n+1)}}$

e) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+\sqrt{1+n^2}}{3n+5}$

f) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^3-3n+2}}{n^2+5}$

2.18 Halla los límites de estas sucesiones.

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{n} - \frac{5n^2}{n+1}$

b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-n}{n+1} + \frac{3-n^2}{n}$

c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{n-5} + \frac{-2n^3}{n+3}$

d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^3+4n}{2n} - \frac{4n^2}{7n^3}$

e) $\lim_{n\to+\infty} \frac{6n^2+4n}{3n} - \frac{4n^3}{2n^2}$

f) $\lim_{n\to+\infty} \frac{-7n^2+4}{2-n^3} + \frac{5n^3+n}{3-n^4}$

2.19 Determina los límites racionalizando cuando sea necesario.

a) $\lim_{n\to+\infty} n - \sqrt{n^2 + 4n - 1}$

b) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{4n^2 + n + 31} - 3n$

c) $\lim_{n\to+\infty} 4n - \sqrt{16n^2 + 2}$

2.20 Calcula los límites de potencias.

a) $\lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{2n + 3})^{n - 1}$

b) $\lim_{n\to+\infty} (\frac{2n - 3}{2n + 1})^{n^2 + 1}$

c) $\lim_{n\to+\infty} (\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1})^{n}$

d) $\lim_{n\to+\infty} (2 - \frac{n}{n + 1})^{n}$

BLOQUE 03

Límites en el infinito

Comportamiento de las funciones en los extremos. · 11 actividades

3.01 Calcula los límites cuando $x \to +\infty$.

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2 - 6x^2}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x(x^2 - 1)}{2 - x^2}$

3.02 Calcula los límites.

a) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x - 1} - x$

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x - 1}{2 + 3x}\right)^{3x^2}$

3.03 Halla el comportamiento de las ramas cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

a) $f(x) = \frac{3x^4 - 2x^2 + 5x - 1}{1 - x}$

b) $f(x) = \frac{5x + x^2 - 3}{4 + 3x}$

c) $f(x) = \frac{2x^4 + 3x}{1 - x^2}$

d) $f(x) = \frac{5 - 2x - x^3}{1 - x}$

3.04 Halla los límites.

a) $\lim_{x\to+\infty} x^3 + 2x^2 - 3$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\ln|x|}$

c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x^2 + 2x + 1}$

d) $\lim_{x\to+\infty} xe^x$

3.05 Calcula los límites de polinomios.

a) $\lim_{x\to+\infty} x^2 - 3x + 1$

b) $\lim_{x\to+\infty} 3x - x^2 - 7x^4 - 3$

c) $\lim_{x\to-\infty} 2x - 3x^5 + x^2 - 1$

d) $\lim_{x\to-\infty} 4x^2 - x + 3x^4 - 1$

e) $\lim_{x\to-\infty} 4x^6 - 3x^3 + 2x^2 - 6x - 1$

3.06 Halla los límites con valores absolutos.

a) $\lim_{x\to+\infty} |-x^2 + 5x - 1|$

b) $\lim_{x\to-\infty} |3x^3 - 2x^2 + x - 7|$

c) $\lim_{x\to-\infty} |1 - x^2 - 5x^6|$

3.07 Calcula los límites y comprueba el resultado con la calculadora.

a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-6x+3}{x^2-3x+5}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-6x^3-x+1}{4x^2+5x-2}$

c) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{5x^3+3x-1}{6x^2-3x^3+x}$

d) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2+x-12}{x^2-x^3+2}$

3.08 Calcula los límites comparando los términos dominantes.

a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-5x+3}{2-x^3+x^2}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x(x^3-4+x)}{-7+4x^4+x^3}$

c) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{(7+7x+7x^3)x^2}{x^2(x^2-4x^3)-2x^5}$

d) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1+x-6x^4+x^3}{3x+2x^2-3}$

3.09 Estima los límites con la calculadora y compruébalos algebraicamente.

a) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+5x+7}{2x^2+x+1}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4+x-2x^3}{2x^2-3x+11}$

c) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-2x^2-10x}{-x^2+2x^3-x+3}$

d) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{-x^2+3x+21}{5x^2-4x^3+2x}$

3.10 Determina los límites con radicales.

a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{5x-1}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2-2x-1}{\sqrt{3x^4-3x^3+1}}$

c) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{6x^2-2}{\sqrt{3x^2+2}}$

d) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2}{\sqrt{x^5-7x+1}}$

3.11 Obtén los límites, teniendo en cuenta que x tiende a $-\infty$.

a) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{-3x+6x^2}}{x^2+2}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^4+5x^3-2x^2}}{3x-1}$

BLOQUE 04

Límites laterales y en un punto

Lectura de gráficas y aproximación local. · 16 actividades

4.01 Halla los límites laterales en el punto indicado.

a) $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x-1}$; $x = 1$.

b) $f(x) = x/|x|$; $x = 0$.

4.02 Halla los límites laterales en $x = -2$ de $f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x < -2 \\ 1-x^2, & x \geq -2 \end{cases}$.

4.03 Halla los límites en los puntos indicados.

a) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2-2x+3}$; $x = 1$.

b) $f(x) = \dfrac{2-x}{x+1}$; $x = -1$.

4.04 Razona si existe el límite en $x = 2$, 3 y 4 de $f(x) = \dfrac{x-2}{x+3} + \dfrac{x+3}{x-2}$.

4.05 Calcula el límite en $x = 0$ y $x = 3$ de $f(x) = \begin{cases} 3-x, & x \leq 0 \\ \dfrac{x-2}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$.

4.06 Calcula los límites.

a) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 + 16}$

b) $\lim_{x\to -3} \dfrac{5x - 9}{2x^2 + 6x}$

4.07 Determina los límites, calculando previamente sus límites laterales.

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x - 5}$

b) $\lim_{x\to 3} (1 + 2x)^x$

c) $\lim_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}}$

d) $\lim_{x\to -1} \dfrac{4 - 2x}{x^2 - 2x}$

e) $\lim_{x\to 2} \ln\left(\dfrac{x + 1}{3}\right)$

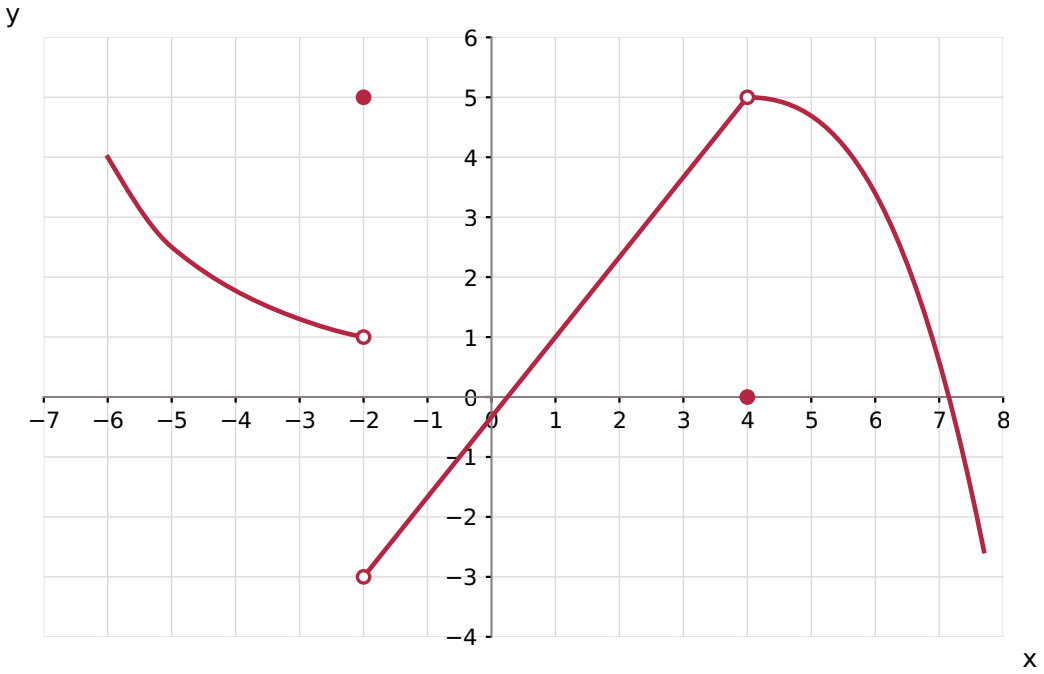
f) $\lim_{x\to -3} \dfrac{5}{\sqrt{4 + x}}$

4.08 Para $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 3}$, completa una tabla con $x = 0$; 0,9; 0,99; 0,999; 1,001; 1,01 y 1,1. Comprueba que su límite en $x = 1$ es $-0{,}5$.

4.09 Calcula los límites laterales en $x = 1$ de $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 1 \\ x^2 + 1, & x > 1 \end{cases}$.

4.10 Calcula los límites laterales en x = 0 y x = 4 de $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & 0 \le x \le 4. \\ 3, & x > 4 \end{cases}$

4.11 Observa la gráfica y calcula los límites laterales indicados.



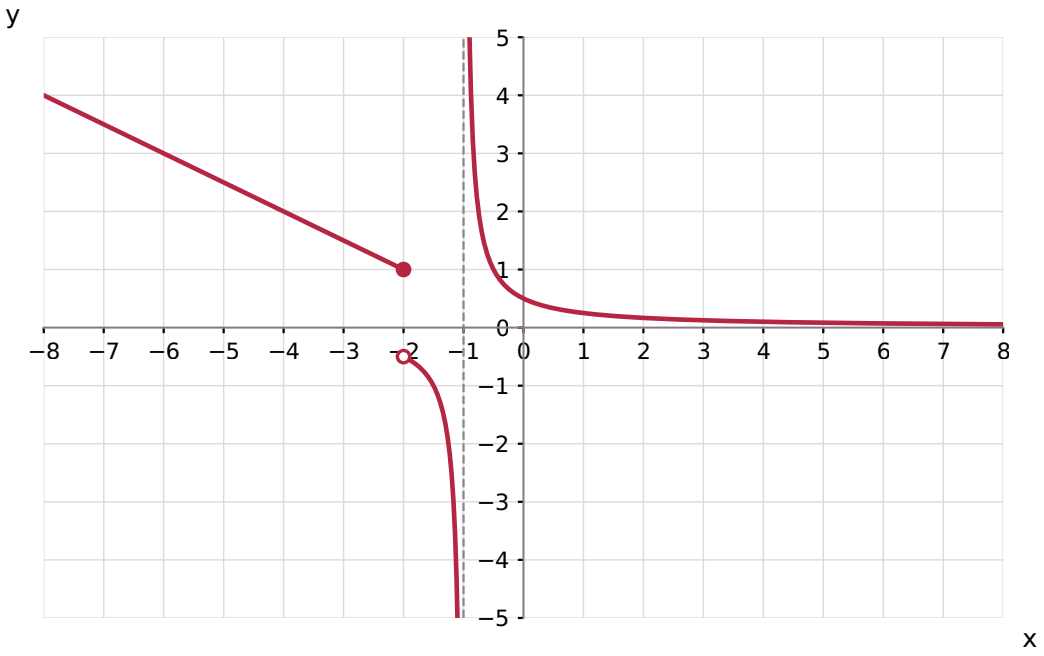
a) $\lim_{x \to -2^-} f(x)$

b) $\lim_{x \to -2^+} f(x)$

c) $\lim_{x \to 4^-} f(x)$

d) $\lim_{x \to 4^+} f(x)$

4.12 Calcula los límites a partir de la gráfica.



a) $\lim_{x \to -2^-} f(x)$

b) $\lim_{x \to -2^+} f(x)$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

d) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

4.13 Halla los límites trigonométricos. Si no existe el bilateral, indica los laterales.

a) $\lim_{x \to \pi} \cos x$

b) $\lim_{x \to \pi/2} \operatorname{tg} x$

c) $\lim_{x \to 3\pi/2} \operatorname{sen} x$

d) $\lim_{x \to \pi} \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

4.14 Para $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, x < -2 \\ \dfrac{9}{x-1}, -2 \leq x < 3 \text{ y } x \neq 1 \\ x^2 + 6x - 32, x \geq 3 \end{cases}$, calcula los límites indicados.

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

c) $\lim_{x \to -2^-} f(x)$

d) $\lim_{x \to -2^+} f(x)$

e) $\lim_{x \to -2} f(x)$

f) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

g) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

h) $\lim_{x \to 3} f(x)$

4.15 Calcula $\lim_{x \to 3} (f \circ g)(x)$ si $g(x) = x + 2$ y $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - 10x}$.

4.16 Comprueba que $\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}$ no existe como límite bilateral.

BLOQUE 05

Indeterminaciones y técnicas de cálculo

Factorización, racionalización y acotación. · 17 actividades

5.01 Calcula los límites resolviendo la indeterminación 0/0.

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$

5.02 Calcula los límites racionalizando.

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$

b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2}$

5.03 Calcula los límites reduciendo a un solo cociente.

a) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2}{2x + 1} - \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

b) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{5x^2 + 1}{x} + \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$

c) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2 - 2x} - \dfrac{2x^2 + 1}{2x - 4}$

5.04 Calcula los límites racionalizando.

a) $\lim_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^2 + 4x}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 6} - x$

c) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 3}$

d) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 4}$

5.05 Halla los límites de estas potencias.

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x - 1}{3x + 2}\right)^{x^2}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + 2}{x}\right)^{3x - 2}$

5.06 Calcula los límites de potencias.

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^3 - 3x}{8x^3 + x^2 - 3x + 1}\right)^{\frac{2x + 1}{x}}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 8}\right)^{\frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3}}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(x - \frac{x^3 - x^2 + 3x}{x^2 + 1}\right)^{2x}$

5.07 Resuelve los límites e indica los laterales cuando sea necesario.

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x+1}{x^2+2x}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2+2x}$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x+1}{x^2-1}$

d) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x^2+2x}$

e) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x+4}{x^2+2x+1}$

f) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2+4}{x^2+2x}$

5.08 Resuelve los límites factorizando.

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$

b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-6x+9}$

c) $\lim_{x\to -4} \dfrac{3x^3+12x^2-x-4}{x^3+7x^2+14x+8}$

d) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^3-9x^2+15x+25}{x^3-5x^2+2x-10}$

e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{5x^3-3x^2}{2x^3-x^2+3x}$

f) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2-x+2}$

5.09 Calcula los límites racionalizando cuando corresponda.

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

b) $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x-3}-1}{x^2-16}$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$

e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x-1}{\sqrt{2x-2}}$

f) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-3x-4}{\sqrt{2x+1}-3}$

5.10 Calcula $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2x}{\sqrt{x}-1}$.

5.11 Calcula $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$.

5.12 Calcula los límites en función de los parámetros reales, distinguiendo los casos necesarios.

a) $\lim_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+b}-\sqrt{b}}{x}$

c) $\lim_{x\to c} \dfrac{(x^3+2x)-(c^3+2a)}{x-c}$

d) $\lim_{x\to -d} \dfrac{x^2+(d-4)x-4d}{x^2+(d-1)x-d}$

5.13 Halla los límites trigonométricos.

a) $\lim_{x\to\pi} \sqrt{\cos x - 3\operatorname{sen} x}$

b) $\lim_{x\to\pi/2} \operatorname{tg}^3 x \cdot \cos^3 x$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\sec^2 x - 1}}{\sec x \cdot \operatorname{sen} x}$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$

5.14 Estudia los límites en $x = 0$ y $x = 3$ de $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 - 3x^2}$. Indica los límites laterales cuando sea necesario.

5.15 Calcula los límites usando acotaciones cuando proceda.

a) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

b) $\lim_{x\to 0} x \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

c) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} \cdot \cos x$

5.16 Demuestra que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ vale 1 en radianes y $\pi/180$ en grados sexagesimales.

5.17 Para un entero $n \geq 1$ fijo, estudia $\lim_{x\to +\infty} \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{x}{2^2}\right) \cdot \ldots \cdot \cos\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.

BLOQUE 06

Asíntotas y ramas infinitas

Rectas de referencia y posición de las ramas. · 23 actividades

6.01 Da un ejemplo de función con cada asíntota horizontal.

a) $y = 1$

b) $y = 2$

c) $y = 3$

6.02 ¿Puede una función tener dos asíntotas horizontales? ¿Y tres?

6.03 Halla las asíntotas horizontales.

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{2x^2 - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{1 - 2x^3}{4x^3 - 2x}$

c) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$

6.04 Halla las asíntotas verticales y los límites laterales correspondientes.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 1}$

6.05 Halla las asíntotas oblicuas, si existen.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{3x^3 + 2x}{x^2 - 9}$

6.06 Dibuja una función que corte ambos ejes en el origen, sea creciente en cada intervalo de su dominio y tenga asíntotas verticales $x = -1$ y $x = 3$, y horizontal $y = 0$.

6.07 Halla las asíntotas horizontales y oblicuas.

a) $f(x) = \dfrac{2x^4 + 3x}{1 - x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{-3x}$

c) $f(x) = \dfrac{2x - x^3}{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 - 5x}$

6.08 Para $f(x) = \dfrac{4x^2 - 5x}{2x^2 + 7}$, calcula valores en $x = \pm 1, \pm 10, \pm 100, \pm 1000$ y ± 10000. Decide si $y = 2$ es asíntota y por qué lado se aproxima en cada extremo.

6.09 Construye tablas para $f(x) = \dfrac{2 - 3x}{x + 1}$ con $x = 1, 10, 100, 1000, 10000$ y $x = -2, -10, -100, -1000, -10000$. ¿Es $y = -3$ una asíntota horizontal? ¿Por qué lado se aproxima?

6.10 Para $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 3}$, calcula valores en $x = 2; 2{,}5; 2{,}9; 2{,}99; 2{,}999; 2{,}9999$ y en $x = 3{,}0001; 3{,}001; 3{,}01; 3{,}1; 3{,}5$. Decide si $x = 3$ es asíntota vertical y halla sus límites laterales.

6.11 Para $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 2}$, construye una tabla con $x = -1; -1{,}5; -1{,}9; -1{,}99; -1{,}999; -1{,}9999$ y otra con $x = -2{,}0001; -2{,}001; -2{,}01; -2{,}1; -2{,}5$. ¿Es $x = -2$ una asíntota vertical? Indica los límites laterales.

6.12 Compara $f(x) = \dfrac{4x^2 + 6x}{2x - 3}$ con $y = 2x + 6$ en $x = 10, 100, 1000$ y 10000. Decide si la recta es asíntota y estudia la posición relativa en ambos infinitos.

6.13 Compara $f(x) = \dfrac{8x^2 + 3}{2x - 1}$ con $y = 4x + 2$ en $x = 10, 100, 1000$ y 10000. Decide si la recta es asíntota y estudia la posición relativa en ambos extremos.

6.14 Halla las asíntotas horizontales y verticales; indica los límites laterales en las verticales.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x + 3}$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{-x + 5}{-4 - x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 - 3}$

e) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4}$

f) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}$

6.15 Determina las asíntotas oblicuas.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{x + 2}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{5 - 3x^3}{2x^2 + 8}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x^3}{x^2 + x - 1}$

6.16 Determina todas las asíntotas, distinguiéndolas de los huecos.

a) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 8}{x^3 + 2x^2 - 11x - 12}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 2x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 3x^2 - 13x + 15}$

6.17 Halla las asíntotas de las funciones con radicales.

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x - 3}}$

b) $f(x) = \dfrac{x + 3}{\sqrt{x^2 - 9}}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x - 3}}{x - 2}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 + 1}}{x + 3}$

6.18 Halla las asíntotas y describe las ramas infinitas y su posición respecto a ellas.

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x + 3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{(x - 2)^2}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + 4}$

6.19 Estudia las ramas infinitas y las asíntotas.

a) $f(x) = x^2 + 5x - 1$

b) $f(x) = 2x - 1$

c) $f(x) = \log x$

d) $f(x) = \operatorname{tg} x$

6.20 Encuentra las asíntotas.

a) $f(x) = \dfrac{|2x - 3|}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{|x - 1|}$

6.21 Construye una gráfica aproximada que cumpla las condiciones.

a) Límites: 1 en $\pm\infty$; $-\infty$ en 0 por la izquierda y $+\infty$ por la derecha.

b) En $+\infty$: $f(x)/x \to 2$ y $f(x) - 2x \to 1$. Además, el límite en $-\infty$ es 3 y en 3 es 1.

6.22 Escribe una función racional para cada caso.

a) Sus únicas asíntotas rectas son $x = 2$ y $x = -3$.

b) Sus únicas asíntotas son $x = -2$ e $y = 3$.

c) Sus asíntotas son $x = 4$ e $y = 2x - 1$.

6.23 Halla a para que $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 3}{x - 1} - ax$ sea finito. Halla después b para que $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 3}{x - 1} - ax - b$ sea 0. Relaciona la función con $y = ax + b$.

BLOQUE 07

Continuidad y parámetros

Discontinuidades, extensiones y Bolzano. · 31 actividades

7.01 Estudia el dominio y la continuidad.

a) $f(x) = x^{-2}$

b) $f(x) = \sqrt{x - 4}$

c) $f(x) = \ln(1 - x^2)$

7.02 Estudia la continuidad.

a) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 3}$

b) $f(x) = e^{x + 1}$

c) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2) - 1$

7.03 Estudia la continuidad y clasifica las discontinuidades.

a) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \leq 1 \text{ y } x \neq 0 \\ x, & 1 < x < 4 \\ 5, & x \geq 4 \end{cases}$

7.04 Estudia la continuidad e indica el tipo de discontinuidad.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1}, & x < 1 \\ 2x - 3, & x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2 - 3x + 2}, & x \leq 1 \text{ y } x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2x - 1}, & x > 1 \end{cases}$

7.05 Estudia el dominio, la continuidad y los tipos de discontinuidad.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x-2}, & 2 < x < 3 \\ 2x - 5, & x \geq 3 \end{cases}$

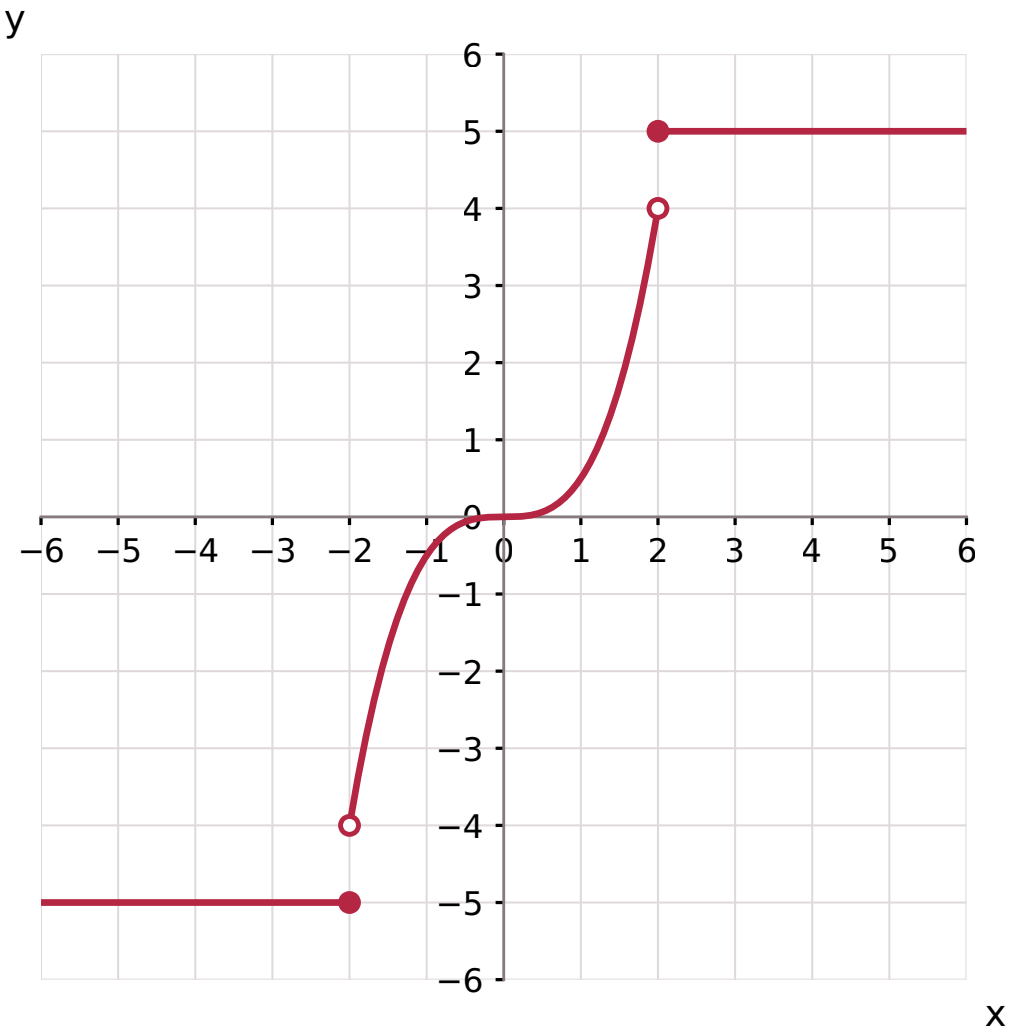
b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \leq 0 \\ 3x, & 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{x-4}, & x \geq 2 \text{ y } x \neq 4 \end{cases}$

7.06 Halla k para que las funciones sean continuas.

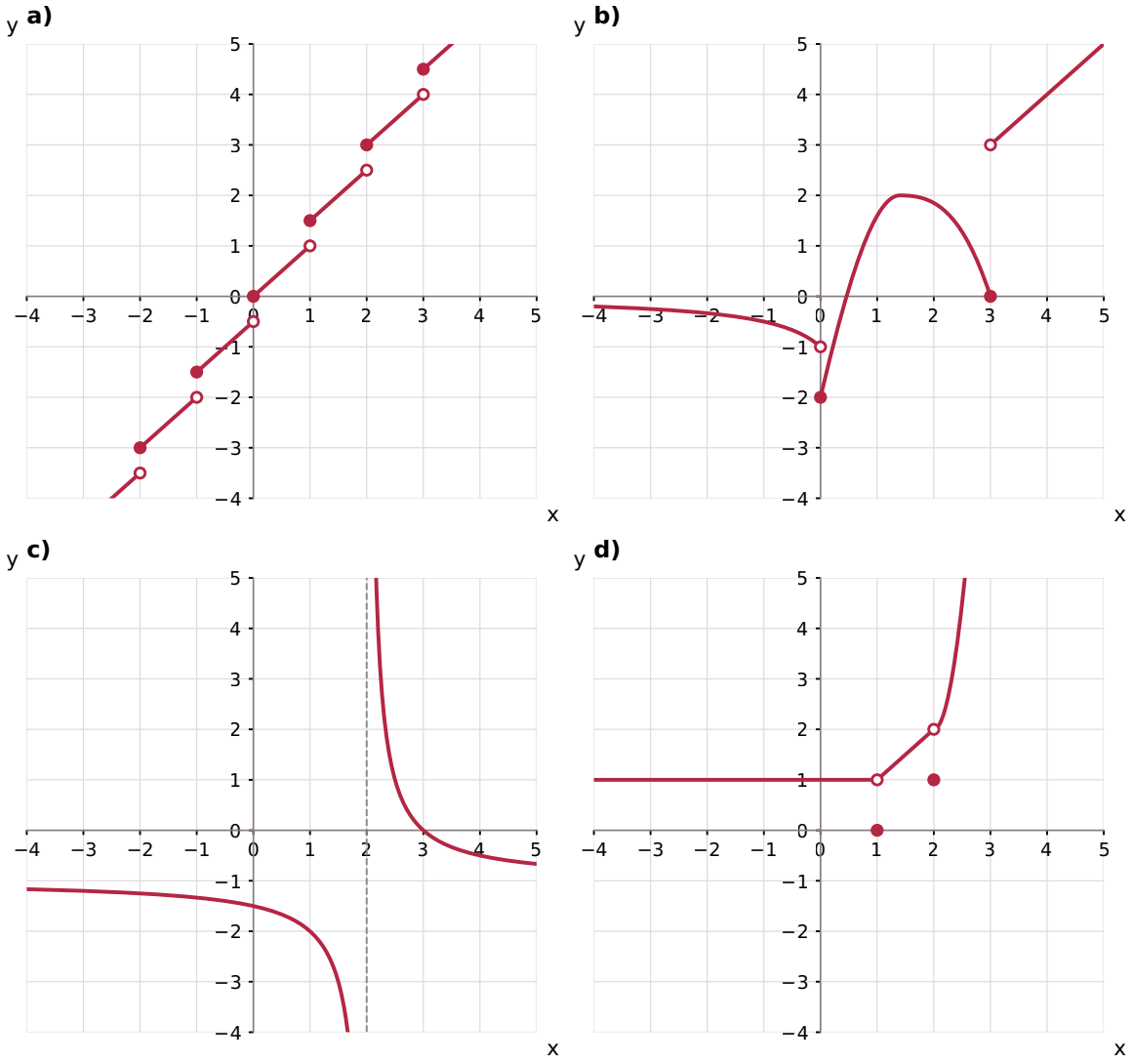
a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x < 1 \\ -kx^2 + 2x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-k}{x-2}, & x < 0 \\ x^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases}$

7.07 Estudia la continuidad en x = 2, x = 0 y x = −2.



7.08 Determina los puntos de discontinuidad de cada gráfica e indica su tipo.



7.09 Determina si la función es continua en el punto indicado.

a) $f(x) = 1 - x^2$; $x = -1$.

b) $f(x) = -x^2 + 3x$; $x = 1/2$.

c) $f(x) = \sqrt{x-2}$; $x = 1$.

d) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - x - 6}$; $x = -2$.

7.10 Para $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$, completa una tabla en $x = 2{,}5;\ 2{,}9;\ 2{,}999;\ 3{,}001;\ 3{,}01;\ 3{,}1$ y $3{,}5$. Calcula el límite en 3, indica si existe $f(3)$ y dibuja la función comparándola con $y = x + 1$.

7.11 Determina las discontinuidades e indica su tipo.

a) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + 3x + 5}$

b) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - x - 20}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 9}$

d) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x^4 - 4x^2 + 3}$

7.12 Determina el dominio y estudia la continuidad. Señala los puntos excluidos donde hay divergencias infinitas.

a) $f(x) = \sqrt{4 - x}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x + 1}$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$

7.13 Determina el dominio y los puntos de discontinuidad.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - x + 12}$

c) $f(x) = \sqrt{4+x}$

d) $f(x) = \sqrt{4 - 3x - x^2}$

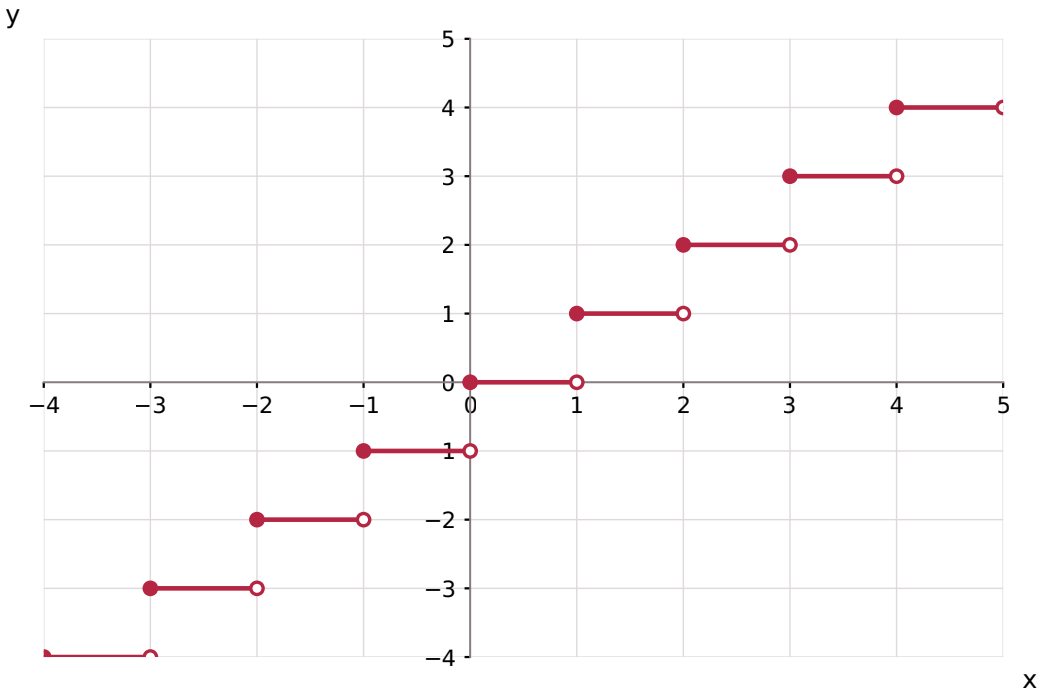
e) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 7x + 12}$

f) $f(x) = \sqrt{x-5}$

g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$

h) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 8}$

7.14 Estudia la continuidad de $f(x) = \lfloor x \rfloor$, el mayor entero menor o igual que x, y clasifica sus discontinuidades.



7.15 Estudia la continuidad en $x = -2$ y clasifica las discontinuidades.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & x \leq -2 \\ \dfrac{3x+7}{x+3}, & x > -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 2, & x \neq -2 \\ 2, & x = -2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x, & x < -2 \\ 3, & x = -2 \\ x^2 - 2x - 1, & x > -2 \end{cases}$

7.16 ¿Se pueden redefinir valores en puntos aislados para hacer cada función continua en todo $\mathbb{R}$? Si es posible, hazlo.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x}, & x < 1 \text{ y } x \neq 0 \\ 1, & x = 1 \\ 3x - 1, & x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}, & x \neq 4 \\ 6, & x = 4 \end{cases}$

7.17 Halla a para que cada función sea continua.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 4, & x < 1 \\ a, & x = 1 \\ \dfrac{x-3}{2}, & x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}, & x \neq -2 \\ a, & x = -2 \end{cases}$

7.18 Encuentra a para que las funciones sean continuas.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x^2, x \leq 2 \\ 3x + a, x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + x - 2, x \leq -1 \\ ax^2 + x + a, x > -1 \end{cases}$

7.19 Halla a para lograr continuidad en $x = -2$. Indica si la función queda definida y continua en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1}, x \leq -2 \\ ax - 2, x > -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} tg(\frac{-\pi}{2x}), x \leq -2 \\ \log(ax + 7), x > -2 \end{cases}$

7.20 Encuentra a y b para que las funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$, si es posible.

a) $f(x) = \begin{cases} |2 - x|, x \leq 2 \\ \frac{x}{b}, 2 < x \leq 4 \\ a, x > 4 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2bx + 4, x < 1 \\ ax + 5, 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{3x - 1}{x}, x > 2 \end{cases}$

7.21 Halla todos los valores de a que hacen continuas las funciones en $\mathbb{R}$. En b), considera $a \geq 0$ para evitar tramos solapados.

a) $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x \leq a \\ \log_2 x, & x > a \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - x - 2, & x < -a \\ x^2 - 2, & -a \leq x \leq a \\ x^3 + x^2 - x - 2, & x > a \end{cases}$

7.22 Halla m y n para que $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 1 \\ mx + n, & 1 < x \leq 3 \\ 4, & x > 3 \end{cases}$ sea continua en $\mathbb{R}$.

7.23 Estudia la continuidad en el dominio y señala las discontinuidades infinitas.

a) $f(x) = \text{sen}(x + \pi)$

b) $f(x) = \ln(x + e)$

c) $f(x) = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

d) $f(x) = 2^{x-3}$

7.24 Estudia el dominio y la continuidad.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x+1}{x^2-x-6}, \ x \leq 1 \text{ y } x \neq -2 \\ \dfrac{3x+1}{x-5}, \ x > 1 \text{ y } x \neq 5 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \log(x-1), \ x < 5 \\ 3, \ x \geq 5 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x+1, \ x \leq 0 \\ \sqrt{1-x}, \ x > 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right), \ x \leq 0 \\ \log(x+1), \ x > 0 \end{cases}$

7.25 Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x}, \ x \neq 0 \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$.

7.26 Halla a y b para que $f(x) = \begin{cases} x^2+4, \ x \leq 1 \\ ax+b, \ x > 1 \end{cases}$ sea continua en $\mathbb{R}$ y $f(2) = 7$.

7.27 Estudia la continuidad según a y b de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+a}{1+e^{\frac{1}{x}}}, \ x \neq 0 \\ b, \ x = 0 \end{cases}$.

7.28 Bolzano establece que una función continua en [a, b] con valores de signos opuestos en los extremos tiene algún cero en (a, b). Demuestra que $x^2 + x - 4 = 0$ tiene una solución en (1, 2).

7.29 Aplica Bolzano para demostrar que $e^{-x} + 2 = x$ tiene alguna solución.

7.30 Estudia la continuidad.

a) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

b) $f(x) = |x^2 - 1|$

c) $f(x) = \dfrac{1}{|x^2 - 1|}$

7.31 Razona si los datos permiten decidir la continuidad en $x = 0$.

a) Para n natural positivo, $f(1/(2n)) = 1$ y $f(1/(2n + 1)) = -1$.

b) $f(x) = x^2$ para $x \geq 0$ y $f(x) = 0$ para $x < 0$.

c) Para n natural positivo, $f(1/n) = 1$.

BLOQUE 08

Aplicaciones y razonamiento

Modelos, retos y función siglo. · 15 actividades

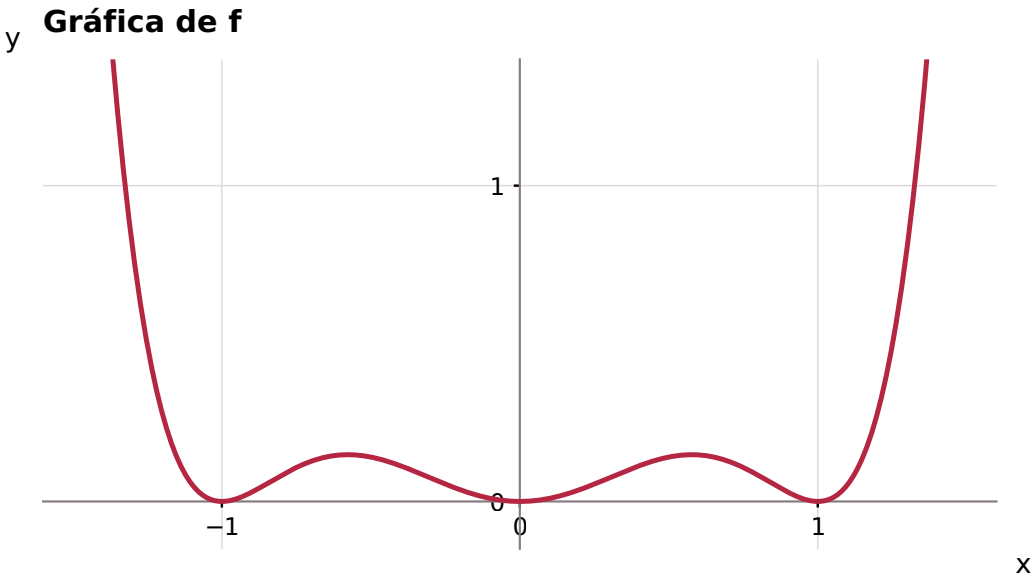
8.01 Una atleta debe recorrer 100 km. El primer día recorre la mitad y cada día siguiente la mitad de lo que queda. ¿Cuántos días necesita para completar exactamente 100 km según este modelo? Justifica.

8.02 En el modelo relativista $M(v) = \dfrac{mc}{\sqrt{c^2 - v^2}}$, $m > 0$ es la masa en reposo y $c \approx 300000$ km/s, la velocidad de la luz. Calcula el límite cuando $v \to c^-$ y explica qué indica el modelo.

8.03 Un hospital estima que el porcentaje de pacientes operados sin lista de espera, t meses después de implantar un sistema, será $P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50, & 0 \le t \le 10 \\ \dfrac{38t - 100}{0{,}4t}, & t > 10 \end{cases}$. ¿A qué porcentaje se aproxima con el tiempo?

8.04 Un comercial cobra 600 € fijos al mes y una comisión de $x^2 - x + 1$ euros por vender x artículos. Sus gastos son 50 € más 3 € por artículo. Obtén el ingreso neto y comenta su dominio y continuidad.

8.05 Resuelve los retos de razonamiento.



a) Duplica un número y réstale 1. Tras repetir 99 veces obtienes $2^{100} + 1$. ¿Qué número inicial era?

b) ¿Cuántas funciones continuas pueden tener exactamente la gráfica de f que se muestra?

c) ¿Qué número ocupa la posición 2007 de 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ...?

d) Para n entero positivo, $f(n) = n^4 - 360n^2 + 400$. Suma todos sus valores que sean primos.

e) ¿Cuál es la penúltima cifra de 11^{48}?

8.06 ¿A qué se denomina año 1 d. C. en la numeración histórica de los años?

8.07 ¿Qué acontecimiento tomaba como referencia el cómputo romano denominado ab urbe condita?

8.08 Para numerar los siglos, representa los años d. C. mediante enteros positivos y los a. C. mediante enteros negativos. Define $C(x) = \lceil x/100 \rceil$ si $x > 0$ y $C(x) = -\lceil -x/100 \rceil$ si $x < 0$; $\lceil u \rceil$ es el menor entero mayor o igual que u. El signo de C indica la era. ¿Qué valor debes introducir para el año 325 a. C.?

8.09 Usando la función siglo C del ejercicio anterior, ¿a qué siglos pertenecen 1616 d. C. y 325 a. C.?

8.10 Si se toma 753 a. C. como fecha tradicional de la fundación de Roma, ¿en qué siglo se sitúa?

8.11 Relaciona la ausencia de año cero en la numeración histórica con la definición por tramos de la función siglo C. ¿Qué sucede al aproximar x a 0 por cada lado?

8.12 ¿Cuándo comenzó el siglo XXI?

8.13 Extiende la función siglo C a valores reales no nulos con las mismas fórmulas. Estudia su continuidad y clasifica las discontinuidades.

8.14 Construye la gráfica de la función siglo C para valores reales entre -350 y 350, excluyendo 0. Señala los extremos abiertos y cerrados.

8.15 Analiza la continuidad de C en $x = 2000$ utilizando los límites laterales.

COMPRUEBA TUS RESULTADOS

Solucionario

Respuestas y justificaciones. Los códigos coinciden con los de las actividades.

01 · Sucesiones y términos generales

1.01

a) $a_{100} = \frac{49}{5000}$

b) $a_{101} = \frac{99}{10201}$

c) $a_{102} = \frac{25}{2601}$

1.02

a) $a_n = 2n - 1$

b) $a_n = \frac{4n - 1}{5 \cdot 3^{n-1}}$

c) $a_n = n(n - 1)$

d) $a_n = \frac{5 - 2n}{n^2}$

1.03

a) Ejemplo: $a_n = 1/n$.

b) Ejemplo: $a_n = n$.

c) Ejemplo: $a_n = -n$.

d) Ejemplo: $a_n = 4 + 1/n$.

e) Ejemplo: $a_n = -3 + 1/n$.

f) Ejemplo: $a_n = 1/2 + 1/n$.

g) Ejemplo: $a_n = (-1)^n$. Sus términos pares e impares tienen límites distintos.

h) Ejemplo: $a_n = a + 1/n$.

i) Ejemplo: $a_n = a^2 + 1/n$.

1.04

a) $a_n = \frac{n - 1}{n + 1}$

b) $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$

c) $a_n = \frac{n(n - 2)}{n + 1}$

d) $a_n = \frac{n + 1}{n^3}$

1.05

a) Los primeros términos son 1; 5/7 ≈ 0,714286; 29/41 ≈ 0,707317; 169/239 ≈ 0,707113; 985/1393 ≈ 0,707107.

b) El límite es $1/\sqrt{2} \approx 0{,}707107$. La recurrencia conserva valores positivos y aproxima el punto fijo $\ell = (3\ell + 2)/(4\ell + 3)$, que cumple $4\ell^2 = 2$.

1.06

a) Valores aproximados: 0,181818; 0,446154; 0,494215; 0,499417; 0,499942.

b) El límite es 3/6 = 1/2.

1.07

a) Valores aproximados: 1; 0,485714; 0,050075; 0,005001; 0,000500.

b) El límite es 0: el denominador tiene mayor grado.

02 · Límites de sucesiones

2.01

a) 1: $2n + 4$ es siempre par.

b) $+\infty$.

c) $-\infty$: domina $-n^3$.

d) 0: $0 < 0{,}2 < 1$.

e) 1: $a_n = 1 + 3/n$.

f) -7: $(1/2)^n \to 0$.

2.02

a) $+\infty$.

b) $-\infty$: domina $-n^2/2$.

c) $+\infty$.

d) $+\infty$: la base $3/2$ es mayor que 1.

2.03

a) 0: el denominador tiene mayor grado.

b) 1: $[(1 - 1/n)/(1 + 2/n)]^{10} \to 1$.

2.04

a) $0 - 3 = -3$.

b) $0 \cdot 2 = 0$.

c) $+\infty$: $(n^2 + 7)/(2n) = n/2 + 7/(2n)$.

d) $\sqrt{3}$.

e) $1 - 1 = 0$.

f) $-1/2 + 0 = -1/2$.

2.05

a) $1/2 - 1/3 = 1/6$.

b) 0: el cociente tiende a 1 y $\ln 1 = 0$.

c) $-\infty$: $\ln(2/n) \to -\infty$ y $(n + 1)(n - 1)/(n + 1)^2 \to 1$.

d) $9^2 = 81$.

e) 1: la base es positiva y el exponente tiende a 0.

f) 1: la base tiende a 2 y el exponente a 0.

2.06

a) $-\infty$: el primer cociente tiende a -1 y el segundo a $+\infty$.

b) $-\infty$: el primer cociente tiende a 0 y el segundo a $+\infty$.

c) $+\infty$: la exponencial $(5/2)^n$ crece más deprisa que $3n - 2$.

d) $-\infty$: el numerador es negativo y no acotado, mientras el denominador es positivo y tiende a 0.

2.07 **a)** 1.

b) 0: el argumento del logaritmo tiende a 1.

c) 0: para n grande, $0 < (1/(n+5))^n < (1/2)^n$.

d) No existe. Es $(-1)^n(1+1/(n-2))^n$. La subsucesión par tiende a e y la impar a $-e$.

2.08 **a)** $+\infty$: el cociente equivale a $\sqrt{n}$.

b) $+\infty$: el cociente equivale a $n^{3/2}$.

2.09 **a)** 0: el numerador crece como $2n^{4/3}$, más lentamente que $3n^2$.

b) $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$: divide numerador y denominador por n.

2.10 **a)** 1: la resta es $(n^2+n+1)/(n^2+n)$.

b) $+\infty$: el resultado equivale a $(7/3)n$.

c) $-\infty$: el resultado equivale a $-3n/4$.

2.11 **a)** 0: racionalizando se obtiene $-2/(\sqrt{(n-2)}+\sqrt{n})$.

b) $+\infty$: $2n-\sqrt{(n^2-1)}$ equivale a n.

c) $-\infty$: n crece más deprisa que $\sqrt{(3n+1)}$.

d) 2: racionalizando, $(4n-2)/(\sqrt{(n^2+4n-1)}+\sqrt{(n^2+1)}) \to 4/2$.

2.12 **a)** $e^{1/5}$: $(1/n)\cdot(n/5) \to 1/5$.

b) e^3: $(3/n)(n-1) \to 3$.

c) $e^{-2/3}$: $(-1/n)(2n/3) \to -2/3$.

d) $e^{-1/6}$: $(-1/(2n))((n-1)/3) \to -1/6$.

2.13 **a)** e^5.

b) e^{-2}.

c) $e^{9/2}$.

d) e^2. Se usa $(1+u_n)^{(v_n)} \to e^{\ell}$ cuando $u_n \to 0$ y $u_n v_n \to \ell$.

2.14 **a)** $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$. Numerador y denominador crecen como n.

b) 0: equivale a $1/(7n^2)$.

c) 0: el numerador crece como $n^{2/3}$, menos que n.

2.15 **a)** e^6: $(2n/(n^2-1))\cdot 3n \to 6$.

b) 0: la base es $1-6/(2n+5)$ y el logaritmo de la potencia tiende a $-\infty$.

c) 1: la base es $1+1/(n^2-2)$ y $(3n)/(n^2-2) \to 0$.

2.16

a) $+\infty$: equivale a $(3/5)n^2$.

b) $-1/2$: cociente de coeficientes del grado 3.

c) 5: cociente de los coeficientes del grado 4.

d) -3: cociente de los coeficientes del grado 5.

e) -2: los términos dominantes son $4n^3$ y $-2n^3$.

f) $+\infty$: el numerador tiene grado 6 y el denominador 5, con coeficientes principales positivos.

2.17

a) $2/3$.

b) $4\sqrt{2}$.

c) 0: el numerador tiene orden $n^{3/2}$ y el denominador n^2.

d) $\sqrt{3}$.

e) 1.

f) 0: el numerador tiene orden $n^{3/2}$ y el denominador n^2.

2.18

a) $-\infty$: equivale a $-4n$.

b) -2: la suma es $(-2n^2 + 3n + 3)/(n^2 + n)$.

c) $-\infty$: domina $-2n^2$.

d) $+\infty$: domina $(3/2)n^2$.

e) $4/3$: los términos $2n$ se cancelan.

f) 0: ambos cocientes tienden a 0.

2.19

a) -2: $(-4n + 1)/(n + \sqrt{(n^2 + 4n - 1)}) \to -4/2$.

b) $-\infty$: el radical equivale a $2n$ y se resta $3n$.

c) 0: se obtiene $-2/(4n + \sqrt{(16n^2 + 2)})$.

2.20

a) $e^{1/2}$.

b) 0: la base es $1 - 4/(2n + 1)$ y el logaritmo tiende a $-\infty$.

c) 1: $(-2/(n^2 + 1))\cdot n \to 0$.

d) e: la base es $1 + 1/(n + 1)$.

03 · Límites en el infinito

3.01

a) $-1/2$: cociente de coeficientes principales.

b) $-\infty$: el cociente equivale a $-3x$.

3.02

a) $-\infty$: x domina a $\sqrt{(x-1)}$.

b) 0: la base es $1 - 3/(3x+2)$; el logaritmo de la potencia equivale a $-3x$ y tiende a $-\infty$.

3.03

a) En $+\infty$: $-\infty$; en $-\infty$: $+\infty$. Domina $-3x^3$.

b) En $+\infty$: $+\infty$; en $-\infty$: $-\infty$. Domina $x/3$.

c) En ambos extremos: $-\infty$. Domina $-2x^2$.

d) En ambos extremos: $+\infty$. Domina x^2.

3.04

a) $+\infty$: domina x^3.

b) 0: $\ln|x| \to +\infty$.

c) 0: $4/(x+1)^2 \to 0$.

d) $+\infty$: ambos factores son positivos y crecen sin cota.

3.05

a) $+\infty$.

b) $-\infty$.

c) $+\infty$: $-3x^5$ es positivo cuando $x \to -\infty$.

d) $+\infty$.

e) $+\infty$.

3.06

a) $+\infty$.

b) $+\infty$.

c) $+\infty$. En los tres casos, la expresión interior crece en valor absoluto sin cota.

3.07

a) 2.

b) $-\infty$: equivale a $-3x/2$.

c) $-5/3$.

d) 0.

3.08

a) 0.

b) $1/4$.

c) $-7/6$.

d) $-\infty$: equivale a $-3x^2$.

3.09

a) 1/2.

b) $+\infty$: equivale a $-x$.

c) 1/2.

d) 0.

3.10

a) $\sqrt{2}/5$.

b) $4/\sqrt{3}$.

c) $+\infty$: equivale a $2\sqrt{3}\cdot x$.

d) 0: el denominador tiene orden $x^{5/2}$, mayor que x^2.

3.11

a) 0: el radical equivale a $\sqrt{6}\cdot|x|$ y el denominador a x^2.

b) $-\infty$: el numerador equivale a $\sqrt{2}\cdot x^2$ y el denominador a $3x$.

04 · Límites laterales y en un punto

4.01 **a)** En $x = 1$: por la izquierda $+\infty$; por la derecha $-\infty$.

b) En $x = 0$: por la izquierda -1; por la derecha 1.

4.02 Por la izquierda: $3(-2) + 4 = -2$. Por la derecha: $1 - (-2)^2 = -3$. No existe el límite bilateral.

4.03 **a)** 1, por sustitución directa.

b) No existe el límite bilateral: en $x = -1$, el límite izquierdo es $-\infty$ y el derecho, $+\infty$.

4.04 **a)** En $x = 2$ no existe: el límite izquierdo es $-\infty$ y el derecho $+\infty$.

b) En $x = 3$: $1/6 + 6 = 37/6$.

c) En $x = 4$: $2/7 + 7/2 = 53/14$.

4.05 **a)** En 0 no existe: el límite izquierdo es 3 y el derecho -2.

b) En 3 existe y vale $(3 - 2)/(3 + 1) = 1/4$.

4.06 **a)** 0, por sustitución directa.

b) No existe: cuando $x \to -3$ por la izquierda vale $-\infty$ y por la derecha $+\infty$.

4.07 **a)** 0.

b) 343.

c) $\sqrt{3}$.

d) 2.

e) 0.

f) 5. En cada caso, los dos límites laterales coinciden y se obtiene el valor por sustitución directa.

4.08 **a)** Valores aproximados: 0; $-0{,}385714$; $-0{,}487612$; $-0{,}498751$; $-0{,}501251$; $-0{,}512613$; $-0{,}636842$.

b) La función es continua en 1 y $f(1) = 1/(1 - 3) = -1/2$.

4.09 Por la izquierda: 0. Por la derecha: 2. No existe el límite bilateral.

4.10 **a)** En 0: límite izquierdo 0 y derecho 0; el límite existe y es 0.

b) En 4: límite izquierdo 2 y derecho 3; no existe el límite bilateral.

4.11

a) 1.

b) -3.

c) 5.

d) 5. El valor $f(4) = 0$ no altera los límites.

4.12

a) 1.

b) $-1/2$.

c) 0.

d) $+\infty$.

4.13

a) -1.

b) No existe: por la izquierda $+\infty$ y por la derecha $-\infty$.

c) -1.

d) No existe: por la izquierda $-\infty$ y por la derecha $+\infty$.

4.14

a) $-\infty$.

b) $+\infty$.

c) -3.

d) -3.

e) -3.

f) $9/2$.

g) -5.

h) No existe, porque $9/2 \neq -5$.

4.15

a) La composición es $(x^2 + 4x + 3)/(2(x - 3)(x + 2))$. El numerador tiende a 24.

b) No existe límite bilateral: izquierdo $-\infty$ y derecho $+\infty$.

4.16

Por la izquierda, $1/x \to -\infty$ y la exponencial tiende a 0. Por la derecha, $1/x \to +\infty$ y la exponencial tiende a $+\infty$.

05 · Indeterminaciones y técnicas de cálculo

5.01

a) 0. Factorizando, queda $x(x-1)/(x-2)$ para $x \neq 1$.

b) $-8/3$. Se cancela $x+2$ y queda $(x^2+4)(x-2)/(x^2-2x+4)$.

5.02

a) 0: el cociente equivale a $x/(\sqrt{(x^2+1)}+1)$.

b) 2/3: el cociente equivale a $(x+2)/(\sqrt{(x^2+5)}+3)$.

5.03

a) $-1/2$: al poner denominador común, el cociente tiene términos dominantes $-x^3$ y $2x^3$.

b) $-\infty$: la suma equivale a $4x$.

c) 0: tras simplificar se obtiene $-1/(2x-4)$.

5.04

a) -2: resulta $-4x/(x+\sqrt{(x^2+4x)})$.

b) 0: resulta $6/(\sqrt{(x^2+6)}+x)$.

c) 0: resulta $7/(\sqrt{(x^2+4)}+\sqrt{(x^2-3)})$.

d) 0: resulta $-3/(\sqrt{(x^2-2x+1)}+\sqrt{(x^2-2x+4)})$.

5.05

a) 0: la base tiende a 1/3 y el exponente a $+\infty$.

b) e^6: la base es $1+2/x$ y $(2/x)(3x-2) \to 6$.

5.06

a) 1/16: la base tiende a 1/4 y el exponente a 2.

b) $+\infty$: la base equivale a $3x$ y el exponente tiende a 3.

c) e^{-4}: la base equivale a $1-2x/(x^2+1)$ y $(-2x/(x^2+1))\cdot 2x \to -4$.

5.07

a) No existe: izquierdo $-\infty$, derecho $+\infty$.

b) 1/2: se simplifica a $1/(x+2)$.

c) -1.

d) 2: se simplifica a $(x-2)/x$.

e) 2.

f) No existe: izquierdo $+\infty$, derecho $-\infty$.

5.08

a) 2/3: queda $(x+1)/(x+2)$.

b) No existe: queda $1/(x-3)$, con límites $-\infty$ y $+\infty$.

c) 47/6: queda $(3x^2-1)/((x+1)(x+2))$.

d) 0: queda $(x-5)(x+1)/(x^2+2)$.

e) 0: queda $x(5x-3)/(2x^2-x+3)$.

f) 1/2: queda $1/(x+1)$.

5.09 **a)** $\sqrt{2}/4$: queda $1/(\sqrt{(x+2)}+\sqrt{2})$.

b) $1/16$: queda $1/((x+4)(\sqrt{(x-3)}+1))$.

c) $1/2$: queda $1/(\sqrt{(x+1)}+1)$.

d) $1/6$: queda $1/(\sqrt{(x^2+5)}+3)$.

e) Solo puede aproximarse desde $x > 1$: el límite por la derecha es $+\infty$. No hay límite lateral izquierdo real.

f) 15: queda $(x+1)(\sqrt{(2x+1)}+3)/2$.

5.10 $-7/2$. Multiplicando por los conjugados se obtiene $(\sqrt{x}+1)(-4x-3)/(\sqrt{(x+3)}+2x)$, cuyo valor límite es $2\cdot(-7)/4$.

5.11 $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{6}$. Usa $x-2 = (\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2})((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2)$; tras cancelar queda el inverso del segundo factor.

5.12 **a)** Si $a > 0$, $1/(2\sqrt{a})$. Si $a = 0$, el límite por la derecha es $+\infty$ y no hay aproximación real por la izquierda. Si $a < 0$, la expresión no está definida en los reales.

b) Si $b > 0$, $1/(2\sqrt{b})$, racionalizando. Si $b = 0$, el límite por la derecha es $+\infty$. Si $b < 0$, la expresión no es real.

c) Si $a = c$, el límite es $3c^2+2$. Si $c > a$, los límites izquierdo y derecho son $-\infty$ y $+\infty$; si $c < a$, son $+\infty$ y $-\infty$.

d) Si $d \neq -1$, el límite es $(d+4)/(d+1)$. Se cancela $x+d$ y queda $(x-4)/(x-1)$. Si $d = -1$, se tiende a $x = 1$: izquierdo $+\infty$ y derecho $-\infty$.

5.13 **a)** No existe en los reales: $\cos x - 3\operatorname{sen} x$ es negativo en un entorno de π.

b) 1: $\operatorname{tg}^3 x\cdot\cos^3 x = \operatorname{sen}^3 x$ donde está definida.

c) No existe: $\sqrt{(\sec^2 x - 1)} = |\operatorname{tg} x|$, por lo que el cociente es $|\operatorname{tg} x|/\operatorname{tg} x$; límite izquierdo -1 y derecho 1.

d) 1: se simplifica a $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

5.14 **a)** Para $x \neq 0, 3$ se simplifica a $x^2/(x-3)$. En 0 el límite es 0.

b) En 3, el límite izquierdo es $-\infty$ y el derecho $+\infty$: no existe límite bilateral.

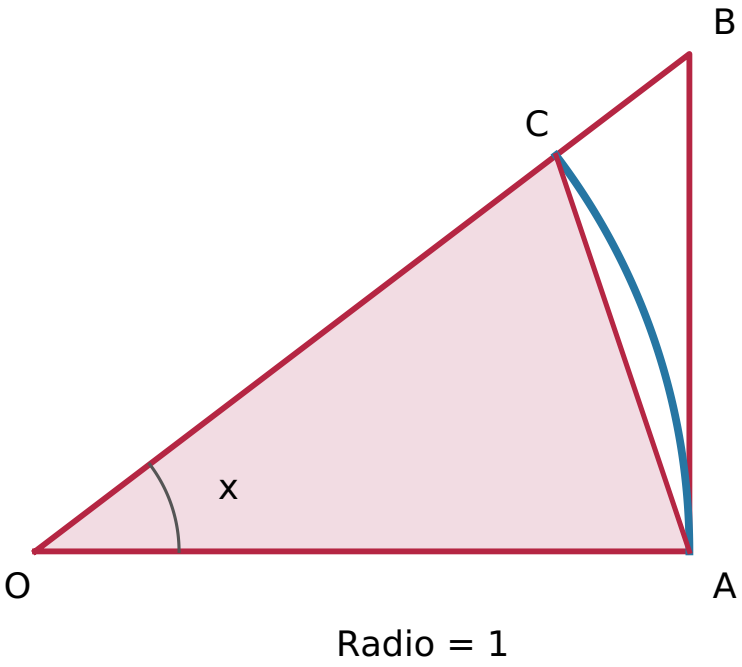
5.15 **a)** No existe: $\operatorname{sen}(1/x)$ oscila sin aproximarse a un valor único.

b) 0: $|x\cdot\operatorname{sen}(1/x)| \leq |x| \to 0$.

c) 0: $|\cos x/x| \leq 1/|x| \to 0$.

5.16 **a)** Para $0 < x < \pi/2$, compara las áreas de un triángulo interior, el sector de un círculo unitario y un triángulo exterior: $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$. Por ello, $\cos x < \operatorname{sen} x/x < 1$. Por acotación, el límite derecho es 1; la paridad del cociente da el izquierdo.

b) En grados, $u = \pi x/180$; $\operatorname{sen}(x°)/x = (\pi/180)\cdot \operatorname{sen} u/u \to \pi/180$.



5.17 **a)** No existe. Con $x_k = 2^{n+1}\pi k$ el producto vale 1; con $y_k = 2^n\pi(2k + 1)$, el último coseno vale -1 y los anteriores 1. Ambas sucesiones tienden a $+\infty$.

b) Si se mantiene x fijo y se hace $n \to \infty$, se obtiene otro problema: el límite es $\operatorname{sen} x/x$, con valor 1 en $x = 0$.

06 · Asíntotas y ramas infinitas

6.01 **a)** Ejemplo: f(x) = 1 + 1/x.

b) Ejemplo: f(x) = 2 + 1/x.

c) Ejemplo: f(x) = 3 + 1/x.

6.02 **a)** Puede tener dos: por ejemplo, arctg x tiene y = π/2 cuando x → +∞ e y = −π/2 cuando x → −∞.

b) No puede tener tres, con la definición habitual: solo hay dos direcciones, +∞ y −∞, y en cada una el límite, si existe, es único.

6.03 **a)** y = 3/2.

b) y = −1/2.

c) y = 2.

d) y = 1. En todos los casos se obtiene la misma recta en ambos extremos.

6.04 **a)** No tiene asíntotas verticales: $x^2 + 1$ nunca se anula.

b) x = −2: límite izquierdo +∞ y derecho −∞.

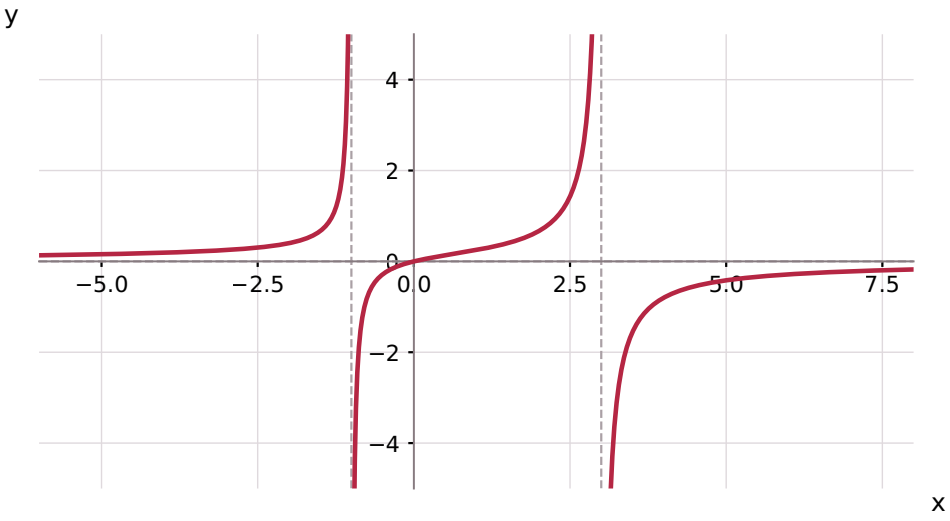
c) x = −1: izquierdo −∞ y derecho +∞. x = 1: izquierdo +∞ y derecho −∞.

6.05 **a)** y = x + 1, porque f(x) = x + 1 + 1/(x − 1).

b) No tiene oblicua; tiene la horizontal y = 0.

c) y = 3x, porque f(x) = 3x + 29x/(x^2 − 9).

6.06 $f(x) = -\dfrac{x}{x^2 - 2x - 3}$ es un ejemplo. Pasa por (0, 0) y tiene las asíntotas pedidas. Su derivada (x^2 + 3)/(x^2 − 2x − 3)² es positiva en cada intervalo del dominio. No es creciente globalmente a través de las discontinuidades.



6.07 **a)** No tiene horizontales ni oblicuas: domina $-2x^2$.

b) Oblicua $y = -x/3$, porque $f(x) = -x/3 + 1/x$.

c) Oblicua $y = -x$, porque $f(x) = -x + x/(x^2 - 1)$.

d) Horizontal $y = 0$; no tiene oblicuas.

6.08 **a)** Para x positivos: −0,111111; 1,690821; 1,974309; 1,997493; 1,999750. Para los negativos correspondientes: 1; 2,173913; 2,024291; 2,002493; 2,000250.

b) Sí: $y = 2$. Como $f(x) - 2 = (-5x - 14)/(2x^2 + 7)$, se aproxima por debajo cuando $x \to +\infty$ y por encima cuando $x \to -\infty$.

6.09 **a)** Primera tabla: −0,5; −2,545455; −2,950495; −2,995005; −2,999500. Segunda: −8; −3,555556; −3,050505; −3,005005; −3,000500.

b) Sí: $f(x) = -3 + 5/(x + 1)$. Se aproxima por encima cuando $x \to +\infty$ y por debajo cuando $x \to -\infty$.

6.10 **a)** Primera tabla: −7; −17; −97; −997; −9997; −99997. Segunda: 100003; 10003; 1003; 103; 23.

b) Sí: $f(x) = 3 + 10/(x - 3)$. Límite izquierdo $-\infty$; derecho $+\infty$.

6.11 **a)** Primera tabla: 4; 13,5; 93,1; 993,01; 9993,001; 99993,0001. Segunda: −100007,0001; −10007,001; −1007,01; −107,1; −27,5.

b) Sí: $f(x) = x - 5 + 10/(x + 2)$. Por la izquierda tiende a $-\infty$ y por la derecha a $+\infty$.

6.12 **a)** $f(x) \approx 27{,}058824$; 206,091371; 2006,009014; 20006,000900. La recta vale 26; 206; 2006; 20006.

b) Sí: $f(x) = 2x + 6 + 18/(2x - 3)$. Se aproxima por encima cuando $x \to +\infty$ y por debajo cuando $x \to -\infty$.

6.13 **a)** $f(x) \approx 42{,}263158$; 402,025126; 4002,002501; 40002,000250. La recta vale 42; 402; 4002; 40002.

b) Sí: $f(x) = 4x + 2 + 5/(2x - 1)$. Se aproxima por encima en $+\infty$ y por debajo en $-\infty$.

6.14 **a)** Horizontal $y = 1$; vertical $x = -3$ (izquierda $+\infty$, derecha $-\infty$).

b) Horizontal $y = 0$; verticales $x = -1$ (izquierda $+\infty$, derecha $-\infty$) y $x = 1$ (izquierda $-\infty$, derecha $+\infty$).

c) Horizontal $y = 0$; no tiene verticales.

d) Horizontal $y = 0$; verticales $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$: en ambas, izquierda $-\infty$ y derecha $+\infty$.

e) Horizontal $y = 0$; verticales $x = -2$ y $x = 2$: en ambas, izquierda $-\infty$ y derecha $+\infty$.

f) Horizontal $y = 2$; no tiene verticales.

6.15

a) $y = x + 3$; resto $-6/(x + 2)$.

b) $y = 2x + 2$; resto $-2/(x - 1)$.

c) $y = -3x/2$; resto $(12x + 5)/(2x^2 + 8)$.

d) $y = -6x + 7$; resto $(-13x + 7)/(x^2 + x - 1)$.

6.16

a) Horizontal $y = 0$. Verticales $x = 2$ (izquierda $+\infty$, derecha $-\infty$) y $x = 3$ (izquierda $-\infty$, derecha $+\infty$).

b) Horizontal $y = 0$. Verticales $x = -4$ (izquierda $-\infty$, derecha $+\infty$), $x = -1$ (izquierda $+\infty$, derecha $-\infty$) y $x = 3$ (izquierda $-\infty$, derecha $+\infty$).

c) Oblicua $y = x + 2$. Verticales $x = 0$ (izquierda $+\infty$, derecha $-\infty$) y $x = 2$ (izquierda $-\infty$, derecha $+\infty$).

d) Horizontal $y = 0$. Verticales $x = -3$ y $x = 5$, ambas con límites izquierdo $-\infty$ y derecho $+\infty$. En $x = 1$ se cancela $x - 1$: hay un hueco con límite $3/16$.

6.17

a) Dominio $(-\infty, 0] \cup (3, +\infty)$. Vertical $x = 3$ con límite derecho $+\infty$. Horizontal $y = 1$ en ambos extremos.

b) Dominio $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. Vertical $x = 3$ con límite derecho $+\infty$; en -3 el límite izquierdo es 0. Horizontales $y = 1$ en $+\infty$ e $y = -1$ en $-\infty$.

c) Dominio $[3/2, 2) \cup (2, +\infty)$. Vertical $x = 2$ con límites $-\infty$ y $+\infty$. Horizontal $y = 0$ en $+\infty$.

d) Dominio $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Vertical $x = -3$ con límites $-\infty$ y $+\infty$. Oblicua $y = x - 3$ en ambos extremos.

6.18

a) Vertical $x = -3$: izquierda $+\infty$, derecha $-\infty$. Sin horizontales ni oblicuas; tiende a $+\infty$ en ambos infinitos.

b) Se simplifica a $(x - 2)^2/(x + 3)$. Vertical $x = -3$: izquierda $-\infty$, derecha $+\infty$. Oblicua $y = x - 7$, con diferencia $25/(x + 3)$: debajo en $-\infty$ y encima en $+\infty$. Hueco en 2.

c) Coincide con $(x - 2)^2$ salvo un hueco en 2. No tiene asíntotas rectas; ambas ramas tienden a $+\infty$.

d) Se simplifica a $(x - 2)^2/(x + 2)$. Vertical $x = -2$: izquierda $-\infty$, derecha $+\infty$. Oblicua $y = x - 6$, con diferencia $16/(x + 2)$: debajo en $-\infty$ y encima en $+\infty$. Hueco en 2.

e) Coincide con $y = x - 2$ salvo un hueco en 2. La diferencia es cero: cumple la condición de asíntota oblicua por límite. Sin verticales ni horizontales.

f) Oblicua $y = x - 6$, con diferencia $8(x + 2)/(x^2 + 4)$: debajo en $-\infty$ y encima en $+\infty$. Sin verticales ni horizontales.

6.19 **a)** Tiende a $+\infty$ en ambos extremos. No tiene asíntotas rectas.

b) Es la recta $y = 2x - 1$: tiende a $-\infty$ en $-\infty$ y a $+\infty$ en $+\infty$. La diferencia con su propia recta es cero.

c) Vertical $x = 0$: límite derecho $-\infty$. En $+\infty$ tiende a $+\infty$ sin horizontal ni oblicua.

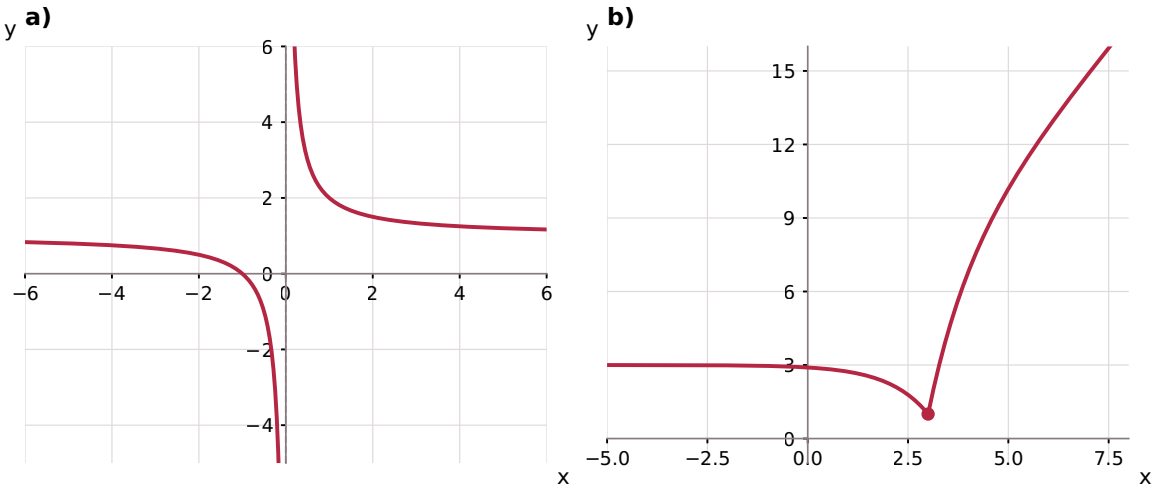
d) Verticales $x = \pi/2 + k\pi$, k entero: izquierdo $+\infty$ y derecho $-\infty$. Por periodicidad, no tiene límite en $\pm\infty$ ni horizontales u oblicuas.

6.20 **a)** Vertical $x = 0$: izquierda $-\infty$, derecha $+\infty$. Horizontales $y = -2$ en $-\infty$ e $y = 2$ en $+\infty$.

b) Vertical $x = 1$: ambos laterales $+\infty$. Horizontales $y = -1$ en $-\infty$ e $y = 1$ en $+\infty$.

6.21 **a)** Un ejemplo es $f(x) = 1 + 1/x$.

b) Un ejemplo es $f(x) = 3 - 2e^{x-3}$ para $x \leq 3$ y $f(x) = 2x + 1 - 6e^{3-x}$ para $x > 3$. Ambos tramos tienden a 1 en 3; en $-\infty$ el límite es 3 y en $+\infty$ la diferencia con $2x + 1$ tiende a 0.



6.22 **a)** Ejemplo: $f(x) = x^2 + 1/((x - 2)(x + 3))$.

b) Ejemplo: $f(x) = 3 - 6/(x + 2)$.

c) Ejemplo: $f(x) = 2x - 1 + 1/(x - 4)$.

6.23 **a)** $f(x) = 2x + 2 + 5/(x - 1)$. Se necesita $a = 2$; el primer límite vale 2.

b) $b = 2$. La recta $y = 2x + 2$ es la asíntota oblicua.

07 · Continuidad y parámetros

7.01 **a)** Dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; continua en él. En $x = 0$ hay discontinuidad infinita: ambos límites laterales son $+\infty$.

b) Dominio $[4, +\infty)$; continua en todo él, con continuidad por la derecha en 4.

c) Dominio $(-1, 1)$; continua en él. Al acercarse a ± 1 desde el dominio, tiende a $-\infty$.

7.02 **a)** Continua en $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. En -3 hay discontinuidad infinita: límite izquierdo $+\infty$ y derecho $-\infty$.

b) Continua en $\mathbb{R}$.

c) Continua en $\mathbb{R}$.

7.03 **a)** Continua salvo en $x = 2$: límite izquierdo $-\infty$ y derecho $+\infty$; discontinuidad infinita.

b) Dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. En 0: límites $-\infty$ y $+\infty$, discontinuidad infinita. En 1: ambos límites y $f(1)$ valen 1, por lo que es continua. En 4: límites 4 y 5, $f(4) = 5$; salto finito. Continua en el resto del dominio.

7.04 **a)** Dominio $\mathbb{R}$. En 1: límite izquierdo $-\infty$; derecho y $f(1)$ iguales a -1. Discontinuidad infinita, con asíntota vertical $x = 1$ por la izquierda. Continua en el resto.

b) Dominio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. En 1: límite izquierdo $+\infty$, derecho 1. Discontinuidad infinita y asíntota vertical por la izquierda. No hay problema en 2: allí se utiliza $1/(2x - 1)$.

7.05 **a)** Dominio $\mathbb{R}$. En 2: límite izquierdo y valor 1; límite derecho $+\infty$, discontinuidad infinita. En 3, ambos límites y el valor son 1: continua. Continua en el resto.

b) Dominio $[0, +\infty) \setminus \{4\}$: el tramo $\sqrt{x}$ con $x \leq 0$ solo está definido en $x = 0$. Es continua por la derecha en 0. En 2: límite izquierdo 6 y derecho y valor $-1/2$; salto finito. En 4: límites $-\infty$ y $+\infty$; discontinuidad infinita. Continua en el resto del dominio.

7.06 **a)** $k = 2$: en $x = 1$ se exige $-1 = -k + 1$.

b) $k = 1$: en $x = 0$ se exige $(3 - k)/(-2) = -1$.

7.07 **a)** En 2: límites 4 y 5; $f(2) = 5$. Salto finito.

b) En 0: ambos límites y $f(0)$ valen 0. Continua.

c) En -2: límites -5 y -4; $f(-2) = -5$. Salto finito.

7.08 **a)** Saltos finitos en cada entero; los tramos siguen $f(x) = x + n/2$ para $n \leq x < n + 1$, n entero.

b) Saltos finitos en $x = 0$ y $x = 3$.

c) Discontinuidad infinita en $x = 2$.

d) Evitables en $x = 1$ y $x = 2$: los límites existen pero no coinciden con el valor asignado.

7.09

a) Sí: límite y f(−1) iguales a 0.

b) Sí: límite y f(1/2) iguales a 5/4.

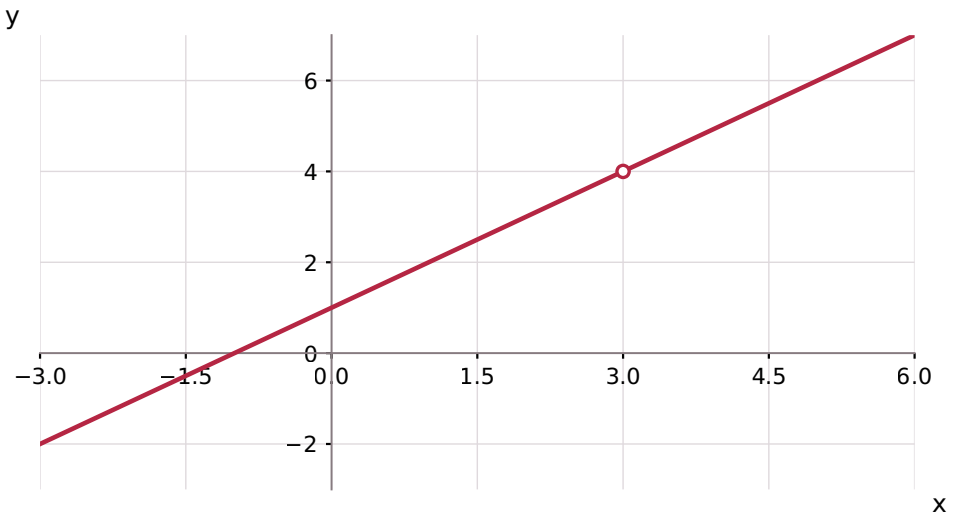
c) No está definida en 1 ni en un entorno de ese punto: su dominio es [2, +∞).

d) No está definida en −2; discontinuidad infinita.

7.10

a) Valores: 3,5; 3,9; 3,999; 4,001; 4,01; 4,1; 4,5.

b) El límite es 4, pero f(3) no existe. Se cancela x − 3 y queda x + 1 conservando x ≠ 3: la gráfica es la recta con un hueco en (3, 4).



7.11

a) Ninguna: el denominador tiene discriminante −11.

b) Infinitas en x = −4 y x = 5.

c) Infinitas en x = −3 y x = 3.

d) Infinitas en x = −√3, −1, 1 y √3. El denominador es $(x^2 - 1)(x^2 - 3)$ y el numerador no se anula allí.

7.12

a) Dominio (−∞, 4]; continua en él, por la izquierda en 4.

b) Dominio ℝ; continua en ℝ.

c) Dominio (−1, +∞); continua en él. En −1: límite derecho +∞.

d) Dominio (−∞, −1) ∪ [1, +∞); continua en él. En −1: límite izquierdo +∞. En 1: continua por la derecha.

e) Dominio [1, +∞); continua en él, por la derecha en 1.

f) Dominio (−∞, −1) ∪ (1, +∞); continua en él. En −1 por la izquierda y en 1 por la derecha tiende a +∞.

7.13 **a)** Dominio $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$; infinita en -3.

b) Dominio $\mathbb{R}$; continua en $\mathbb{R}$.

c) Dominio $[-4, +\infty)$; continua en él.

d) Dominio $[-4, 1]$; continua en él.

e) Dominio $\mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$; infinitas en ambos. En 3: izquierdo $+\infty$, derecho $-\infty$. En 4: izquierdo $-\infty$, derecho $+\infty$.

f) Dominio $[5, +\infty)$; continua en él.

g) Dominio $(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$; continua en él.

h) Dominio $\mathbb{R}$; continua en $\mathbb{R}$.

7.14 Continua entre enteros. En cada entero n hay salto finito de amplitud 1: límite izquierdo $n - 1$, derecho n y $f(n) = n$.

7.15 **a)** Continua: los dos límites y $f(-2)$ valen 1.

b) Evitable: el límite es 16, pero $f(-2) = 2$.

c) Evitable: los dos límites valen 7, pero $f(-2) = 3$.

7.16 **a)** En 1 se corrige con $f(1) = 2$. En 0, la divergencia infinita no puede corregirse asignando un valor. No se consigue continuidad en todo $\mathbb{R}$.

b) Sí: $f(4) = 8$, porque el cociente se simplifica a $x + 4$.

7.17 **a)** $a = -1$: los dos límites en 1 valen -1.

b) $a = -4$: el cociente se simplifica a $x - 2$.

7.18 **a)** $a = 6$: $12 = 6 + a$.

b) $a = -1$: $-3 = 2a - 1$.

7.19 **a)** $a = -17/16$: $-2a - 2 = 1/8$. Continua en todo $\mathbb{R}$.

b) $a = -3/2$: $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1 = \log(7 - 2a)$, luego $7 - 2a = 10$. Su dominio es $(-\infty, 14/3)$ y es continua en él; no está definida en todo $\mathbb{R}$.

7.20 **a)** No hay solución: en 2 se exigiría $0 = 2/b$, imposible para $b \neq 0$; $b = 0$ no define el tramo.

b) $a = -5/4$, $b = -5/8$. En 1: $a = 2b$; en 2: $2a + 5 = 5/2$.

7.21 **a)** Se exige $a > 0$ y $a - 2 = \log_2 a$. Soluciones: $a = 4$ y $a \approx 0{,}3099069324$. La función $\log_2 a - a + 2$ es estrictamente cóncava, crece hasta $1/\ln 2$ y luego decrece: no hay más raíces.

b) $a = 0$ o $a = 1$. En ambas uniones se exige $a^3 - a = 0$; con $a \geq 0$ quedan 0 y 1.

7.22 $m = 1$, $n = 1$: se resuelve $m + n = 2$ y $3m + n = 4$.

7.23 **a)** Dominio $\mathbb{R}$; continua en $\mathbb{R}$.

b) Dominio $(-e, +\infty)$; continua en él. Límite derecho en $-e$: $-\infty$.

c) Dominio $\mathbb{R} \setminus \{k\pi: k \text{ entero}\}$; continua en él. En cada $k\pi$: izquierdo $+\infty$, derecho $-\infty$.

d) Dominio $\mathbb{R}$; continua en $\mathbb{R}$.

7.24 **a)** Dominio $\mathbb{R} \setminus \{-2, 5\}$. Continua en su dominio, también en 1: límite y valor -1. Discontinuidades infinitas en -2 y 5.

b) Dominio $(1, +\infty)$. Salto finito en 5: límite izquierdo $\log 4$, derecho y valor 3. En 1, límite derecho $-\infty$. Continua en el resto.

c) Dominio $(-\infty, 1]$. Continua en él: en 0, límites y valor 1; en 1, continua por la izquierda.

d) Dominio $\mathbb{R}$; continua en $\mathbb{R}$. En 0, los dos límites y el valor son 0.

7.25 Continua para $x \neq 0$. En 0, usa $1 - \cos x = 2\,\text{sen}^2(x/2)$: el cociente equivale a $\text{sen}(x/2)\cdot(\text{sen}(x/2)/(x/2)) \to 0$. Coincide con $f(0)$; continua en todo $\mathbb{R}$.

7.26 $a = 2$, $b = 3$: se resuelve $a + b = 5$ y $2a + b = 7$.

7.27 **a)** Para $x \neq 0$ es continua. En 0: límite izquierdo a, pues $e^{1/x} \to 0$; derecho 0, pues $e^{1/x} \to +\infty$.

b) Si $a \neq 0$, salto finito para cualquier b. Si $a = 0$ y $b \neq 0$, evitable. Si $a = b = 0$, continua en $\mathbb{R}$.

7.28 $f(x) = x^2 + x - 4$ es continua. $f(1) = -2$ y $f(2) = 2$. Por Bolzano existe $c \in (1, 2)$ con $f(c) = 0$.

7.29 $h(x) = e^{-x} + 2 - x$ es continua. $h(2) = e^{-2} > 0$; $h(3) = e^{-3} - 1 < 0$. Existe una solución en $(2, 3)$.

7.30 **a)** Continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. En 0 hay salto finito: límites -1 y 1.

b) Continua en $\mathbb{R}$.

c) Continua en $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. En ambos puntos excluidos, los dos límites laterales son $+\infty$: discontinuidad infinita.

7.31 **a)** No: dos sucesiones que tienden a 0 tienen imágenes que tienden a 1 y -1. La función no puede ser continua.

b) Sí: ambos límites y $f(0)$ son 0.

c) No se puede decidir. La continuidad exigiría $f(0) = 1$, pero conocer solo esta sucesión no basta. $f \equiv 1$ es continua; una función igual a 1 solo en $1/n$ y a 0 en los demás puntos no lo es en 0.

08 · Aplicaciones y razonamiento

8.01 **a)** Tras n días lleva $100(1 - 2^{-n})$ km y faltan $100 \cdot 2^{-n}$ km. Para n finito siempre queda una cantidad positiva.

b) No completa exactamente 100 km en un número finito de días, aunque la distancia tiende a 100 km. Primeros valores: 50; 75; 87,5 km.

8.02 **a)** $M(v) \to +\infty$: el denominador positivo tiende a 0.

b) Un cuerpo con masa en reposo positiva necesitaría energía ilimitada para alcanzar c. M es la masa relativista del modelo; la masa en reposo m permanece constante.

8.03 $P(t) = 95 - 250/t$ para $t > 10$. Su límite es 95: el porcentaje se aproxima al 95 %.

8.04 **a)** $S(x) = 600 + (x^2 - x + 1) - (50 + 3x) = x^2 - 4x + 551$ euros; x entero no negativo.

b) El modelo tiene dominio discreto. La extensión polinómica a $\mathbb{R}$ es continua; respecto al dominio discreto, cada punto es aislado y la función también es continua en sentido relativo.

8.05 **a)** 3: tras 99 pasos, $2^{99}(x - 1) + 1 = 2^{100} + 1$.

b) Una: si la figura representa directamente f, una gráfica fija determina una sola función.

c) 63: hasta el 62 hay 1953 términos y hasta el 63 hay 2016.

d) 802. Factoriza $(n^2 - 20n + 20)(n^2 + 20n + 20)$. El segundo factor supera 1; para un primo positivo el primero debe valer 1. Ocurre en n = 1 y 19: valores 41 y 761.

e) 8: $(1 + 10)^{48} \equiv 1 + 480 \equiv 81$ (mód. 100).

8.06 Es el primer año de la era cristiana, cuya referencia tradicional es el nacimiento de Jesús. La numeración histórica pasa del 1 a. C. al 1 d. C. sin un año cero; esta convención no fija por sí sola una fecha histórica exacta de nacimiento.

8.07 La fundación de Roma; ab urbe condita significa «desde la fundación de la ciudad».

8.08 $x = -325$, usando el tramo $x < 0$. Resulta $C(-325) = -\lceil 3{,}25 \rceil = -4$: siglo IV a. C.

8.09 **a)** $C(1616) = \lceil 16{,}16 \rceil = 17$: siglo XVII d. C.

b) $C(-325) = -\lceil 3{,}25 \rceil = -4$: siglo IV a. C.

8.10 $C(-753) = -\lceil 7{,}53 \rceil = -8$: siglo VIII a. C.

8.11 **a)** No hay año histórico 0, por lo que C(0) queda sin definir. En la extensión a valores reales, C(x) = −1 cerca de 0 por la izquierda y C(x) = 1 por la derecha.

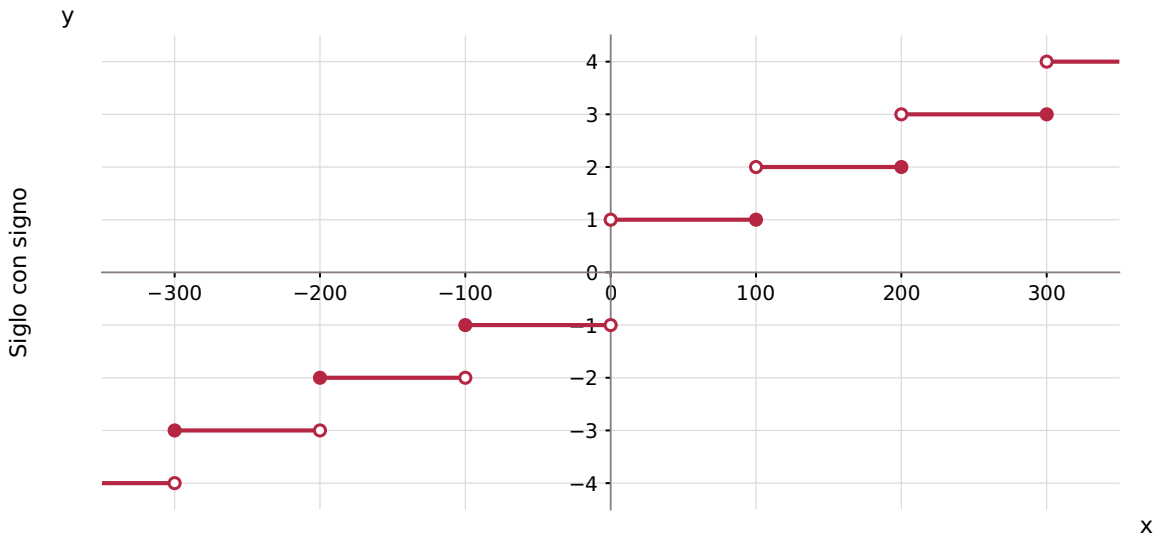
b) Los límites laterales son −1 y 1: no existe el bilateral. Ningún valor asignado en 0 eliminaría el salto.

8.12 El 1 de enero de 2001. El siglo XX comprende los años 1901 a 2000, y el XXI, de 2001 a 2100.

8.13 **a)** Es constante y continua entre múltiplos de 100. En cada múltiplo de 100 distinto de 0 hay un salto finito de amplitud 1.

b) En 0 hay límites laterales −1 y 1: salto de amplitud 2, sin valor definido. Para $x > 0$, C(100k) = k, con límites k y k + 1. Para $x < 0$, en −100k los límites son −k − 1 y −k, y C(−100k) = −k.

8.14 En (0, 100], C = 1; en (100, 200], C = 2; en (200, 300], C = 3. En los tramos negativos, C(−x) = −C(x). Los intervalos positivos tienen extremo izquierdo abierto y derecho cerrado; los negativos, al revés.



Año (a. C.: negativo; d. C.: positivo)

8.15 C(2000) = 20. Límite izquierdo: 20; derecho: 21. No existe el límite bilateral y hay un salto finito de amplitud 1.