1.º BACHILLERATO

INTEGRALES

Practica, razona y comprueba tus respuestas.

01 Primitivas y condiciones

Derivación inversa y condiciones iniciales.

02 Potencias y funciones racionales

Potencias, cocientes y fracciones simples.

03 Integración por composición

Cambio de variable y funciones compuestas.

04 Exponenciales y trigonométricas

Exponenciales, seno, coseno y tangente.

05 Integrales definidas y propiedades

Regla de Barrow, aditividad y simetría.

06 Áreas entre curvas

Intersecciones, cambios de signo y recintos.

07 Aplicaciones y retos

Modelización, estimación y razonamiento.

TU RUTA DE TRABAJO

Índice

Actividades organizadas por contenidos, con espacio para trabajar y soluciones al final.

01	Primitivas y condiciones	3
02	Potencias y funciones racionales	5
03	Integración por composición	11
04	Exponenciales y trigonométricas	17
05	Integrales definidas y propiedades	21
06	Áreas entre curvas	27
07	Aplicaciones y retos	36
•	Solucionario	40

Cómo usar el dossier
El código **1.12** identifica la actividad 12 del bloque 1. Busca ese mismo código en el solucionario. Puedes seguir el orden completo o seleccionar un contenido para repasarlo.

Antes de empezar
Añade una constante C a cada integral indefinida y trabaja en los intervalos donde la función esté definida. Comprueba una primitiva derivándola. En áreas geométricas, divide en los puntos de corte y suma contribuciones positivas. Las unidades de área son cuadradas.

BLOQUE 01

Primitivas y condiciones

Derivación inversa y condiciones iniciales. · 10 actividades

1.01 Señala qué funciones tienen como primitiva $F(x) = \frac{3x^2}{10} + \frac{x}{3} + C$.

a) $f(x) = \frac{3x}{5} + \frac{1}{6}$

b) $f(x) = \frac{3x}{5} + \frac{1}{3}$

c) $f(x) = \frac{3x + 5}{15}$

1.02 Escribe cuatro primitivas de $f(x) = x^2 - x + 2$.

1.03 La función $F(x) = k \cdot e^{3x} + n$ es primitiva de $f(x) = e^{3x}$. Halla k y n si $F(0) = 0$.

1.04 Confirma que $F(x) = \frac{3x^2}{8} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ es primitiva de $f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 - 4}{4x^2}$. Halla la primitiva que vale 3 en $x = -2$.

1.05 Comprueba si F(x) es una primitiva de f(x), en los intervalos de sus dominios.

a) $F(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1$; $f(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 2$

b) $F(x) = 2 \cdot x^3 - x^2 - 3 \cdot x + \frac{19}{2}$; $f(x) = -\frac{27 \cdot x^2}{2} + 6 \cdot x$

c) $F(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$; $f(x) = \frac{x^2 - 2 \cdot x - 1}{(x - 1)^2}$

d) $F(x) = \text{sen}(x) \cdot \cos(x)$; $f(x) = 2 \cdot \cos^2(x) - 1$

e) $F(x) = \ln(\frac{x^2}{x + 1})$; $f(x) = \frac{x + 2}{x \cdot (x + 1)}$

1.06 Comprueba que $F(x) = 2x^2 - 3x + 2\sqrt{x}$ es primitiva de $f(x) = 4x - 3 + 1/\sqrt{x}$. Halla la que cumple $F(1) = 5$.

1.07 La pendiente de la tangente a una curva en cada abscisa x es 6x. Halla la función si pasa por el origen.

1.08 ¿Es cierto que la integral de un producto es el producto de las integrales? ¿Y que la integral de un cociente es el cociente de las integrales? Justifica usando $f(x) = x + 1$ y $g(x) = 2x^3$.

1.09 Halla f(x) si $f(-1) = -19$, $f'(2) = 24$ y $f''(x) = 18x - 10$.

1.10 Halla la función que pasa por P(1,5) y cuya pendiente de la tangente es $g(x) = 3x^2 + 5x - 2$.

BLOQUE 02

Potencias y funciones racionales

Potencias, cocientes y fracciones simples. · 15 actividades

2.01 Usa las derivadas de x^2 y x^3 y la linealidad para calcular estas integrales.

a) $\int x\,dx$

b) $\int x^2\,dx$

c) $\int 4 \cdot x\,dx$

d) $\int x^2 + x\,dx$

2.02 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int x^2 + 3 \cdot x - 7\,dx$

b) $\int \frac{x}{2} - 1\,dx$

c) $\int \frac{x}{6} - \frac{5}{3}\,dx$

d) $\int \sqrt[4]{x} + \frac{8}{x}\,dx$

2.03 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int x^{\frac{2}{3}}\,dx$

b) $\int \frac{7 \cdot \sqrt[3]{x}}{2}\,dx$

c) $\int \frac{8 \cdot x^{\frac{3}{4}}}{5}\,dx$

d) $\int 4 \cdot x^{\frac{3}{5}}\,dx$

2.04 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{4}{x^2}\,dx$

b) $\int -\frac{6}{x^3}\,dx$

c) $\int \frac{3}{5 \cdot x^4}\,dx$

d) $\int \frac{1}{2 \cdot x^4}\,dx$

2.05 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 2}{x}\,dx$

b) $\int \frac{x^2 + 6 \cdot x - 8}{x^2}\,dx$

2.06 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{4 \cdot x - 5}{x^2}\, dx$

b) $\int \frac{(x+1)^2}{2 \cdot x}\, dx$

2.07 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{2}{x^2 + 6 \cdot x + 8}\, dx$

b) $\int \frac{2}{x^2 - 8 \cdot x + 7}\, dx$

2.08 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{2 \cdot x + 1}{x^2 + 6 \cdot x + 8}\, dx$

b) $\int \frac{2 \cdot x - 3}{x^2 - 8 \cdot x + 7}\, dx$

2.09 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int 6 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 3\, dx$

b) $\int 5 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 2\, dx$

c) $\int \frac{x^4}{3} - \frac{3 \cdot x^2}{4} - 2 \cdot x\, dx$

d) $\int \frac{3 \cdot x^3}{10} + \frac{13 \cdot x^2}{10} - \frac{1}{5}\, dx$

e) $\int -\frac{3 \cdot x^5}{7} + \frac{x^3}{5} - \frac{7 \cdot x^2}{4}\, dx$

2.10 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{1}{x}\,dx$

b) $\int \frac{3}{x^4}\,dx$

c) $\int -\frac{2}{5\cdot x^3}\,dx$

d) $\int \frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\,dx$

e) $\int 1+\frac{3}{x^2}\,dx$

f) $\int \frac{5}{x}+\frac{2}{3\cdot x^3}\,dx$

2.11 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int -x^3+2\cdot x-1+\frac{4}{x^2}+\frac{5}{4\cdot x^3}\,dx$

b) $\int -3\cdot x^5+3\cdot x^2-5\cdot x+11+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}\,dx$

c) $\int -x\cdot(x^2-7\cdot x-5)-\frac{12}{x}-\frac{1}{x^2}\,dx$

2.12 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4}\,dx$

b) $\int 2 \cdot x - \frac{1}{x^5}\,dx$

c) $\int 2 \cdot x + 5 - \frac{7}{x^4}\,dx$

d) $\int \frac{x^3}{5} + \frac{2 \cdot x}{5} + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\,dx$

e) $\int 3 \cdot x + 5 - \frac{4}{3 \cdot x}\,dx$

f) $\int \frac{3 \cdot x^4}{5} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{x^4}\,dx$

2.13 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{12}{x^2 + 1} - \frac{4}{x^2}\,dx$

b) $\int \frac{3 \cdot \sqrt{2} \cdot x^3 \cdot \sqrt{|x|}}{7}\,dx$

c) $\int \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

d) $\int \frac{e^{2 \cdot x}}{(e^{2 \cdot x} + 1)^3}\,dx$

2.14 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{1}{\sqrt{x - 3}}\,dx$

b) $\int \frac{2}{\sqrt[3]{6 \cdot x - 7}}\,dx$

c) $\int (-\sqrt{x} + x^2 + 2)^2\,dx$

d) $\int \frac{9}{\sqrt{2 \cdot x + 1}}\,dx$

2.15 Descompón $\frac{8x-7}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$ y calcula su integral.

BLOQUE 03

Integración por composición

Cambio de variable y funciones compuestas. · 14 actividades

3.01 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int 10 \cdot x \cdot (x^2 - 4)^4 \, dx$

b) $\int \frac{6 \cdot x + 3}{x^2 + x - 3} \, dx$

c) $\int \frac{4 \cdot x^2}{x^3 + 5} \, dx$

d) $\int \frac{x \cdot (x^2 + 1)^3}{2} \, dx$

3.02 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{1}{\sqrt{4 - 16 \cdot x^2}} \, dx$

b) $\int -\frac{1}{\sqrt{5 - 25 \cdot x^2}} \, dx$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{1 - 4 \cdot x^4}} \, dx$

d) $\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{1 - \ln(x)^2}} \, dx$

3.03 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{1}{9 \cdot x^2 + 3}\, dx$

b) $\int \frac{4}{(6 - x)^2 + 1}\, dx$

c) $\int \frac{x^2}{8 \cdot x^6 + 2}\, dx$

d) $\int \frac{1}{x^2 + 2 \cdot x + 2}\, dx$

3.04 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int x^2 \cdot \operatorname{sen}(x^3)\, dx$

b) $\int 2 \cdot x^3 \cdot \operatorname{sen}(x^4 - 2)\, dx$

c) $\int 5 \cdot x^2 \cdot e^{x^3 + 4}\, dx$

d) $\int x^2 \cdot (\operatorname{tg}^2(\frac{x^3}{2}) + 1)\, dx$

3.05 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{x^2}{x^6 + 1}\, dx$

b) $\int \frac{4}{(2 \cdot x - 1)^2 + 1}\, dx$

3.06 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{8 \cdot x}{\sqrt{1 - 4 \cdot x^4}}\, dx$

b) $\int -\frac{1}{\sqrt{1 - 16 \cdot x^2}}\, dx$

3.07 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{2}{x^2 + 6 \cdot x + 10}\, dx$

b) $\int \frac{2}{x^2 - 8 \cdot x + 17}\, dx$

c) $\int \frac{3}{x^2 - x + 2}\, dx$

d) $\int \frac{3}{4 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 7}\, dx$

3.08 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{x + 3}{x^2 + 6 \cdot x + 10}\, dx$

b) $\int \frac{x - 2}{x^2 - 8 \cdot x + 17}\, dx$

3.09 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{1}{2 \cdot x - 1}\, dx$

b) $\int \frac{4}{5 \cdot x - 7}\, dx$

c) $\int (\frac{x^2}{3} + 1)^2\, dx$

d) $\int 3 \cdot x - 2\, dx$

e) $\int \frac{x}{2 \cdot x^2 - 1}\, dx$

f) $\int \frac{4 \cdot x^2}{x^3 + 1}\, dx$

3.10 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int (x + 1) \cdot \sqrt[3]{x^2 + 2 \cdot x - 3}\, dx$

b) $\int 8 \cdot x \cdot (x^2 - 5)^{\frac{3}{4}}\, dx$

c) $\int \sqrt[5]{e^{3 \cdot x - 2} + 7} \cdot e^{3 \cdot x}\, dx$

d) $\int \sqrt{e^{2 \cdot x - 6} - 2} \cdot e^{2 \cdot x}\, dx$

e) $\int \sqrt{\operatorname{sen}(2 \cdot x) + 1} \cdot \cos(2 \cdot x)\, dx$

f) $\int \sqrt{-x + \cos(x)} \cdot (\operatorname{sen}(x) + 1)\, dx$

3.11 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{x}{x^4 + 1}\, dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - x)^2}}\, dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{1 - 5 \cdot x^2}}\, dx$

d) $\int \frac{\cos(x)}{-\operatorname{sen}^2(x) - 1}\, dx$

e) $\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)^2 + x}\, dx$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{4 - x^4}}\, dx$

3.12 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int -\frac{3}{x^2 + 1}\, dx$

b) $\int (x - 1) \cdot (4 \cdot x + 2)\, dx$

c) $\int \frac{\sqrt{x + 1}}{3}\, dx$

d) $\int (e^{2 \cdot x} + 2 \cdot e^x) \cdot e^{-x}\, dx$

e) $\int \frac{3 \cdot x}{8 \cdot x^2 + 4}\, dx$

f) $\int \frac{1}{4 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 10}\, dx$

3.13 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int -\frac{x}{x^2+3}\,dx$

b) $\int \frac{1}{(x^2+1)\cdot \operatorname{arctg}(x)}\,dx$

c) $\int \frac{1}{2\cdot x^{\frac{3}{2}}}\,dx$

d) $\int -\frac{\ln(3)}{x\cdot \ln(x)^2}\,dx$

e) $\int \operatorname{tg}(3\cdot x)\,dx$

f) $\int \frac{1-x}{(x-1)^2+1}\,dx$

g) $\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\,dx$

h) $\int \frac{\operatorname{tg}(x)}{\cos(x)}\,dx$

3.14 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{7\cdot e^x}{(e^x+4)^4}\,dx$

b) $\int \frac{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))^2}\,dx$

c) $\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{(\cos(x)+5)^3}\,dx$

d) $\int \frac{-x\cdot \operatorname{sen}(x)+2\cdot\cos(x)}{(x\cdot\cos(x)+\operatorname{sen}(x))^2}\,dx$

e) $\int \frac{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{2\cdot\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)+1}\,dx$

f) $\int \frac{e^x}{(e^x+1)^4}\,dx$

BLOQUE 04

Exponenciales y trigonométricas

Exponenciales, seno, coseno y tangente. · 11 actividades

4.01 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \text{sen}(x)\, dx$

b) $\int 3 \cdot \text{sen}(x) + \cos(x)\, dx$

4.02 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int 2^{\frac{x}{2}}\, dx$

b) $\int e^{x+1}\, dx$

c) $\int (\frac{5}{2})^{2 \cdot x}\, dx$

d) $\int e^{x-1} + e^{-2 \cdot x}\, dx$

4.03 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int 2 \cdot 5^{x^2+1} \cdot x\, dx$

b) $\int 2 \cdot e^{\frac{x}{2}+2}\, dx$

c) $\int \frac{3^{5 \cdot x-1}}{2}\, dx$

d) $\int x \cdot e^{-x^2}\, dx$

4.04 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \operatorname{sen}(3 \cdot x + 2)\, dx$

b) $\int 8 \cdot \cos(4 \cdot x - 3)\, dx$

c) $\int -\operatorname{sen}(2 \cdot x)\, dx$

d) $\int \cos(6 \cdot x - 5)\, dx$

4.05 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{1}{\cos^2(x + 3)}\, dx$

b) $\int \frac{2 \cdot x}{\cos^2(4 \cdot x^2)}\, dx$

c) $\int \frac{\operatorname{tg}^2(\sqrt{x}) + 1}{\sqrt{x}}\, dx$

d) $\int x^2 \cdot \operatorname{tg}^2(x^3) + x^2\, dx$

4.06 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int e^{2 \cdot x}\, dx$

b) $\int x \cdot e^{x^2}\, dx$

c) $\int e^{\frac{3 \cdot x}{4}}\, dx$

d) $\int 5^{2 \cdot x + 1}\, dx$

e) $\int 2^{\frac{x}{2} + \frac{1}{2}}\, dx$

f) $\int 3 \cdot x \cdot e^{x^2 + 1}\, dx$

4.07 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int -\cos(x-2)\,dx$

b) $\int 2\cdot x\cdot \operatorname{sen}(x^2)\,dx$

c) $\int \operatorname{tg}^2(2\cdot x)+1\,dx$

d) $\int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

e) $\int \operatorname{sen}(x)\cdot\cos^2(x)\,dx$

f) $\int \frac{1}{\cos^2(3\cdot x)}\,dx$

4.08 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \operatorname{sen}(x)+2\cdot\cos(x)\,dx$

b) $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

c) $\int -\frac{3}{x^2+1}\,dx$

d) $\int 2^x+e^x\,dx$

e) $\int \frac{6}{\sqrt{x}}\,dx$

f) $\int -\frac{3}{\sqrt{1-3\cdot x}}\,dx$

4.09 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int 4 \cdot x^4 - 5 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 4 \, dx$

b) $\int (2 \cdot x - 2) \cdot \cos(x^2 - 2 \cdot x) \, dx$

c) $\int \operatorname{sen}(x) + 5 \cdot \cos(x) - 1 \, dx$

d) $\int \operatorname{sen}^2(x) \cdot \cos(x) + \operatorname{sen}(x) \cdot \cos^2(x) \, dx$

4.10 Calcula la integral de $\operatorname{sen}^2 x$ usando $\operatorname{sen}^2 x = (1 - \cos 2x)/2$.

a) $\int \operatorname{sen}^2(x) \, dx$

4.11 Calcula las integrales de sec x y cosec x.

a) $\int \frac{1}{\cos(x)} \, dx$

b) $\int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \, dx$

BLOQUE 05

Integrales definidas y propiedades

Regla de Barrow, aditividad y simetría. · 13 actividades

5.01 Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_0^3 x^3 + 4 \cdot x^2 - 5 \, dx$

b) $\int_{-2}^{1} (\frac{x}{3} + 2)^2 \, dx$

5.02 Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_1^4 \frac{3}{\sqrt{x}} \, dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\operatorname{sen}(x) + 5 \cdot \cos(x) \, dx$

5.03 Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{-2}^{1} 3 \cdot x^4 - 2 \cdot x + 7 \, dx$

b) $\int_{-5}^{-1} x^2 - 1 \, dx$

c) $\int_0^3 x^3 - 5 \cdot x^2 + x - 1 \, dx$

d) $\int_{-3}^{0} 9 \cdot x^3 - x \, dx$

e) $\int_{-3}^{3} 2 \cdot x^4 - x^2 + 5 \, dx$

f) $\int_{-5}^{-2} 4 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 1 \, dx$

5.04 Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_1^2 \frac{1}{2 \cdot x}\, dx$

b) $\int_0^2 x \cdot e^{x^2}\, dx$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(x)\, dx$

d) $\int_0^{\pi} \text{tg}^2\left(\frac{x}{4}\right) + 1\, dx$

5.05 Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_2^5 \frac{4}{x+2}\, dx$

b) $\int_{-5}^{-3} \frac{6}{x^2}\, dx$

c) $\int_2^4 x - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x^2}\, dx$

d) $\int_{-1}^{1} \frac{2}{x^2+1}\, dx$

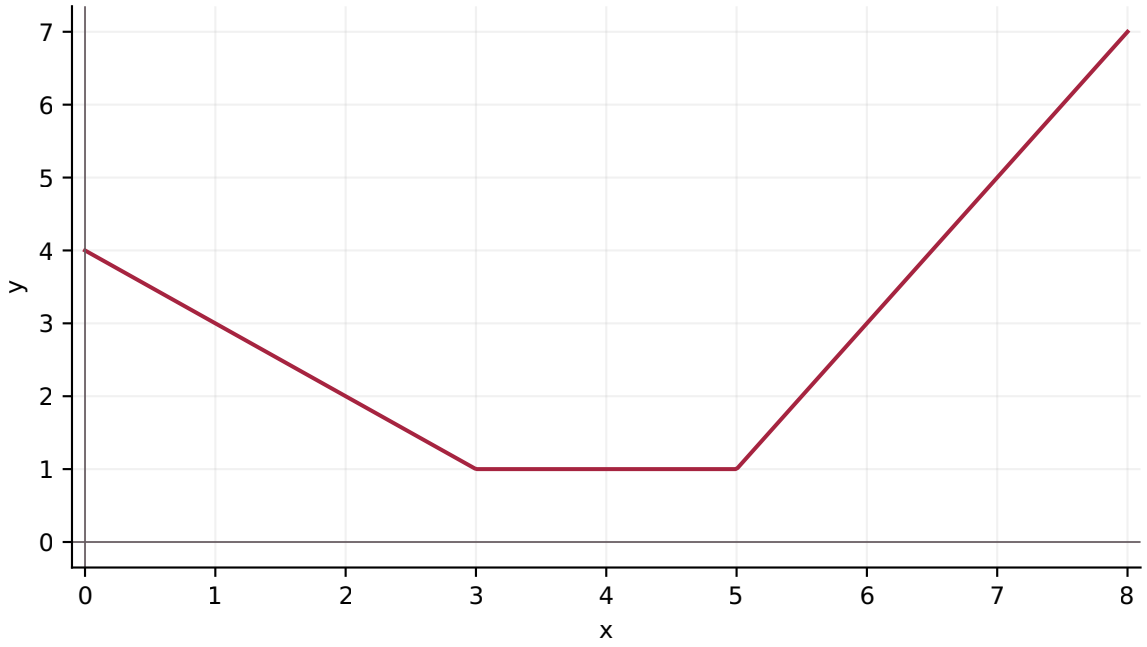
e) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

f) $\int_{-1}^{3} \frac{8}{\sqrt{x+4}}\, dx$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2 \cdot \text{sen}(x) + 3 \cdot \cos(x)\, dx$

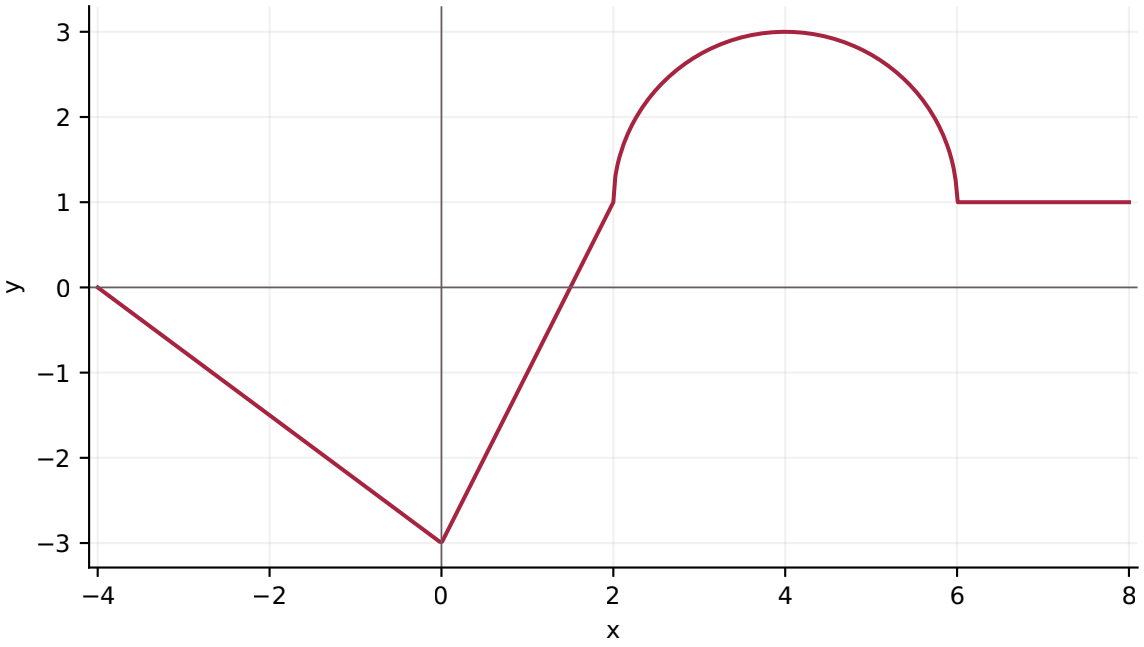
h) $\int_1^2 \frac{4}{x^5}\, dx$

5.06 Usa la función representada para hallar el área entre 0 y x, para x = 1, 2, 3, 4 y 5.



5.07 Representa f(x) = 2x y completa la tabla de áreas entre 0 y x para x = 1, 2, 3, 4 y 5. Halla la expresión de esa función integral.

5.08 Calcula las integrales a partir de la gráfica. El arco es una semicircunferencia de centro (4,1) y radio 2.



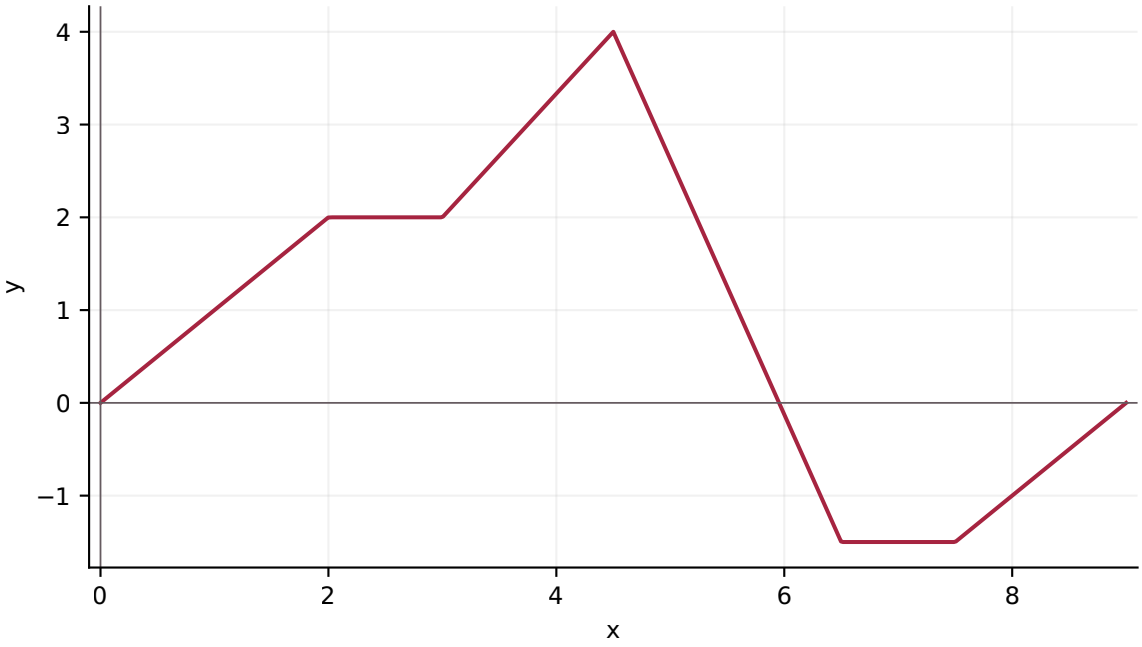
a) $\int_{-4}^{0} f(x)\,dx$

b) $\int_{4}^{7} f(x)\,dx$

c) $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$

d) $\int_{6}^{8} f(x)\,dx$

5.09 Calcula las integrales de la gráfica poligonal. Se toman como exactos los vértices (0,0), (2,2), (3,2), (4,5;4), (6,5;−1,5), (7,5;−1,5) y (9,0).



a) $\int_0^2 f(x)\,dx$

b) $\int_2^3 f(x)\,dx$

c) $\int_3^6 f(x)\,dx$

d) $\int_6^9 f(x)\,dx$

e) $\int_0^9 f(x)\,dx$

5.10 ¿Puede una función tener integral 8 entre 1 y 6 y encerrar con el eje X un área de 12 en ese intervalo? Si es posible, represéntala.

5.11 Explica por qué $\int_0^6(x^2 - 2x)\,dx < \int_2^6(x^2 - 2x)\,dx$.

5.12 f es par y g es impar. Se sabe que $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 6$ e $\int_{0}^{2} g(x)\,dx = 4$. Calcula:

a) $\int_{-2}^{2}(f(x) + g(x))\,dx$

b) $\frac{1}{4}\int_{0}^{2}(f(x) - g(x))\,dx$

c) $\int_{-2}^{2}(f(x) + f(-x))\,dx$

d) $\int_{-2}^{0}(3g(x) - \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{5})\,dx$

e) $\int_{-2}^{2} g(x)\,dx$

f) $\int_{-2}^{0}(f(x) - 2)\,dx$

g) $\int_{-2}^{0} g(x)\,dx$

h) $\int_{-1}^{1}(g(x) - g(-x))\,dx$

5.13 Halla la integral definida $\int_{2}^{4} \text{sen}(x-3)^3\,dx$.

BLOQUE 06

Áreas entre curvas

Intersecciones, cambios de signo y recintos. · 34 actividades

6.01 Halla el área del triángulo limitado por los ejes y la recta $y = x - 3$.

6.02 Halla, mediante integrales definidas, el área del triángulo de vértices (2, 0), (4, 4) y (5, 0).

6.03 Halla el área entre $y = x^2 - 4$ y el eje X, entre sus puntos de corte.

6.04 Halla el área entre $y = \dfrac{1}{x - 2}$ y el eje X en [3,4].

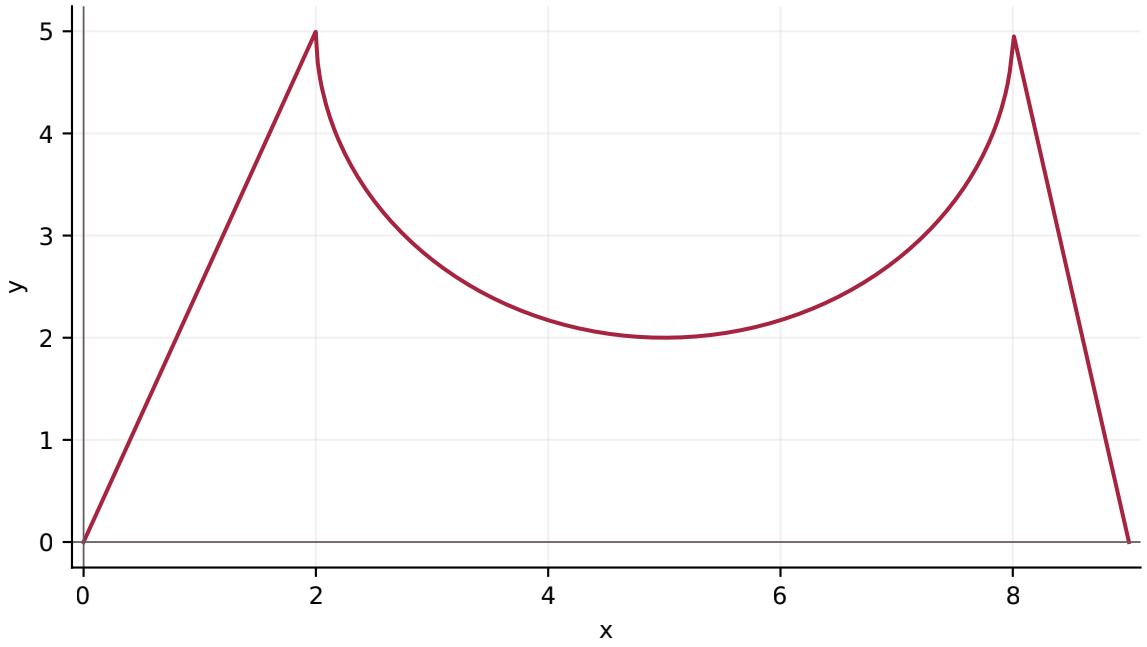
6.05 Determina el área entre $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x + 2$ en $[-3,4]$.

6.06 Halla el área comprendida entre las parábolas $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 2$.

6.07 Halla el área entre $f(x) = x^2 + 3x - 2$ y $g(x) = -x^2 + x + 10$.

6.08 ¿Qué área encierran $f(x) = x + 4$, $g(x) = -x + 2$ y $h(x) = x/2 + 2$?

6.09 Halla el área bajo la gráfica y sobre el eje X en cada intervalo. El tramo central es una semicircunferencia de centro (5,5) y radio 3.



a) [0,2]

b) [2,5]

c) [2,8]

d) [8,9]

e) [0,5]

f) [5,9]

6.10 Calcula el área bajo $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 3$ entre $x = -1$ y $x = 2$.

6.11 Determina el área entre cada función, el eje X y las abscisas que figuran en los límites. Todas son no negativas en estos intervalos.

a) $\int_2^4 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x \, dx$

b) $\int_1^3 x^3 - x^2 + 5 \cdot x + 1 \, dx$

c) $\int_{-1}^2 5^x \, dx$

d) $\int_3^8 \frac{4}{x^2} \, dx$

e) $\int_{\pi}^{\frac{3 \cdot \pi}{2}} -\cos(x) \, dx$

6.12 Calcula el área comprendida entre $f(x) = 1/x + x$, el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = e$.

6.13 Calcula el área entre $f(x) = -(x - 1)^2 - 1$, el eje X y $x = -1$, $x = 3$.

6.14 Halla el área entre cada función, el eje X y los límites indicados. Ten en cuenta los cambios de signo.

a) $f(x) = 3 \cdot x^2 + 16 \cdot x - 12$ en $[-7; 0]$.

b) $f(x) = 2 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 20$ en $[-1; 5]$.

c) $f(x) = 2 \cdot x^3 - 19 \cdot x^2 + 49 \cdot x - 20$ en $[-1; 3]$.

d) $f(x) = -\cos(x)$ en $[0; \pi]$.

e) $f(x) = 4^x - 4$ en $[0; 2]$.

6.15 Calcula el área entre cada función, el eje X y las rectas verticales indicadas.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$; $x = 0$, $x = 6$.

b) $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$; $x = -2$, $x = 2$.

6.16 Halla el área entre el eje X, $x = -1$, $x = 2$ y $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 0 \\ \sqrt{x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.

6.17 Halla el área limitada por el eje X y $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x \text{ si } x < -1 \\ 2x - 2 \text{ si } -1 \leq x \leq 2. \\ -x^2 + 3x \text{ si } x > 2 \end{cases}$

6.18 Sea $g(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x - 3 \text{ si } x < 1 \\ \frac{6}{x} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$. Halla el área entre la curva, el eje X y los límites indicados.

a) $x = -1, x = 0$

b) $x = 3, x = 7$

c) $x = -1, x = 4$

6.19 Calcula el área entre las gráficas de cada pareja de funciones.

a) $f(x) = -x^2 + 4 \cdot x; g(x) = x$

b) $f(x) = x^2 - 2 \cdot x; g(x) = -x^2 + 4 \cdot x$

c) $f(x) = \frac{x^2}{4} - x; g(x) = \frac{x}{2}$

6.20 Halla el área comprendida entre cada pareja de funciones.

a) $f(x) = 2 \cdot x - 1$; $g(x) = x^2 - 4$

b) $f(x) = 3$; $g(x) = x^2$

c) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2$

d) $f(x) = x^2 + 6 \cdot x$; $g(x) = x^3$

e) $f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x$; $g(x) = x^2 - 3 \cdot x$

6.21 Halla el área limitada por $f(x) = 10/x$, $g(x) = 3x/2 + 2$ y $h(x) = 2$.

6.22 Calcula el área entre $f(x) = x^3/4$ y $g(x) = x$.

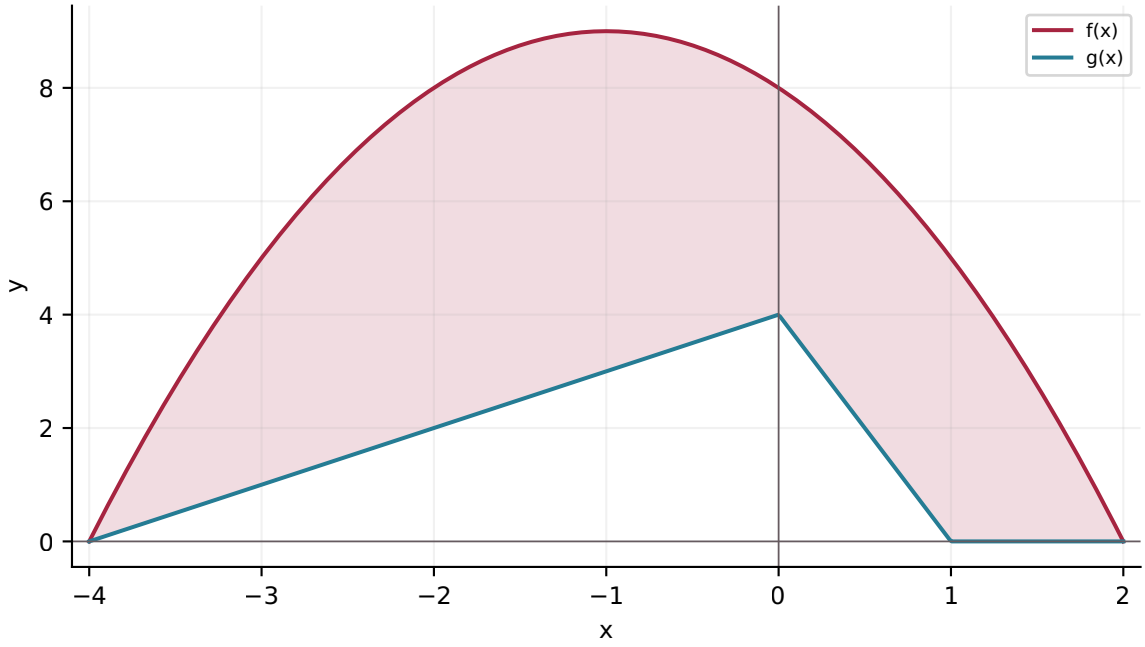
6.23 Las curvas $y = \text{sen } x$ e $y = \cos x$ delimitan regiones repetidas. Halla el área de una figura base.

6.24 Dibuja $y = x^2 - 2x - 8$ y su tangente en $x = 2$. Halla el área limitada por ambas y las abscisas 2 y 4.

6.25 Halla el área entre $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = \text{sen } 2x$ en $[0,\pi/2]$.

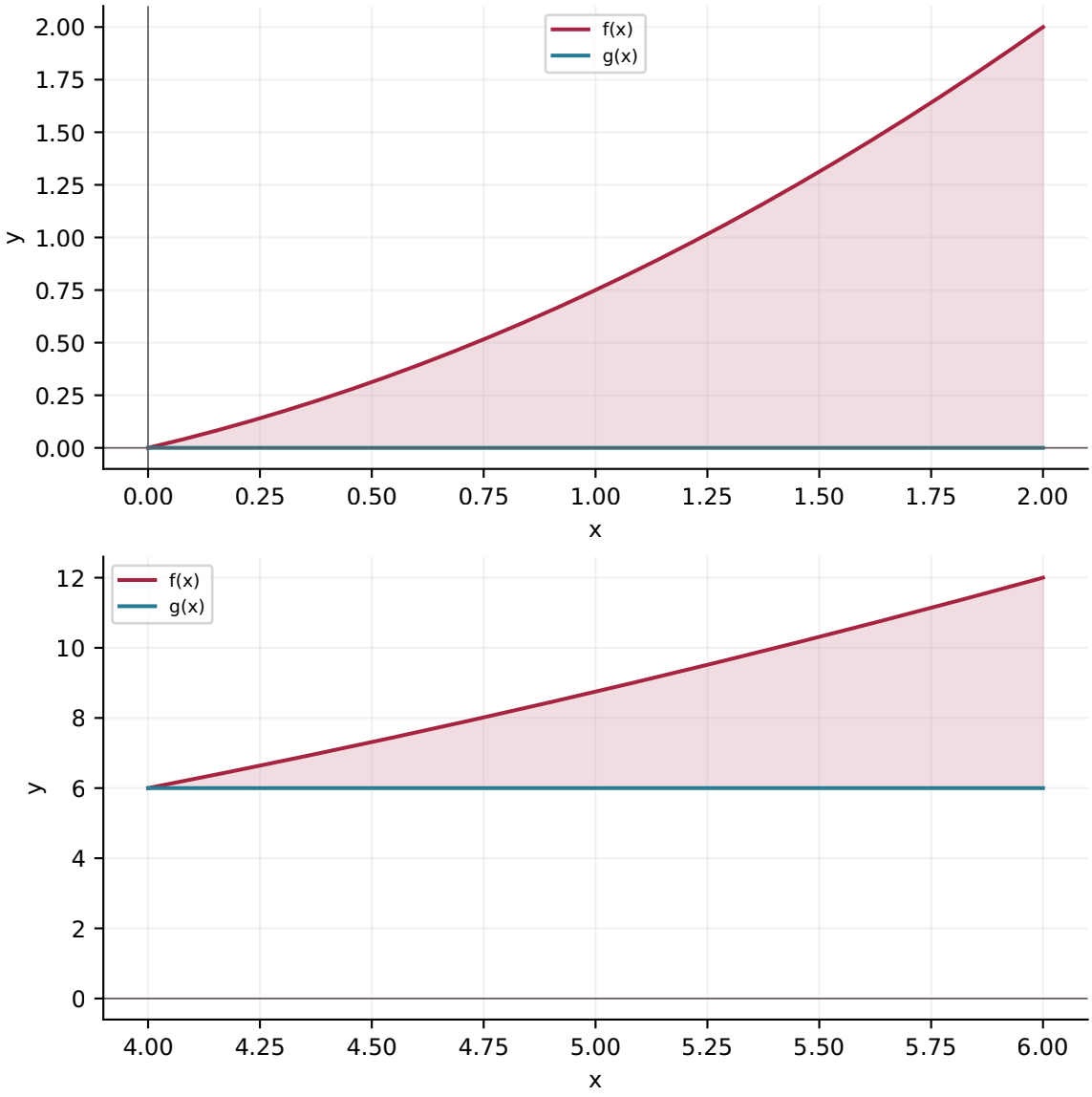
6.26 Halla el recinto máximo entre $f(x) = -x^2 - 2x$, $g(x) = -x^2 + 4x$ y $h(x) = (x^2 - 2x - 8)/3$.

6.27 Calcula el área representada, con $f(x) = 8 - 2x - x^2$, $g(x) = x + 4$ y $h(x) = 4 - 4x$. El borde inferior sigue g entre -4 y 0, h entre 0 y 1, y el eje X entre 1 y 2.



6.28 Para $f(x) = 1/(2x + 1)$, con $x > 0$: a) halla una primitiva; b) calcula el área bajo la curva entre $x = 2$ y $x = 4$.

6.29 Sea f(x) = (x² + 2x)/4. Halla las dos áreas sombreadas: entre x = 0 y x = 2 sobre el eje X, y entre x = 4 y x = 6 sobre la horizontal y = 6.



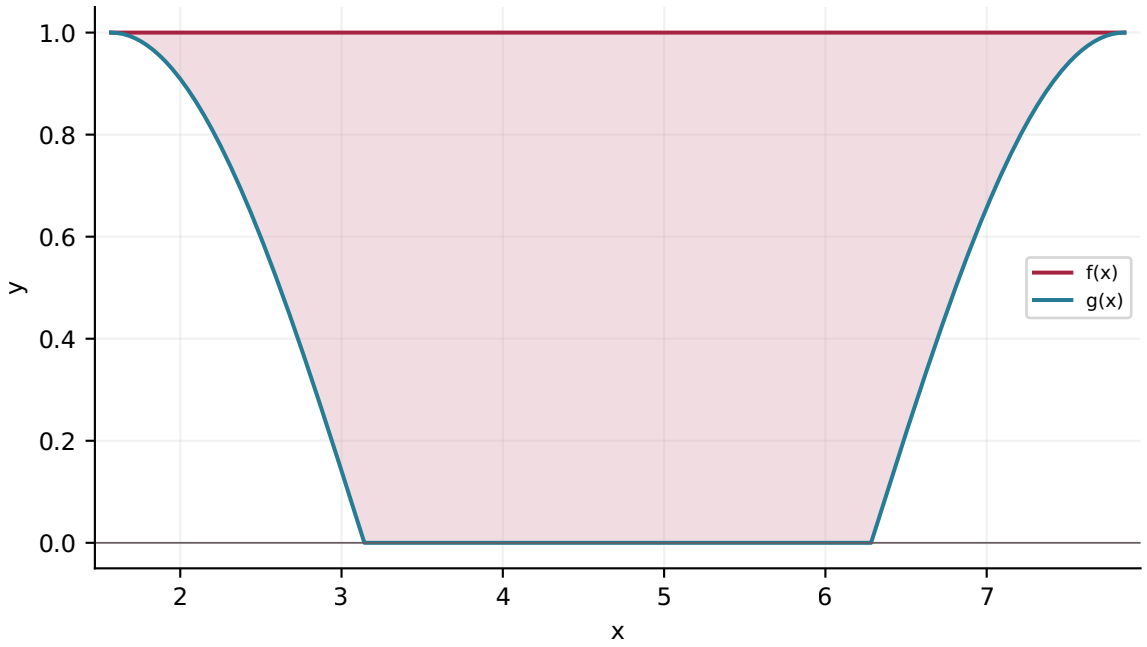
6.30 Representa y = x² − 4 y la recta que pasa por A(−1,−3) y B(3,5). Calcula el área encerrada.

6.31 Calcula el área entre f(x) = |x² − 3x + 4|, el eje X, x = −2 y x = 5.

6.32 Halla la parábola que pasa por (−2,0), (1/2,25/4) y (0,6), y el área que encierra con y = x en [1,3].

6.33 Calcula el área limitada por $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$.

6.34 En la gráfica de f(x) = sen x, estima el área sombreada y calcúlala mediante integrales. Está entre y = 1 y el mayor de sen x y 0, desde π/2 hasta 5π/2.



BLOQUE 07

Aplicaciones y retos

Modelización, estimación y razonamiento. · 20 actividades

7.01 Halla una función cuadrática que corta el eje X en (1,0) y (3,0) y cuya área limitada por la curva y los dos ejes vale 4/3.

7.02 Halla a, b y c en $f(x) = ax^2 + bx + c$ si la gráfica pasa por (0,−1) y (1,2), y $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{5}{6}$.

7.03 La función $f(x) = x^2 + bx + c$ determina un área de 36 con el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$, y corta el eje X en (−3,0). Halla su expresión.

7.04 Sea $f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - x + 4 \text{ si } x \le 1 \\ ax + 2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$. a) Halla a para que f sea continua en $\mathbb{R}$. b) Calcula el área delimitada por f en el primer cuadrante.

7.05 En $y = x^2/4$, halla m entre 1 y 2 para que el área bajo la curva entre 1 y m sea igual al área sobre la curva y bajo $y = 1$ entre m y 2.

7.06 Sea $f(x) = x^2 + bx$. a) Halla b y la primitiva F con $F(0) = 2$ y $F(3) = 20$. b) Para $b = -1$, dibuja la curva y halla el área con el eje X entre 0 y 2.

7.07 Halla a, b y c para que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ tenga un mínimo en (3,0) y encierre con el eje X un área de 27/4.

7.08 Halla $a > 0$ para que la región entre $y = x^2$ e $y = ax$ tenga área 4.

7.09 Una gota cae desde reposo desde una altura de 600 m. Con $g = 9{,}8$ m/s², halla su velocidad a los 3 s, el espacio recorrido hasta entonces mediante integrales y el tiempo que tarda en llegar al suelo.

7.10 En una pared de 6 m de altura se pinta la figura encerrada por $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ y $g(x) = 2x^2 - 3x + 4$, recortada a la altura de la pared. a) Halla la superficie. b) En una pared de 23 m de longitud se repite dejando 5 m entre figuras. ¿Cuánto cuesta a 2 €/m²?

7.11 La derivada de una cotización es $0{,}02x^2 + 1$ durante una semana, donde $x = 0$ corresponde al lunes. Si el lunes vale 5 €, halla la función de cotización.

7.12 Aproxima por trapecios de anchura 1 y compara con la integral exacta. a) Área bajo $y = x^2$ entre 0 y 4. b) Área que $y = 6 + x - x^2$ determina en el primer cuadrante.

7.13 Un móvil tiene velocidad inicial 3 m/s y aceleración constante 2 m/s². Su velocidad es $v(t) = 3 + 2t$ y el espacio recorrido es $s(t) = 3t + t^2$. Representa v y calcula:

a) Área bajo v entre 0 y 2.

b) Espacio en los dos primeros segundos.

c) Área bajo v entre 0 y 5.

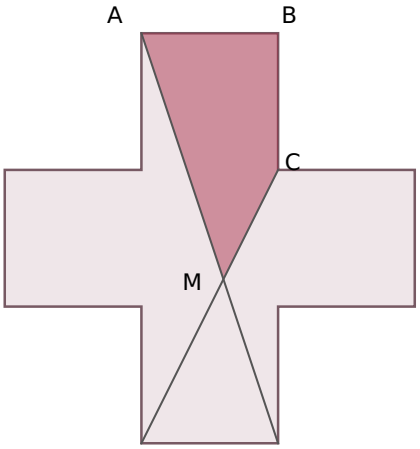
d) Espacio en los cinco primeros segundos.

e) Área bajo v entre 2 y 6.

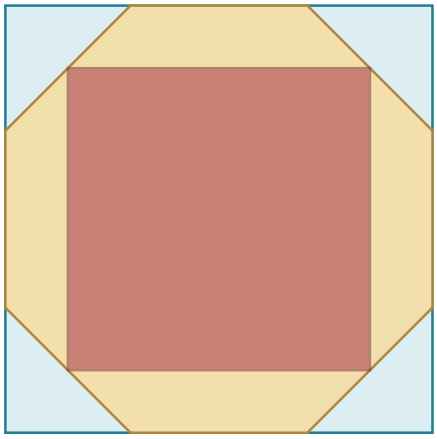
f) Espacio entre los segundos 2 y 6.

7.14 Elige la respuesta correcta y justifica. Para c) y d), utiliza los dibujos.

c) Cruz de lados 4



d) Cuadrados y octágono



a) Área entre $y = |x - 1|$ e $y = 2$. Opciones: 4; 3; 2; 1; 1/2.

b) Área de $|x - 1| + |y - 1| = 1$. Opciones: 2; 5/2; 3; π; 4.

c) Los 12 lados del polígono en cruz miden 4 y forman ángulos rectos. Halla el área del cuadrilátero ABCM sombreado. Opciones: 16; 44/3; 88/5; 20; 62/3.

d) Dos cuadrados y un octágono regular están inscritos como en el dibujo. El cuadrado exterior tiene área 48 cm². Halla el área del interior. Opciones: 40; 36; 32; 28; 24.

7.15 Halla f si $f'(x) + x^2 f(x) = 0$ y $f(1) = e$. Representa la función y calcula su tangente en $x = 1$.

7.16 Calcula $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$, para n natural no nulo, siendo $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x \text{ si } 0 \le x < \frac{1}{n} \\ \frac{3}{n} \text{ si } \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$.

7.17 ¿Qué es el trabajo en física?

7.18 Escribe dos ejemplos en los que se realice trabajo como magnitud física.

7.19 Si una partícula se mueve a lo largo del eje X, ¿es la fuerza la derivada del trabajo?

7.20 La fuerza necesaria para mover una partícula desde su equilibrio hasta x es $F_x = kx$, con $k > 0$. Calcula mediante integrales el trabajo hasta $x = 1$, hasta $x = 2$ y hasta una posición x cualquiera.

Solucionario · 01 · Primitivas y condiciones

1.01 $F'(x) = \frac{3x}{5} + \frac{1}{3}$. Coinciden b) y c).

1.02 Por ejemplo: $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + C$ para C = 1, 2, 3 y 4.

1.03 $F' = 3k \cdot e^{3x}$, por tanto k = 1/3. Como F(0) = k + n = 0, n = −1/3.

1.04

a) Al derivar: $F'(x) = \frac{3x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = f(x)$.

b) F(−2) = 0. Se necesita sumar 3: $\frac{3x^2}{8} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} + 3$.

1.05

a) Sí. $F'(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 2$.

b) No. $F'(x) = 6 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 3$.

c) Sí. $F'(x) = \frac{-x^2 + 2 \cdot x \cdot (x-1) - 1}{(x-1)^2}$.

d) Sí. $F'(x) = \cos(2 \cdot x)$.

e) Sí. $F'(x) = \frac{x+2}{x \cdot (x+1)}$.

1.06

a) Su derivada coincide con f(x), para x > 0. La familia es $2x^2 - 3x + 2\sqrt{x} + C$.

b) En x = 1 vale 1 + C; C = 4. Primitiva pedida: $2x^2 - 3x + 2\sqrt{x} + 4$.

1.07 f′(x) = 6x, luego $f(x) = 3x^2 + C$. Como f(0) = 0, C = 0. Resultado: $f(x) = 3x^2$.

1.08

a) No: $\int fg\,dx = 2x^5/5 + x^4/2 + C$. El producto $(x^2/2 + x)(x^4/2)$ tiene grado 6, por lo que no puede ser una primitiva del producto.

b) Tampoco para cocientes: $\int (f/g)\,dx = -1/(2x) - 1/(4x^2) + C$, mientras que $(x^2/2 + x)/(x^4/2) = 1/x^2 + 2/x^3$.

1.09

a) Integrando: $f'(x) = 9x^2 - 10x + C$. La condición f′(2) = 24 da C = 8.

b) $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 8x + K$. Como f(−1) = −16 + K = −19, K = −3.

c) Resultado: $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 8x - 3$.

1.10

a) Integrando: $f(x) = x^3 + 5x^2/2 - 2x + C$.

b) f(1) = 3/2 + C = 5, luego C = 7/2. Resultado: $f(x) = x^3 + 5x^2/2 - 2x + 7/2$.

02 · Potencias y funciones racionales

2.01

a) $\frac{x^2}{2} + C$

b) $\frac{x^3}{3} + C$

c) $2 \cdot x^2 + C$

d) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$

2.02

a) $\frac{x^3}{3} + \frac{3 \cdot x^2}{2} - 7 \cdot x + C$

b) $\frac{x^2}{4} - x + C$

c) $\frac{x^2}{12} - \frac{5 \cdot x}{3} + C$

d) $\frac{4 \cdot x^{\frac{5}{4}}}{5} + 8 \cdot \ln(|x|\ ) + C$

2.03

a) $\frac{3 \cdot x^{\frac{5}{3}}}{5} + C$

b) $\frac{21 \cdot x^{\frac{4}{3}}}{8} + C$

c) $\frac{32 \cdot x^{\frac{7}{4}}}{35} + C$

d) $\frac{5 \cdot x^{\frac{8}{5}}}{2} + C$

2.04

a) $-\frac{4}{x} + C$

b) $\frac{3}{x^2} + C$

c) $-\frac{1}{5 \cdot x^3} + C$

d) $-\frac{1}{6 \cdot x^3} + C$

2.05

a) $x^2 + 3 \cdot x - 2 \cdot \ln(|x|\ ) + C$

b) $x + 6 \cdot \ln(|x|\ ) + \frac{8}{x} + C$

2.06

a) $4 \cdot \ln(|x|\ ) + \frac{5}{x} + C$

b) $\frac{x^2}{4} + x + \frac{\ln(|x|\ )}{2} + C$

2.07

a) $\ln(|x + 2|\ ) - \ln(|x + 4|\ ) + C$

b) $\frac{\ln(|x - 7|\ )}{3} - \frac{\ln(|x - 1|\ )}{3} + C$

2.08

a) $-\frac{5 \cdot \ln(|x+2|)}{2} + \frac{5 \cdot \ln(|x+4|)}{2} + \ln(|x^2+6 \cdot x+8|) + C$

b) $\frac{5 \cdot \ln(|x-7|)}{6} - \frac{5 \cdot \ln(|x-1|)}{6} + \ln(|x^2-8 \cdot x+7|) + C$

2.09

a) $2 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + C$

b) $\frac{5 \cdot x^3}{3} + \frac{3 \cdot x^2}{2} - 2 \cdot x + C$

c) $\frac{x^5}{15} - \frac{x^3}{4} - x^2 + C$

d) $\frac{3 \cdot x^4}{40} + \frac{13 \cdot x^3}{30} - \frac{x}{5} + C$

e) $-\frac{x^6}{14} + \frac{x^4}{20} - \frac{7 \cdot x^3}{12} + C$

2.10

a) $\ln(|x|) + C$

b) $-\frac{1}{x^3} + C$

c) $\frac{1}{5 \cdot x^2} + C$

d) $3 \cdot \ln(|x|) + \frac{1}{x} + C$

e) $x - \frac{3}{x} + C$

f) $5 \cdot \ln(|x|) - \frac{1}{3 \cdot x^2} + C$

2.11

a) $-\frac{x^4}{4} + x^2 - x - \frac{4}{x} - \frac{5}{8 \cdot x^2} + C$

b) $-\frac{x^6}{2} + x^3 - \frac{5 \cdot x^2}{2} + 11 \cdot x + 2 \cdot \ln(|x|) + \frac{6}{x} + C$

c) $-\frac{x^4}{4} + \frac{7 \cdot x^3}{3} + \frac{5 \cdot x^2}{2} - 12 \cdot \ln(|x|) + \frac{1}{x} + C$

2.12

a) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + C$

b) $x^2 + \frac{1}{4 \cdot x^4} + C$

c) $x^2 + 5 \cdot x + \frac{7}{3 \cdot x^3} + C$

d) $\frac{x^4}{20} + \frac{x^2}{5} + 2 \cdot \ln(|x|) - \frac{5}{x} + C$

e) $\frac{3 \cdot x^2}{2} + 5 \cdot x - \frac{4 \cdot \ln(|x|)}{3} + C$

f) $\frac{3 \cdot x^5}{25} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{x^3} + C$

2.13

a) $12 \cdot \operatorname{arctg}(x) + \frac{4}{x} + C$

b) $\frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot |x|^{\frac{9}{2}}}{21} + C$

c) $\frac{6 \cdot x^{\frac{7}{6}}}{7} + \frac{3 \cdot x^{\frac{5}{3}}}{5} + C$

d) $-\frac{1}{4 \cdot (e^{2 \cdot x}+1)^2} + C$

2.14

a) $2 \cdot \sqrt{x - 3} + C$

b) $\frac{(6 \cdot x - 7)^{\frac{2}{3}}}{2} + C$

c) $-\frac{4 \cdot x^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{8 \cdot x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{4 \cdot x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4 \cdot x + C$

d) $9 \cdot \sqrt{2 \cdot x + 1} + C$

2.15

a) $8x - 7 = A(x + 1) + B(x - 2)$. De $A + B = 8$ y $A - 2B = -7$ se obtiene $A = 3$, $B = 5$.

b) Integral $= 3 \ln|x - 2| + 5 \ln|x + 1| + C$.

---

03 · Integración por composición

3.01

a) $(x^2 - 4)^5 + C$

b) $3 \cdot \ln(|x^2 + x - 3|) + C$

c) $\frac{4 \cdot \ln(|x^3 + 5|)}{3} + C$

d) $\frac{(x^2 + 1)^4}{16} + C$

3.02

a) $\frac{\operatorname{arcsen}(2 \cdot x)}{4} + C$

b) $\frac{\arccos(\sqrt{5} \cdot x)}{5} + C$

c) $\frac{\operatorname{arcsen}(2 \cdot x^2)}{4} + C$

d) $\operatorname{arcsen}(\ln(|x|)) + C$

3.03

a) $\frac{\sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \cdot x)}{9} + C$

b) $4 \cdot \operatorname{arctg}(x - 6) + C$

c) $\frac{\operatorname{arctg}(2 \cdot x^3)}{12} + C$

d) $\operatorname{arctg}(x + 1) + C$

3.04

a) $-\frac{\cos(x^3)}{3} + C$

b) $-\frac{\cos(x^4 - 2)}{2} + C$

c) $\frac{5 \cdot e^{x^3 + 4}}{3} + C$

d) $\frac{2 \cdot \operatorname{tg}(\frac{x^3}{2})}{3} + C$

3.05

a) $\frac{\operatorname{arctg}(x^3)}{3} + C$

b) $2 \cdot \operatorname{arctg}(2 \cdot x - 1) + C$

3.06

a) $2 \cdot \operatorname{arcsen}(2 \cdot x^2) + C$

b) $\frac{\arccos(4 \cdot x)}{4} + C$

3.07

a) $2 \cdot \operatorname{arctg}(x + 3) + C$

b) $2 \cdot \operatorname{arctg}(x - 4) + C$

c) $\frac{6 \cdot \sqrt{7} \cdot \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{7} \cdot (2 \cdot x - 1)}{7})}{7} + C$

d) $\frac{\sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3} \cdot (2 \cdot x - 2)}{3})}{2} + C$

3.08

a) $\frac{\ln(|x^2 + 6 \cdot x + 10|)}{2} + C$

b) $\frac{\ln(|x^2 - 8 \cdot x + 17|)}{2} + 2 \cdot \operatorname{arctg}(x - 4) + C$

3.09

a) $\frac{\ln(|2 \cdot x - 1|)}{2} + C$

b) $\frac{4 \cdot \ln(|5 \cdot x - 7|)}{5} + C$

c) $\frac{x^5}{45} + \frac{2 \cdot x^3}{9} + x + C$

d) $\frac{3 \cdot x^2}{2} - 2 \cdot x + C$

e) $\frac{\ln(|2 \cdot x^2 - 1|)}{4} + C$

f) $\frac{4 \cdot \ln(|x^3 + 1|)}{3} + C$

3.10

a) $\frac{3 \cdot (x^2 + 2 \cdot x - 3)^{\frac{4}{3}}}{8} + C$

b) $\frac{16 \cdot (x^2 - 5)^{\frac{7}{4}}}{7} + C$

c) $\frac{5 \cdot (e^{3 \cdot x - 2} + 7)^{\frac{6}{5}} \cdot e^2}{18} + C$

d) $\frac{(e^{2 \cdot x - 6} - 2)^{\frac{3}{2}} \cdot e^6}{3} + C$

e) $\frac{(\operatorname{sen}(2 \cdot x) + 1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

f) $-\frac{2 \cdot (-x + \cos(x))^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

3.11

a) $\frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{2} + C$

b) $\operatorname{arcsen}(x - 1) + C$

c) $\frac{\sqrt{5} \cdot \operatorname{arcsen}(\sqrt{5} \cdot x)}{5} + C$

d) $-\operatorname{arctg}(\operatorname{sen}(x)) + C$

e) $\operatorname{arctg}(\ln(|x|)) + C$

f) $\frac{\operatorname{arcsen}(\frac{x^2}{2})}{2} + C$

3.12

a) $-3 \cdot \operatorname{arctg}(x) + C$

b) $\frac{4 \cdot x^3}{3} - x^2 - 2 \cdot x + C$

c) $\frac{2 \cdot (x + 1)^{\frac{3}{2}}}{9} + C$

d) $2 \cdot x + e^x + C$

e) $\frac{3 \cdot \ln(2 \cdot x^2 + 1)}{16} + C$

f) $\frac{\operatorname{arctg}(2 \cdot x - 3)}{2} + C$

3.13

a) $-\dfrac{\ln(x^2+3)}{2}+C$

b) $\ln(|\text{arctg}(x)|)+C$

c) $-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+C$

d) $\dfrac{\ln(3)}{\ln(|x|)}+C$

e) $-\dfrac{\ln(|\cos(3\cdot x)|)}{3}+C$

f) $-\dfrac{\ln((x-1)^2+1)}{2}+C$

g) $\ln(|\text{sen}(x)|)+C$

h) $\dfrac{1}{\cos(x)}+C$

3.14

a) $-\dfrac{7}{3\cdot(e^x+4)^3}+C$

b) $\dfrac{1}{\text{sen}(x)+\cos(x)}+C$

c) $\dfrac{1}{2\cdot(\cos(x)+5)^2}+C$

d) $-\dfrac{1}{x\cdot\cos(x)+\text{sen}(x)}+C$

e) $\dfrac{1}{\text{sen}(x)+\cos(x)}+C$

f) $-\dfrac{1}{3\cdot(e^x+1)^3}+C$

04 · Exponenciales y trigonométricas

4.01

a) $-\cos(x) + C$

b) $\operatorname{sen}(x) - 3 \cdot \cos(x) + C$

4.02

a) $\frac{2 \cdot 2^{\frac{x}{2}}}{\ln(2)} + C$

b) $e^{x+1} + C$

c) $\frac{(\frac{5}{2})^{2 \cdot x}}{2 \cdot \ln(\frac{5}{2})} + C$

d) $e^{x-1} - \frac{e^{-2 \cdot x}}{2} + C$

4.03

a) $\frac{5^{x^2+1}}{\ln(5)} + C$

b) $4 \cdot e^{\frac{x}{2}+2} + C$

c) $\frac{3^{5 \cdot x - 1}}{10 \cdot \ln(3)} + C$

d) $-\frac{e^{-x^2}}{2} + C$

4.04

a) $-\frac{\cos(3 \cdot x + 2)}{3} + C$

b) $2 \cdot \operatorname{sen}(4 \cdot x - 3) + C$

c) $\frac{\cos(2 \cdot x)}{2} + C$

d) $\frac{\operatorname{sen}(6 \cdot x - 5)}{6} + C$

4.05

a) $\operatorname{tg}(x + 3) + C$

b) $\frac{\operatorname{tg}(4 \cdot x^2)}{4} + C$

c) $2 \cdot \operatorname{tg}(\sqrt{x}) + C$

d) $\frac{\operatorname{tg}(x^3)}{3} + C$

4.06

a) $\frac{e^{2 \cdot x}}{2} + C$

b) $\frac{e^{x^2}}{2} + C$

c) $\frac{4 \cdot e^{\frac{3 \cdot x}{4}}}{3} + C$

d) $\frac{5^{2 \cdot x + 1}}{2 \cdot \ln(5)} + C$

e) $\frac{2 \cdot 2^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}}{\ln(2)} + C$

f) $\frac{3 \cdot e^{x^2+1}}{2} + C$

4.07

a) $-\operatorname{sen}(x-2)+C$

b) $-\cos(x^2)+C$

c) $\frac{\operatorname{tg}(2\cdot x)}{2}+C$

d) $-2\cdot\cos(\sqrt{x})+C$

e) $-\frac{\cos^3(x)}{3}+C$

f) $\frac{\operatorname{tg}(3\cdot x)}{3}+C$

4.08

a) $2\cdot\operatorname{sen}(x)-\cos(x)+C$

b) $5\cdot\operatorname{arcsen}(x)+C$

c) $-3\cdot\operatorname{arctg}(x)+C$

d) $\frac{2^x}{\ln(2)}+e^x+C$

e) $12\cdot\sqrt{x}+C$

f) $2\cdot\sqrt{1-3\cdot x}+C$

4.09

a) $\frac{4\cdot x^5}{5}-\frac{5\cdot x^3}{3}+3\cdot x^2-4\cdot x+C$

b) $\operatorname{sen}(x^2-2\cdot x)+C$

c) $-x+5\cdot\operatorname{sen}(x)-\cos(x)+C$

d) $\frac{\operatorname{sen}^3(x)}{3}-\frac{\cos^3(x)}{3}+C$

4.10

$\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen}(2\cdot x)}{4}+C$

4.11

a) $\ln\left(\left|\operatorname{tg}(x)+\frac{1}{\cos(x)}\right|\right)+C$

b) $\ln\left(\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)+C$

05 · Integrales definidas y propiedades

5.01

a) Primitiva: $\frac{x^4}{4} + \frac{4 \cdot x^3}{3} - 5 \cdot x$. Resultado: $\frac{165}{4}$.

b) Primitiva: $\frac{x^3}{27} + \frac{2 \cdot x^2}{3} + 4 \cdot x$. Resultado: $\frac{31}{3}$.

5.02

a) Primitiva: $6 \cdot \sqrt{x}$. Resultado: 6.

b) Primitiva: $5 \cdot \text{sen}(x) + \cos(x)$. Resultado: 4.

5.03

a) Primitiva: $\frac{3 \cdot x^5}{5} - x^2 + 7 \cdot x$. Resultado: $\frac{219}{5}$.

b) Primitiva: $\frac{x^3}{3} - x$. Resultado: $\frac{112}{3}$.

c) Primitiva: $\frac{x^4}{4} - \frac{5 \cdot x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x$. Resultado: $-\frac{93}{4}$.

d) Primitiva: $\frac{9 \cdot x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$. Resultado: $-\frac{711}{4}$.

e) Primitiva: $\frac{2 \cdot x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 5 \cdot x$. Resultado: $\frac{1032}{5}$.

f) Primitiva: $x^4 - 2 \cdot x^3 + x$. Resultado: -840.

5.04

a) Primitiva: $\frac{\ln(x)}{2}$. Resultado: $\frac{\ln(2)}{2}$.

b) Primitiva: $\frac{e^{x^2}}{2}$. Resultado: $-\frac{1}{2} + \frac{e^4}{2}$.

c) Primitiva: $-\cos(x)$. Resultado: 0.

d) Primitiva: $4 \cdot \text{tg}(\frac{x}{4})$. Resultado: 4.

5.05

a) Primitiva: $4 \cdot \ln(x + 2)$. Resultado: $\ln(\frac{2401}{256})$.

b) Primitiva: $-\frac{6}{x}$. Resultado: $\frac{4}{5}$.

c) Primitiva: $\frac{x^2}{2} - \ln(x - 1) - \frac{4}{x}$. Resultado: $7 - \ln(3)$.

d) Primitiva: $2 \cdot \text{arctg}(x)$. Resultado: π.

e) Primitiva: $2 \cdot \text{arcsen}(x)$. Resultado: $\frac{\pi}{3}$.

f) Primitiva: $16 \cdot \sqrt{x + 4}$. Resultado: $-16 \cdot \sqrt{3} + 16 \cdot \sqrt{7}$.

g) Primitiva: $3 \cdot \text{sen}(x) + 2 \cdot \cos(x)$. Resultado: 1.

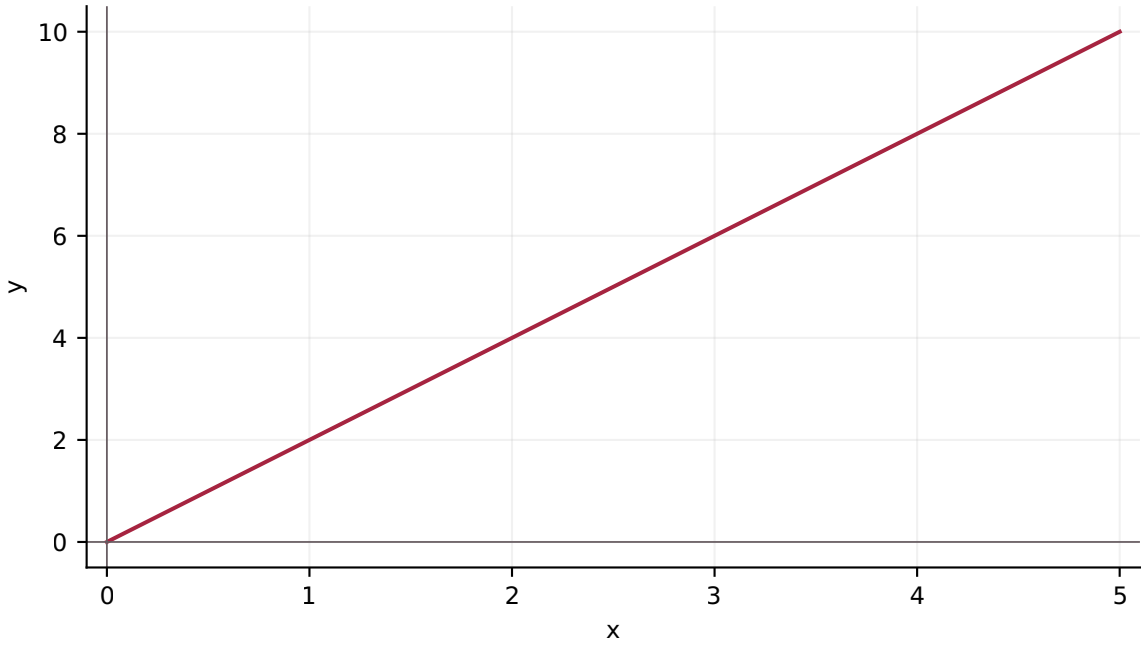
h) Primitiva: $-\frac{1}{x^4}$. Resultado: $\frac{15}{16}$.

5.06

a) Para x = 1, 2, 3, 4, 5, las áreas respectivas son 7/2, 6, 15/2, 17/2 y 19/2.

b) Entre 0 y 3: $A(x) = 4x - x^2/2$. Entre 3 y 5: $A(x) = x + 9/2$.

5.07 $F(x) = \int_0^x 2t\,dt = x^2$. Valores: 1, 4, 9, 16 y 25.



5.08

a) -6.

b) $\pi + 3$.

c) π: de 0 a 2 la integral vale -2; de 2 a 4 vale $2 + \pi$.

d) 2.

5.09

a) 2.

b) 2.

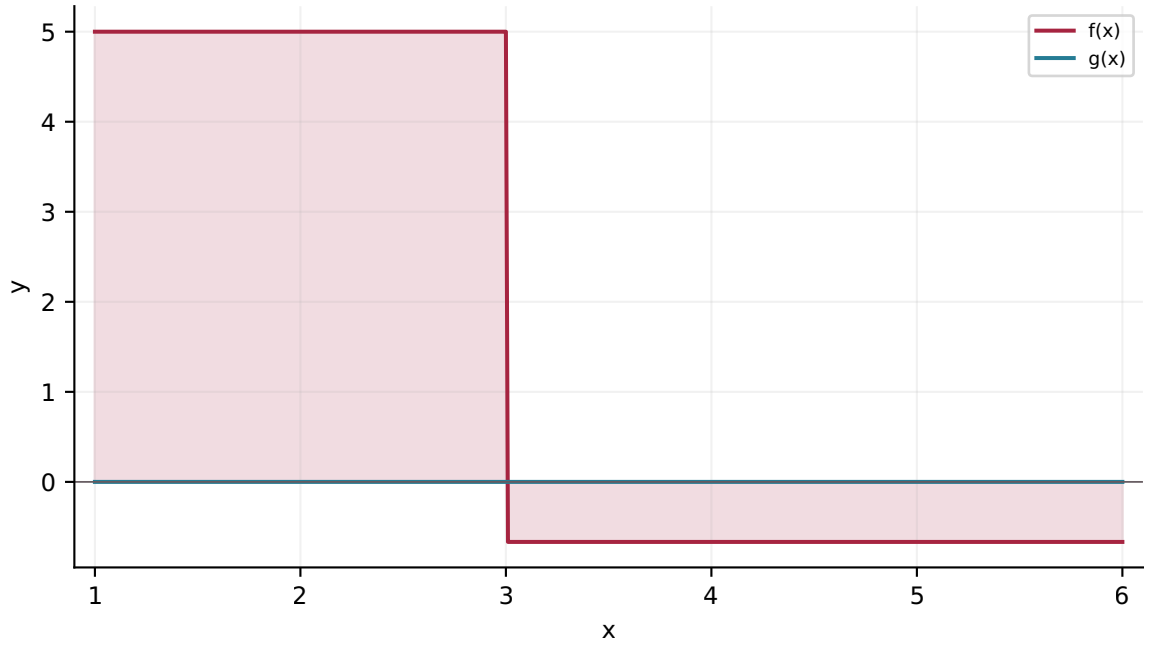
c) $\frac{237}{32}$.

d) $-\frac{97}{32}$.

e) $\frac{67}{8}$.

5.10 **a)** Sí. La parte positiva debe aportar área 10 y la negativa área 2: $10 - 2 = 8$ y $10 + 2 = 12$.

b) Por ejemplo, $f(x) = 5$ entre 1 y 3, y $f(x) = -2/3$ entre 3 y 6. El valor aislado en $x = 3$ no altera las integrales.



5.11 **a)** La integral de 0 a 2 vale $-4/3$ porque la función es negativa en ese tramo.

b) Por aditividad, la integral de 0 a 6 es la de 2 a 6 menos 4/3. Valores: $36 < 112/3$.

5.12 **a)** 6.

b) $-1/4$.

c) 12.

d) $-131/10$.

e) 0.

f) -1.

g) -4.

h) 0.

i) Se utilizan $\int_0^2 f = \int_{-2}^0 f = 3$, $\int_{-2}^0 g = -4$ y la anulación de las integrales impares en intervalos simétricos.

5.13 **a)** Con $u = x - 3$, los límites son -1 y 1. La función integrada es impar respecto a u, por lo que la integral vale 0.

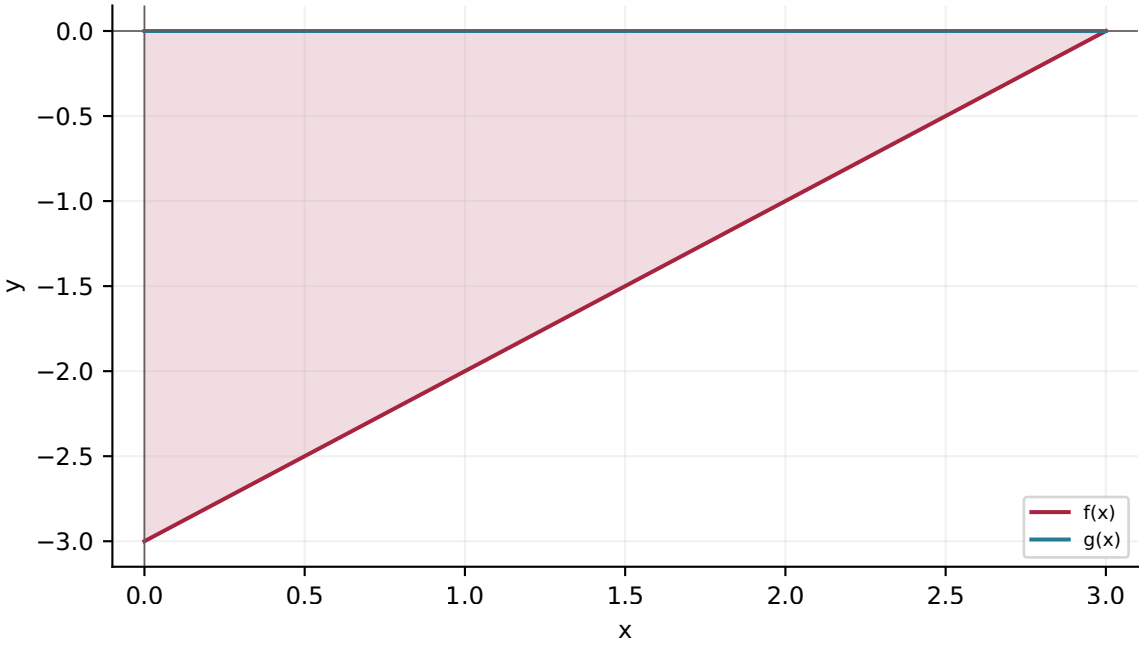
b) Tanto la lectura $\operatorname{sen}((x-3)^3)$ como la lectura $\operatorname{sen}^3(x-3)$ dan 0 por esa simetría.

06 · Áreas entre curvas

6.01

a) Límites de los tramos: 0, 3.

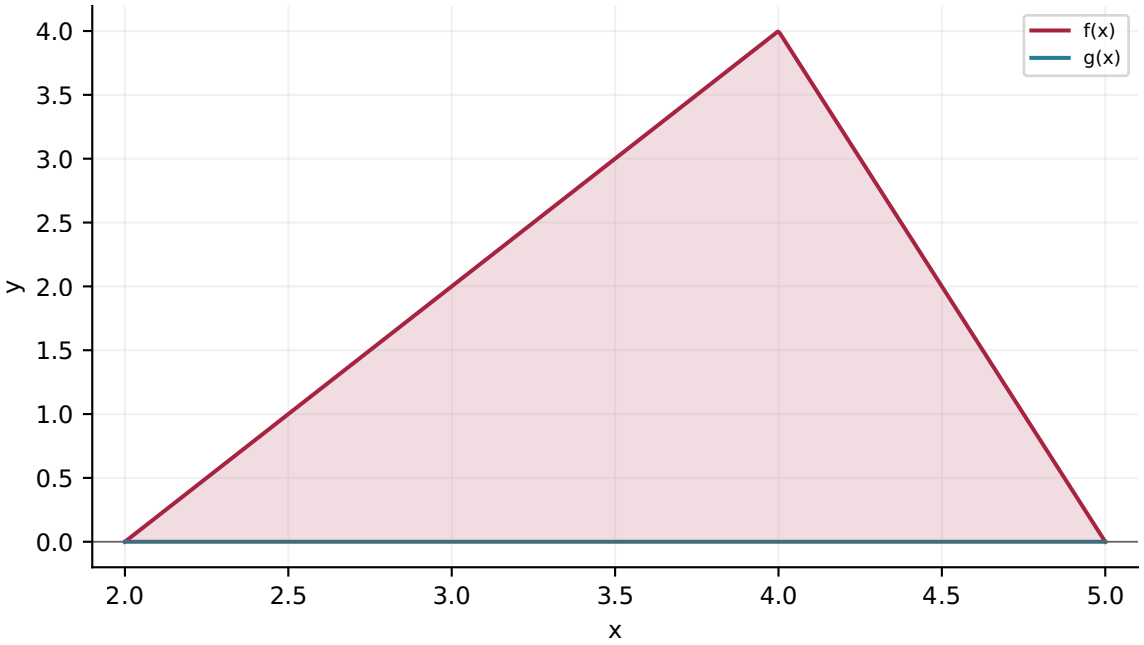
b) Área = $\frac{9}{2} = \frac{9}{2}$ unidades cuadradas.



6.02

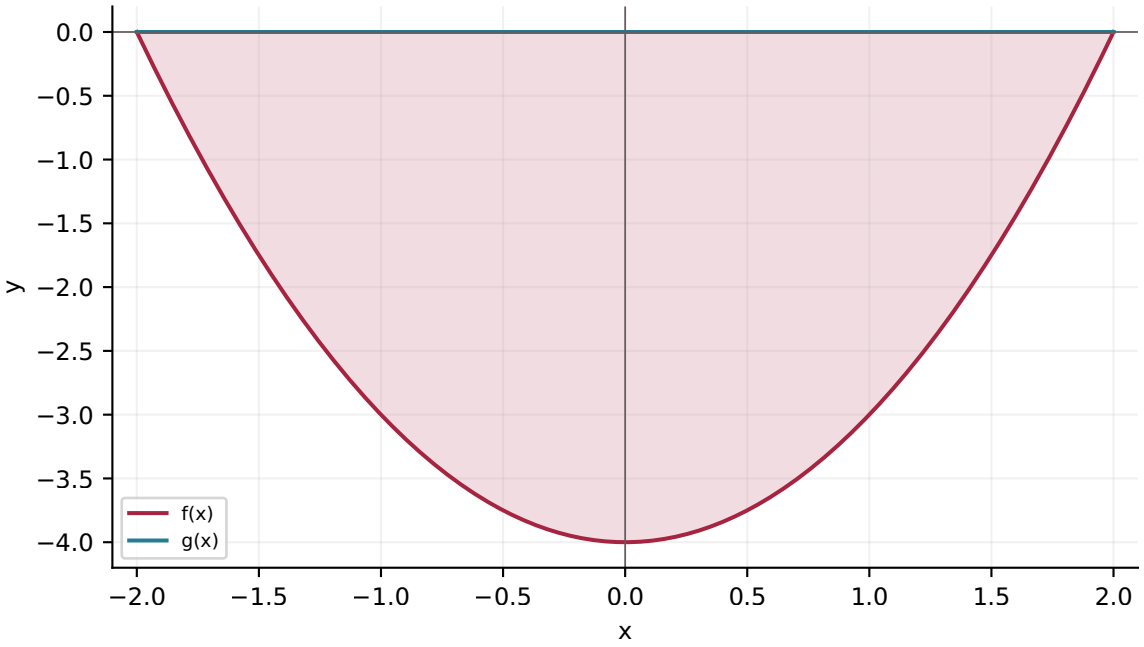
a) En [2,4] el lado superior es y = 2x − 4 y en [4,5] es y = −4x + 20.

b) Área = $\int_2^4 2 \cdot x - 4\, dx + \int_4^5 20 - 4 \cdot x\, dx = 4 + 2 = 6$ unidades cuadradas.



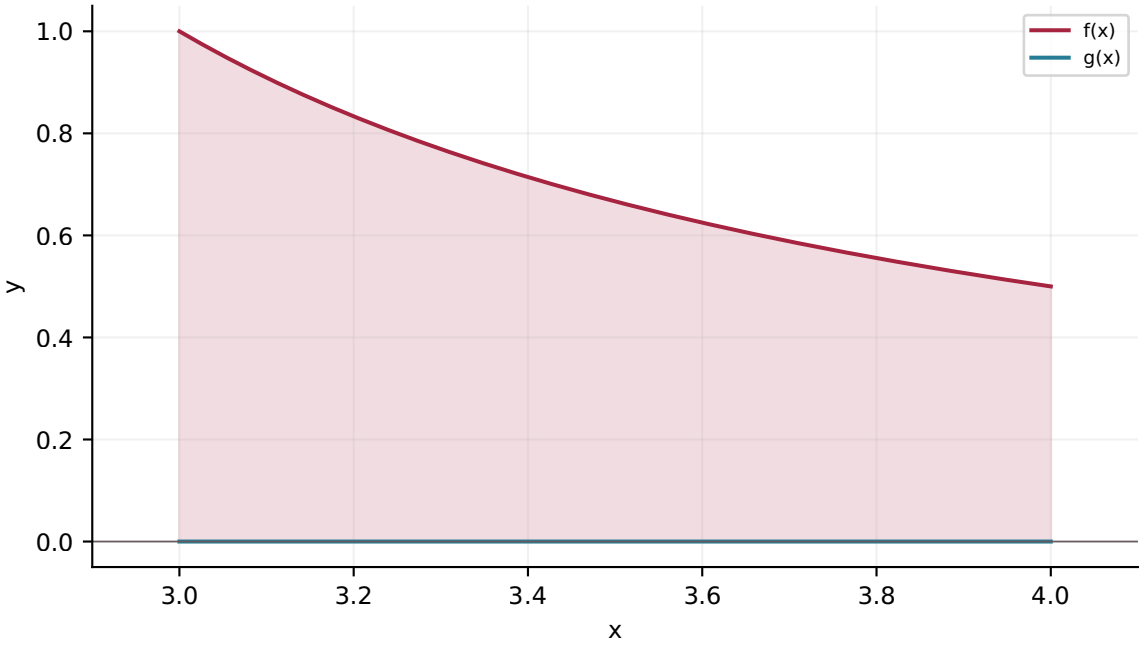
6.03 **a)** Límites de los tramos: -2, 2.

b) Área $= \frac{32}{3} = \frac{32}{3}$ unidades cuadradas.



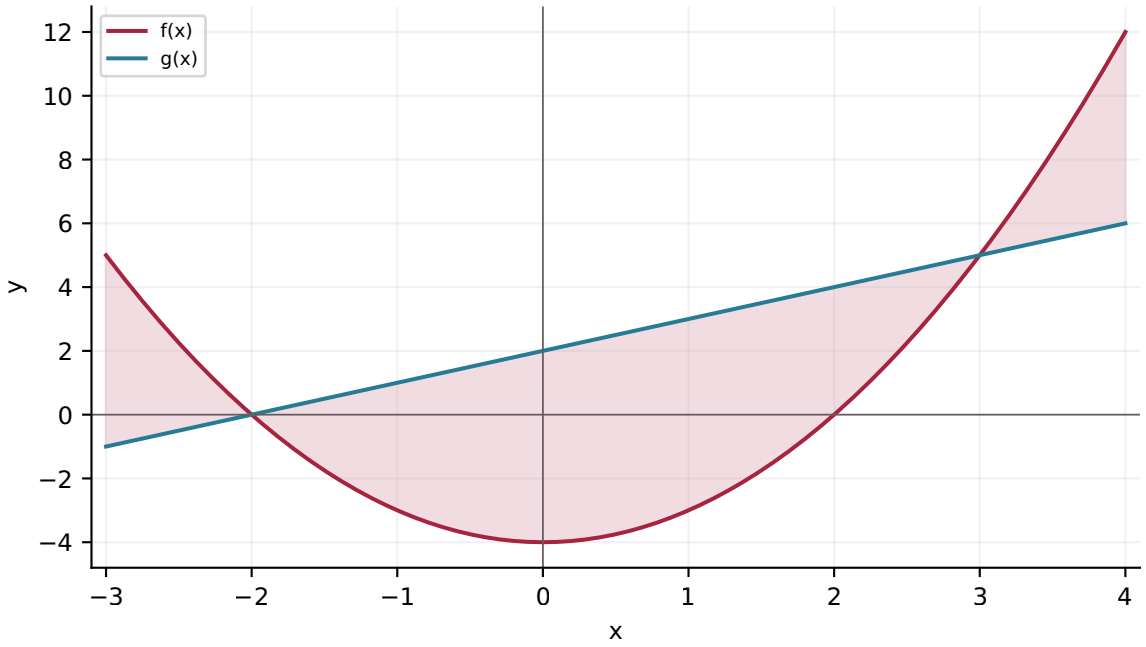
6.04 **a)** Límites de los tramos: 3, 4.

b) Área $= \ln(2\ ) = \ln(2\ )$ unidades cuadradas.



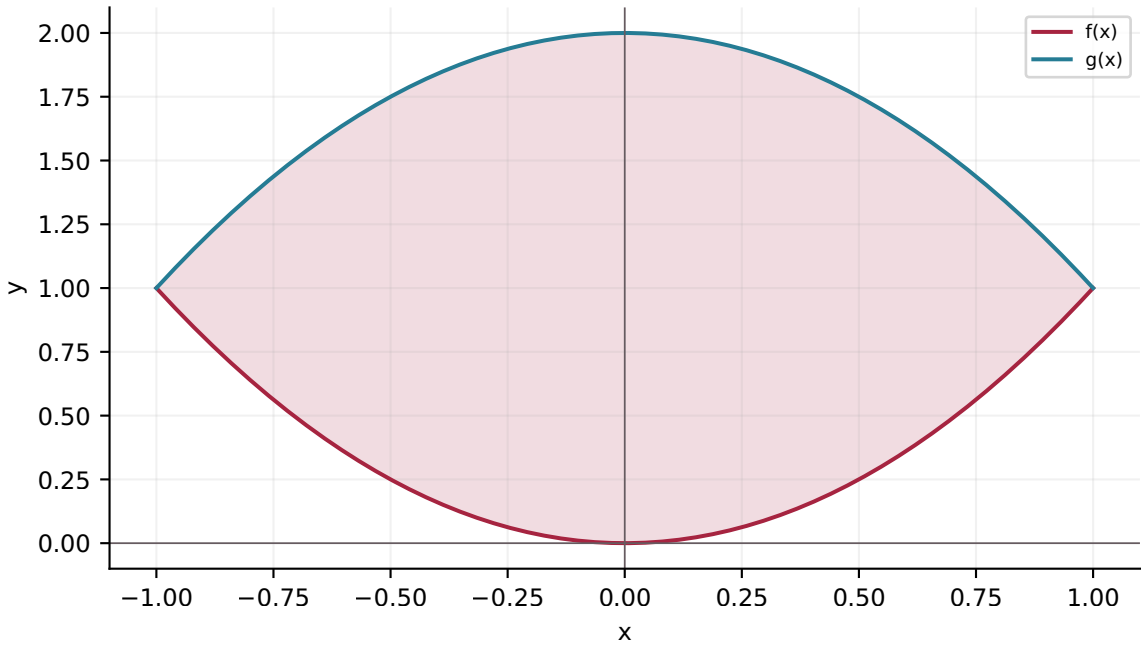
6.05 **a)** Límites de los tramos: $-3, -2, 3, 4$.

b) Área $= \frac{17}{6} + \frac{17}{6} + \frac{125}{6} = \frac{53}{2}$ unidades cuadradas.



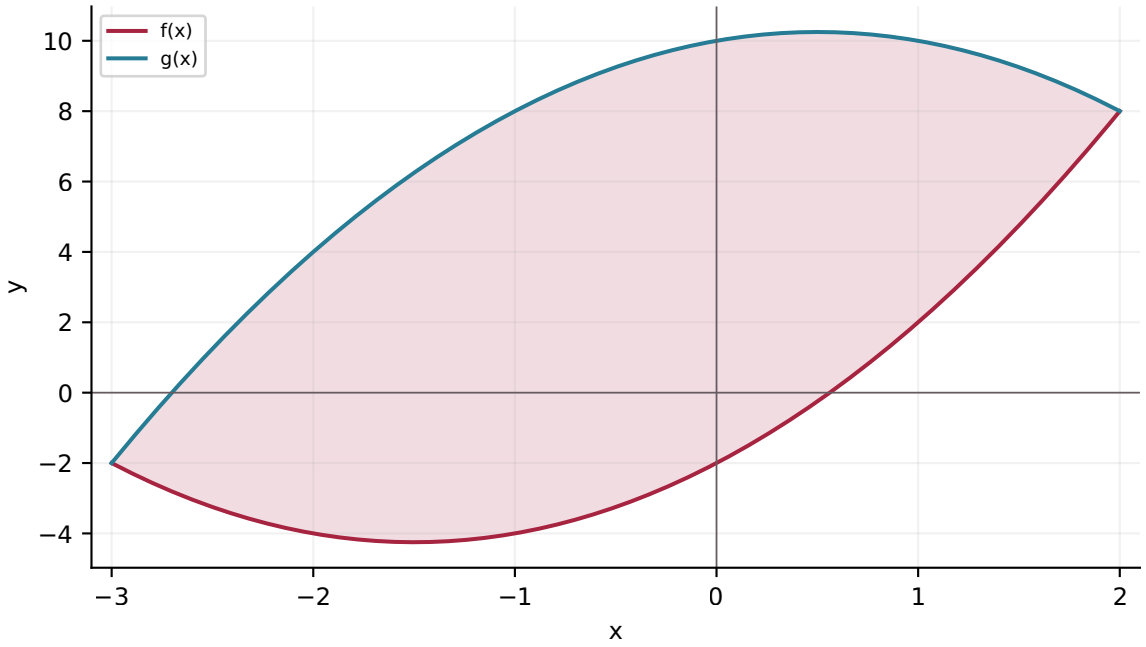
6.06 **a)** Límites de los tramos: $-1, 1$.

b) Área $= \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$ unidades cuadradas.



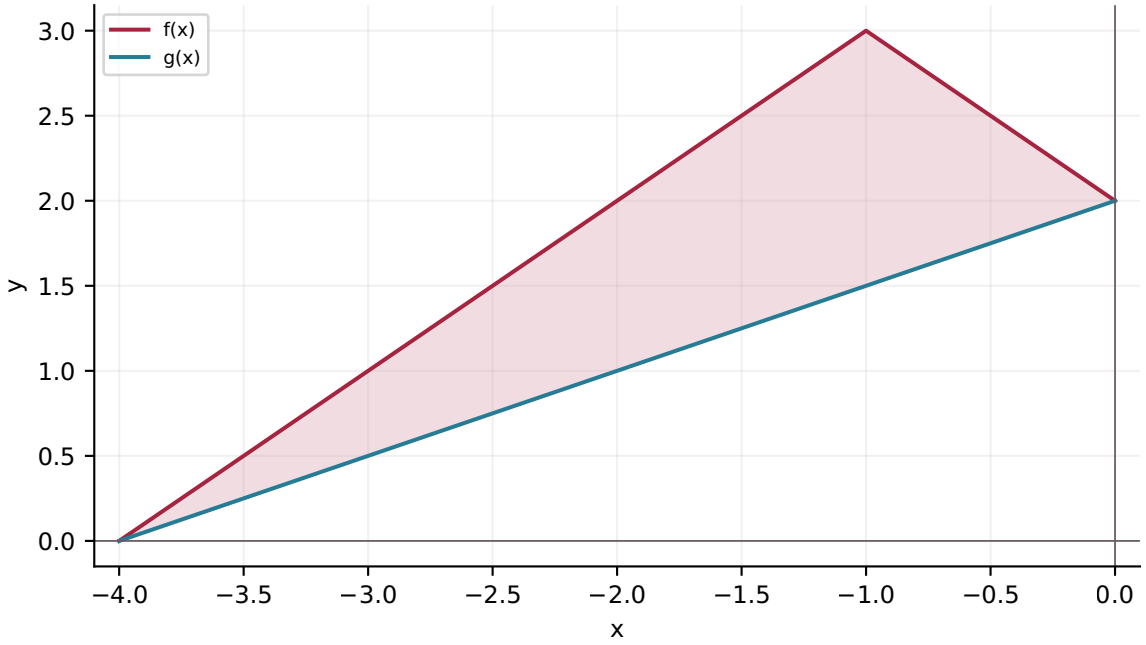
6.07 **a)** Límites de los tramos: -3, 2.

b) Área $= \frac{125}{3} = \frac{125}{3}$ unidades cuadradas.



6.08 **a)** Intersecciones: $(-1,3)$, $(0,2)$ y $(-4,0)$.

b) Área $= \int_{-4}^{-1} \frac{x}{2} + 2\,dx + \int_{-1}^{0} -\frac{3 \cdot x}{2}\,dx = 9/4 + 3/4 = 3$ unidades cuadradas.



6.09

a) 5 unidades cuadradas.

b) $15 - \frac{9 \cdot \pi}{4}$ unidades cuadradas.

c) $30 - \frac{9 \cdot \pi}{2}$ unidades cuadradas.

d) $\frac{5}{2}$ unidades cuadradas.

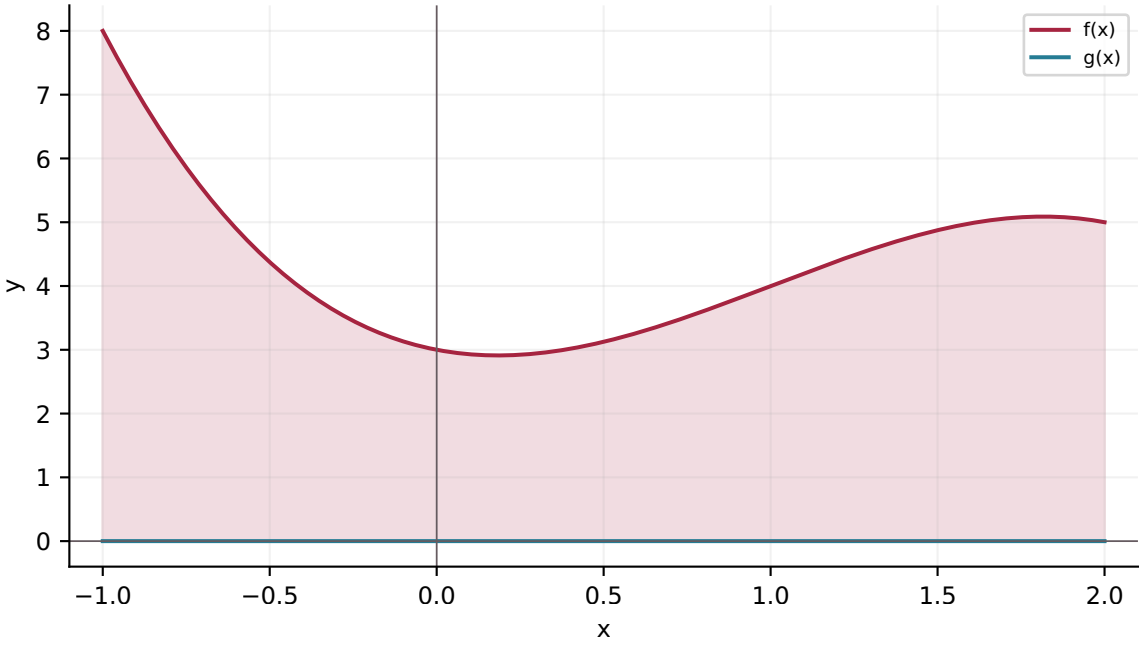
e) $20 - \frac{9 \cdot \pi}{4}$ unidades cuadradas.

f) $\frac{35}{2} - \frac{9 \cdot \pi}{4}$ unidades cuadradas.

6.10

a) Límites de los tramos: -1, 2.

b) Área $= \frac{51}{4} = \frac{51}{4}$ unidades cuadradas.



6.11

a) Primitiva: $x^3 - x^2$. Resultado: 44.

b) Primitiva: $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{5 \cdot x^2}{2} + x$. Resultado: $\frac{100}{3}$.

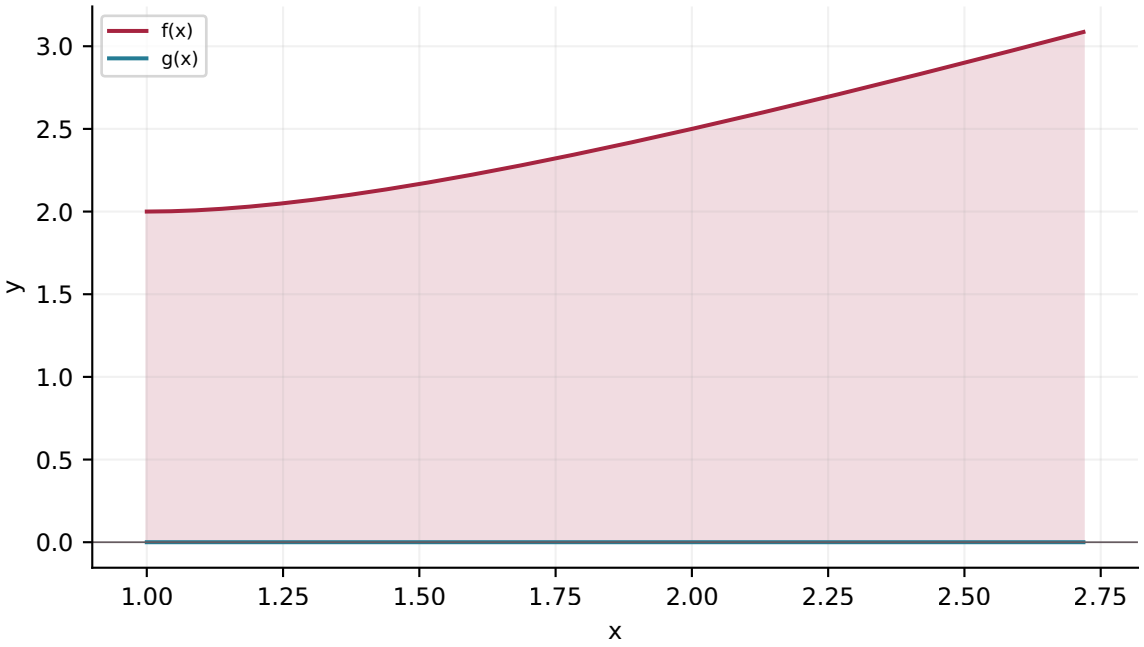
c) Primitiva: $\frac{5^x}{\ln(5\ )}$. Resultado: $\frac{124}{5 \cdot \ln(5\ )}$.

d) Primitiva: $-\frac{4}{x}$. Resultado: $\frac{5}{6}$.

e) Primitiva: $-\operatorname{sen}(x\ )$. Resultado: 1.

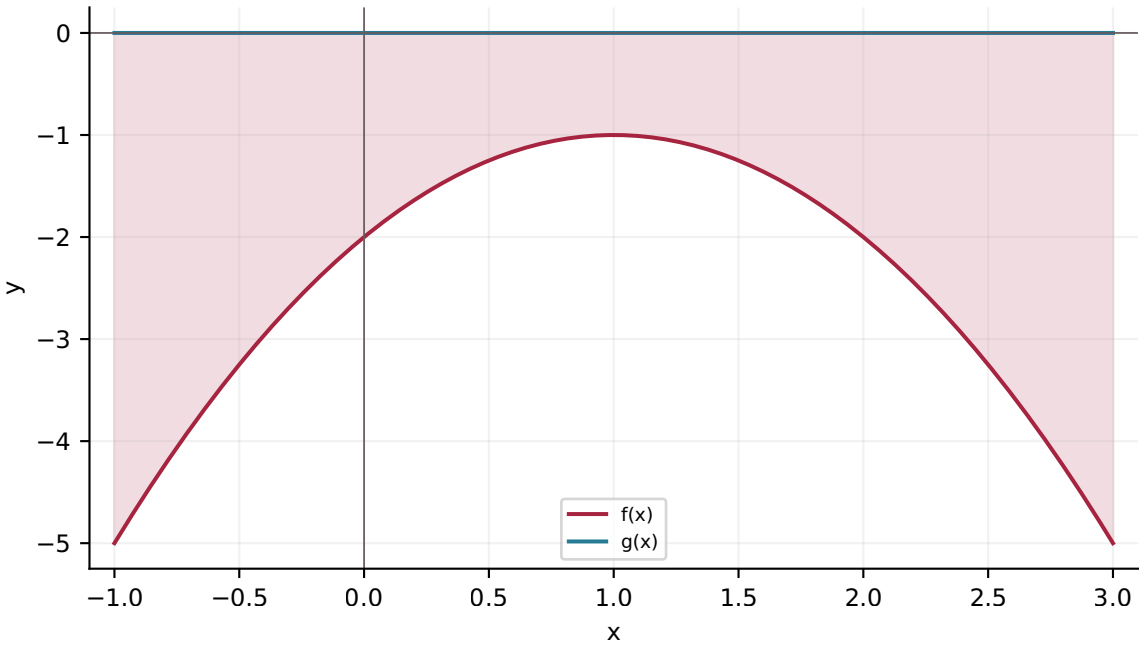
6.12 **a)** Límites de los tramos: 1, e.

b) Área = $\frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2}$ unidades cuadradas.



6.13 **a)** Límites de los tramos: -1, 3.

b) Área = $\frac{28}{3} = \frac{28}{3}$ unidades cuadradas.



6.14

a) Límites de los tramos: $-7, -6, 0$. Área = 155.

b) Límites de los tramos: $-1, 2, 5$. Área = 126.

c) Límites de los tramos: $-1, \frac{1}{2}, 3$. Área = $\frac{4349}{48}$.

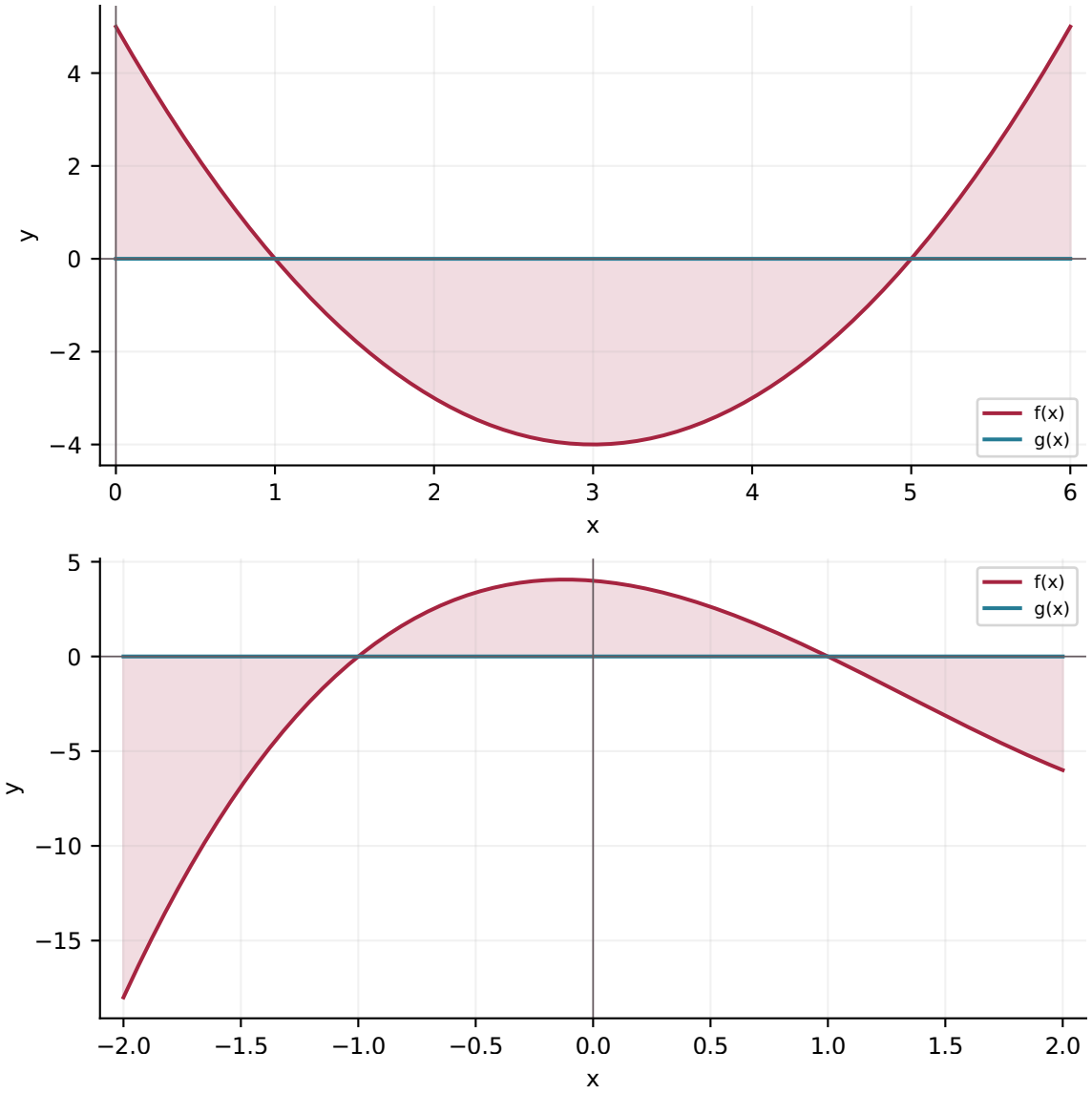
d) Límites de los tramos: $0, \frac{\pi}{2}, \pi$. Área = 2.

e) Límites de los tramos: 0, 1, 2. Área = $\frac{9}{2 \cdot \ln(2)}$.

6.15

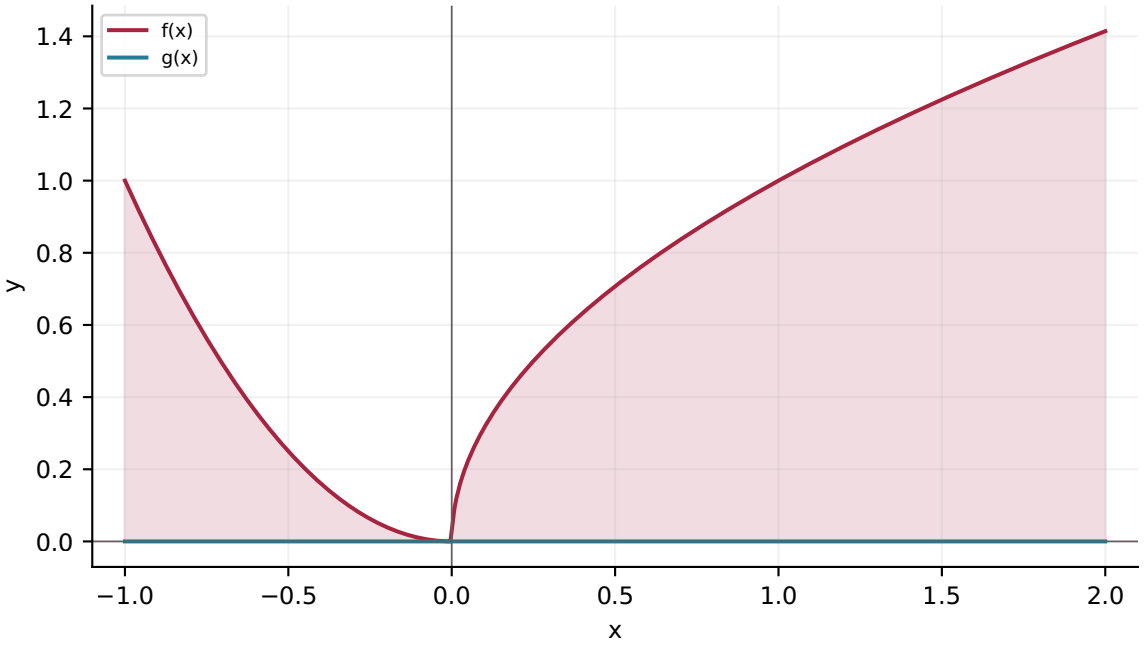
a) a) Cortes x = 1 y x = 5. Área = 7/3 + 32/3 + 7/3 = 46/3.

b) b) Se divide en x = −1 y x = 1. Área = 91/12 + 16/3 + 37/12 = 16.



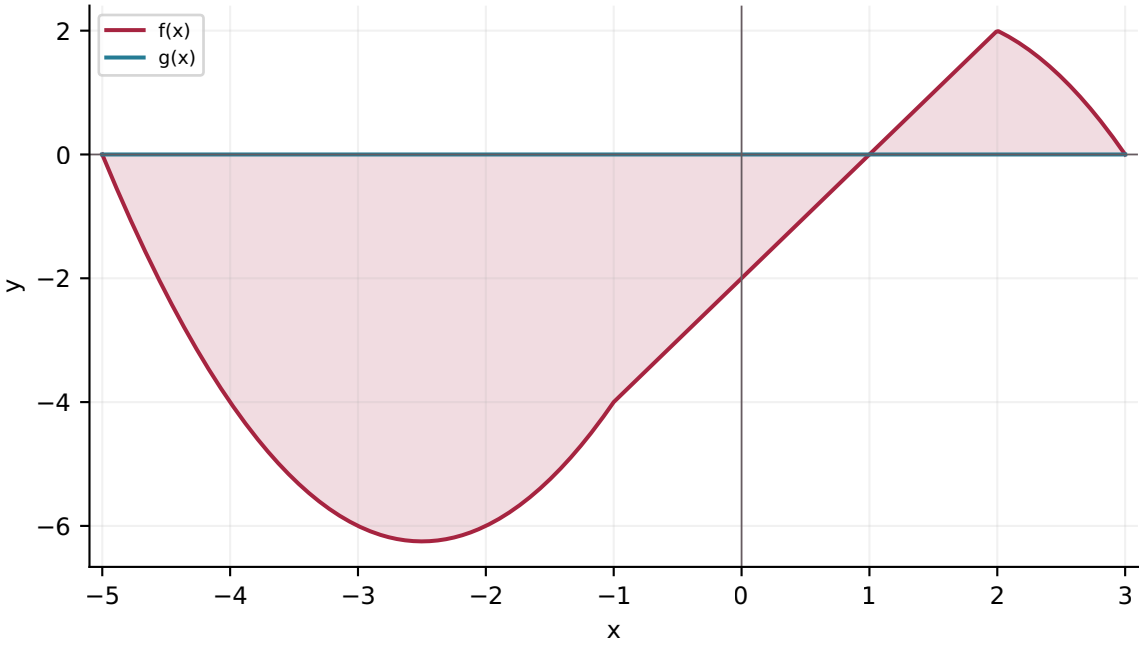
6.16 **a)** Límites de los tramos: -1, 0, 2.

b) Área $= \frac{1}{3} + \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3} + \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3}$ unidades cuadradas.



6.17 **a)** Límites de los tramos: -5, -1, 1, 2, 3.

b) Área $= 1 + \frac{7}{6} + 4 + \frac{56}{3} = \frac{149}{6}$ unidades cuadradas.



6.18 **a)** 5.

b) 6 ln(7/3).

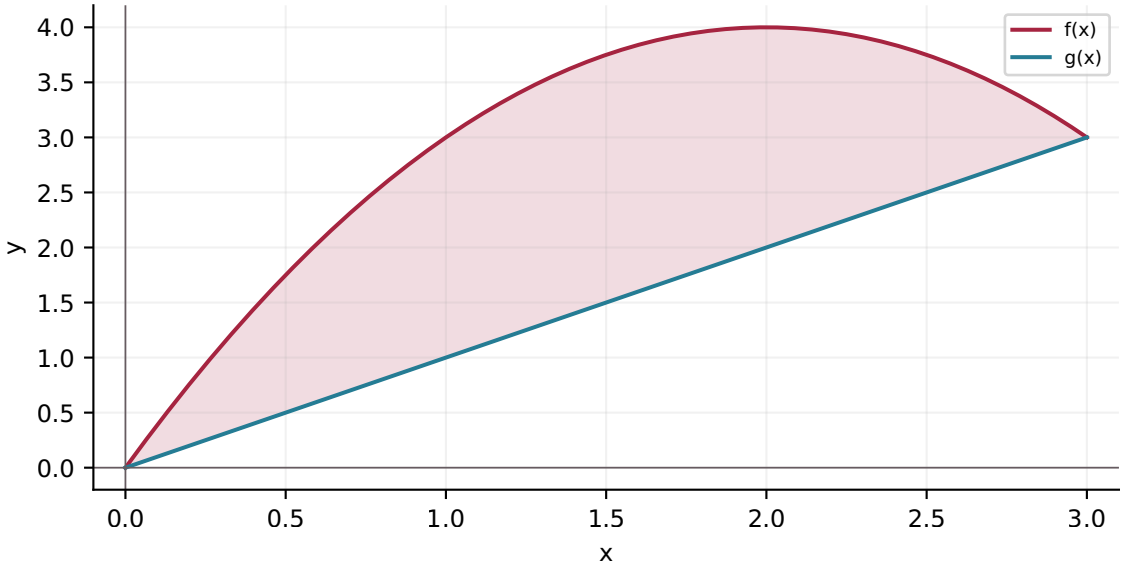
c) $8\sqrt{2} - 5 + 6 \ln(4)$. Se divide en $x = -1 + \sqrt{2}$ y en $x = 1$.

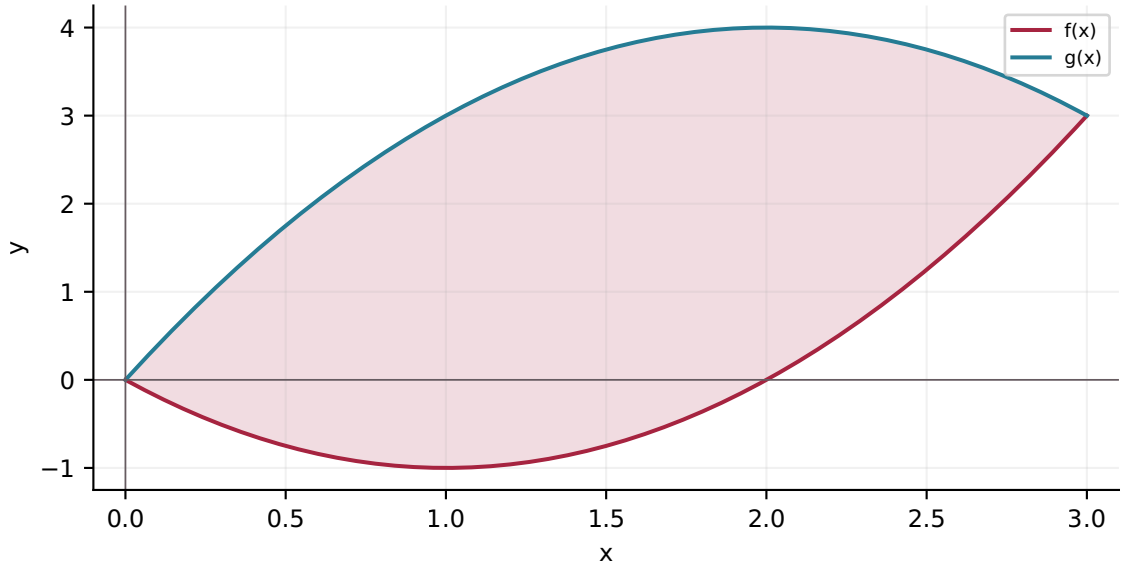
6.19

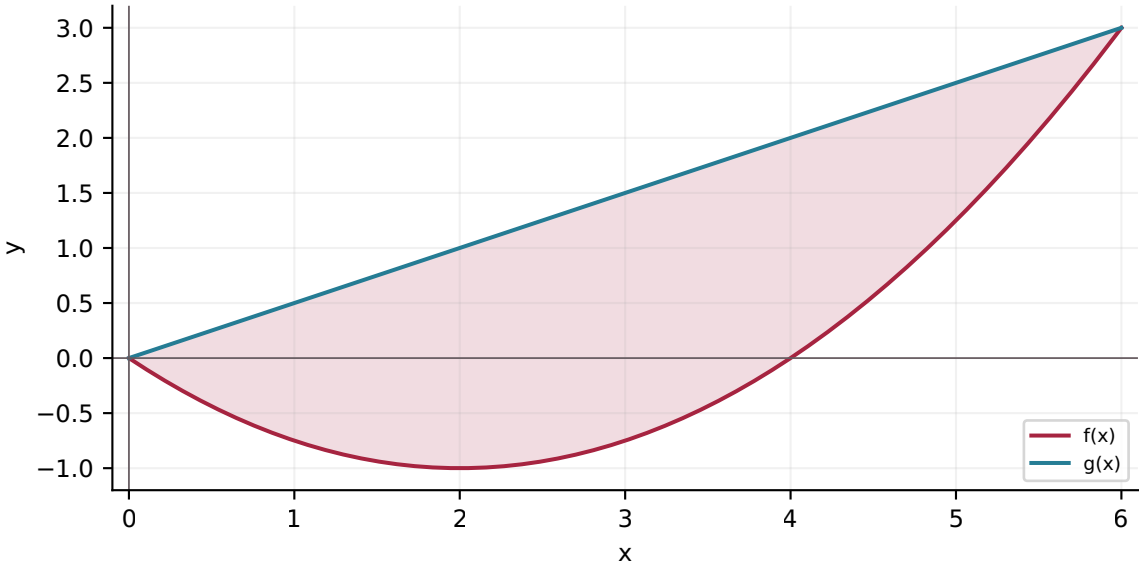
a) Intersecciones x = 0, 3. Área = $\frac{9}{2}$.

b) Intersecciones x = 0, 3. Área = 9.

c) Intersecciones x = 0, 6. Área = 9.







6.20

a) Límites de los tramos: $-1, 3$. Área = $\frac{32}{3}$.

b) Límites de los tramos: $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$. Área = $4 \cdot \sqrt{3}$.

c) Límites de los tramos: $0, 1$. Área = $\frac{1}{3}$.

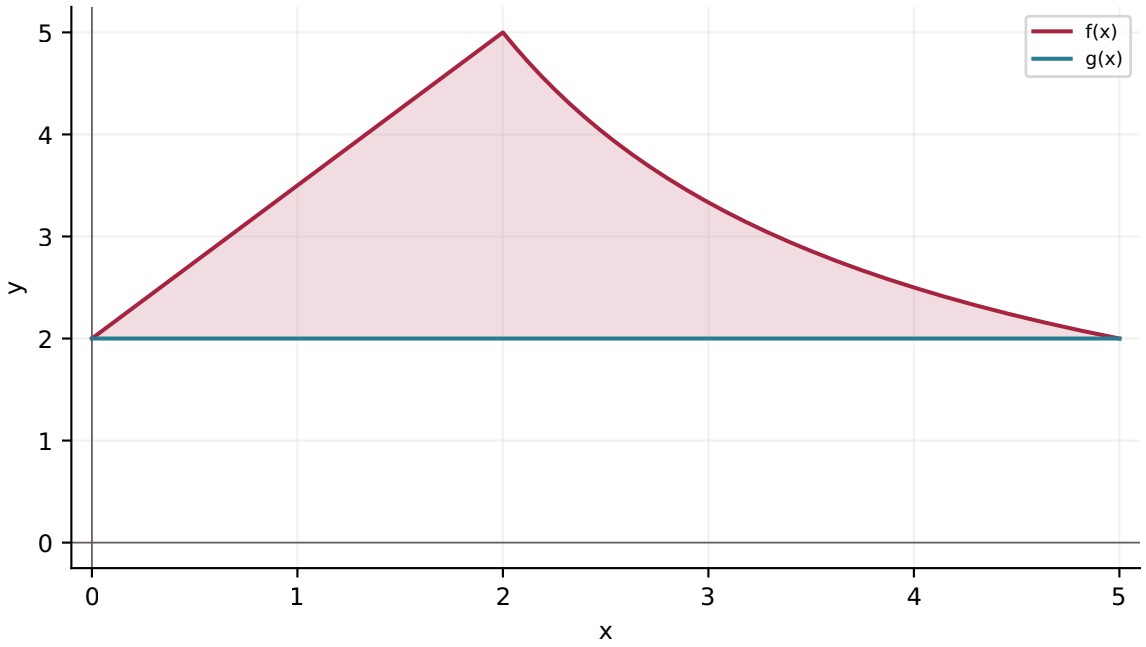
d) Límites de los tramos: $-2, 0, 3$. Área = $\frac{253}{12}$.

e) Límites de los tramos: $0, 3, 4$. Área = $\frac{71}{6}$.

6.21

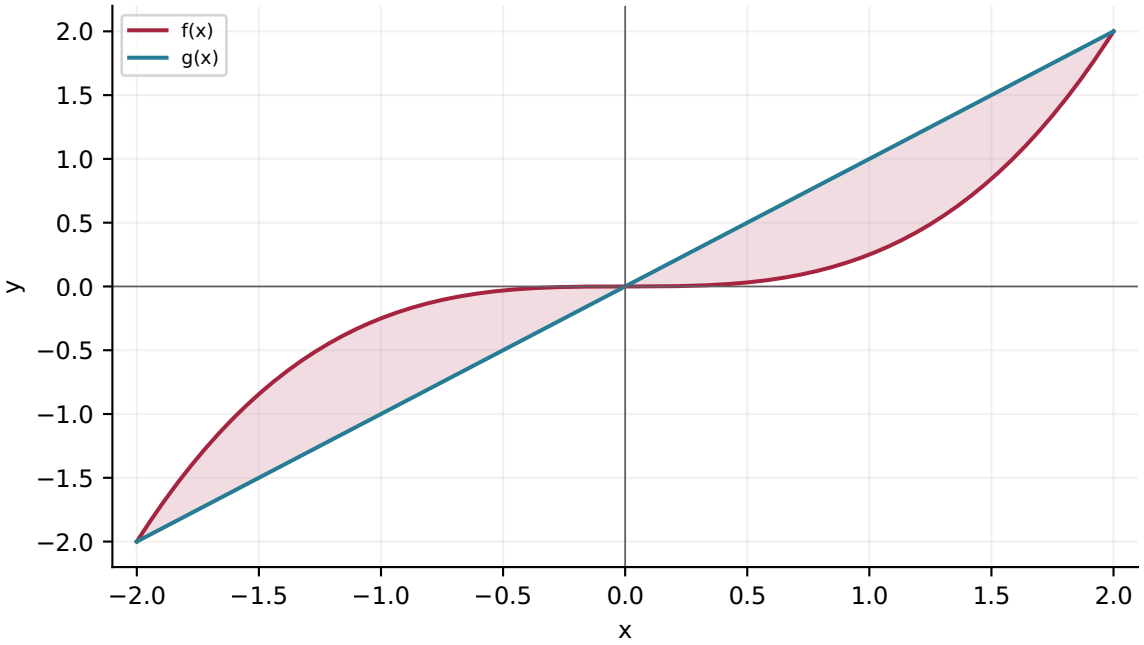
a) El recinto tiene vértices (0,2), (2,5) y (5,2).

b) Área = $\int_0^2 \frac{3 \cdot x}{2}\,dx + \int_2^5 -2 + \frac{10}{x}\,dx = 10\ln(5/2) - 3$.



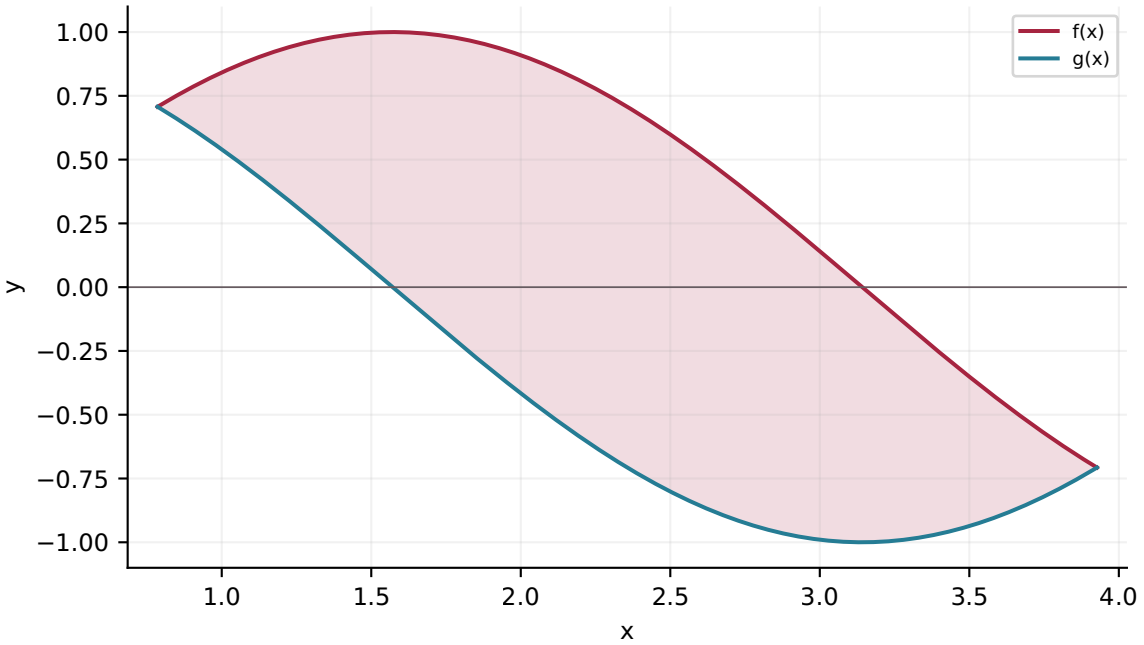
6.22 **a)** Límites de los tramos: -2, 0, 2.

b) Área = $1 + 1 = 2$ unidades cuadradas.



6.23 **a)** Límites de los tramos: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5 \cdot \pi}{4}$.

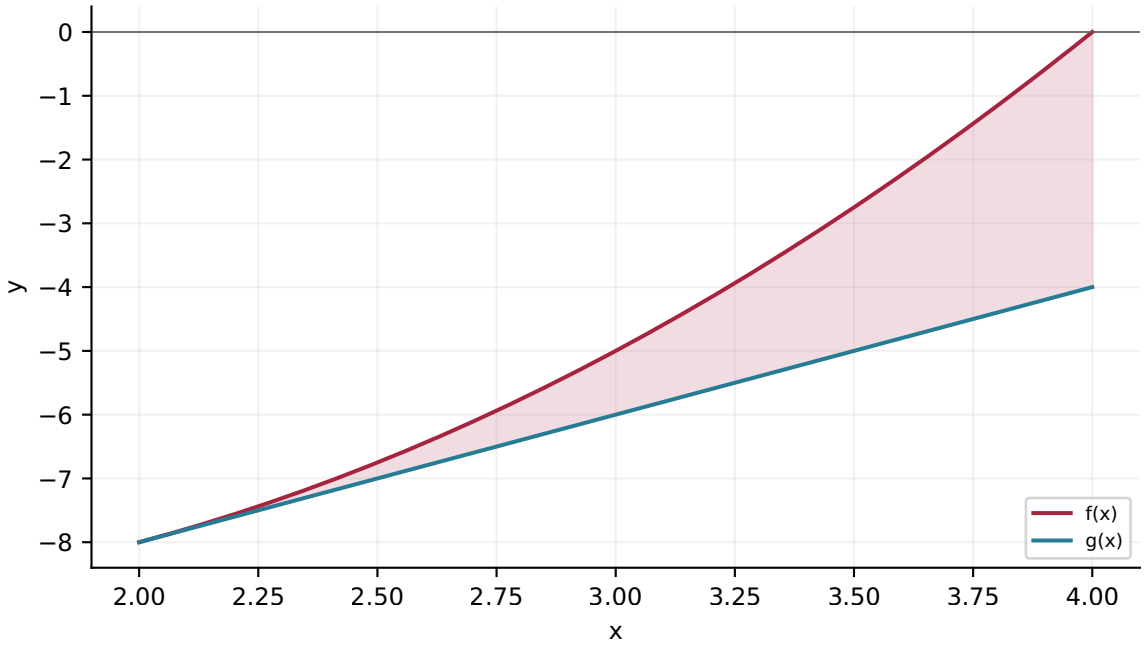
b) Área = $2 \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$ unidades cuadradas.



6.24 **a)** $f'(2) = 2$ y $f(2) = -8$. La tangente es $y = 2x - 12$.

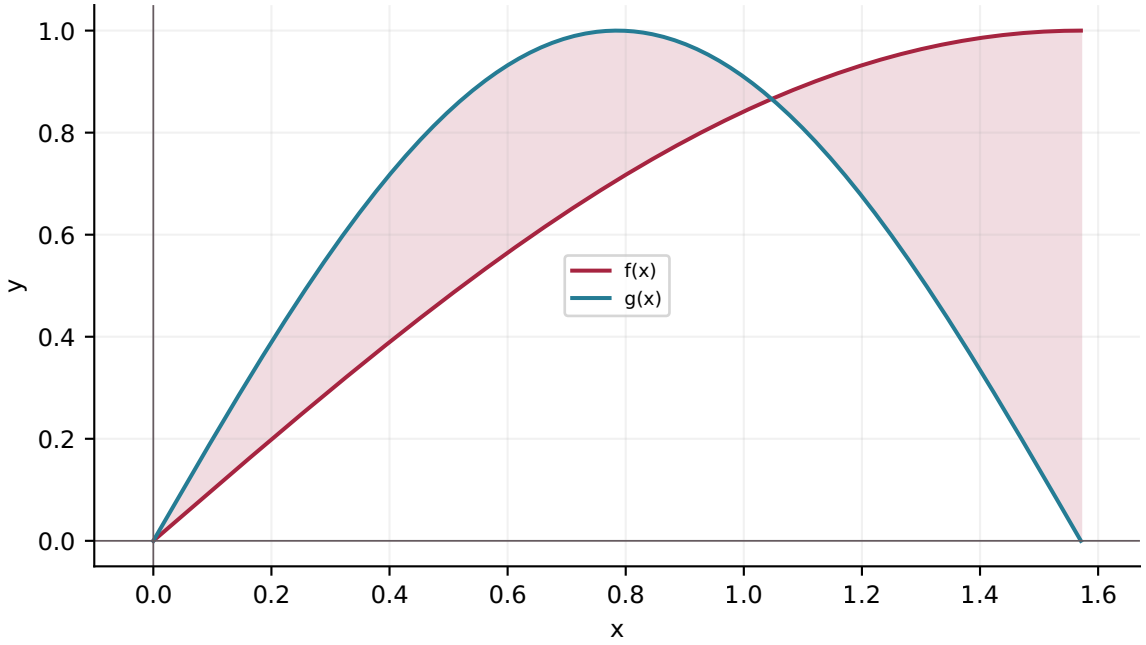
b) Límites de los tramos: 2, 4.

c) Área $= \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$ unidades cuadradas.



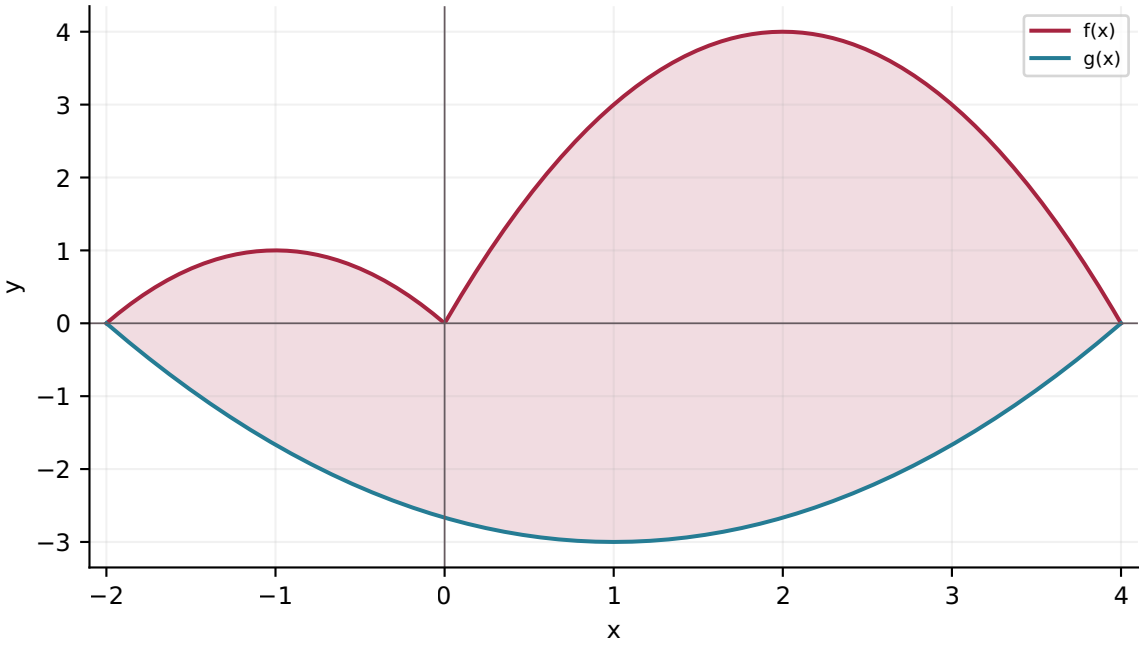
6.25 **a)** Límites de los tramos: 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$.

b) Área $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ unidades cuadradas.



6.26 **a)** El contorno exterior usa f por arriba entre -2 y 0, g por arriba entre 0 y 4, y h por abajo.

b) Área $= \int_{-2}^{0} -\frac{4\cdot x^2}{3} - \frac{4\cdot x}{3} + \frac{8}{3}\,dx + \int_{0}^{4} -\frac{4\cdot x^2}{3} + \frac{14\cdot x}{3} + \frac{8}{3}\,dx = 40/9 + 176/9 = 24.$



6.27 Área $= \int_{-4}^{0}(f-g)\,dx + \int_{0}^{1}(f-h)\,dx + \int_{1}^{2} f\,dx = 56/3 + 14/3 + 8/3 = 26.$

6.28 **a)** $F(x) = (1/2)\ln(2x+1) + C.$

b) Área $= (1/2)[\ln 9 - \ln 5] = (1/2)\ln(9/5).$

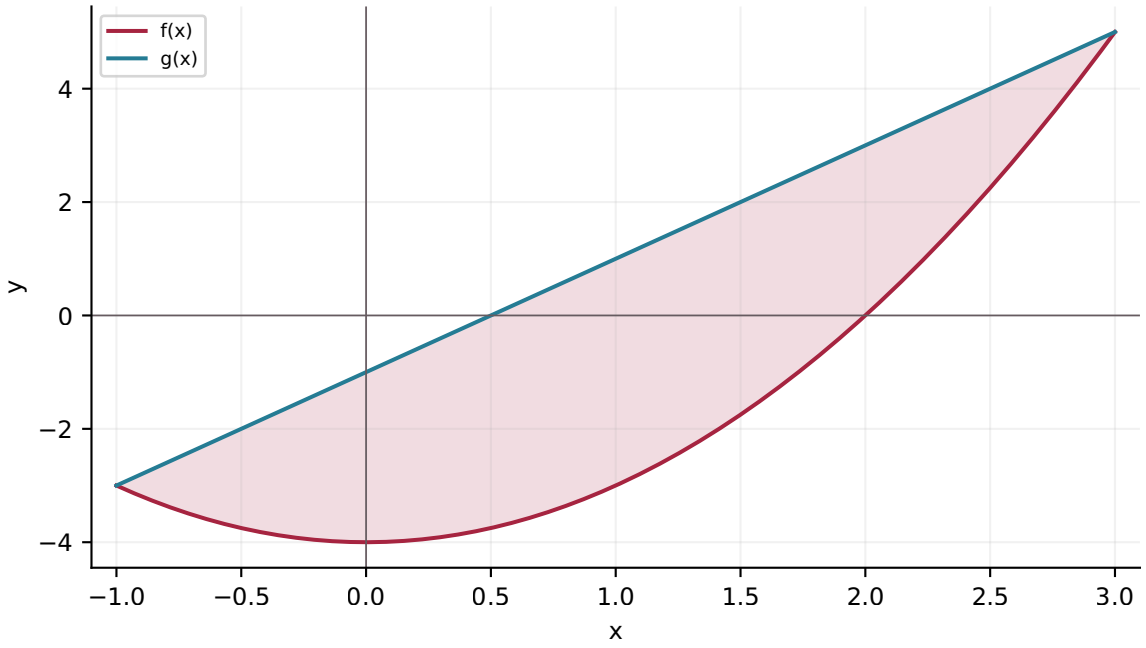
6.29 **a)** Izquierda: $\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 5/3.$

b) Derecha: $\int_{4}^{6}[f(x)-6]\,dx = 17/3.$

6.30 **a)** La recta es $y = 2x - 1$.

b) Límites de los tramos: -1, 3.

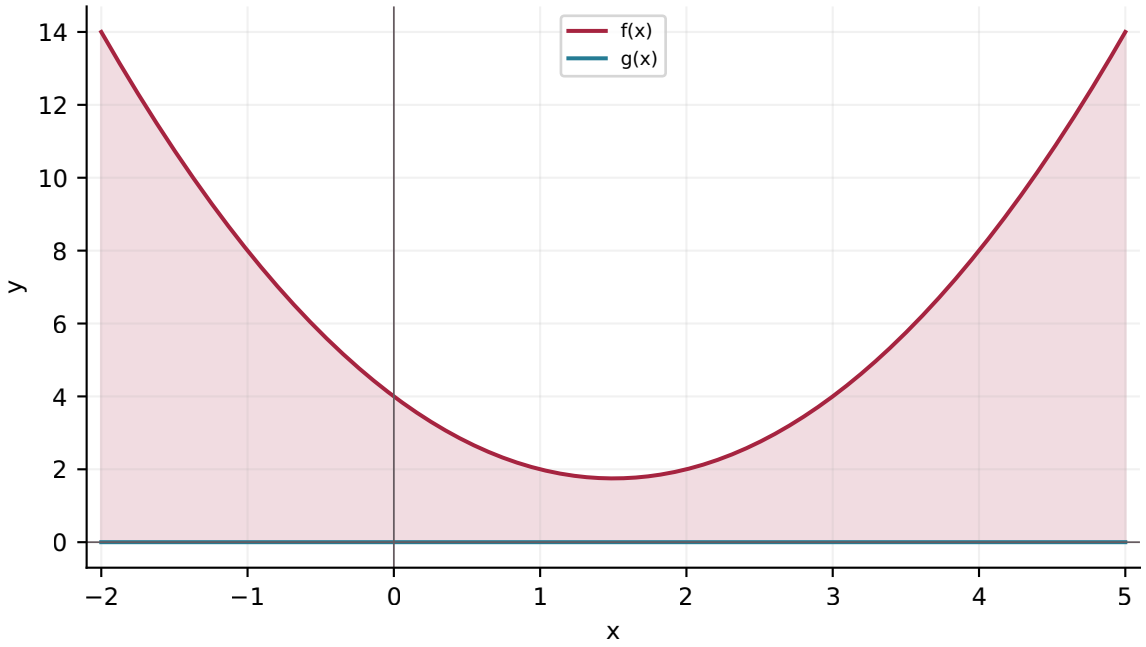
c) Área $= \frac{32}{3} = \frac{32}{3}$ unidades cuadradas.



6.31 **a)** $x^2 - 3x + 4 = (x - 3/2)^2 + 7/4 > 0$; se puede quitar el valor absoluto.

b) Límites de los tramos: -2, 5.

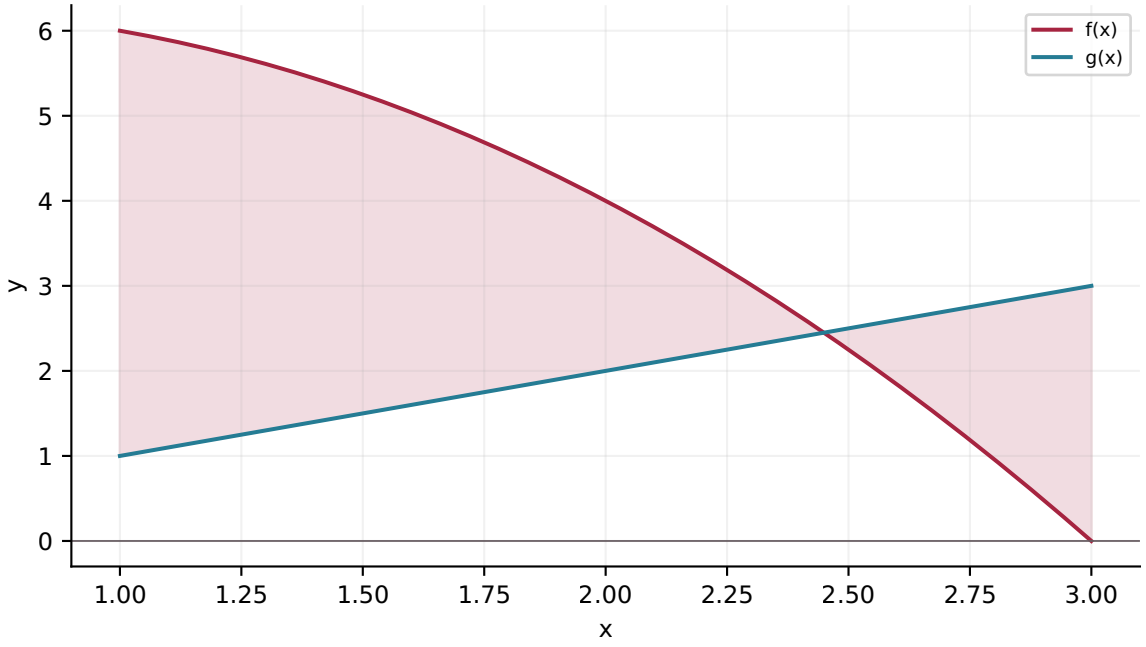
c) Área $= \frac{245}{6} = \frac{245}{6}$ unidades cuadradas.



6.32 **a)** La parábola es $y = -x^2 + x + 6$. El cruce con $y = x$ dentro del intervalo es $x = \sqrt{6}$.

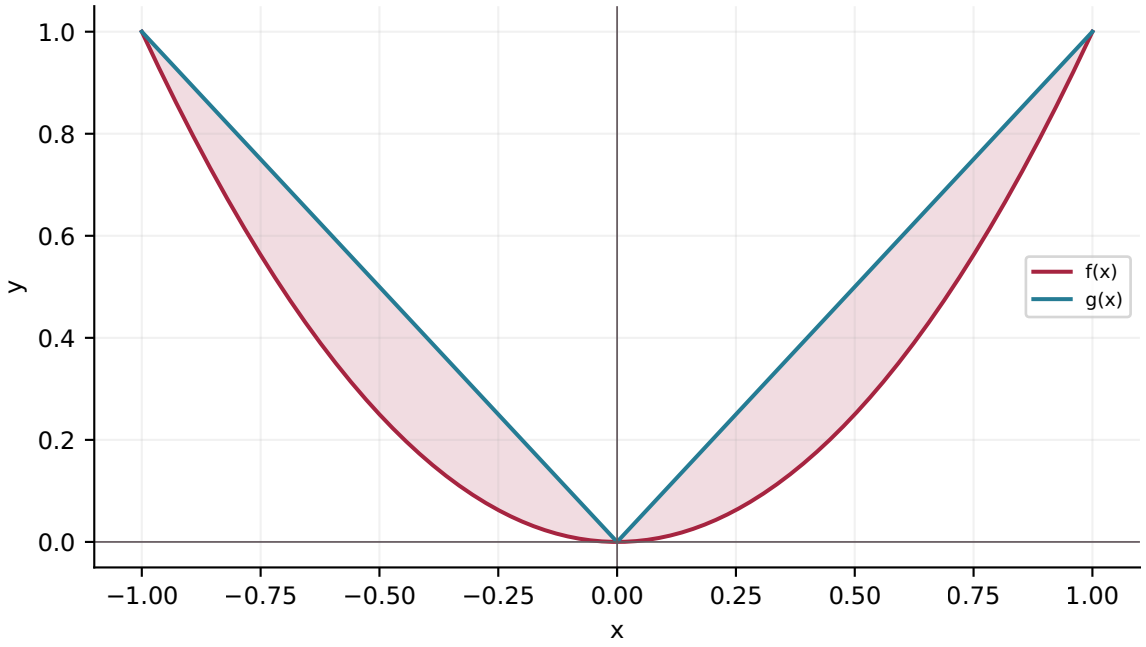
b) Límites de los tramos: 1, $\sqrt{6}$, 3.

c) Área $= (-9 + 4 \cdot \sqrt{6}) - (\frac{17}{3} - 4 \cdot \sqrt{6}) = -\frac{44}{3} + 8 \cdot \sqrt{6}$ unidades cuadradas.



6.33 **a)** Límites de los tramos: -1, 0, 1.

b) Área $= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ unidades cuadradas.



6.34 **a)** Una estimación por rectángulos da aproximadamente $4\pi/3 \approx 4{,}19$.

b) Área exacta $= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1 - \text{sen}(x)\, dx + \int_{\pi}^{2 \cdot \pi} 1\, dx + \int_{2 \cdot \pi}^{\frac{5 \cdot \pi}{2}} 1 - \text{sen}(x)\, dx = 2\pi - 2 \approx 4{,}2832$.

07 · Aplicaciones y retos

7.01 **a)** Escribe $f(x) = a(x-1)(x-3)$. Entre $x = 0$ y $x = 1$ el área es $|a|\cdot 4/3$.

b) Por tanto $|a| = 1$. Son posibles $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. Si se exige la región sobre el eje X, corresponde la primera.

7.02 **a)** $c = -1$; $a + b = 3$; $a/3 - b/2 + c = 5/6$.

b) Resolviendo: $a = 4$, $b = -1$, $c = -1$. $f(x) = 4x^2 - x - 1$.

7.03 **a)** $f(-3) = 0$ implica $c = 3b - 9$; $f(x) = (x+3)(x+b-3)$.

b) Si $b \geq 3$ la función es no negativa: $27b/2 - 18 = 36$, de donde $b = 4$ y $c = 3$.

c) Si $b \leq 0$ es no positiva: $18 - 27b/2 = 36$, de donde $b = -4/3$ y $c = -13$.

d) Para $0 < b < 3$ el área no alcanza 36: es como máximo 45/2. Soluciones: $f(x) = x^2 + 4x + 3$ y $f(x) = x^2 - 4x/3 - 13$.

7.04 **a)** Continuidad en $x = 1$: $2a + 3 = a + 2$, luego $a = -1$.

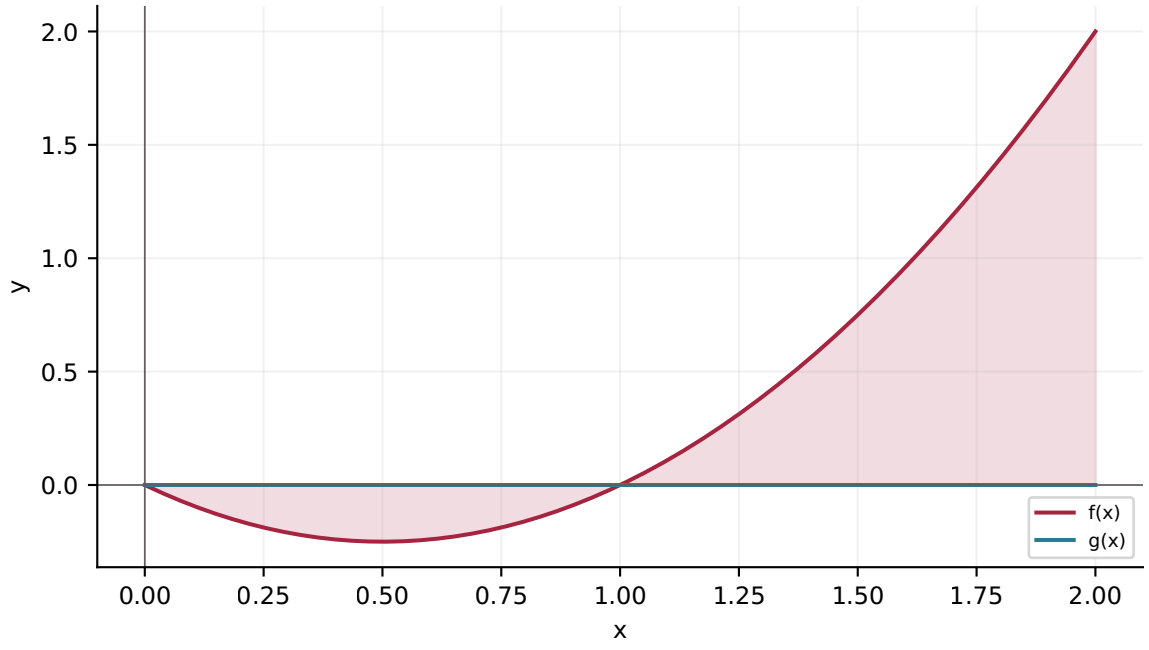
b) El recinto va de $x = 0$ a $x = 2$. Área $= \int_0^1(-2x^2 - x + 4)\,dx + \int_1^2(-x + 2)\,dx = 17/6 + 1/2 = 10/3$.

7.05 **a)** $\int_1^m x^2/4\,dx = \int_m^2(1 - x^2/4)\,dx$. Agrupando: $\int_1^2 x^2/4\,dx = 2 - m$.

b) $7/12 = 2 - m$, luego $m = 17/12$.

7.06 **a)** $F(x) = x^3/3 + bx^2/2 + C$. $C = 2$ y $9 + 9b/2 + 2 = 20$, luego $b = 2$. $F(x) = x^3/3 + x^2 + 2$.

b) Para $b = -1$, los cortes son 0 y 1. Área $= -\int_0^1(x^2 - x)\,dx + \int_1^2(x^2 - x)\,dx = 1/6 + 5/6 = 1$.



7.07 **a)** $f(3) = f'(3) = 0$ implica $b = -6a$ y $c = 9a$: $f(x) = ax(x-3)^2$.

b) Para que $x = 3$ sea un mínimo, $a > 0$. El área entre 0 y 3 es $27a/4$; por tanto $a = 1$, $b = -6$ y $c = 9$.

7.08 **a)** Los cortes son $x = 0$ y $x = a$. Área $= \int_0^a (ax - x^2)\,dx = a^3/6$.

b) $a^3/6 = 4$, luego $a = \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$.

7.09 **a)** Tomando hacia abajo como sentido positivo, $v(t) = 9{,}8t$. A los 3 s: 29,4 m/s.

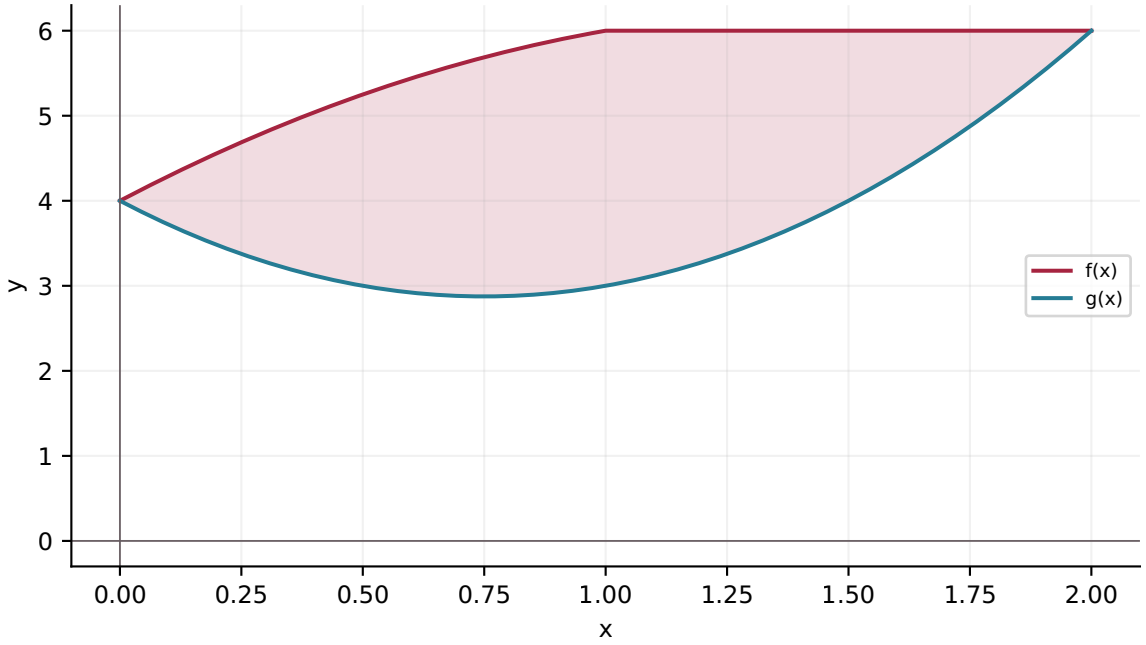
b) $s(t) = \int_0^t 9{,}8u\,du = 4{,}9t^2$; $s(3) = 44{,}1$ m.

c) $4{,}9t^2 = 600$: $t = \sqrt{(600/4{,}9)} \approx 11{,}0657$ s, sin resistencia del aire.

7.10 **a)** Las curvas se cruzan en $x = 0$ y $x = 2$. f llega a $y = 6$ en $x = 1$ y supera esa altura entre 1 y 2.

b) Área pintable $= \int_0^1 (f - g)\,dx + \int_1^2 (6 - g)\,dx = 2 + 11/6 = 23/6$ m².

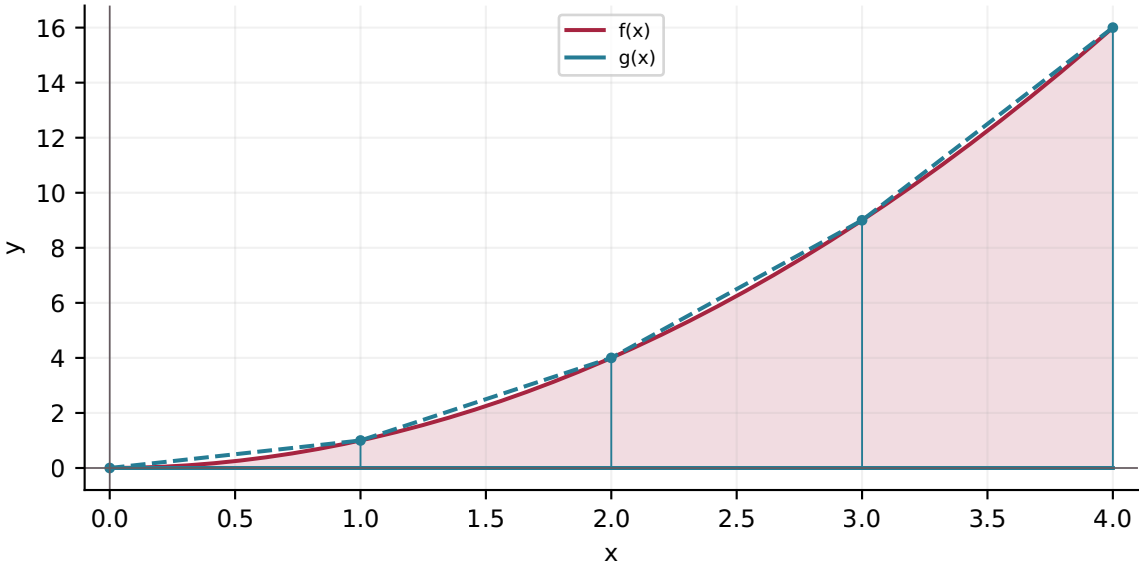
c) Caben cuatro figuras: $4 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 23$ m. Superficie total $= 46/3$ m²; coste $= 92/3$ € ≈ 30,67 €.

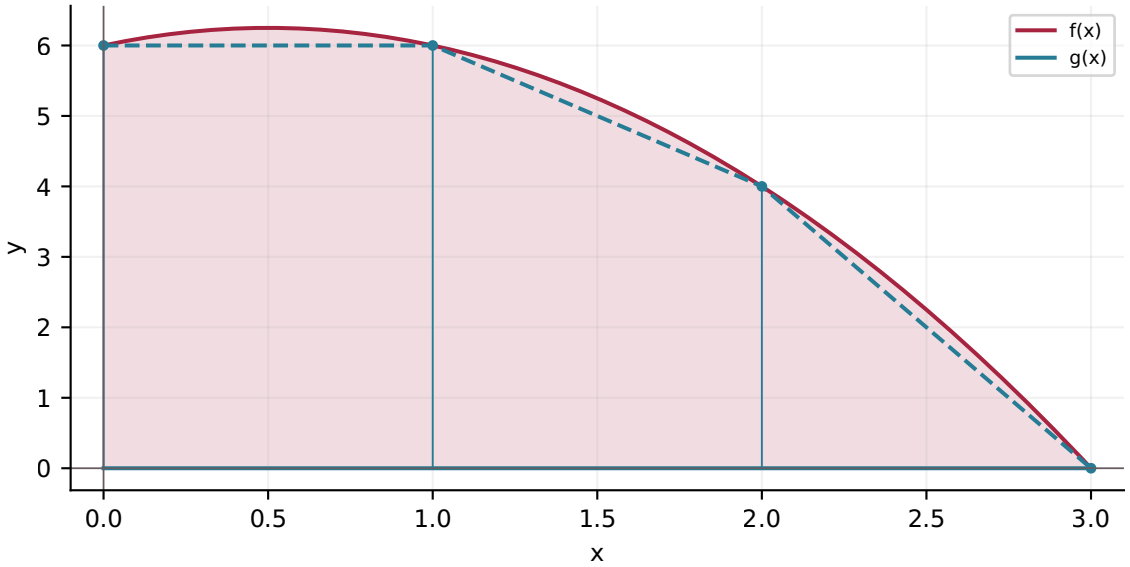


7.11 $F(x) = x^3/150 + x + C$. Como $F(0) = 5$, resulta $F(x) = x^3/150 + x + 5$, en euros.

7.12 **a)** a) Trapecios: 1/2 + 5/2 + 13/2 + 25/2 = 22. Integral = 64/3 ≈ 21,3333. Exceso = 2/3, un 3,125 %.

b) b) La raíz positiva es 3. Trapecios: 6 + 5 + 2 = 13. Integral de 0 a 3 = 27/2 = 13,5. Defecto = 1/2, aproximadamente un 3,70 %.





7.13 **a)** 10.

b) 10 m.

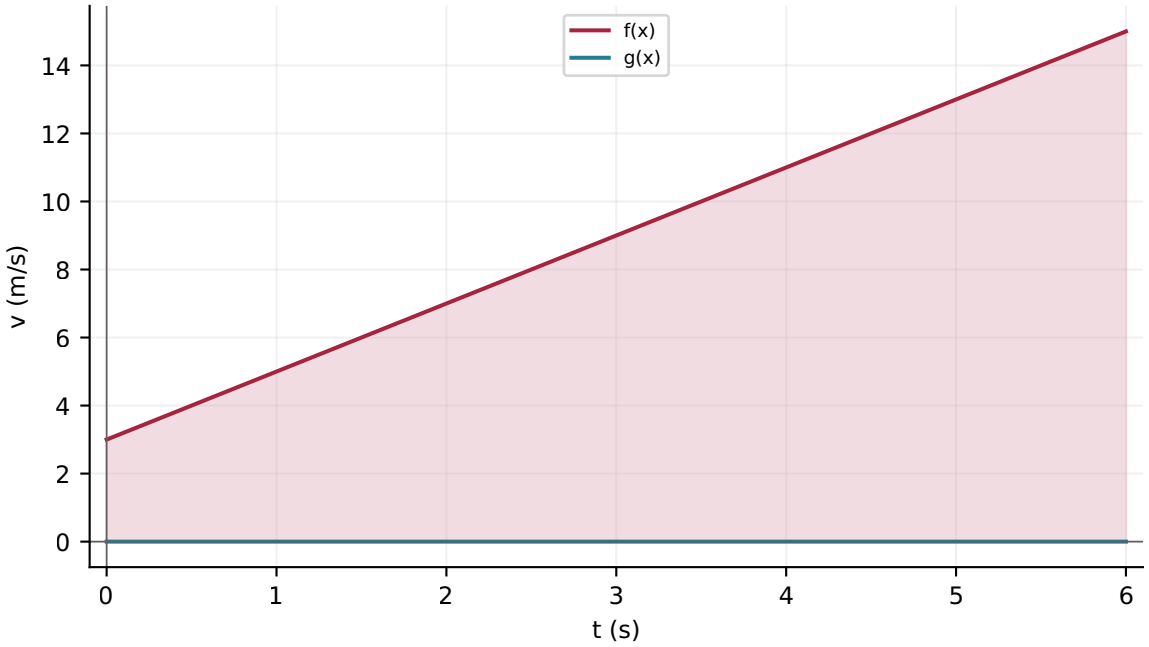
c) 40.

d) 40 m.

e) 44.

f) 44 m.

g) Las áreas en el plano tiempo–velocidad representan los desplazamientos; aquí coinciden con los espacios porque v > 0.



7.14 **a)** a) 4. El recinto es un triángulo de base 4 y altura 2.

b) b) 2. Es un rombo de diagonales 2 y 2.

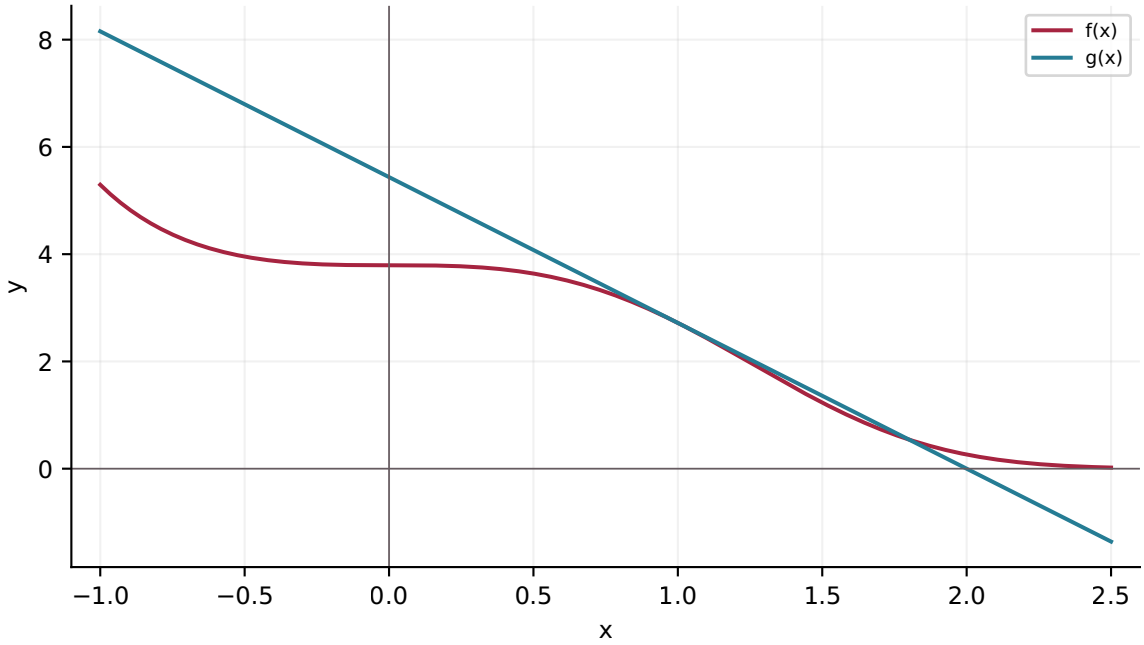
c) c) 88/5. Con A(0,12), B(4,12), C(4,8) y M(12/5,24/5), el área de ABCM por descomposición o determinantes es 17,6.

d) d) 24 cm². Si el lado exterior es L, el cuadrado interior tiene lado L/√2; su área es L²/2 = 48/2.

7.15 **a)** Separando variables: $f'/f = -x^2$. Así $\ln|f| = -x^3/3 + C$ y $f(x) = A\cdot e^{-\frac{x^3}{3}}$.

b) La condición da $A = e^{\frac{4}{3}}$: $f(x) = e^{\frac{4-x^3}{3}}$.

c) $f'(1) = -e$. La tangente es $y - e = -e(x - 1)$, o $y = -ex + 2e$.



7.16 **a)** Se divide en $x = 1/n$: $A_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{n}(1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} + \frac{3}{n} - \frac{3}{n^2}$.

b) Para $n = 1$ el segundo tramo tiene longitud cero y $A_1 = 1/2$.

7.17 Para una fuerza constante, es el producto de la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento por dicho desplazamiento: $W = F\cdot d\cdot\cos\theta$. Si fuerza y desplazamiento son paralelos y del mismo sentido, $W = Fd$.

7.18 **a)** Arrastrar una silla 3 m con una fuerza horizontal de 5 N en el sentido del movimiento: trabajo de esa fuerza, 15 J.

b) Levantar un libro 1 m mediante una fuerza vertical de 4 N: trabajo de esa fuerza, 4 J.

7.19 Sí, si $W(x)$ es el trabajo acumulado desde una posición fija: $W(x) = \int F_x(u)\,du$ y $dW/dx = F_x(x)$, bajo las condiciones del teorema fundamental del cálculo.

7.20 **a)** $W(1) = \int_0^1 ku\,du = k/2$.

b) $W(2) = \int_0^2 ku\,du = 2k$.

c) $W(x) = \int_0^x ku\,du = kx^2/2$.