1.º BACHILLERATO

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Practica, razona y comprueba tus respuestas.

01 Vectores y combinaciones lineales

Operaciones, bases y coordenadas.

02 Producto escalar y ángulos

Módulos, ortogonalidad y demostraciones.

03 Puntos, segmentos y polígonos

Puntos medios, áreas y construcciones.

04 Ecuaciones de la recta

Formas vectorial, paramétrica y general.

05 Posiciones relativas

Paralelismo, perpendicularidad e intersecciones.

06 Distancias y ángulos

Lugares geométricos y condiciones métricas.

07 Simetrías y profundización

Proyecciones, centros y problemas de síntesis.

08 Geometría en el rescate marítimo

Vectores, trayectorias y puntos de encuentro.

TU RUTA DE TRABAJO

Índice

Actividades organizadas por contenidos, con espacio para trabajar y soluciones al final.

01	Vectores y combinaciones lineales	3
02	Producto escalar y ángulos	12
03	Puntos, segmentos y polígonos	17
04	Ecuaciones de la recta	22
05	Posiciones relativas	27
06	Distancias y ángulos	34
07	Simetrías y profundización	40
08	Geometría en el rescate marítimo	44
•	Solucionario	46

Cómo usar el dossier

El código **1.12** identifica la actividad 12 del bloque 1. Busca ese mismo código en el solucionario. Puedes seguir el orden completo o seleccionar un contenido para repasarlo.

Antes de empezar

Los vectores se indican por letras como u o mediante sus extremos, AB. Las coordenadas se escriben (x, y). Los ángulos entre vectores están entre 0° y 180°; entre rectas, se toma el menor salvo indicación contraria. Las figuras sin cuadrícula muestran relaciones geométricas, no medidas exactas.

BLOQUE 01

Vectores y combinaciones lineales

Operaciones, bases y coordenadas. · 22 actividades

1.01 Copia los vectores y construye gráficamente u + v y u − v.



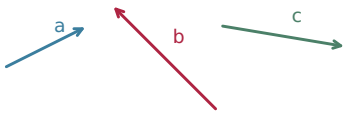
1.02 Realiza gráficamente las sumas y compara los resultados.



a) (u + v) + w

b) u + (v + w)

1.03 Copia los vectores a, b y c y construye gráficamente las operaciones indicadas.

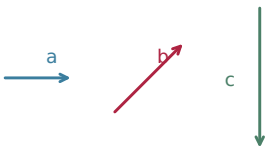


a) $a + 2b$

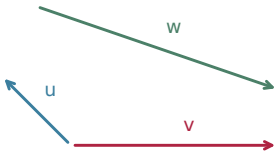
b) $-c + 3a - 2b$

c) $b + (c + a)$

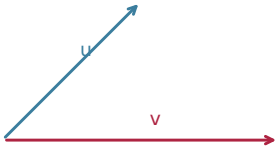
1.04 En la figura, expresa a como combinación lineal de b y c. Despeja también b y c.



1.05 Comprueba que u y v forman una base y descompón gráficamente w en esa base.



1.06 Sea B = {u, v} una base del plano.



a) Construye a = u + v y b = u − v.

b) Comprueba que a y b forman una base.

c) Expresa u y v como combinación de a y b.

1.07 Dibuja A(3, 1) y B(−1, −1). Calcula los vectores AB y BA y sus módulos.

1.08 Encuentra x para que los vectores sean paralelos.

a) (3, 2) y (9, x).

b) (−1, 4) y (x, −2).

1.09 Dados A(3, −1), B(−1, 2), C(0, 2) y D(−1, −2), calcula:

a) AB + CD.

b) 2AC − BD.

c) −BC + 2AD.

1.10 Dados u = (2, −1) y v = (0, 3), realiza las operaciones.

a) u − 3v

b) 5u + v

c) − u + 2v

1.11 Comprueba si {u, v} es una base y halla las coordenadas de w respecto de ella.

a) u = (−1, 0), v = (2, −3), w = (3, −3).

b) u = (3, −3), v = (1, −4), w = (5, −2).

1.12 Los vectores AB y CD son equivalentes, con A(2, 1) y B(0, −2). Calcula el extremo desconocido.

a) C(−5, 7).

b) D(−5, 7).

c) C(0, −2).

d) D(0, −2).

e) C(7, −5).

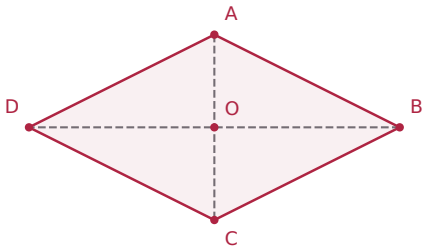
f) D(7, −5).

g) C(0, 0).

h) D(0, 0).

1.13 Halla u y v sabiendo que u + v = (2, 3) y u − v = (−1, 4).

1.14 Observa el rombo ABCD, con O en la intersección de sus diagonales. Simplifica cada expresión como un vector entre puntos de la figura.



a) AB + BC.

b) DB + CD.

c) OA + OD.

d) DA + DC.

e) DB − CA.

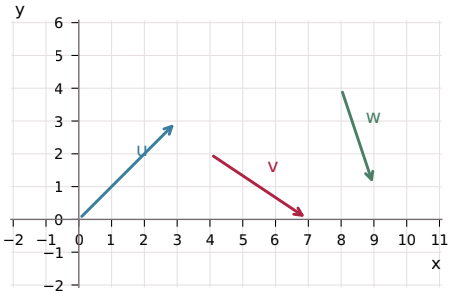
f) DC − AC.

g) OA − OB.

h) OD − BC.

i) OA + AD.

1.15 Realiza gráficamente las operaciones con los vectores de la cuadrícula. Cada lado de un cuadrado representa una unidad.



a) u + v

b) v + w

c) u + w

d) u − v

e) v − w

f) u − w

g) 2u − v

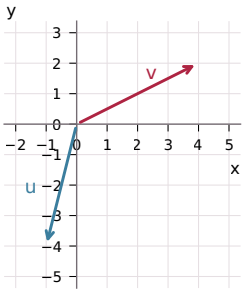
h) − v + 2w

i) − u − 2w

1.16 Construye gráficamente $2u - 2(v - 3w)$ a partir de los vectores de la figura.



1.17 Comprueba que los vectores u y v de la cuadrícula forman una base. Dibuja los vectores cuyas coordenadas en esa base son:



a) (2, 1).

b) (3, −1).

c) (−2, 3).

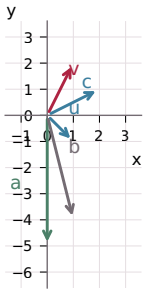
1.18 Comprueba que u = (−1, −3) y v = (4, 2) forman una base y expresa los vectores en ella.

a) a = (2, 1).

b) b = (3, −1).

c) c = (−2, 3).

1.19 Escribe los vectores a, b y c de la figura como combinaciones de u y v. Indica sus coordenadas respecto de esa base.



1.20 Expresa u = (7, 6) como combinación lineal de a = (6, −3) y b = (−1, 3).

1.21 Dados a = (−3, 4), b = (−5, −12) y c = (3, −1), calcula los módulos de a, b, c, a + b y 2b − c.

1.22 Calcula B para que AB sea equivalente a u = (2, −3), si A(−1, 2).

BLOQUE 02

Producto escalar y ángulos

Módulos, ortogonalidad y demostraciones. · 21 actividades

2.01 Dados u = (0, 2), v = (1, −1) y w = (0, −1), calcula los productos escalares.

a) u·v

b) u·(v + w)

c) w·v

d) u·w

e) u·(v − 2w)

f) − 2u·3v

2.02 Determina qué pares son perpendiculares: u = (−1, 3), v = (12, 4) y w = (1/3, −1).

2.03 Calcula el ángulo entre cada par de vectores, entre 0° y 180°.

a) a = (2, -1); b = (3, 2).

b) a = (5, 2); b = (-1, 1).

c) a = (-3, -1); b = (2, 3).

d) a = (-1, 5); b = (4, -2).

2.04 Encuentra tres vectores no nulos paralelos y tres perpendiculares a cada vector.

a) a = (1, 1).

b) b = (3, 2).

c) c = (0, 1).

2.05 Halla todos los vectores que cumplen cada condición.

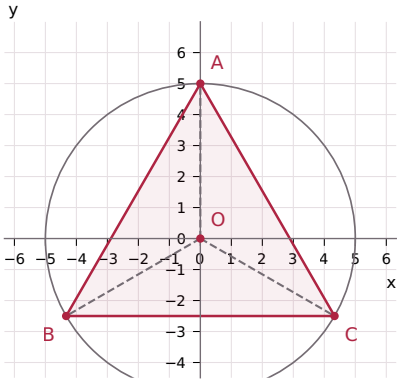
a) Perpendiculares a u = (−2, 1) y de módulo 2.

b) Perpendiculares a u = (3, 1) y de módulo 1.

c) Perpendiculares a u = (−3, 4) y de módulo 5.

d) Perpendiculares a u = (1, 1) y de módulo 1.

2.06 El triángulo equilátero ABC está inscrito en una circunferencia de centro O y radio 5 cm. Calcula OA·OB y OA·OC.



2.07 A, B, C y D son vértices consecutivos de un cuadrado de lado 1 cm. Calcula:

a) AB·BC.

b) AC·DB.

c) AD·CB.

d) AC·CB.

2.08 Si u = (3, 1) y v = (2, −1), calcula:

a) u·v

b) u·2v

c) (2u + 3v)·v

d) u·(u − v)

2.09 Dados a = (2, −1), b = (−3, 1) y c = (4, 3), calcula:

a) (a − 2b)·c

b) a·b − b·c

2.10 Calcula t para que u·v = 7, con u = (−1, 2) y v = (3, t). Halla los módulos de ambos vectores.

2.11 Encuentra un vector perpendicular a u = (−3, 2) y de módulo 2.

2.12 Dado p = (6, 2), halla todos los vectores q de módulo $\sqrt{89}$ que cumplen p·q = 14.

2.13 Calcula k para que los vectores sean perpendiculares.

a) u = (2, k), v = (1, −6).

b) u = (−2/3, k), v = (5, −1).

c) u = (1/3, 2/5), v = (k, −1).

d) u = (2, −3), v = (1, k).

2.14 Calcula m para que v = (7, −2) y w = (m, 6):

a) Sean perpendiculares.

b) Sean paralelos.

c) Tengan el mismo módulo.

2.15 Dados a = (6, −2) y b = (16, 12), calcula m para que u = ma + b y v = ma − b sean perpendiculares. ¿Es única la solución?

2.16 Calcula el ángulo entre cada par de vectores, entre 0° y 180°.

a) a = (0, −2), b = (−4, −3).

b) a = (1/3, 5), b = (3, −1).

c) a = (−4, −3), b = (1, 1).

d) a = $(1, -\sqrt{3})$, b = $(1,\sqrt{3})$.

2.17 Halla k para que a = (1, k) y b = (2, −3) formen un ángulo de 120°.

2.18 Encuentra todos los vectores a que forman 30° con b = (3, −4) y cumplen $\|a\| = \sqrt{3}\cdot\|b\|$.

2.19 Dados a = (1, 5) y b = (−4, −3), calcula:

a) a·b y b·a.

b) Los módulos de a y b.

c) El ángulo entre a y b.

d) k para que (3, k) sea perpendicular a a.

e) k para que (k, −1) sea paralelo a b.

f) Un vector no nulo perpendicular a b.

2.20 ¿Qué ángulo deben formar dos vectores no nulos a y b para que |a| = |b| = |a − b|? ¿Y para que |a| = |b| = |a + b|?

2.21 Demuestra que, si a y b tienen el mismo módulo, a + b y a − b son perpendiculares cuando ambos son no nulos. Deduce que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

BLOQUE 03

Puntos, segmentos y polígonos

Puntos medios, áreas y construcciones. · 29 actividades

3.01 Dados A(−1, 3), B(5, 1) y C(0, 3), calcula la distancia de C al punto medio de AB.

3.02 Halla los simétricos de A(2, −5) y B(−1, 3) respecto del punto C(2, −1).

3.03 Dibuja el cuadrilátero A(−4, −3), B(2, −3), C(2, 1), D(−2, 2) y halla su perímetro.

3.04 Halla los dos puntos que dividen AB en tres partes iguales.

a) A(−2, 3), B(0, −1).

b) A(1, 1), B(3, 6).

3.05 Comprueba si los tres puntos están alineados.

a) A(−2, 0), B(1, −1), C(−5, −1).

b) A(0, 0), B(3, −1), C(2, −2).

3.06 Determina si el triángulo A(12, 10), B(20, 16), C(8, 32) es rectángulo.

3.07 Tres vértices de un paralelogramo son A(2, 1), B(6, −1) y C(7, 1). Halla las posibles coordenadas del cuarto.

3.08 Calcula el perímetro del triángulo A(1, 2), B(3, 2), C(−1, 3).

3.09 Demuestra que A(2, −2), B(5, 3), C(0, 6) y D(−3, 1) forman un cuadrado.

3.10 Demuestra que el triángulo A(3, 1), B(9, −1), C(5, −5) es isósceles. ¿Es equilátero? Indica los lados iguales y calcula su área.

3.11 Calcula el punto medio de cada segmento.

a) A(3, 5), B(9, 11).

b) A(−3, 1), B(7, −4).

c) A(4, 5), B(7, 1).

d) A(−6, −1), B(−9, −3).

3.12 Calcula el extremo desconocido del segmento AB.

a) Punto medio M(3, 5) y extremo A(9, 7).

b) Punto medio M(−1, 5) y extremo B(4, −9).

3.13 Dos vértices consecutivos de un cuadrado son A(−2, 3) y B(1, −2). Sus diagonales se cortan en O(2, 2). Calcula los vértices restantes.

3.14 Tres vértices consecutivos de un hexágono regular son (0, 0), (2, 0) y $(3,\sqrt{3})$. Halla los otros tres.

3.15 Halla los puntos que dividen en tres partes iguales el segmento A(5, −1), B(17, 8).

3.16 Calcula k para que A(2, −3), B(9, k) y C(6, −1) estén alineados.

3.17 Halla la longitud de la mediana desde A en el triángulo A(−1, 4), B(6, 5), C(10, −3). ¿Coincide con la altura? Justifica.

3.18 Dos vértices de un triángulo equilátero son A(3, 1) y B(5, −2). Halla todas las posibilidades para el tercero.

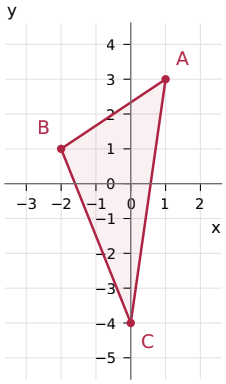
3.19 Dados A(3, 0) y B(−3, 0), halla C sobre el eje de ordenadas para que ABC sea equilátero. ¿Hay una única solución? Calcula el área.

3.20 A(2, −4) y B(8, −2) son vértices consecutivos de un cuadrado. Halla los restantes si uno de ellos está en el eje de ordenadas.

3.21 Comprueba si P(−1, 4), Q(3, 1) y R(11, −5) están alineados.

3.22 Demuestra que A(3, −2), B(9, 6) y C(10, 5) forman un triángulo rectángulo.

3.23 En el triángulo A(1, 3), B(−2, 1) y C(0, −4), calcula:



a) La longitud del lado AC.

b) La ecuación de la recta AC.

c) El área del triángulo.

3.24 Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del triángulo A(5, 3), B(−3, 4), C(0, −3).

3.25 La recta que pasa por M(2, 3) y es paralela a $y = 3x + 1$ forma un triángulo con los ejes. Calcula su área.

3.26 Calcula el área del cuadrilátero de vértices consecutivos (1, 3), (−2, 4), (−1, −3) y (3, −2).

3.27 Tres vértices de un paralelogramo son (5, −1), (9, 5) y (−1, −5). Determina los posibles centros y cuartos vértices.

3.28 En un triángulo, A(2, 5), el punto medio de BC es (3, 1) y el de AB es (0, 4). Calcula B y C.

3.29 Halla los posibles terceros vértices de un triángulo equilátero que tiene A(−2, 1) y B(2, 3).

BLOQUE 04

Ecuaciones de la recta

Formas vectorial, paramétrica y general. · 23 actividades

4.01 Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta por A(7, 3) y B(2, 2).

4.02 Halla las ecuaciones paramétricas de la recta con vector director $(-1, 0)$ que pasa por A(3, 2).

4.03 Calcula las ecuaciones vectorial y paramétricas de las bisectrices de los cuadrantes.

4.04 Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por C(0, 3) y por el punto medio de A(3, 1) y B(5, −3).

4.05 Halla la ecuación continua de la recta por A(2, −1) y de dirección (2, −1). Comprueba si P(3, 1) pertenece a ella.

4.06 Escribe la ecuación general de la recta que pasa por A(0, −2) y B(4, −1).

4.07 Dada la recta $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \end{cases}$, determina:

a) Su ecuación continua.

b) Su ecuación general.

4.08 Halla las ecuaciones punto-pendiente y explícita de la recta por A(2, −3) con vector director (−2, 1).

4.09 Calcula la recta por A(2, 7) cuya inclinación respecto del semieje positivo de abscisas es 60°. Explica el procedimiento.

4.10 Halla la recta que pasa por O(0, 0) y cumple:

a) Pasa también por A(−5, 2).

b) Tiene pendiente m = −2.

4.11 Escribe en forma vectorial, paramétrica, continua, explícita y general la recta por P(0, −3) con vector director (3, −1).

4.12 Escribe en forma vectorial, paramétrica, continua, explícita y general la recta por P(−2, 3) y Q(5, 1).

4.13 Halla las ecuaciones continua y general de las rectas de los lados del triángulo A(1, 4), B(−6, −5), C(3, −1).

4.14 Escribe cada recta en la forma indicada.

a) $y = -3x + 4$, en forma paramétrica.

b) $-2x + y + 7 = 0$, en continua.

c) $\frac{x}{-2} = \frac{y-3}{5}$, en explícita.

d) $\begin{cases} x = 3t \\ y = -2 - t \end{cases}$, en general.

4.15 Comprueba si A(−3, 2) y B(5, −1) pertenecen a cada recta.

a) $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 3 + 4t \end{cases}$

b) $y = \frac{5x-3}{3}$

c) $5x - 2y + 19 = 0$

d) $\frac{x+4}{3} = \frac{y+7}{2}$

4.16 Calcula k para que $3x + 7y + k = 0$ pase por P(−1, 4).

4.17 Calcula k para que $4x - y + k = 0$ pase por el origen.

4.18 Escribe dos puntos de cada recta.

a) $y = 3x - 1$

b) $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$

c) $4x - 3y + 1 = 0$

d) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1}$

4.19 Escribe la ecuación punto-pendiente de la recta que cumple:

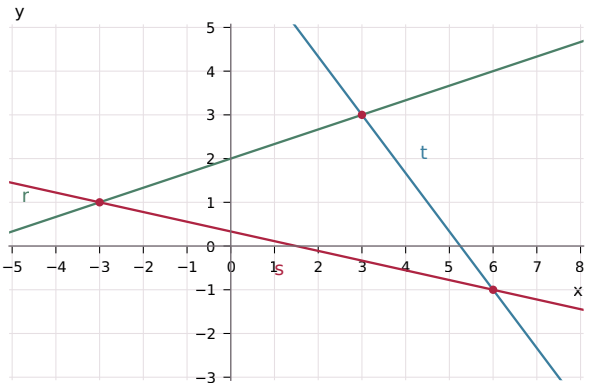
a) Pasa por A(2, −3) y B(0, −2).

b) Pasa por A(0, 3) y tiene vector director (3, −1).

4.20 Calcula k para que $8x - ky + 7 = 0$ tenga pendiente 2.

4.21 Una recta pasa por (−1, −10) y (2, c) y tiene pendiente 7. Halla c y escribe la recta en forma continua y general.

4.22 Obtén las ecuaciones generales de las tres rectas representadas.



4.23 Halla la recta que corta los ejes en (3, 0) y (0, 5). Generaliza la ecuación para interceptos a y b no nulos.

BLOQUE 05

Posiciones relativas

Paralelismo, perpendicularidad e intersecciones. · 28 actividades

5.01 Estudia la posición relativa de r: $\frac{x}{3} = y - 5$ y s: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \end{cases}$.

5.02 ¿Qué posición relativa tienen dos rectas del plano con vectores directores no proporcionales? ¿Cuándo son perpendiculares?

5.03 Determina la recta paralela a r: $3x - y - 3 = 0$ que pasa por P(0, −4).

5.04 Determina la perpendicular a r: $3x - y - 3 = 0$ que pasa por P(0, −4).

5.05 Escribe en forma continua, paramétrica, general y explícita la recta por A(2, −4) perpendicular al vector (4, −1).

5.06 Expresa en forma vectorial, paramétrica y continua la recta que cumple:

a) Pasa por (1, 3) y es paralela a $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-4}$.

b) Pasa por (−2, 5) y es paralela a $5x - 2y + 12 = 0$.

5.07 Expresa en forma explícita la recta que cumple:

a) Pasa por $(0, -1)$ y es paralela a $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 \end{cases}$.

b) Pasa por $(5, -2)$ y es paralela a $\frac{x-3}{4} = \frac{y}{-1}$.

5.08 Escribe la ecuación general de la recta que cumple:

a) Pasa por $(10, -2)$ y es paralela a $\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$.

b) Pasa por $(4, 0)$ y es paralela a $y = \frac{8x-3}{2}$.

5.09 Escribe en forma vectorial y paramétrica la recta que cumple:

a) Pasa por $(0, -3)$ y es perpendicular a $\frac{x+2}{-3} = \frac{y+1}{4}$.

b) Pasa por $(-5, 0)$ y es perpendicular a $-3x - 2y + 7 = 0$.

5.10 Determina la ecuación continua de la recta que cumple:

a) Pasa por $(7, -1)$ y es perpendicular a $y = \frac{-x+6}{3}$.

b) Pasa por $(-4, 4)$ y es perpendicular a $-2x + y + 7 = 0$.

5.11 Estudia la posición relativa de cada pareja.

a) r: $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = t \end{cases}$; s: $\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$.

b) r: $\begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$; s: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -t \end{cases}$.

5.12 Analiza la posición relativa de cada pareja.

a) r: $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2}$; s: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-4}$.

b) r: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3}$; s: $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{-3}$.

5.13 Determina la posición relativa de cada pareja.

a) r: $2x - 6y + 4 = 0$; s: $-x + 3y - 2 = 0$.

b) r: $6x - 4y + 11 = 0$; s: $-9x + 6y - 1 = 0$.

c) r: $4x - y + 1 = 0$; s: $2x - 3y + 13 = 0$.

5.14 Discute la posición relativa de las rectas.

a) r: $y = \frac{6x-1}{4}$; s: $y = \frac{-3x+5}{-2}$.

b) r: $y = \frac{-3x+1}{2}$; s: $y = \frac{x-3}{-3}$.

5.15 ¿Qué posición relativa tienen estas parejas?

a) r: $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$; s: $x + 2y - 7 = 0$.

b) r: $\frac{x}{2} = y - 3$; s: $3x - 6y + 4 = 0$.

c) r: $y = 3x - 1$; s: $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = -2t \end{cases}$.

d) r: $y = \frac{5x + 1}{-2}$; s: $\frac{x + 3}{2} = \frac{y - 7}{-5}$.

5.16 Estudia la posición relativa de r, que pasa por $(-1, 2)$ y $(3, 4)$, y s, por $(-3, 4)$ y $(2, -1)$.

5.17 Estudia cada pareja.

a) r pasa por $(-3, 4)$ y $(8, -1)$; s: $x - 2y + 15 = 0$.

b) r pasa por $(-1, 4)$ y $(2, -5)$; s: $\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 7}{3}$.

5.18 Discute la posición relativa con los datos disponibles.

a) r es perpendicular a $3x - 4y + 11 = 0$;

s: $\begin{cases} x = -6t \\ y = -3 + 8t \end{cases}$.

b) r es paralela a $y = 2x - 3$; s: $\frac{x - 4}{3} = \frac{y}{6}$.

5.19 Estudia la posición relativa y calcula el punto de corte cuando exista.

a) r: $2x + 3y - 3 = 0$; s: $3x - 4y - 13 = 0$.

b) r: $6x + 9y - 3 = 0$; s: $2x + 3y - 1 = 0$.

c) r: $x - 2y + 3 = 0$; s: $-3x + 6y - 8 = 0$.

5.20 Halla el punto de intersección de cada pareja de rectas.

a) r: $\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$; s: $\begin{cases} x = -1 - 4\mu \\ y = 5 + 3\mu \end{cases}$

b) r: $\begin{cases} x = 7 - 2\lambda \\ y = 3\lambda \end{cases}$; s: $\begin{cases} x = 5 - 4\mu \\ y = 3 - 6\mu \end{cases}$

c) r: $\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -4 + 4\lambda \end{cases}$; s: $\begin{cases} x = -3 + \mu \\ y = -1 + 2\mu \end{cases}$

5.21 Estudia la posición relativa y, si procede, el punto de corte.

a) r: $2x - y + 8 = 0$; s: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 7 + t \end{cases}$

b) r: $y = \dfrac{-2x + 7}{3}$; s: $\dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{y - 1}{-2}$

c) r: $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y + 3}{-6}$; s: $3x + y + 2 = 0$.

d) r: $\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 5 + 8t \end{cases}$; s: $x - 3 = \dfrac{y + 7}{-4}$

e) r: $y = \dfrac{6x + 3}{2}$; s: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = \dfrac{3}{2} + 3t \end{cases}$

5.22 Clasifica las parejas y calcula la intersección cuando sea única.

a) r: $x + 2y - 5 = 0$; s: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1}$

b) r: $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 5 + t \end{cases}$; s: $x + 3y - 2 = 0$.

c) r: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$; s: $2x - y + 5 = 0$.

5.23 Calcula k para que $\frac{x+1}{k} = \frac{y-2}{3}$ sea paralela a $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 5t \end{cases}$.

5.24 Calcula a para que $ax + 3y - 7 = 0$ sea paralela a $\frac{x-1}{5} = y + 2$.

5.25 Halla k para que $kx + (k + 1)y + 8 = 0$ sea paralela a $5x + 6y - 12 = 0$.

5.26 Determina k para que $k^2x + (k + 1)y + 8 = 0$ sea perpendicular a $16x - 9y - 5 = 0$.

5.27 Considera la familia $y = ax + a$. Demuestra que todas sus rectas pasan por un punto fijo y halla la paralela a $\begin{cases} x = 21 - 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$.

5.28 Calcula k para que $2x + 5y - 1 = 0$, $-x + 2y + k = 0$ y $4x + 7y - 5 = 0$ sean concurrentes.

BLOQUE 06

Distancias y ángulos

Lugares geométricos y condiciones métricas. · 30 actividades

6.01 Halla la distancia de P(2, −1) a la recta $\frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2}$.

6.02 Calcula la distancia del origen a la recta $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$.

6.03 Halla la distancia entre r: $5x - 2y + 2 = 0$ y s: $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{5}$.

6.04 Calcula el menor ángulo formado por r: $y = x - 3$ y s: $\frac{x-1}{-2} = y + 3$.

6.05 Halla las rectas paralelas a $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4}$ situadas a distancia 2 de ella.

6.06 Halla todas las rectas por P(0, 1) que forman un ángulo de 45° con r: $x + y - 1 = 0$.

6.07 Halla todos los puntos de $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1}$ que distan 2 unidades de P(−2, 2).

6.08 Calcula la distancia de cada punto a la recta indicada.

a) P(0, 0); r: $x - 4y + 1 = 0$.

b) P(2, 1); r: $2x + 3y - 1 = 0$.

c) P(−3, −1); r: $3x - 2y - 3 = 0$.

6.09 Halla la distancia de P(4, −2) a cada recta.

a) $-6x + 8y - 5 = 0$.

b) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$

c) $\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{6}$

d) $y = \frac{4x - 5}{3}$

6.10 Calcula la distancia de P(−3, 2) a la recta que pasa por A(−2, 4) y B(4, −2).

6.11 Calcula la distancia del origen a la recta que pasa por (−3, 6) y es paralela a $\frac{x - 1}{-6} = \frac{y - 2}{8}$.

6.12 Calcula la distancia entre las rectas paralelas de cada pareja.

a) $4x - 3y + 1 = 0$; $8x - 6y - 5 = 0$.

b) $x + 2y - 5 = 0$; $4x + 8y + 2 = 0$.

c) $5x - y - 16 = 0$; $5x - y + 16 = 0$.

6.13 Calcula la distancia entre las rectas, comprobando antes su posición relativa.

a) r: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$; s: $-x + 2y + 5 = 0$.

b) r: $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{6}$; s: $y = \frac{8x-3}{4}$

c) r: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - t \end{cases}$; s: $y = \frac{-x-1}{3}$

6.14 Halla a para que P(2, a) diste 3 unidades de $13x - 12y + 2 = 0$.

6.15 Calcula b para que la distancia de P(−4, 1) a $\frac{x+1}{b} = \frac{y+3}{3}$ sea 5.

6.16 ¿Existe algún valor de k para que la distancia entre $3x + 4y + k = 0$ y $6x - 8y - 10 = 0$ sea 4? Justifica.

6.17 Halla las rectas paralelas a $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-5}{4}$ que distan 8 unidades de ella.

6.18 Calcula el menor ángulo entre cada pareja de rectas.

a) r: $\begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -1 - 2\lambda \end{cases}$; s: $\begin{cases} x = 2\mu \\ y = 5 + 3\mu \end{cases}$

b) r: $y = 3x + 2$; s: $y = \frac{4x+1}{-2}$

c) r: $\frac{x}{2} = \frac{y-4}{6}$; s: $\frac{2x+3}{-1} = \frac{y}{2}$

d) r: $20x - 4y + 1 = 0$; s: $-15x + 3y + 7 = 0$.

6.19 Calcula el menor ángulo formado por las rectas.

a) r: $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3}$; s: $y = -5x + 3$.

b) r: $y = 3x - 2$; s: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$

c) r: $\begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \end{cases}$; s: $2x + 2y - 1 = 0$.

d) r: $3x - y - 3 = 0$; s: $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-4}$

6.20 Calcula los ángulos menores entre las parejas de rectas r: $y = x + 1$, s: $x + 4y + 4 = 0$ y t: $\frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{-3}$.

6.21 Halla el menor ángulo entre la recta por P(−1, 4) y Q(3, 8) y $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{8}$.

6.22 Calcula el menor ángulo entre las rectas descritas.

a) r: $y = \frac{4x-3}{2}$; s pasa por (−1, 6) y es paralela a $4x + 2y + 7 = 0$.

b) r: $x + 3 = \frac{y}{2}$; s pasa por (3, 8) y es paralela a $\frac{x-1}{2} = \frac{y+9}{4}$.

c) r: $8x - 2y - 3 = 0$; s pasa por (3, −2) y es perpendicular a $\begin{cases} x = 6 - t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$.

6.23 Calcula b para que $3x + by + 6 = 0$ forme 60° con $y = \frac{x+4}{-3}$.

6.24 Halla k para que r: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$ y s: $kx - 2y + 1 = 0$ formen 45°.

6.25 Halla las rectas paralelas a $10x - 3y + 4 = 0$ que distan 2 unidades de P(3, 1).

6.26 Halla todas las rectas que pasan por P(−3, 3) y distan 2 unidades de Q(0, 5).

6.27 Halla los puntos de $x - y + 1 = 0$ que distan 5 unidades del origen.

6.28 Halla los puntos de $2x + 3y + 4 = 0$ que distan 2 unidades de $3x + 4y - 6 = 0$.

6.29 Halla los puntos del eje X que equidistan de A(5, 4) y de $\frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{3}$.

6.30 Un ángulo recto tiene vértice A(3, 4) y una bisectriz en $2x - y - 2 = 0$. Halla las rectas que contienen sus lados.

BLOQUE 07

Simetrías y profundización

Proyecciones, centros y problemas de síntesis. · 17 actividades

7.01 ¿Cuándo se cumple $(u + v)\cdot(u - v) = 0$? Úsalo para demostrar que un paralelogramo con diagonales perpendiculares es un rombo, incluyendo el cuadrado como caso particular.

7.02 Refleja P respecto de r y halla la paralela a r que pasa por el punto simétrico.

a) r: $2x - 3y + 10 = 0$; P(4, −7).

b) r: $\begin{cases} x = -2t \\ y = 2 - t \end{cases}$; P(4, 4).

c) r: $y = \dfrac{3x - 1}{4}$; P(5, −9).

7.03 Determina la recta simétrica de r respecto de s.

a) r: $y = \dfrac{x - 4}{2}$; s: $-x + 2y + 4 = 0$.

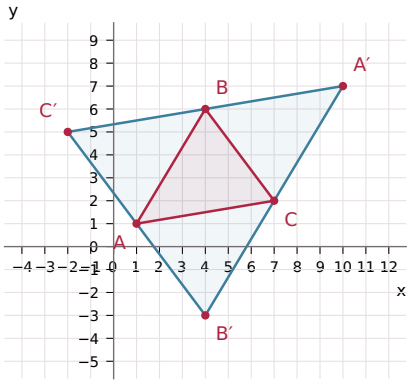
b) r: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$; s: $2x + y - 7 = 0$.

7.04 Halla la recta respecto de la cual P(3, 3) y Q(6, −1) son simétricos.

7.05 Un triángulo isósceles tiene como extremos del lado desigual A(2, 2) y B(−10, −2). Su tercer vértice está en $\begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$. Halla ese vértice y el área.

7.06 Halla la recta que pasa por P(2, −5) y por la intersección de 5x − 2y + 1 = 0 y 4x − y + 7 = 0.

7.07 Por cada vértice del triángulo A(1, 1), B(4, 6), C(7, 2), traza la paralela al lado opuesto. Determina el nuevo triángulo y compara sus ángulos con los del original.



7.08 Dos vértices de un paralelogramo son O(0, 0) y A(3, 5). Los otros dos, U y V, pertenecen respectivamente a x − 2y = 0 y 2x + y = 0. Halla todas las posibilidades.

7.09 Calcula la proyección ortogonal de P(7, 4) sobre x − 2y − 4 = 0.

7.10 Halla las rectas que pasan por A(2, 3) y determinan segmentos de igual longitud sobre los ejes.

7.11 Calcula el circuncentro del triángulo A(2, 3), B(4, −1), C(5, 2).

7.12 Un hexágono regular tiene centro A(6, −2) y uno de sus lados está sobre $-4x + 3y + 5 = 0$. Halla sus vértices y su área.

7.13 Juan está en (−4, 3) y Belén en (−9, −1). Un espejo rectilíneo ocupa la recta $y = -x + 2$. ¿En qué punto del espejo se refleja el rayo que permite a Juan ver a Belén?

7.14 La recta $-2x + y = -3$ es la mediatriz de AB. Si A(−2, 3), calcula B.

7.15 Elige la respuesta correcta y justifica brevemente cada elección.

a) La recta $y = mx$ divide en dos áreas iguales el triángulo (0, 0), (1, 1), (6m, 0). ¿Cuál es la suma de los valores posibles de m? Opciones: −1/3, −1/6, 1/6, 1/3, 1/2.

b) D y E dividen BC en tres partes iguales. Si $BD^2 + BE^2 = k \cdot BC^2$, ¿cuánto vale k? Opciones: 5/9, 2/3, 1/2, 2, 1/4.

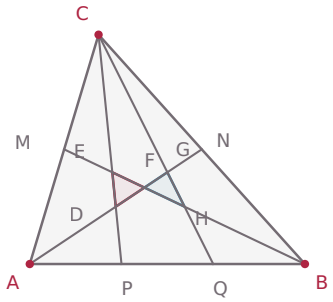
c) ¿Cuál es el área del triángulo A(4, 0), B(0, 4), C(−2010, 4020)? Opciones: 4010, 4012, 4014, 4016, 4018.

d) ¿Cuál es la simétrica de $y = 3x + 4$ respecto de $y = -x$? Opciones: $3y = x + 4$; $3y = x - 4$; $y = -3x + 4$; $y = -3x - 4$; $3y = -x + 4$.

e) ¿Cuál es la simétrica de $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ respecto de $y = x$? Opciones: $y = x/a + b$; $y = -x/a + b$; $y = -x/a - b/a$; $y = x/a + b/a$; $y = x/a - b/a$.

7.16 La recta de Euler contiene el ortocentro H, el circuncentro O y el baricentro G de un triángulo. Hállala para A(−5, 6), B(−1, 4) y C(3, −2); comprueba la alineación y que la distancia GH es el doble de GO.

7.17 En un triángulo ABC, M y N son los puntos medios de AC y BC. Las medianas BM y AN se cortan en F. P y Q trisecan AB. Las rectas CP y CQ cortan las medianas como muestra la figura, formando los triángulos DEF y FGH. ¿Qué fracción del área de ABC ocupa esta «pajarita»?



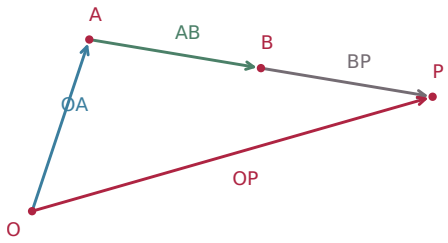
BLOQUE 08

Geometría en el rescate marítimo

Vectores, trayectorias y puntos de encuentro. · 5 actividades

8.01 Un barco averiado queda a la deriva. Explica por qué el viento y las mareas influyen en su rumbo.

8.02 En un rescate marítimo, O representa la base, A y B dos posiciones sucesivas de un barco a la deriva y P un punto posterior de encuentro. Relaciona el vector OP con OA, AB y BP.



8.03 ¿Puede emplearse un procedimiento semejante para localizar e interceptar un barco observado desde un avión? Explica qué información sería útil.

8.04 Con O(0, 0), A(a_1, a_2), B(b_1, b_2) y P(p_1, p_2), escribe las ecuaciones de estas rectas del rescate. A y B son distintos; P pertenece a su trayectoria y no coincide con O.

a) La dirección del guardacostas desde O hasta P.

b) La recta desde la base hasta el primer contacto A.

c) La recta desde la base hasta el segundo contacto B.

d) La trayectoria rectilínea del barco a la deriva.

8.05 En la situación anterior, supone que O no está en la trayectoria AB y que A, B y P son distintos. Halla las intersecciones entre las rectas OP, OA, OB y AB.

COMPRUEBA TUS RESULTADOS

Solucionario

Respuestas y justificaciones. Los códigos coinciden con los de las actividades.

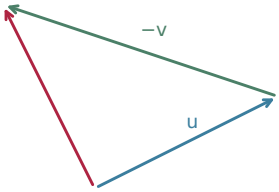
01 · Vectores y combinaciones lineales

1.01 Para sumar, traslada v al extremo de u. Para restar, suma el opuesto −v. Las flechas resultantes se muestran en la figura.

u + v

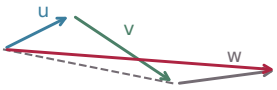


u − v

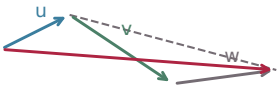


1.02 Ambas construcciones terminan en el mismo punto: (u + v) + w = u + (v + w). Es la propiedad asociativa.

(u + v) + w

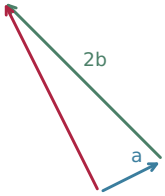


u + (v + w)

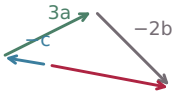


1.03 Traslada los vectores sumandos, multiplicando sus longitudes y cambiando su sentido cuando corresponda. La resultante une el origen del primero con el extremo del último. Véanse las tres construcciones.

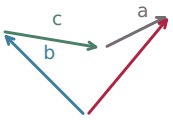
a + 2b



−c + 3a − 2b



b + c + a



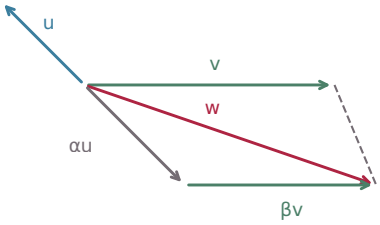
1.04

a) $a = b + \frac{1}{2}c$

b) $b = a - \frac{1}{2}c$

c) $c = 2a - 2b$

1.05 u y v no son paralelos, por lo que forman una base. Traza por el extremo de w una paralela a v: su intersección con la dirección de u determina αu. El segmento restante es βv, de modo que w = αu + βv. En este dibujo α es negativo y β positivo; al no darse escala ni coordenadas, la descomposición solicitada es gráfica.

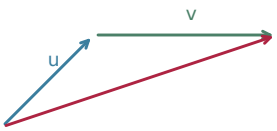


1.06 **a)** a = u + v; b = u − v. Se construyen con la regla del paralelogramo.

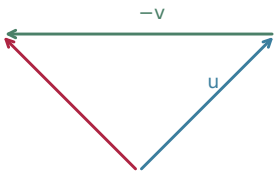
b) También forman una base: el determinante de sus coordenadas respecto de B es $-2 \neq 0$.

c) $u = \frac{a+b}{2}$; $v = \frac{a-b}{2}$

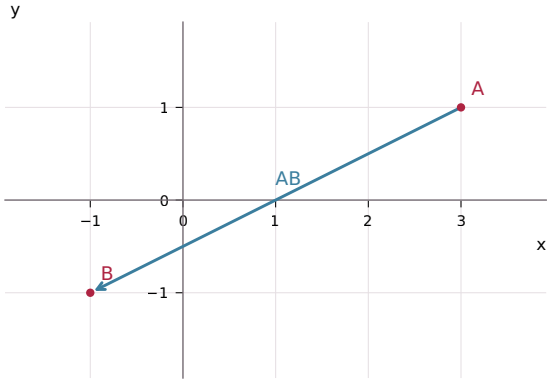
a = u + v



b = u − v



1.07 AB = (−4, −2); BA = (4, 2). Ambos módulos son $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.



1.08 **a)** x = 6.

b) x = 1/2.

1.09 **a)** (−5, −1).

b) (−6, 10).

c) (−9, −2).

1.10 **a)** (2, −10).

b) (10, −2).

c) (−2, 7).

1.11 **a)** Determinante $3 \neq 0$. $w = -u + v$; coordenadas $(-1, 1)$.

b) Determinante $-9 \neq 0$. $w = 2u - v$; coordenadas $(2, -1)$.

1.12 **a)** D$(-7, 4)$.

b) C$(-3, 10)$.

c) D$(-2, -5)$.

d) C$(2, 1)$.

e) D$(5, -8)$.

f) C$(9, -2)$.

g) D$(-2, -3)$.

h) C$(2, 3)$.

1.13 Sumando y restando las igualdades: $u = (1/2, 7/2)$; $v = (3/2, -1/2)$.

1.14 **a)** AC.

b) CB, equivalente a DA.

c) CD.

d) DB.

e) 2DC.

f) DA.

g) BA, equivalente a CD.

h) OA.

i) OD.

1.15

a) (6, 1).

b) (4, -5).

c) (4, 0).

d) (0, 5).

e) (2, 1).

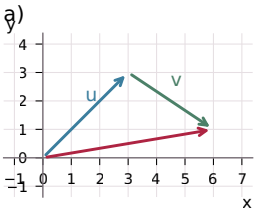
f) (2, 6).

g) (3, 8).

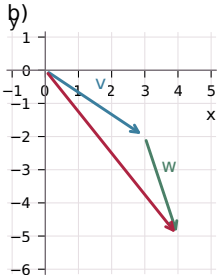
h) (-1, -4).

i) (-5, 3).

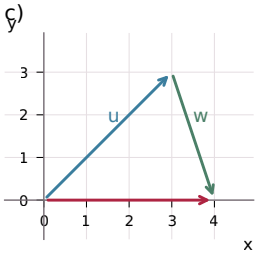
a)



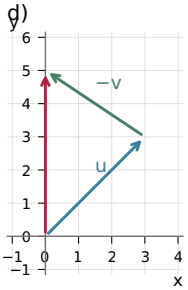
b)



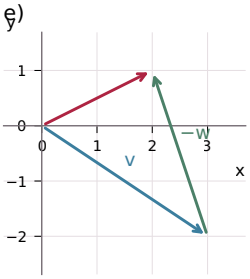
c)



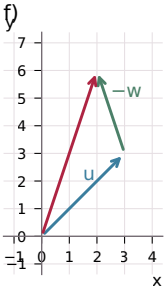
d)



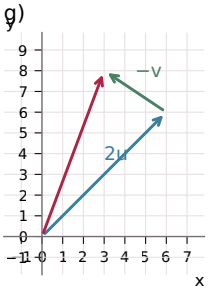
e)



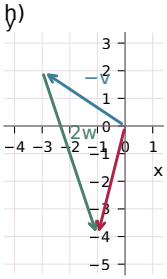
f)



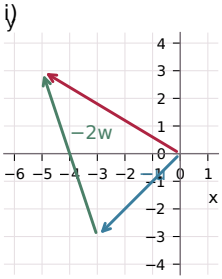
g)



h)

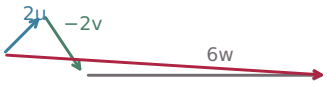


i)



1.16 Desarrollando, 2u − 2v + 6w. Construye 2u, añade dos copias del opuesto de v y seis copias de w; la resultante une el origen y el extremo final.

2u − 2v + 6w

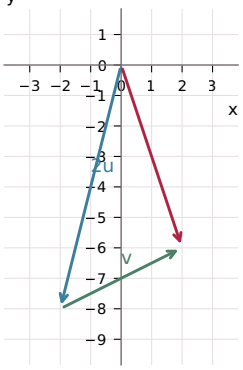


1.17 **a)** u = (−1, −4), v = (4, 2); det(u,v) = 14 ≠ 0. 2u + v = (2, −6).

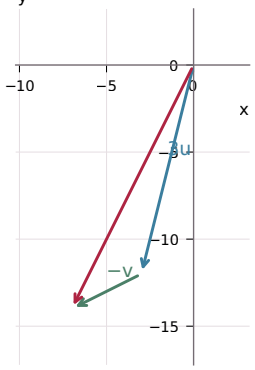
b) 3u − v = (−7, −14).

c) −2u + 3v = (14, 14).

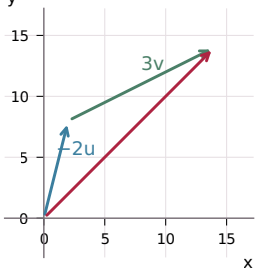
(2, 1) en B



(3, −1) en B



(−2, 3) en B



1.18 **a)** Determinante 10 ≠ 0. a = (1/2)v; coordenadas (0, 1/2).

b) b = u + v; coordenadas (1, 1).

c) c = −(8/5)u − (9/10)v; coordenadas (−8/5, −9/10).

1.19 **a)** a = (5/3)u − (5/3)v; coordenadas (5/3, −5/3).

b) b = 2u − v; coordenadas (2, −1).

c) c = u + v; coordenadas (1, 1).

1.20 $u = \frac{9}{5}a + \frac{19}{5}b$.

1.21 Respectivamente: 5; 13; $\sqrt{10}$; $8\sqrt{2}$; $\sqrt{698}$.

1.22 B = A + u = (1, −1).

02 · Producto escalar y ángulos

2.01

a) -2.

b) -4.

c) 1.

d) -2.

e) 2.

f) 12.

2.02 $u\cdot v = 0$ y $v\cdot w = 0$: esos dos pares son perpendiculares. $u\cdot w = -10/3 \neq 0$, por lo que u y w no lo son.

2.03

a) $\cos\alpha = \dfrac{4\cdot\sqrt{65}}{65}$; $\alpha \approx 60{,}255°$.

b) $\cos\alpha = -\dfrac{3\cdot\sqrt{58}}{58}$; $\alpha \approx 113{,}199°$.

c) $\cos\alpha = -\dfrac{9\cdot\sqrt{130}}{130}$; $\alpha \approx 142{,}125°$.

d) $\cos\alpha = -\dfrac{7\cdot\sqrt{130}}{130}$; $\alpha \approx 127{,}875°$.

2.04

a) Ejemplos de paralelos: (2, 2), (3, 3), (4, 4). Perpendiculares: (−1, 1), (−2, 2), (−3, 3).

b) Paralelos: (6, 4), (9, 6), (12, 8). Perpendiculares: (2, −3), (4, −6), (6, −9).

c) Paralelos: (0, 2), (0, 3), (0, 4). Perpendiculares: (1, 0), (2, 0), (3, 0).

2.05

a) $\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}(1,2)$

b) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}(-1,3)$

c) $\pm(4,3)$

d) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$

2.06 En ambos casos el ángulo es 120°. Los productos son $25\cos 120° = -25/2 = -12{,}5$ cm².

2.07

a) 0 cm².

b) 0 cm².

c) -1 cm².

d) -1 cm².

2.08 **a)** 5.

b) 10.

c) 25.

d) 5.

2.09 **a)** 23.

b) 2.

2.10 $-3 + 2t = 7$, luego $t = 5$. Los módulos son $\sqrt{5}$ y $\sqrt{34}$.

2.11 Una opción es $\frac{2}{\sqrt{13}}(2,3)$. Su opuesto también cumple la condición.

2.12 $q = (5, -8)$ o $q = (-4/5, 47/5)$. Se obtienen resolviendo $6a + 2b = 14$ y $a^2 + b^2 = 89$.

2.13 **a)** $k = 1/3$.

b) $k = -10/3$.

c) $k = 6/5$.

d) $k = 2/3$.

2.14 **a)** $m = 12/7$.

b) $m = -21$.

c) $m = \pm\sqrt{17}$.

2.15 $u \cdot v = m^2\|a\|^2 - \|b\|^2 = 40m^2 - 400$. Hay dos soluciones: $m = \pm\sqrt{10}$.

2.16 **a)** $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; $\alpha \approx 53{,}130°$.

b) $\cos\alpha = -\frac{6 \cdot \sqrt{565}}{565}$; $\alpha \approx 104{,}621°$.

c) $\cos\alpha = -\frac{7 \cdot \sqrt{2}}{10}$; $\alpha \approx 171{,}870°$.

d) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$; $\alpha \approx 120{,}000°$.

2.17 $k = \frac{24 + 13\sqrt{3}}{23}$. La otra raíz de la ecuación elevada al cuadrado produce 60° y se descarta.

2.18 $a = (\frac{9}{2} + 2\sqrt{3}, -6 + \frac{3\sqrt{3}}{2})$ o $a = (\frac{9}{2} - 2\sqrt{3}, -6 - \frac{3\sqrt{3}}{2})$. Se obtienen girando b $\pm 30°$ y multiplicando por $\sqrt{3}$.

2.19

a) Ambos productos valen -19.

b) $\|a\| = \sqrt{26}$; $\|b\| = 5$.

c) $\cos\alpha = -\dfrac{19\cdot\sqrt{26}}{130}$; $\alpha \approx 138{,}180°$.

d) $k = -3/5$.

e) $k = -4/3$.

f) Por ejemplo, $(3, -4)$, porque $-12 + 12 = 0$.

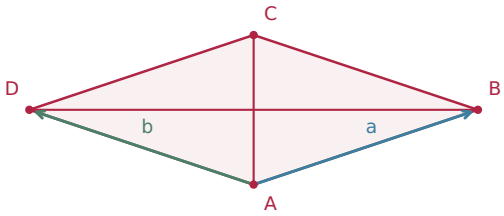
2.20

a) Sea r el módulo común. Para la diferencia: $r^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\alpha$; $\cos\alpha = 1/2$ y $\alpha = 60°$.

b) Para la suma: $r^2 = 2r^2 + 2r^2\cos\alpha$; $\cos\alpha = -1/2$ y $\alpha = 120°$.

2.21

$(a + b)\cdot(a - b) = |a|^2 - |b|^2 = 0$. En un rombo, a y b representan dos lados consecutivos y sus módulos coinciden; las diagonales tienen direcciones $a + b$ y $a - b$, así que son perpendiculares.

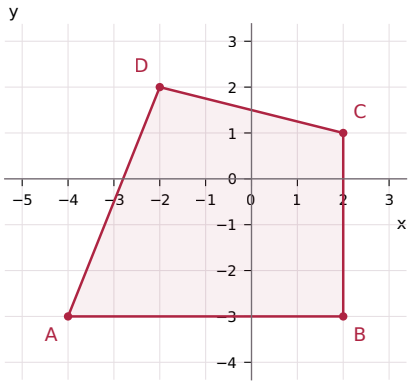


03 · Puntos, segmentos y polígonos

3.01 El punto medio es M(2, 2). CM = $\sqrt{5}$.

3.02 A′ = 2C − A = (2, 3); B′ = 2C − B = (5, −5).

3.03 Los lados miden 6, 4, $\sqrt{17}$ y $\sqrt{29}$. P = 10 + $\sqrt{17}$ + $\sqrt{29}$ unidades.



3.04 **a)** (−4/3, 5/3) y (−2/3, 1/3).

b) (5/3, 8/3) y (7/3, 13/3).

3.05 **a)** No: det(AB, AC) = −6 ≠ 0.

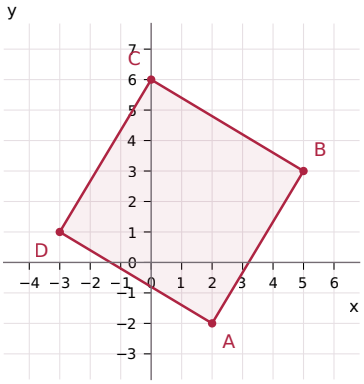
b) No: det(AB, AC) = −4 ≠ 0.

3.06 Sí, en B: BA = (−8, −6) y BC = (−12, 16), cuyo producto es 96 − 96 = 0. Los lados miden 10, 20 y $10\sqrt{5}$.

3.07 A + C − B = (3, 3), A + B − C = (1, −1), o B + C − A = (11, −1).

3.08 P = 2 + $\sqrt{17}$ + $\sqrt{5}$ ≈ 8,359 unidades.

3.09 AB = DC = (3, 5), BC = AD = (−5, 3). Los lados consecutivos son perpendiculares y todos miden √34; por tanto es un cuadrado.



3.10 AB = AC = √40 y BC = √32. Es isósceles, pero no equilátero. Área = |det((6,−2),(2,−6))|/2 = 16 unidades cuadradas.

3.11

a) (6, 8).

b) (2, −3/2).

c) (11/2, 3).

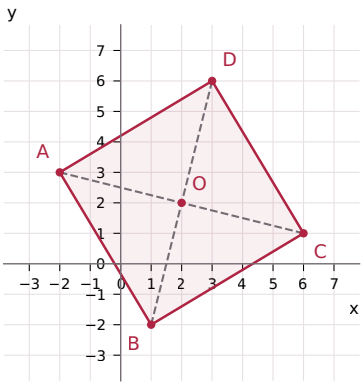
d) (−15/2, −2).

3.12

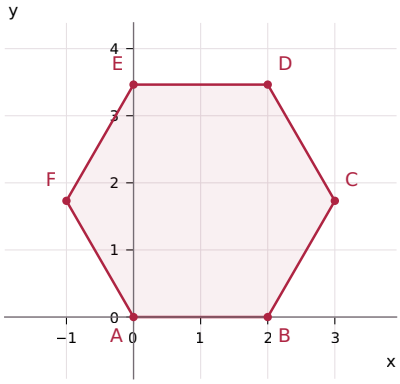
a) B = 2M − A = (−3, 3).

b) A = 2M − B = (−6, 19).

3.13 C = 2O − A = (6, 1); D = 2O − B = (3, 6).



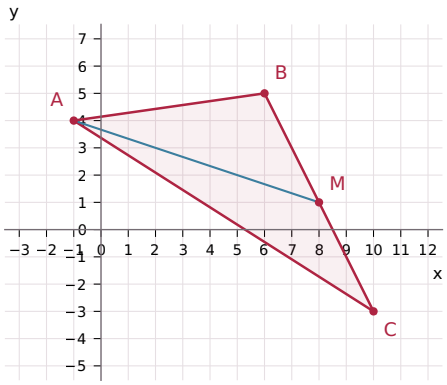
3.14 $(2,2\sqrt{3})$; $(0,2\sqrt{3})$; $(-1,\sqrt{3})$, en ese orden.



3.15 A + AB/3 = (9, 2); A + 2AB/3 = (13, 5).

3.16 det((7,k + 3),(4,2)) = 14 − 4(k + 3) = 0; k = 1/2.

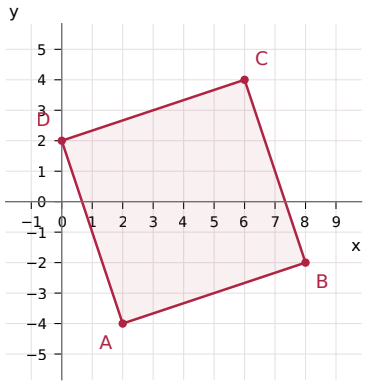
3.17 El punto medio de BC es M(8, 1); AM = (9, −3) y su longitud es √90 = 3√10. No coincide con la altura: AM·BC = (9,−3)·(4,−8) = 60 ≠ 0.



3.18 $C = (4\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\pm\sqrt{3})$, tomando los dos signos iguales. Se suma al punto medio ±√3/2 veces el vector perpendicular (3, 2).

3.19 Hay dos: C = (0, 3√3) y C = (0, −3√3). Ambos triángulos tienen área 9√3 unidades cuadradas.

3.20 El vector perpendicular a AB = (6, 2) que lleva al eje Y es AD = (−2, 6). Así D(0, 2) y C(6, 4).



3.21 PQ = (4, −3) y PR = (12, −9) = 3PQ. Están alineados en 3x + 4y − 13 = 0.

3.22 CA = (−7, −7) y CB = (−1, 1); su producto escalar es 0. El ángulo recto está en C.

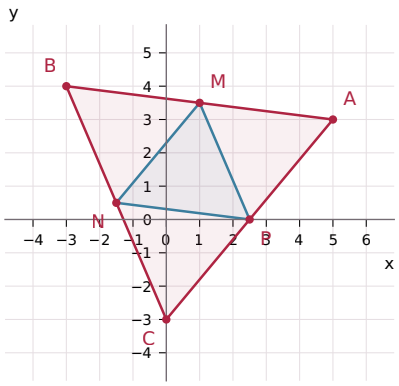
3.23

a) $5\sqrt{2}$

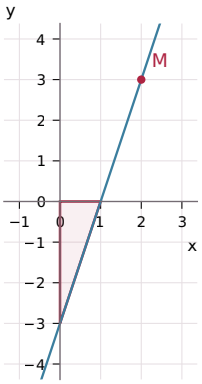
b) 7x − y − 4 = 0.

c) 19/2 unidades cuadradas; el valor absoluto del determinante de AB y AC es 19.

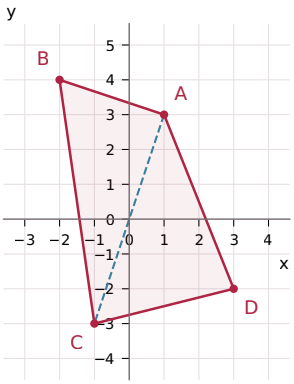
3.24 Los puntos medios son (1, 7/2), (−3/2, 1/2) y (5/2, 0). El área del triángulo original es 53/2 y la del triángulo medial es su cuarta parte: 53/8 = 6,625 unidades cuadradas.



3.25 La recta es $y = 3x - 3$; corta los ejes en (1, 0) y (0, −3). Área = 1 · 3 / 2 = 3/2 unidades cuadradas.



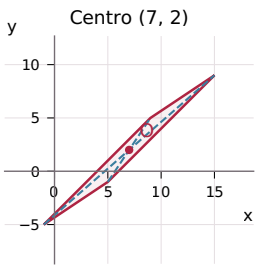
3.26 Al dividirlo por la diagonal entre el primer y el tercer vértice, las áreas son 10 y 11. Área total = 21 unidades cuadradas.

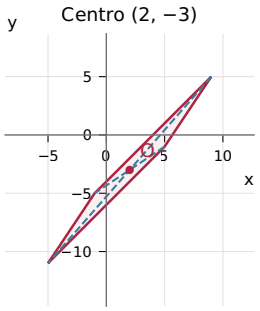


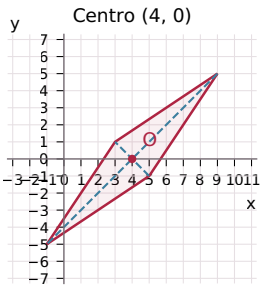
3.27 **a)** Si los dos primeros son opuestos: centro (7, 2), cuarto vértice (15, 9).

b) Si el primero y el tercero son opuestos: centro (2, −3), cuarto vértice (−5, −11).

c) Si el segundo y el tercero son opuestos: centro (4, 0), cuarto vértice (3, 1).

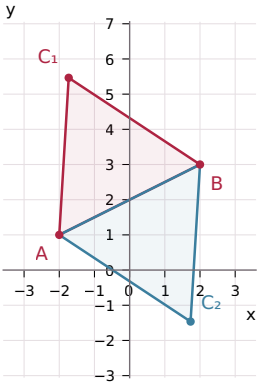






3.28 B = 2(0, 4) − A = (−2, 3). C = 2(3, 1) − B = (8, −1).

3.29 El punto medio es (0, 2). La altura tiene dirección perpendicular a AB = (4, 2); por tanto C = $(-\sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3})$ o C = $(\sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3})$.



04 · Ecuaciones de la recta

4.01 $(x,y) = (7,3) + t(-5,-1)$; $\begin{cases} x = 7 - 5t \\ y = 3 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

4.02 $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

4.03

a) $(x,y) = t(1,1)$; $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$ para la bisectriz de I y III.

b) $(x,y) = t(1,-1)$; $\begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}$ para la de II y IV.

4.04 $M = (4,-1)$, $CM = (4,-4)$; $\begin{cases} x = 4t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$.

4.05 $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1}$. P no pertenece: $1/2 \neq -2$.

4.06 $x - 4y - 8 = 0$.

4.07

a) $\frac{x-1}{-2} = y + 3$.

b) $x + 2y + 5 = 0$.

4.08 $y + 3 = -\frac{1}{2}(x-2)$; $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

4.09 La pendiente es $\tan 60° = \sqrt{3}$. Por tanto, $y - 7 = \sqrt{3}(x-2)$.

4.10

a) $2x + 5y = 0$.

b) $y = -2x$.

4.11 $(x,y) = (0,-3) + t(3,-1)$; $\begin{cases} x = 3t \\ y = -3 - t \end{cases}$; $\frac{x}{3} = \frac{y+3}{-1}$; $y = -\frac{x}{3} - 3$; $x + 3y + 9 = 0$.

4.12 $(x,y) = (-2,3) + t(7,-2)$; $\begin{cases} x = -2 + 7t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$; $\frac{x+2}{7} = \frac{y-3}{-2}$; $y = -\frac{2}{7}x + \frac{17}{7}$; $2x + 7y - 17 = 0$.

4.13

a) AB: $\frac{x-1}{-7} = \frac{y-4}{-9}$; $9x - 7y + 19 = 0$.

b) BC: $\frac{x+6}{9} = \frac{y+5}{4}$; $4x - 9y - 21 = 0$.

c) CA: $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{5}$; $5x + 2y - 13 = 0$.

4.14

a) $\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$

b) $x = \frac{y+7}{2}$

c) $y = -\frac{5}{2}x + 3$

d) $x + 3y + 6 = 0$

4.15

a) A no; B sí ($t = -1$).

b) Ninguno.

c) A sí; B no.

d) A no; B sí.

4.16 $k = -25$, al sustituir las coordenadas de P.

4.17 $k = 0$.

4.18

a) Por ejemplo, $(0, -1)$ y $(1, 2)$.

b) $(-2, 4)$ y $(-3, 1)$.

c) $(0, 1/3)$ y $(-1/4, 0)$.

d) $(2, -1)$ y $(-1, 0)$.

4.19

a) $y + 3 = -\frac{1}{2}(x - 2)$

b) $y - 3 = -\frac{1}{3}x$

4.20 $k = 4$, pues la pendiente es $8/k$. $k = 0$ daría una recta vertical.

4.21 $c = 11$; $\frac{x+1}{3} = \frac{y+10}{21}$; $7x - y - 3 = 0$.

4.22 **a)** r: $x - 3y + 6 = 0$.

b) s: $2x + 9y - 3 = 0$.

c) t: $4x + 3y - 21 = 0$.

4.23 La recta es $5x + 3y = 15$, o $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$. En general, $bx + ay = ab$ y $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

05 · Posiciones relativas

5.01 r: $x - 3y + 15 = 0$; s: $3x + y - 6 = 0$. Son secantes; se cortan en $(3/10, 51/10)$.

5.02 Son secantes. Son perpendiculares si el producto escalar de sus vectores directores es cero.

5.03 $y = 3x - 4$.

5.04 $x + 3y + 12 = 0$.

5.05 $x - 2 = \frac{y+4}{4}$; $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -4 + 4t \end{cases}$; $4x - y - 12 = 0$; $y = 4x - 12$.

5.06

a) $(x,y) = (1,3) + t(2,-4)$; $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4}$.

b) $(x,y) = (-2,5) + t(2,5)$; $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 5 + 5t \end{cases}$; $\frac{x+2}{2} = \frac{y-5}{5}$.

5.07

a) $y = -1$.

b) $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$.

5.08

a) $2x - 3y - 26 = 0$.

b) $4x - y - 16 = 0$.

5.09

a) $(x,y) = (0,-3) + t(4,3)$; $\begin{cases} x = 4t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$.

b) $(x,y) = (-5,0) + t(3,2)$; $\begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = 2t \end{cases}$.

5.10

a) $x - 7 = \frac{y+1}{3}$.

b) $\frac{x+4}{-2} = y - 4$.

5.11

a) Coincidentes: ambas tienen ecuación $x + 3y - 2 = 0$.

b) Paralelas distintas: $x + 3y + 8 = 0$ y $x + 3y - 2 = 0$.

5.12 **a)** Secantes: sus directores (3, −2) y (2, −4) no son proporcionales.

b) Paralelas distintas: tienen el mismo director (2, −3), pero no comparten puntos.

5.13 **a)** Coincidentes: r = −2s.

b) Paralelas distintas: los coeficientes de x e y son proporcionales, pero el término independiente no.

c) Secantes: el determinante de los coeficientes de x e y es −10 ≠ 0.

5.14 **a)** Paralelas distintas: pendientes 3/2, ordenadas −1/4 y −5/2.

b) Secantes: pendientes −3/2 y −1/3.

5.15 **a)** Paralelas distintas: x + 2y − 5 = 0 y x + 2y − 7 = 0.

b) Paralelas distintas: x − 2y + 6 = 0 y 3x − 6y + 4 = 0.

c) Secantes: pendientes 3 y 2/3.

d) Coincidentes: ambas son 5x + 2y + 1 = 0.

5.16 r: x − 2y + 5 = 0; s: x + y − 1 = 0. Son secantes y se cortan en (−1, 2).

5.17 **a)** Secantes: r tiene pendiente −5/11 y s pendiente 1/2.

b) Coincidentes: ambas tienen ecuación 3x + y − 1 = 0.

5.18 **a)** r tiene forma 4x + 3y + C = 0. s es 4x + 3y + 9 = 0: coinciden si C = 9 y son paralelas distintas en otro caso.

b) r tiene forma y = 2x + b y s es y = 2x − 8. Coinciden si b = −8; en otro caso son paralelas distintas.

5.19 **a)** Secantes en (3, −1).

b) Coincidentes: r = 3s.

c) Paralelas distintas: al multiplicar r por −3, el término independiente sería −9.

5.20 **a)** $(\frac{3}{5}, \frac{19}{5})$

b) (5, 3).

c) $(-\frac{7}{4}, \frac{3}{2})$

5.21 **a)** Secantes en (−1, 6).

b) Coincidentes: 2x + 3y − 7 = 0.

c) Paralelas distintas: r es 3x + y = 0.

d) Secantes en (2, −3).

e) Paralelas distintas: pendientes 3 y ordenadas 3/2 y −3/2.

5.22 **a)** Coincidentes: $x + 2y - 5 = 0$.

b) Paralelas distintas: r es $x + 3y - 17 = 0$.

c) $(\frac{8}{7}, \frac{51}{7})$; son secantes.

5.23 $k = -\frac{3}{5}$; los vectores (k, 3) y (−1, 5) deben ser proporcionales.

5.24 $a = -\frac{3}{5}$; el director (5, 1) es perpendicular al normal (a, 3): $5a + 3 = 0$.

5.25 $6k - 5(k + 1) = 0$; $k = 5$.

5.26 Los normales son perpendiculares: $16k^2 - 9(k + 1) = 0$. $k = \frac{9 \pm \sqrt{657}}{32}$.

5.27 $y = a(x + 1)$: todas pasan por (−1, 0). La pendiente requerida es −2/3, por tanto $y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$.

5.28 La primera y la tercera se cortan en (3, −1). Sustituyendo en la segunda: $-3 - 2 + k = 0$; $k = 5$.

06 · Distancias y ángulos

6.01 La recta es $2x + 3y - 8 = 0$; $d = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$.

6.02 Su ecuación es $2x + y - 8 = 0$. La distancia es $\frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$.

6.03 s: $5x - 2y + 6 = 0$. La distancia es $\frac{4}{\sqrt{29}} = \frac{4\sqrt{29}}{29}$.

6.04 $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$; $\alpha \approx 71{,}565°$. El otro ángulo es $108{,}435°$.

6.05 Tienen forma $4x - 3y + C = 0$. Al imponer $|C + 1|/5 = 2$ se obtiene $C = 9$ o $C = -11$: $4x - 3y + 9 = 0$ y $4x - 3y - 11 = 0$.

6.06 La recta r tiene pendiente -1. Las dos soluciones son la horizontal $y = 1$ y la vertical $x = 0$; ambas pasan por P y forman 45° con r.

6.07 Parametrizando: $(x,y) = (1 + 2t, -1 - t)$. La condición da $5t^2 + 18t + 14 = 0$ y $t = \frac{-9 \pm \sqrt{11}}{5}$. Los puntos son $\left(\frac{-13 \pm 2\sqrt{11}}{5}, \frac{4 \mp \sqrt{11}}{5}\right)$, con signos opuestos.

6.08

a) $\frac{1}{\sqrt{17}}$

b) $\frac{6}{\sqrt{13}}$

c) $\frac{10}{\sqrt{13}}$

6.09

a) $\frac{9}{2}$

b) 0: el punto pertenece a la recta.

c) $2\sqrt{5}$

d) $\frac{17}{5}$

6.10 La recta es $x + y - 2 = 0$; $d = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

6.11 La recta es $4x + 3y - 6 = 0$; $d = 6/5$.

6.12 **a)** $\frac{7}{10}$

b) $\frac{11}{2\sqrt{5}}$

c) $\frac{32}{\sqrt{26}}$

6.13 **a)** $\frac{12}{\sqrt{5}}$; son paralelas: r es $-x + 2y - 7 = 0$.

b) 0: son secantes (pendientes 3 y 2).

c) 0: son coincidentes, $x + 3y + 1 = 0$.

6.14 $|28 - 12a| = 3\sqrt{313}$; $a = \frac{28 \pm 3\sqrt{313}}{12}$.

6.15 La recta es $3x - by + 3 - 3b = 0$. La condición $\frac{|9 + 4b|}{\sqrt{9 + b^2}} = 5$ lleva a $9(b - 4)^2 = 0$; $b = 4$.

6.16 No existe: sus normales (3, 4) y (6, −8) no son proporcionales. Son secantes para todo k y su distancia mínima es 0.

6.17 La recta dada es $4x + 3y - 11 = 0$. Las buscadas son $4x + 3y + 29 = 0$ y $4x + 3y - 51 = 0$.

6.18 **a)** $\cos \alpha = \frac{12}{13}$; $\alpha \approx 22{,}620°$.

b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\alpha \approx 45{,}000°$.

c) $\cos \alpha = \frac{11 \cdot \sqrt{170}}{170}$; $\alpha \approx 32{,}471°$.

d) 0°: son paralelas.

6.19 **a)** $\cos \alpha = \frac{17 \cdot \sqrt{2}}{26}$; $\alpha \approx 22{,}380°$.

b) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$; $\alpha \approx 36{,}870°$.

c) 90°: sus directores son perpendiculares.

d) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\alpha \approx 45{,}000°$.

6.20 **a)** r y s: $\cos \alpha = \frac{3 \cdot \sqrt{34}}{34}$; $\alpha \approx 59{,}036°$.

b) r y t: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{26}}{26}$; $\alpha \approx 78{,}690°$.

c) s y t: $\cos \alpha = \frac{11 \cdot \sqrt{221}}{221}$; $\alpha \approx 42{,}274°$.

6.21 $\cos \alpha = \frac{5 \cdot \sqrt{34}}{34}$; $\alpha \approx 30{,}964°$.

6.22 **a)** $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; $\alpha \approx 53{,}130°$.

b) 0°: son paralelas.

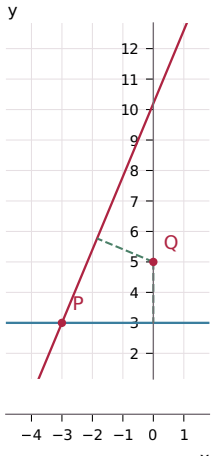
c) $\cos\alpha = \frac{7\cdot\sqrt{170}}{170}$; $\alpha \approx 57{,}529°$.

6.23 La condición angular da $13b^2 + 36b - 27 = 0$; $b = \frac{-18\pm15\sqrt{3}}{13}$.

6.24 Con directores (1, 2) y (2, k), la condición es $3k^2 + 16k - 12 = 0$. $k = 2/3$ o $k = -6$.

6.25 $10x - 3y - 27\pm2\sqrt{109} = 0$. Se usa $|27 + C| = 2\sqrt{109}$.

6.26 Escribiendo $y - 3 = m(x + 3)$, resulta $5m^2 - 12m = 0$. Las soluciones son $y = 3$ y $12x - 5y + 51 = 0$. La vertical $x = -3$ dista 3 de Q y no sirve.



6.27 Sustituyendo $y = x + 1$ en $x^2 + y^2 = 25$: $x^2 + x - 12 = 0$. Puntos $(-4, -3)$ y $(3, 4)$.

6.28 La condición es $|3x + 4y - 6| = 10$. Al resolver ambos sistemas se obtienen $(64, -44)$ y $(4, -4)$.

6.29 Para P(a, 0), se igualan las distancias: $(a - 5)^2 + 16 = (3a + 19)^2/25$. Resulta $16a^2 - 364a + 664 = 0$; P(2, 0) y P(83/4, 0).

6.30 Los lados forman 45° con la bisectriz. Sus pendientes son −3 y 1/3; ecuaciones: $3x + y - 13 = 0$ y $x - 3y + 9 = 0$.

07 · Simetrías y profundización

7.01 El producto es $\|u\|^2 - \|v\|^2$, así que se anula exactamente cuando los módulos son iguales. Si u y v son lados consecutivos, u + v y u − v dirigen las diagonales. Su perpendicularidad implica igualdad de los lados; el paralelogramo es un rombo. Si además sus ángulos son rectos, es un cuadrado.

7.02 **a)** Pie H(−2, 2), simétrico P′(−8, 11); 2x − 3y + 49 = 0.

b) P pertenece a r, así que P′ = P. La recta buscada es x − 2y + 4 = 0.

c) Pie H(−1, −1), simétrico P′(−7, 7); 3x − 4y + 49 = 0.

7.03 **a)** r y s coinciden; la simétrica es x − 2y − 4 = 0.

b) r y s coinciden; la simétrica es 2x + y − 7 = 0.

7.04 Es la mediatriz de PQ: pasa por (9/2, 1) y es normal a (3, −4). Resultado: 6x − 8y − 19 = 0.

7.05 La mediatriz de AB es 3x + y + 12 = 0. Al sustituir la recta se obtiene t = 1 y C(−5, 3). Área = 20 unidades cuadradas.

7.06 La intersección es Q(−13/3, −31/3). La recta PQ es 16x − 19y − 127 = 0.

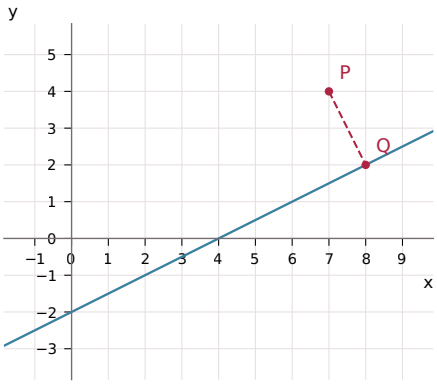
7.07 Sus vértices son A′ = B + C − A = (10, 7), B′ = A + C − B = (4, −3) y C′ = A + B − C = (−2, 5). Sus lados duplican los originales y son paralelos a ellos: los triángulos son semejantes de razón 2. Los ángulos son A ≈ 49,574°, B ≈ 67,834° y C ≈ 62,592°.

7.08 **a)** Si O y A son opuestos: U(22/5, 11/5), V(−7/5, 14/5).

b) Si O y U son opuestos: U(22/5, 11/5), V(7/5, −14/5).

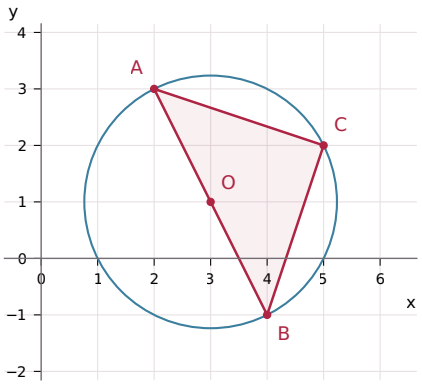
c) Si O y V son opuestos: U(−22/5, −11/5), V(−7/5, 14/5). En cada caso se igualan los puntos medios de las diagonales.

7.09 La perpendicular por P es $2x + y - 18 = 0$. Su intersección con la recta dada es Q(8, 2).



7.10 Para intersecciones no nulas, los interceptos satisfacen $b = a$ o $b = -a$: $y = -x + 5$ y $y = x + 1$. Si se admiten ambos segmentos de longitud cero, también pasa por el origen la recta $y = 3x/2$; es el caso degenerado.

7.11 Las mediatrices de AB y AC son $x - 2y - 1 = 0$ y $3x - y - 8 = 0$. Se cortan en O(3, 1), a distancia $\sqrt{5}$ de cada vértice.

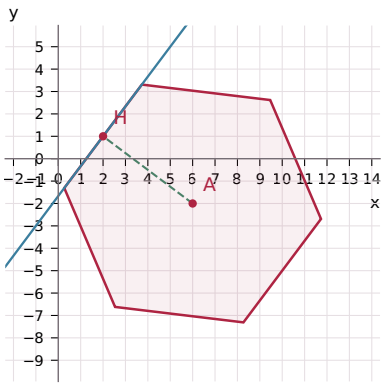


7.12 **a)** La apotema es 5 y el lado mide $\frac{10\sqrt{3}}{3}$. El punto medio del lado dado es H(2, 1).

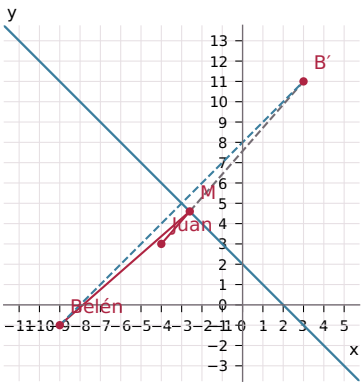
b) Los dos extremos de ese lado son $(2\pm\sqrt{3}, 1\pm\frac{4\sqrt{3}}{3})$, con signos iguales. Sus opuestos son $(10\mp\sqrt{3}, -5\mp\frac{4\sqrt{3}}{3})$.

c) Los dos vértices restantes son $(6\pm2\sqrt{3}, -2\pm\frac{8\sqrt{3}}{3})$, con signos iguales.

d) Área = perímetro · apotema / 2 = $50\sqrt{3}$ unidades cuadradas.



7.13 El reflejo de Belén es B′(3, 11). La recta desde Juan hasta B′ se parametriza como (−4, 3) + t(7, 8). Al imponer x + y = 2, t = 1/5. El punto de reflexión es M(−13/5, 23/5).



7.14 La perpendicular por A es x + 2y − 4 = 0. El punto medio H es (2, 1), intersección con la mediatriz. B = 2H − A = (6, −1).

7.15 **a)** $-1/6$. La recta debe pasar por el punto medio de (1, 1) y (6m, 0): $6m^2 + m - 1 = 0$; $m = 1/3$ o $-1/2$ y su suma es $-1/6$.

b) 5/9: $BD = BC/3$ y $BE = 2BC/3$, luego $BD^2 + BE^2 = (1/9 + 4/9)BC^2$.

c) 4012: la mitad del valor absoluto del determinante de $(-4, 4)$ y $(-2014, 4020)$ es $8024/2$.

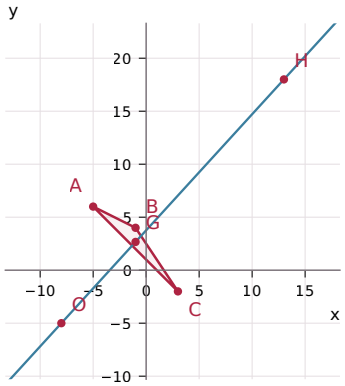
d) $3y = x + 4$. La simetría respecto de $y = -x$ transforma (x, y) en $(-y, -x)$.

e) $y = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$. La simetría respecto de $y = x$ intercambia las coordenadas.

7.16 **a)** $G = (-1, 8/3)$. Las alturas por C y B son $2x - y - 8 = 0$ y $x - y + 5 = 0$: $H(13, 18)$.

b) Las mediatrices de AB y AC son $2x - y + 11 = 0$ y $x - y + 3 = 0$: $O(-8, -5)$.

c) La recta de Euler es $23x - 21y + 79 = 0$. Los tres puntos la verifican. $GO = \frac{\sqrt{970}}{3}$ y $GH = \frac{2\sqrt{970}}{3}$. Vectorialmente, $GH = -2GO$; las longitudes satisfacen $GH = 2GO$.



7.17 **a)** Las transformaciones afines conservan las razones de áreas. Podemos tomar A(0, 0), B(6, 0), C(0, 6); entonces P(2, 0), Q(4, 0), M(0, 3) y N(3, 3).

b) Las intersecciones son D(3/2, 3/2), E(6/5, 12/5), F(2, 2), G(12/5, 12/5) y H(3, 3/2).

c) El área de ABC es 18. Por determinantes, cada triángulo pequeño tiene área 3/10; la suma es 3/5. La fracción pedida es $(3/5)/18 = 1/30$.

08 · Geometría en el rescate marítimo

8.01 El viento y las corrientes modifican la dirección y la velocidad del desplazamiento. Pueden acercar el barco a la costa o alejarlo de ella, y el efecto acumulado aumenta con el tiempo.

8.02 Por la regla del encadenamiento: $OP = OA + AB + BP$.

8.03 Sí. La posición comunicada por el avión permite localizar el barco respecto de la base; dos observaciones sucesivas permiten estimar la dirección de su desplazamiento y planificar un punto de encuentro, actualizando los datos si cambia el rumbo.

8.04

a) OP: $(x, y) = t(p_1, p_2)$.

b) OA: $(x, y) = t(a_1, a_2)$.

c) OB: $(x, y) = t(b_1, b_2)$.

d) AB: $(x, y) = (a_1, a_2) + t(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$. Las formas paramétricas también sirven para direcciones verticales.

8.05 OP, OA y OB se cortan por parejas en O. La trayectoria AB corta OA en A, OB en B y OP en P.