

**4.º ESO**

Geometría analítica

Practica, resuelve y comprueba tus respuestas.

01 Vectores en el plano
Componentes y operaciones.

02 Coordenadas y aplicaciones
Puntos, distancias y puntos medios.

03 Rectas
Ecuaciones y posiciones.

04 Problemas de geometría analítica
Cálculo y representación.

Índice

Ejercicios organizados por contenidos, con espacio para trabajar y respuestas al final.

01	Vectores en el plano	3
02	Coordenadas y aplicaciones	23
03	Rectas	30
04	Problemas de geometría analítica	37
•	Solucionario	42

Cómo usar el dossier

El código **2.12** identifica la actividad 12 del bloque 2. Busca el mismo código en el solucionario. Las actividades marcadas como **ampliación** proponen un reto adicional.

BLOQUE 01

Vectores en el plano

Componentes y operaciones. · 70 actividades

1.01 Representa el vector fijo $A(1; 2)$, $B(4; 3)$ y halla su módulo.

1.02 Da los extremos de dos vectores equipolentes a AB , con $A(1; 2)$ y $B(4; 3)$, y su vector libre asociado.

1.03 Dados $a = (2; 1)$ y $b = (-1; 3)$, calcula y representa $a+b$, $a-b$, $a+2b$ y $a+3b$.

1.04 Dados $a = (-1; 2)$ y $b = (3; 5)$, halla p y q para que $pa+qb = (2; -3)$.

1.05 Halla el producto escalar y el ángulo entre $a = (-1; 2)$ y $b = (3; 5)$.

1.06 Halla un vector perpendicular a $(-1; 2)$ y otro a $(3; 5)$. Comprueba los resultados.

1.07 Representa $A(-1; 3)$, $B(2; 0)$, calcula AB y dibuja un vector equipolente de origen $C(-2; 1)$. Halla su extremo D .

1.08 Dados $a = (-1; -3)$, $b = (3; 1)$, $c = (2; 1)$, represéntalos y calcula y representa $a+b$, $a+b+c$, $a-2c$ y $b-c$.

1.09 Dados $a = (-1; -3)$, $b = (3; 1)$, $c = (2; 1)$, halla sus módulos y $|a+b|$. Compara $|a+b|$ con $|a|+|b|$. ¿Cuándo hay igualdad? ¿Cuándo $|a+b| = 0$?

1.10 Halla un vector unitario con la dirección de $v = (3; 4)$.

1.11 ¿Dos vectores de igual longitud son necesariamente iguales? Razona.

1.12 ¿Cuántos sentidos hay en una dirección? ¿Pueden dos vectores de igual dirección, origen y módulo ser distintos?

1.13 ¿Pueden ser iguales vectores no nulos cuyas direcciones son distintas y convergen? ¿Y dos vectores paralelos de igual módulo?

1.14 Expresa $w = (3; 8/3)$ como combinación de $u = (0; 7/3)$, $v = (1; 4)$.

1.15 Halla m para que $v = (7; -2)$, $u = (m; 6)$ sean paralelos, tengan igual módulo o sean perpendiculares.

1.16 Dados $a = (3; -2)$, $b = (-1; 2)$, $c = (0; -5)$, halla m , n tales que $c = ma + nb$.

1.17 Determina si cada pareja es ortogonal.

a) $(3; -2)$, $(6; 4)$.

b) $(5; 1)$, $(3; -15)$.

1.18 Representa en el mismo plano los vectores indicados.

a) $a = (3; 1)$

b) $b = (-1; 5)$

c) $c = (2; -4)$

d) $d = (-3; -1)$

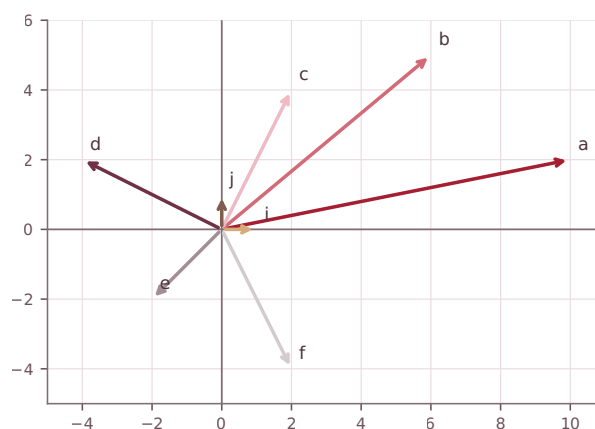
e) $i = (1; 0)$

f) $j = (0; 1)$

g) $e = (3; 0)$

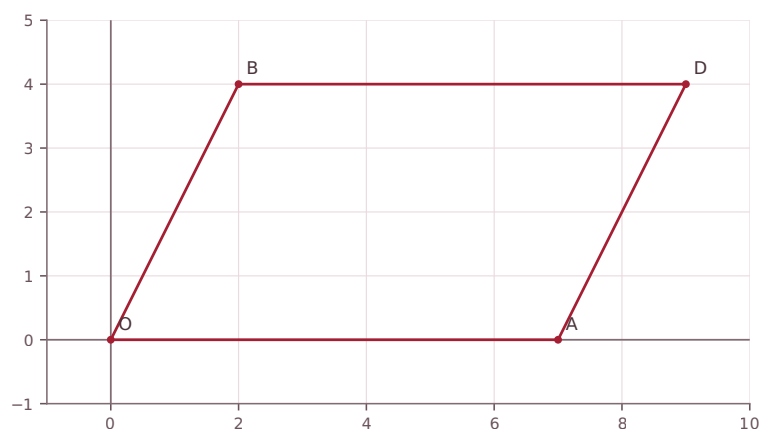
h) $f = (0; -5)$

- 1.19** Escribe las coordenadas de los vectores dibujados. Cada unidad de los ejes corresponde a una unidad de coordenada.

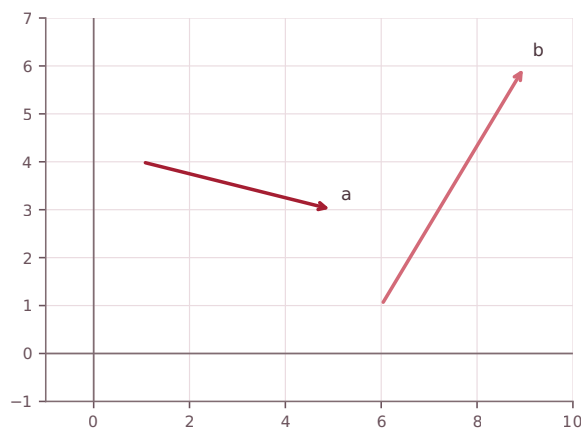


- 1.20** Dibuja y expresa analíticamente dos vectores de origen común e igual módulo que formen 135° . Después dibuja dos de origen común y sentidos opuestos; ¿qué ángulo forman?

- 1.21** En el paralelogramo, indica analítica y gráficamente un vector equipolente y otro opuesto a OA. Haz lo mismo con AD.



- 1.22** Lee los vectores a y b del dibujo. Calcula y representa, en ejes separados, $a+b$, $a-b$, $3a$, $3a+2b$ y $2a-3b$.



1.23 Resuelve mediante el producto escalar y comprueba las condiciones.

a) $|a|=2$, $|b|=5$ y ángulo 60° : halla $|a+b|$ y $|a-b|$.

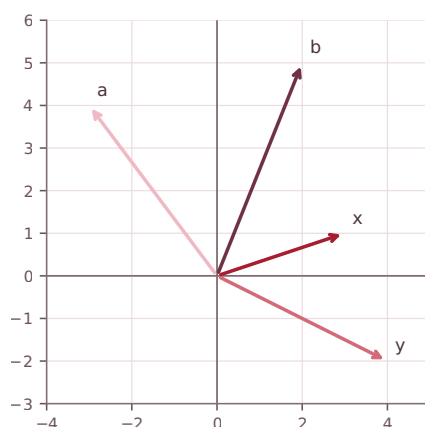
b) $|a+b|=5$, $|b|=\sqrt{19}$ y ángulo entre a y b de 30° : halla $|a|$.

1.24 Dos fuerzas de 20 N y 30 N actúan sobre un cuerpo formando 60° . Dibuja la situación y halla la intensidad de la resultante.

1.25 Dados $u=(3; 4)$ y $v=(-2; 3)$, justifica que forman una base. Expresa $w=(-12; 1)$ en esa base y represéntalo.

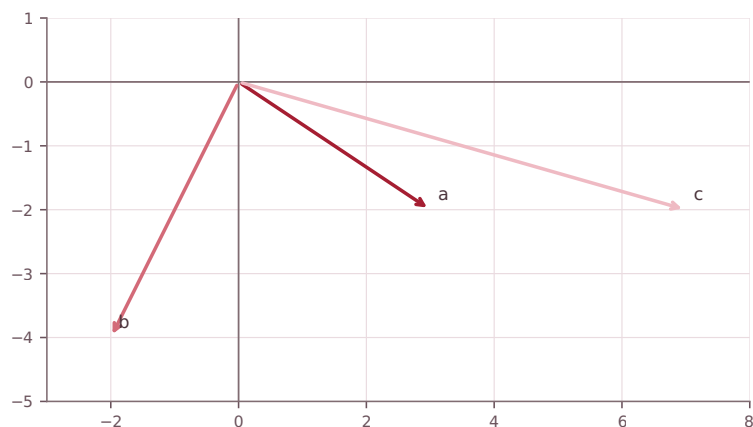
1.26

Lee los vectores de la figura, justifica que los dos primeros forman una base y expresa los restantes como combinación lineal. Comprueba el resultado gráficamente.

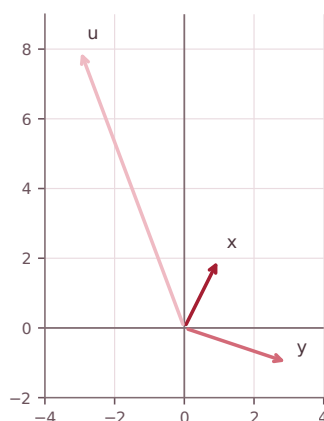


1.27

Lee los vectores de la figura, justifica que los dos primeros forman una base y expresa los restantes como combinación lineal. Comprueba el resultado gráficamente.



- 1.28** Lee los vectores de la figura, justifica que los dos primeros forman una base y expresa los restantes como combinación lineal. Comprueba el resultado gráficamente.



- 1.29** Expresa $a=(9; 5)$ y $b=(-5; 7)$ como combinación de $x=(1; 3)$, $y=(3; -2)$, analítica y gráficamente.

- 1.30** Define base del plano, combinación lineal y coordenadas respecto de una base. Explícalo con $u=(2; 1)$, $v=(-1; 3)$, $w=(4; 9)$, analítica y gráficamente.

1.31 Calcula el módulo y representa los siete primeros vectores en los mismos ejes; el último, aparte.

a) $a = (4; 3)$

b) $b = (3; -4)$

c) $c = (1; 1)$

d) $d = (5; 5)$

e) $e = (-4; -3)$

f) $f = (6; 0)$

g) $u = (0; -3)$

h) $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$

1.32 Halla m para que el vector sea unitario. Justifica gráficamente las dos soluciones.

a) $u = (1/2; m)$.

b) $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; m\right)$

1.33 Halla los vectores unitarios de la misma dirección que cada vector y representa el resultado.

a) $(4; -7)$

b) $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$

1.34 Halla los vectores unitarios de la misma dirección que cada vector y representa el resultado.

a) $(3; -4)$

b) $(1; 1)$

c) $(12; 5)$

d) $(6; -3)$

1.35 Halla un vector de módulo 5 paralelo a $(36; -27)$.

1.36 Dibuja $u=(5; 0)$, $v=(2; 2)$ y calcula el producto escalar por componentes y mediante módulos y ángulo.

1.37 Dibuja $u=(1; 1)$, $v=(-2; 0)$ y calcula el producto escalar por componentes y mediante módulos y ángulo.

- 1.38** Dibuja $u=(2; 1)$, $v=(-2; 4)$ y calcula el producto escalar por componentes y mediante módulos y ángulo.

- 1.39** Dados $a=(-3; 1)$, $b=(2; 3)$, $c=(1; 0)$, $d=(5; -2)$, calcula. En los tres últimos apartados verifica el resultado de dos formas.

- a)** $a \cdot b$
- b)** $b \cdot a$
- c)** $d \cdot a$
- d)** $b \cdot c$
- e)** $b \cdot d$
- f)** $c \cdot d$
- g)** $a \cdot a$
- h)** $2(d \cdot c)$
- i)** $a \cdot c$
- j)** $(a+b) \cdot d$
- k)** $(b \cdot d)a$
- l)** $b(d \cdot a)$
- m)** $a \cdot c - a \cdot d$
- n)** $(a+b) \cdot (a+b)$
- ñ)** $(a+b) \cdot (a-b)$

1.40 Indica si cada resultado es un escalar o un vector y razona.

a) $(a \cdot b)(c \cdot d)$

b) $a \cdot (b + c - d)$

c) $[a(b \cdot c)] \cdot d$

1.41 En un triángulo equilátero ABC de lado 6, calcula los productos escalares.

a) $AB \cdot AC$

b) $CA \cdot CB$

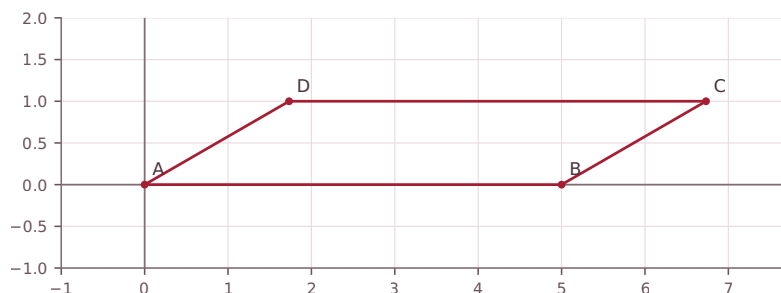
c) $BA \cdot CB$

d) $AB \cdot CB$

e) $AC \cdot BA$

f) $AA \cdot AC$

- 1.42** En el paralelogramo ABCD, $AB=5$, $AD=2$ y el ángulo interior en B es 150° . Calcula $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



- 1.43** Halla x para que $(3; -5) \cdot (x; 2) = 8$.

- 1.44** Halla los vectores de módulo $2\sqrt{17}$ ortogonales a $(4; 1)$. Dibuja la situación.

- 1.45** Halla los vectores u tales que $u \cdot u = 20$ y $u \cdot (3; 2) = 2$.

1.46 Calcula el ángulo entre $u=(2; 1)$ y $v=(1; 3)$. Representalos.

1.47 Calcula el ángulo entre $u=(\sqrt{3}; 1)$ y $v=(1; \sqrt{3})$. Representalos.

1.48 Calcula el ángulo entre $u=(3 \cdot \sqrt{2}; \sqrt{6})$ y $v=(-3 \cdot \sqrt{2}; \sqrt{6})$. Representalos.

1.49 Calcula el ángulo entre $u=(4; 1)$ y $v=(-2; 8)$. Representalos.

1.50 Calcula el ángulo entre $u=(-5; 12)$ y $v=(8; -6)$. Representalos.

1.51 Calcula el ángulo entre $u=(2; 1)$ y $v=(-9; 3)$. Representalos.

1.52 Calcula el ángulo entre $u=(4; 3)$ y $v=(1; 7)$. Representalos.

1.53 Dados $u=(3; -4)$, $v=(5; 6)$, halla: el ángulo; un unitario en dirección y sentido de u ; un vector en dirección y sentido de u con módulo 15; y un vector ortogonal a u . ¿Son u y v ortogonales?

1.54 ¿Qué ángulo forman dos vectores unitarios con estos productos escalares?

a) 1

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $-\frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

- 1.55** Comprueba que $u=(8; 15)$, $v=(30; -16)$ forman una base ortogonal y que $u/|u|$, $v/|v|$ forman una base ortonormal.

- 1.56** Halla x , y para que $a=(-x; 4)$ y $c=(3; y)$ sean perpendiculares a $b=(-1; 5)$. Comprueba gráficamente.

- 1.57** Halla tres vectores perpendiculares a $(-1; -3)$, al menos uno unitario. Explica gráficamente el resultado.

- 1.58** Halla m para que $u=(1/2; m)$, $v=(\sqrt{2}/2; 1)$ sean ortogonales. Interpreta gráficamente.

- 1.59** Dados $x=(2; -3)$, $y=(a; 4)$, halla a para que sean paralelos y para que sean perpendiculares.

1.60 Halla los vectores de módulo 3 que formen 90° con $(3; 4)$.

1.61 Dados $u=(3; 1)$, $v=(a; -1/2)$, $w=(-3; 2)$, resuelve y justifica gráficamente.

- a)** Halla a para que v sea unitario.
- b)** Halla a para que u y v sean paralelos.
- c)** Halla a para que v y w sean perpendiculares.
- d)** Halla un vector perpendicular a u y unitario.
- e)** Halla el ángulo entre u y w .

1.62 Halla los vectores que cumplen las condiciones y dibújalos.

- a)** Módulo 2 y ángulo de 30° con $i=(1; 0)$.
- b)** Módulo $3\sqrt{2}$ y ángulo de 45° con $i=(1; 0)$.

1.63 Halla a para que $u=(a; 1)$ y $v=(1; 1)$ formen 60° . Justifica gráficamente.

1.64 Halla x para que $u=(x; 1)$ y $v=(1; 2)$ formen 45° . Justifica gráficamente.

1.65 Dados $u=(2; -1)$, $v=(a; 3)$, halla a para que sean ortogonales, formen 60° o tengan igual dirección.

1.66 Dados $a=(1; -1)$, $b=(2; m)$, halla m para que sean ortogonales, tengan igual dirección, b sea unitario o formen 45° .

1.67 Dados $a=(3; -4)$, $b=(5; x)$, halla x para que sean perpendiculares, formen 30° o tengan la misma dirección.

1.68 Dados $u=(2; 1)$, $v=(a; -3)$, halla a para que sean paralelos, perpendiculares o formen 45° . Halla también un vector perpendicular a u de módulo 5. Justifica gráficamente.

- 1.69** Dados $u=(3; -4)$, $v=(a; 2)$, halla a para que $u \cdot v=4$ y el ángulo en ese caso. Halla a para que sean paralelos y un vector perpendicular a u de módulo 10. Explica gráficamente.

- 1.70** Responde y justifica las cuestiones.

- a)** Halla un vector de módulo 2 con la dirección de $(3; -4)$ y represéntalo.
- b)** Dados $a=(-1; 2)$, $b=(2; -3)$, $c=(1/2; 4)$, calcula $(a \cdot b)c$.
- c)** $a = (\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$, $b = (-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3})$: ¿son ortonormales? ¿Ortogonales?
- d)** ¿Qué indica el signo del producto escalar? Da ejemplos.
- e)** Demuestra que $(b \cdot c)a - (a \cdot c)b$ es perpendicular a c .

BLOQUE 02

Coordenadas y aplicaciones

Puntos, distancias y puntos medios. · 33 actividades

2.01 Halla el punto medio de $P(2; 1)$ y $Q(-4; 3)$.

2.02 Halla el simétrico de $A(-1; 0)$ respecto de $B(2; -8)$.

2.03 Halla k para que $A(1; 1)$, $B(0; 3)$ y $C(-2; k)$ estén alineados.

2.04 Calcula la distancia entre $A(8; 10)$ y $B(-2; -14)$.

2.05 Representa $A(1; 2)$, $B(4; 3)$, $C(6; 0)$. Halla D para que $ABCD$ sea un paralelogramo.

- 2.06** En el paralelogramo $A(1; 2)$, $B(4; 3)$, $C(6; 0)$, $D(3; -1)$, comprueba que las diagonales se cortan en su punto medio.

- 2.07** Calcula los lados y diagonales del paralelogramo $A(1; 2)$, $B(4; 3)$, $C(6; 0)$, $D(3; -1)$.

- 2.08** Halla los puntos medios de estos segmentos.

- a)** $A(2; 3)$, $B(4; 5)$.
b) $C(4; 1)$, $D(-6; -9)$.
c) $E(3; 8)$, $F(4; -1)$.

- 2.09** Un segmento tiene extremo $A(1; 9)$ y punto medio $M(3; 5)$. Halla el otro extremo.

- 2.10** Divide en cuatro partes iguales el segmento $A(2; 9)$, $B(0; -3)$.

2.11 Halla las distancias.

- a)** $(3; 1)$ y $(5; 3)$
- b)** $(-1; -2)$ y $(-5; 3)$
- c)** $(-1; 2)$ y $(5; 2)$
- d)** $(3; -2)$ y $(3; 4)$

2.12 Halla los puntos medios.

- a)** $(3; 1)$ y $(5; 3)$
- b)** $(-1; -2)$ y $(-5; 3)$
- c)** $(-1; 2)$ y $(5; 2)$
- d)** $(3; -2)$ y $(3; 4)$

2.13 Dados $A(-4; 4)$ y $B(2; -2)$, halla su distancia, punto medio y simétrico de A respecto de B.

2.14 En el triángulo $A(3; 3)$, $B(0; 0)$, $C(0; 4)$, halla el punto medio de AB y la longitud de la mediana desde C.

2.15 Demuestra que $A(1; 2)$, $B(4; 6)$, $C(7; 2)$ forman un triángulo isósceles.

2.16 El punto medio de $A(-1; 3)$ y $B(x; y)$ es $M(2; 1)$. Halla B .

2.17 Halla el simétrico de $A(2; 6)$ respecto de $B(4; 5)$.

2.18 Halla los puntos medios de los lados del triángulo $A(-7; 3)$, $B(1; 1)$, $C(-1; 5)$. Comprueba que forman otro de lados paralelos y de longitud mitad.

2.19 El punto medio de AB es $(3; 5)$ y $B(0; 1)$. Halla A .

2.20 Divide en tres partes iguales $A(-5; 3)$, $B(8; 6)$.

2.21 Divide en tres partes iguales $A(-2; 3)$, $B(0; -1)$.

2.22 $A(3; 1)$, $B(5; 7)$, $C(6; 4)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo. Halla el cuarto.

2.23 Halla a si la distancia entre $Q(-6; 2)$ y $P(a; 7)$ es 13. Halla PQ y su módulo.

2.24 Halla P en $M(7; 4)$, $N(-2; 1)$, tal que MP sea la mitad de PN .

2.25 Estudia la alineación y halla el parámetro cuando corresponda.

a) $A(3; 1)$, $B(5; 2)$, $C(1; 0)$.

b) $A(1; 1)$, $B(3; 4)$, $C(4; 6)$.

c) $A(1; 7)$, $B(-3; 4)$, $C(k; 5)$.

2.26 Para $A(-2; 1)$, $B(5; 4)$, halla el punto medio y los dos puntos que dividen AB en tres partes iguales.

2.27 Halla P que divide $A(3; 4)$, $B(0; -2)$, de modo que el vector BP sea el doble de PA .

2.28 Dibuja $(1; 2)$ y $(5; -1)$ y halla su distancia.

2.29 Dibuja $(6; 3)$ y $(-2; -3)$ y halla su distancia.

2.30 Dibuja $(2; 1)$ y $(2; 5)$ y halla su distancia.

2.31 Dibuja $(-1; 3)$ y $(5; 3)$ y halla su distancia.

2.32 Dibuja $(5; 3)$ y $(0; 0)$ y halla su distancia.

2.33 Dibuja $(1; 5)$ y $(5; 2)$ y halla su distancia.

BLOQUE 03

Rectas

Ecuaciones y posiciones. · 30 actividades

3.01 Escribe r por (1; 0) y (3; 6), y s paralela a $y = x/2$ por (4; 4). Halla su intersección.

3.02 Halla r por (3; 2) con director (1; 1), y s por (5; 2) paralela al eje X. Calcula su intersección.

3.03 Halla r por (0; 0) paralela a (3; 6), y s por (3; 4) perpendicular a $x - y - 5 = 0$. Calcula su intersección.

3.04 Escribe r por (0; 5) y (1; 2), y s paralela a $2x + y = 3$ por (1; 1). Halla su intersección.

3.05 Dados $A(2; -1)$ y $B(3; 4)$, halla r por A paralela a AB y s por B paralela a AB.

3.06 ¿Cuál de las rectas $r: y-3 = 5(x-1)$, $s: y = 2x/5$, $t: (x+1)/5 = (1-y)/2$ es paralela a $2x-5y+4 = 0$?

3.07 ¿Qué relación deben cumplir a y b para que $P(-2; 6)$ pertenezca a $ax+by = 0$?

3.08 ¿Cuándo son paralelas $r: ax+3y = 6$ y $s: bx+y = 5$? ¿Cuándo son perpendiculares?

3.09 Halla m para que $y-x+3 = 0$ y $mx+3y-1 = 0$ no se corten.

3.10 Dados $a = (2; 1)$ y $b = (-1; 3)$, ¿dónde están los extremos de $a + \lambda b$ representados desde el origen, con λ real?

3.11 Halla un director y la pendiente de la recta por $A(3; 2)$ y $B(3; 5)$.

3.12 Halla las formas paramétrica, continua, general, punto-pendiente, explícita y segmentaria de la recta por $A(-2; 3)$ con director $(3; 4)$. Halla sus puntos de abscisa 6 y ordenada -4 .

3.13 Halla la ecuación general.

- a)** Por $A(3; -1)$, $B(5; 2)$.
- b)** Por $A(-2; 4)$, pendiente -2 .
- c)** Por $A(1; -3)$, paralela a $x+3 = 0$.
- d)** Por $A(-1; 2)$, paralela al eje X .
- e)** Por $A(4; 2)$, perpendicular a $2x-3y+2 = 0$.

3.14 Halla k en cada caso.

- a)** $(1; 2)$ pertenece a $x - 3ky + 3 = 0$.
- b)** $(k; 1)$ pertenece a $x + 2y - 4 = 0$.
- c)** $(1; 2)$, $(5; -6)$, $(7; k)$ están alineados.
- d)** $2x + ky = 1$ tiene director $(-5; 3)$.
- e)** $kx - 3y + 2 = 0$ tiene pendiente $-3/2$.
- f)** $y = 9$, $kx + 2$ y $4x - ky + 1 = 0$ son paralelas.
- g)** $2x + 3ky + 2 = 0$ y la recta por $(2; -1)$ con director $(-2; k)$ se cortan en un único punto.

3.15 Halla la recta por $P(5; 6)$ que corta los semiejes positivos en segmentos iguales.

3.16 Halla la recta por $P(-5; 0)$ y por la intersección de $x - 2y + 3 = 0$ con $x = 1 - t$, $y = -2 + 3t$.

3.17 Halla la paralela a $y = -x/2 + 3$ que corta al eje Y en -3 .

3.18 Halla la paralela a $2x-3y+15=0$ por la intersección de $y=3x-1$ y $x+2y+3=0$.

3.19 Halla las formas implícita y explícita de la recta por $A(1; 1)$ con pendiente -2 .

3.20 ¿Pertenecen $M(5; 1)$ y $N(-1; 3)$ a $x=1-2t$, $y=3+t$?

3.21 Halla las rectas de los lados del triángulo $A(0; 0)$, $B(5; 1)$, $C(1; 4)$.

3.22 Halla a , b para que $r: ax+y-2=0$ y $s: x+2y+b=0$ sean paralelas distintas, coincidentes o perpendiculares.

3.23 Halla las formas vectorial, paramétricas y explícita de las bisectrices de los cuadrantes.

3.24 Halla la recta por $A(2; 7)$ que forma 60° con el semieje positivo X.

3.25 Halla k para que $2x+5y-1 = 0$, $-x+2y+k = 0$ y $4x+7y-5 = 0$ concurran; halla el punto.

3.26 Da un director y un punto de cada recta.

a) $3x+y-1 = 0$.

b) $-2x+2y-4 = 0$.

c) $x-3y+3 = 0$.

3.27 Representa las rectas.

a) $r: (x;y) = (1;0) + \lambda(1;1)$

b) $s: x = 1 - \lambda; y = 2 + 2\lambda$

c) $t: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2}$

3.28 Halla la forma explícita y la pendiente.

a) $r: (x;y) = (1;0) + \lambda(1;1)$

b) $s: x = 1 - \lambda; y = 2 + 2\lambda$

c) $t: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2}$

3.29 Halla las ecuaciones vectorial, paramétricas, continua, general y explícita por A(1; 2) con director (2; 1).

3.30 Determina la posición relativa y representa.

a) $x+2y-5 = 0$ y $2x-y = 0$.

b) $3x-y-2 = 0$ y $y = 3x+1$.

BLOQUE 04

Problemas de geometría analítica

Cálculo y representación. · 22 actividades

4.01 En el triángulo $A(1; 1)$, $B(-3; 2)$, $C(-1; -4)$, halla las alturas desde B y C y el ortocentro.

4.02 $r: x-y+1=0$ es la mediatriz de AB y $A(3; 2)$. Halla el pie de la perpendicular desde A a r y el punto B.

4.03 Calcula el área de $A(1; -4)$, $B(3; 2)$, $C(-2; 0)$.

4.04 Dados $A(1; 7)$ y $B(5; 2)$, halla C si $x-3=0$ es la mediatriz de BC. Calcula la altura desde C.

- 4.05** Halla a y b para que $ax-3y+2=0$ y $bx+9y-5=0$ sean paralelas y la primera pase por $P(1; 2)$.

- 4.06** ¿Es rectángulo el triángulo $A(12; 10)$, $B(20; 16)$, $C(8; 32)$?

- 4.07** Dados $A(3; 0)$, $B(-3; 0)$, halla C en el eje Y para que ABC sea equilátero. ¿Es único? Halla el área.

- 4.08** Un paralelogramo tiene vértice $A(2; 3)$ y dos lados sobre $x+y=20$ y $2x-3y=10$. Halla los otros lados y los vértices.

- 4.09** La recta por $A(2; 3)$, paralela a $3x+2y-12=0$, forma un triángulo con los ejes. Halla su área.

4.10 AB está sobre $x-4y+10=0$ y su mediatriz es $4x+y-11=0$. Si $A(-2; 2)$, halla B.

4.11 Halla el circuncentro de $A(-1; 1)$, $B(3; 4)$, $C(3; 0)$.

4.12 Comprueba que $A(4; 4)$, $B(-2; 3)$, $C(3; -2)$ forman un triángulo isósceles y halla su área.

4.13 Por $A(1; 6)$ se traza la perpendicular a $r: 2x+y-2=0$. Halla un punto de esa perpendicular que equidiste de A y de r.

4.14 Halla el simétrico de $P(3; 4)$ respecto de $2x-y+3=0$.

4.15 Halla el simétrico de $P(2; 6)$ respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

4.16 Halla el área de $A(2; 1)$, $B(6; 2)$, $C(3; 5)$.

4.17 Un triángulo ABC cumple $|AB|=5$, $|BC|=7$ y ángulo $B=120^\circ$. Calcula $BA \cdot BC$ y el área.

4.18 Halla los ángulos y el área del triángulo $A(-2; 2)$, $B(5; 3)$, $C(2; 15)$.

4.19 Dibuja $A(1; 1)$, $B(5; 4)$, $C(-5; 9)$. Demuestra que el triángulo es rectángulo en A y calcula su área.

4.20 Dibuja $A(1; -2)$, $B(3; -1)$, $C(2; 1)$ y halla el área.

4.21 Dibuja $A(3; 8)$, $B(-11; 3)$, $C(-8; -2)$ y halla el área.

4.22 Dibuja $A(4; -1)$, $B(2; 1)$, $C(0; 2)$ y halla el área.

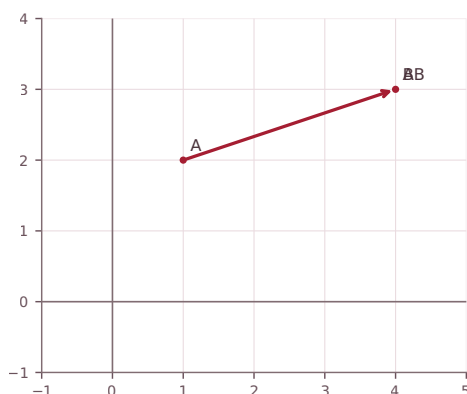
COMPRUEBA TUS RESULTADOS

Solucionario

Respuestas finales. Los códigos coinciden con los de las actividades.

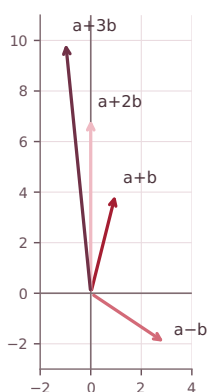
01 · Vectores en el plano

1.01 $AB = (3; 1)$; $|AB| = \sqrt{10}$.



1.02 Ejemplos: de (0; 0) a (3; 1) y de (−2; 1) a (1; 2). Vector libre: (3; 1).

1.03 (1; 4), (3; −2), (0; 7) y (−1; 10).

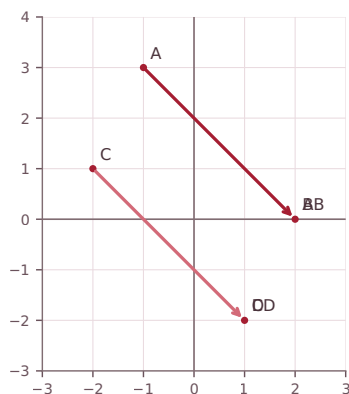


1.04 $p = -19/11$; $q = 1/11$.

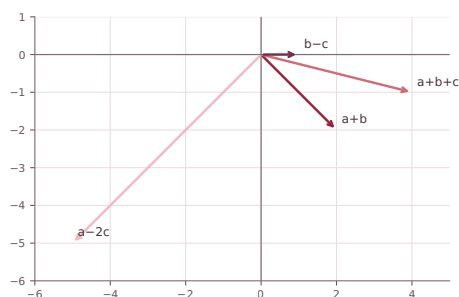
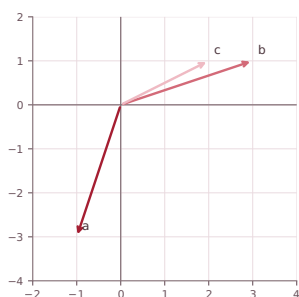
1.05 Producto: 7; ángulo: $\arccos(7/\sqrt{170}) \approx 57,53^\circ$.

1.06 (2; 1) y (5; −3), respectivamente. Los productos escalares son $-2+2 = 0$ y $15-15 = 0$.

1.07 $AB = (3; -3)$; $D(1; -2)$.



1.08 **a)** $(2; -2)$ **b)** $(4; -1)$ **c)** $(-5; -5)$ **d)** $(1; 0)$



1.09 $|a| = |b| = \sqrt{10}$; $|c| = \sqrt{5}$; $|a+b| = \sqrt{8} < 2\sqrt{10}$. Siempre $|a+b| \leq |a|+|b|$. Hay igualdad con igual dirección y sentido, o si uno es nulo. $|a+b| = 0$ si $a = -b$.

1.10 $(3/5; 4/5)$ o su opuesto.

1.11 No: $(1; 0)$ y $(0; 1)$ tienen módulo 1 y distinta dirección.

1.12 Dos sentidos. Sí: $(1; 0)$ y $(-1; 0)$ desde el origen son opuestos.

1.13 El primer caso es imposible. En el segundo pueden ser iguales u opuestos.

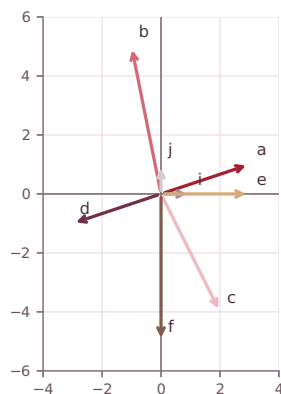
1.14 $w = -4u + 3v$.

1.15 Paralelos: -21 . Igual módulo: $\pm\sqrt{17}$. Perpendiculares: $12/7$.

1.16 $m = -5/4$; $n = -15/4$.

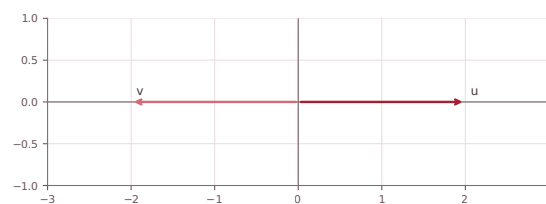
1.17 **a)** No; producto escalar 10. **b)** Sí; producto escalar 0.

1.18 Representación:

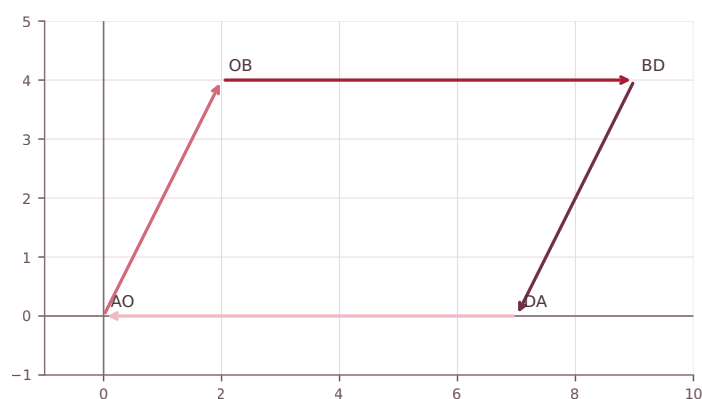


1.19 $a = (10; 2)$; $b = (6; 5)$; $c = (2; 4)$; $d = (-4; 2)$; $e = (-2; -2)$; $f = (2; -4)$; $i = (1; 0)$; $j = (0; 1)$.

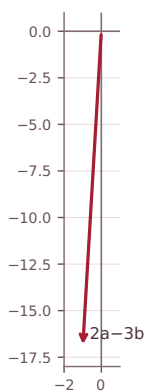
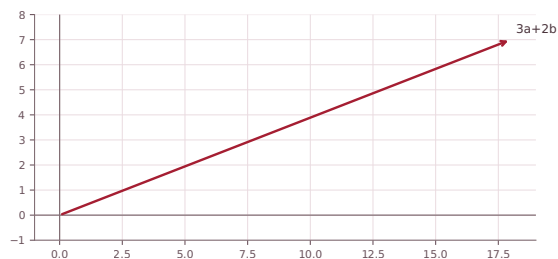
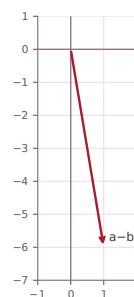
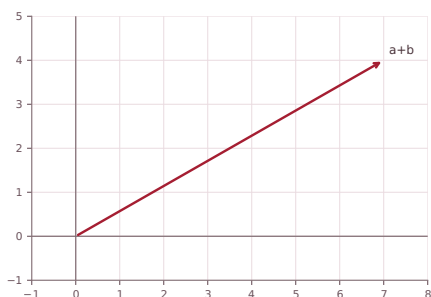
1.20 Ejemplo: $u = (\sqrt{2}; 0)$, $v = (-1; 1)$, ambos de módulo $\sqrt{2}$ y ángulo 135° . Dos opuestos, $(2; 0)$ y $(-2; 0)$, forman 180° .



1.21 Equipolentes: $BD = OA = (7; 0)$, $OB = AD = (2; 4)$. Opuestos: $AO = (-7; 0)$, $DA = (-2; -4)$.



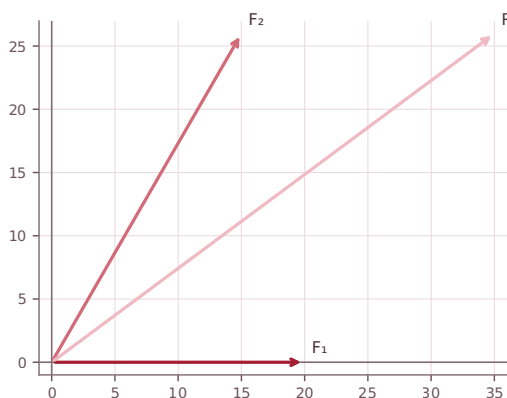
1.22 **a)** (7; 4) **b)** (1; - 6) **c)** (12; - 3) **d)** (18; 7) **e)** (- 1; - 17)



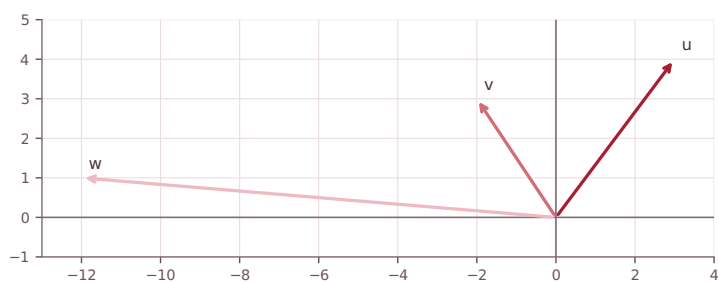
1.23 **a)** $|a+b| = \sqrt{39}$; $|a-b| = \sqrt{19}$.

b) $|a| = (9-\sqrt{57})/2$. Se obtiene de $t^2+\sqrt{57}\cdot t-6 = 0$, tomando la raíz positiva.

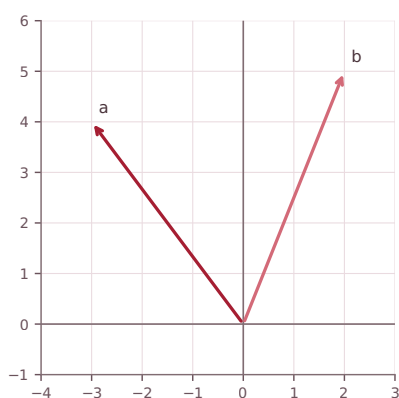
1.24 $|R| = \sqrt{(20^2 + 30^2 + 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \cos 60^\circ)} = 10\sqrt{19} \approx 43,59 \text{ N.}$



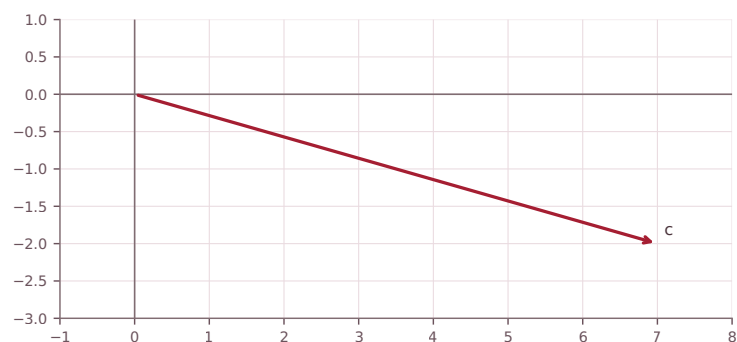
1.25 Determinante $17 \neq 0$; forman una base. $w = -2u + 3v$; coordenadas $(-2; 3)$.



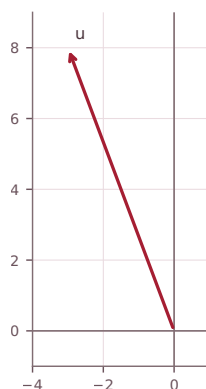
1.26 $a = x - (3/2)y$; $b = (12/5)x - (13/10)y$.



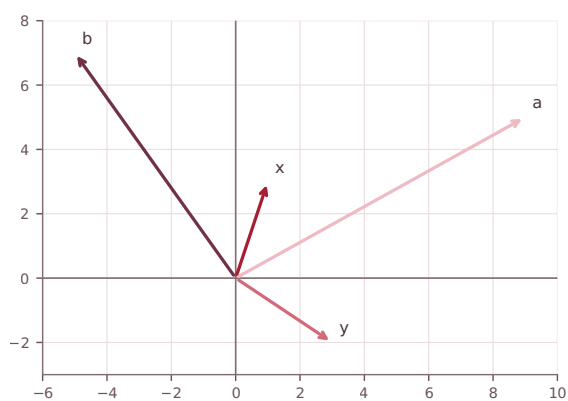
1.27 $\det(a, b) = -16 \neq 0$: forman una base. $c = 2a - b/2$.



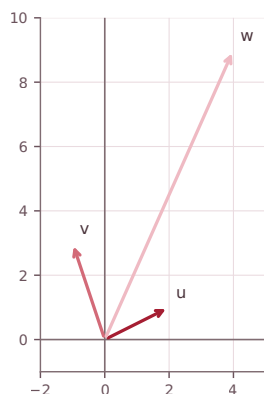
1.28 $\det(x, y) = -7 \neq 0$: forman una base. $u = 3x - 2y$.



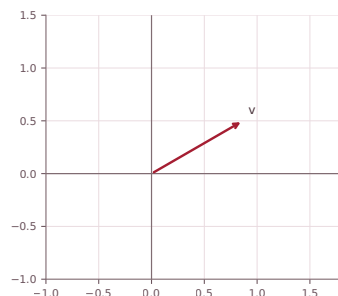
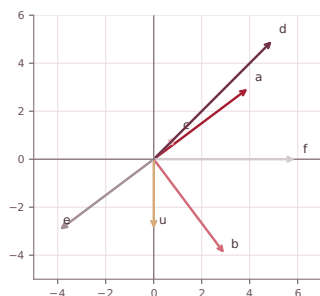
1.29 $a = 3x + 2y$; $b = x - 2y$.



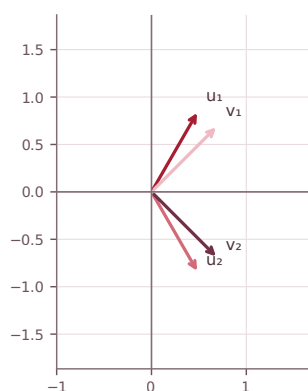
- 1.30** Una base está formada por dos vectores linealmente independientes; todo vector se expresa de forma única como combinación de ellos. Los coeficientes son sus coordenadas en esa base. $\det(u, v) = 7 \neq 0$ y $w = 3u + 2v$; sus coordenadas son $(3; 2)$.



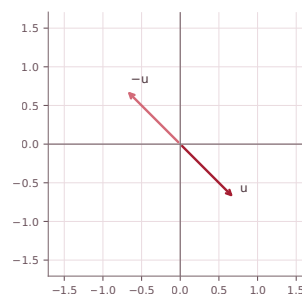
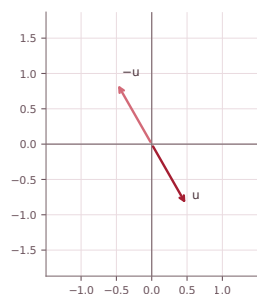
- 1.31** a) 5 b) 5 c) $\sqrt{2}$ d) $5 \cdot \sqrt{2}$ e) 5 f) 6 g) 3 h) 1



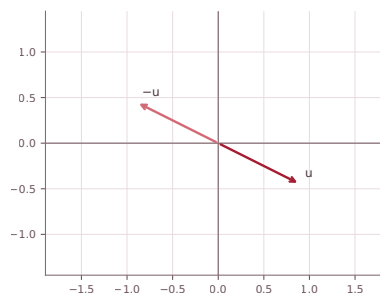
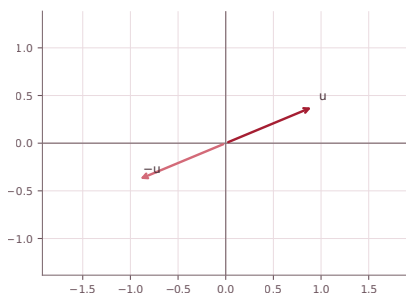
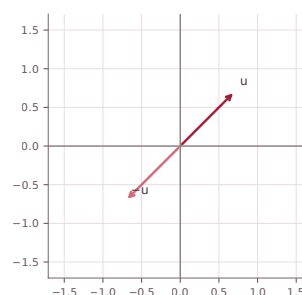
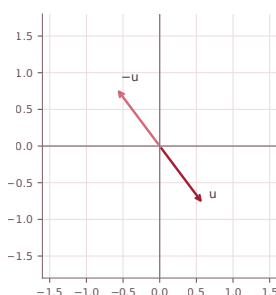
- 1.32** a) $m = \pm\sqrt{3}/2$. b) $m = \pm\sqrt{2}/2$.



1.33 a) $(\frac{4 \cdot \sqrt{65}}{65}; -\frac{7 \cdot \sqrt{65}}{65})$ y su opuesto. b) $(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$ y su opuesto.

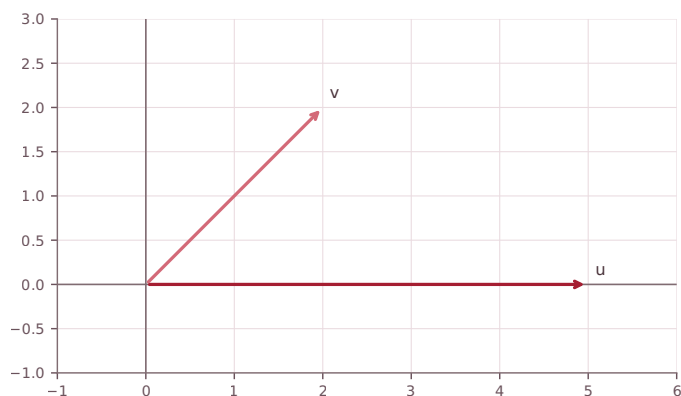


1.34 a) $(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5})$ y su opuesto. b) $(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$ y su opuesto. c) $(\frac{12}{13}; \frac{5}{13})$ y su opuesto. d) $(\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}; -\frac{\sqrt{5}}{5})$ y su opuesto.

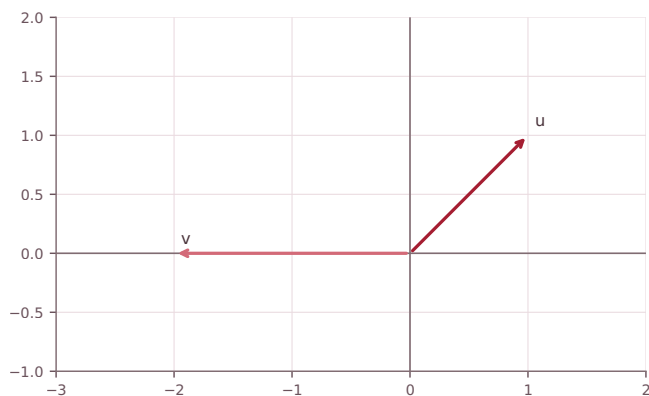


1.35 $(4; -3)$ o $(-4; 3)$.

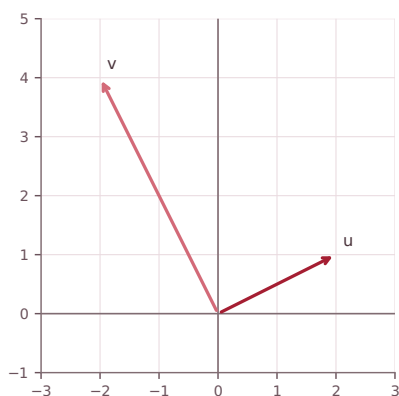
1.36 $u \cdot v = 10$; también $|u| \cdot |v| \cdot \cos\theta$, con $\theta = 45,0^\circ$.



1.37 $u \cdot v = -2$; también $|u| \cdot |v| \cdot \cos\theta$, con $\theta = 135,0^\circ$.



1.38 $u \cdot v = 0$; también $|u| \cdot |v| \cdot \cos\theta$, con $\theta = 90,0^\circ$.



1.39 a) -3 b) -3 c) -17 d) 2 e) 4 f) 5 g) 10 h) 10 i) -3 j) -13 k) (-12; 4)
l) (-34; -51) m) 14 n) 17 ñ) -3

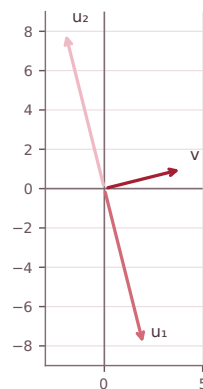
- 1.40** **a)** Escalar: producto de dos números. **b)** Escalar: producto escalar de dos vectores.
c) Escalar: $(b \cdot c)(a \cdot d)$.

- 1.41** **a)** 18 **b)** 18 **c)** -18 **d)** 18 **e)** -18 **f)** 0

- 1.42** $AB \cdot AD = 5\sqrt{3}$; $AB \cdot AC = 25 + 5\sqrt{3} \approx 33,66$.

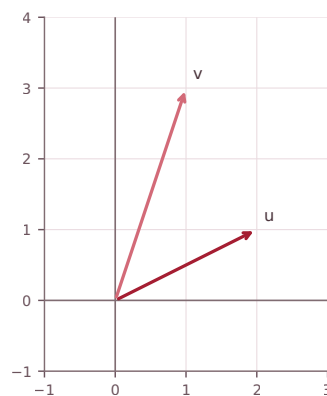
- 1.43** $x=6$.

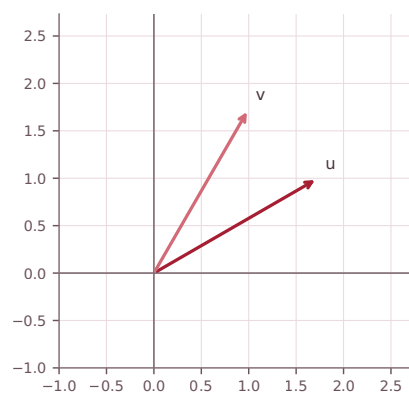
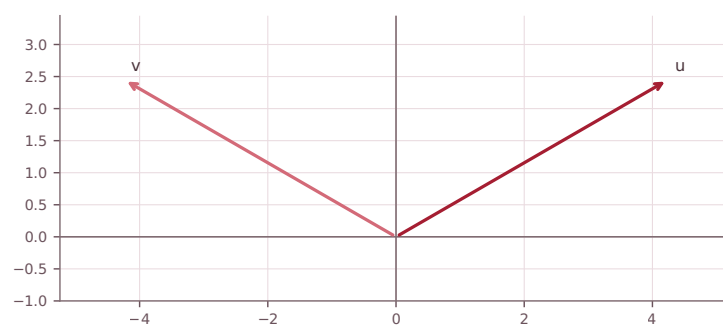
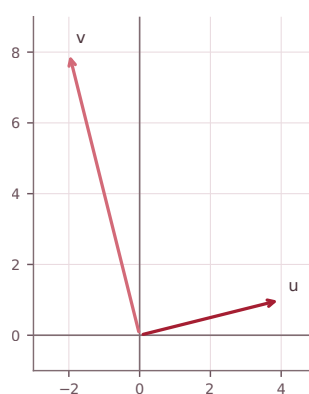
- 1.44** $(2; -8)$ y $(-2; 8)$.

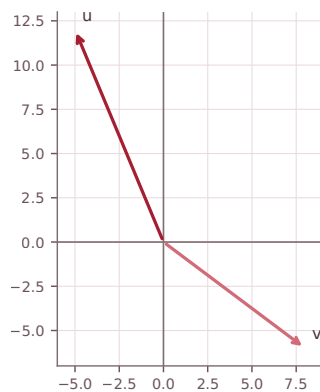
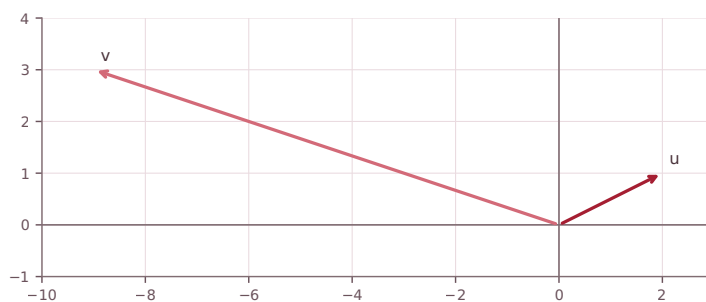
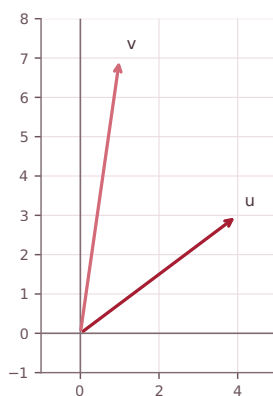


- 1.45** $u=(-2; 4)$ o $u=(38/13; -44/13)$.

- 1.46** $45,0^\circ$



1.47 $30,0^\circ$ **1.48** $120,0^\circ$ **1.49** $90,0^\circ$ 

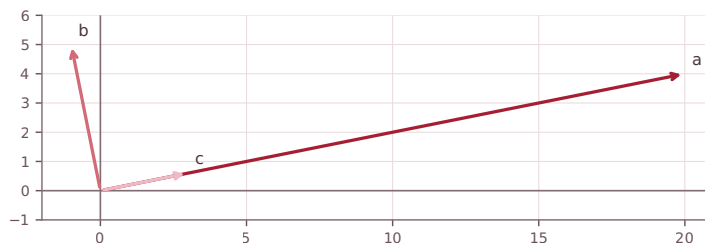
1.50 149,4898°**1.51** 135,0°**1.52** 45,0°

1.53 Ángulo $\approx 103,3245^\circ$; unitario $(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5})$; vector de módulo 15: $(9; -12)$; perpendicular: $(4; 3)$. No son ortogonales: $u \cdot v = -9$.

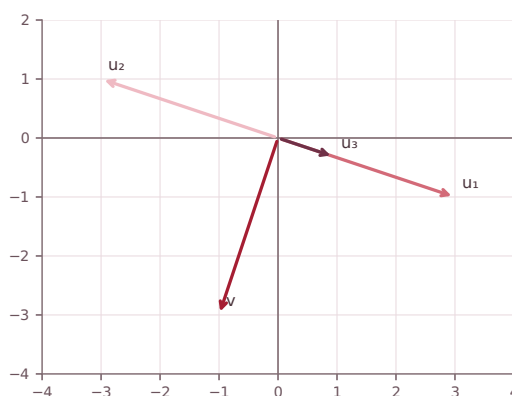
1.54 a) 0° b) 30° c) 120° d) 45°

1.55 $u \cdot v = 240 - 240 = 0$ y ambos son no nulos. Sus módulos son 17 y 34. Los normalizados $(8/17; 15/17)$, $(15/17; -8/17)$ tienen módulo 1 y siguen siendo ortogonales.

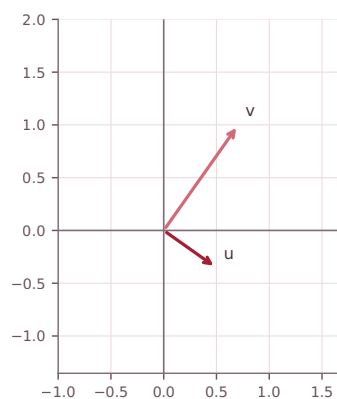
1.56 $x = -20$; $y = 3/5$.



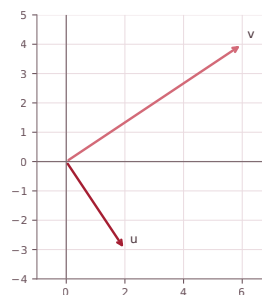
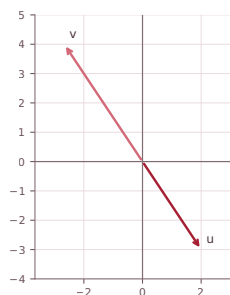
1.57 Ejemplos: $(3; -1)$, $(-3; 1)$, $(3/\sqrt{10}; -1/\sqrt{10})$. Todos tienen producto escalar cero con $(-1; -3)$.



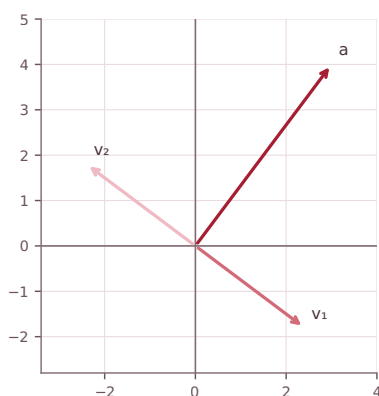
1.58 $m = -\sqrt{2}/4$.



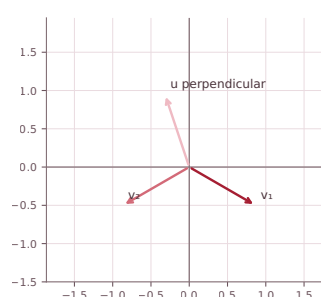
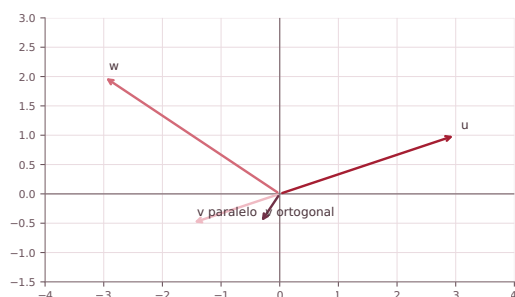
1.59 Paralelos: $a = -8/3$. Perpendiculares: $a = 6$.



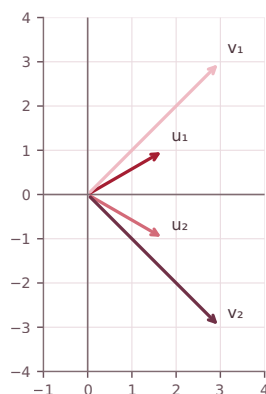
1.60 $(12/5; -9/5)$ y su opuesto.



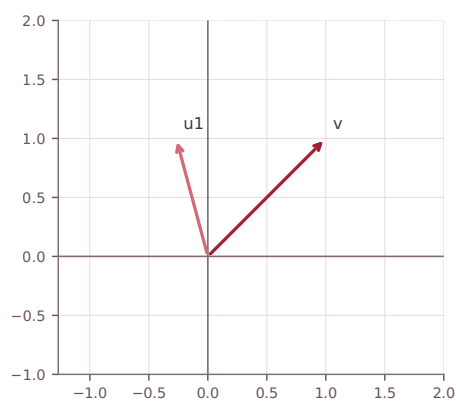
1.61 a) $a = \pm\sqrt{3}/2$. b) $a = -3/2$. c) $a = -1/3$. d) $(-1/\sqrt{10}; 3/\sqrt{10})$ o su opuesto.
e) Ángulo $\approx 127,875^\circ$.



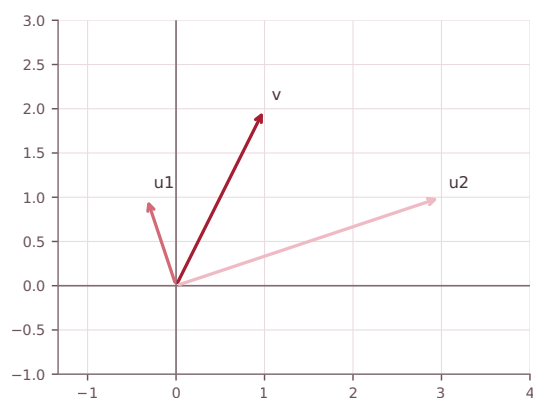
1.62 **a)** $(\sqrt{3}; 1)$ y $(\sqrt{3}; -1)$. **b)** $(3; 3)$ y $(3; -3)$.



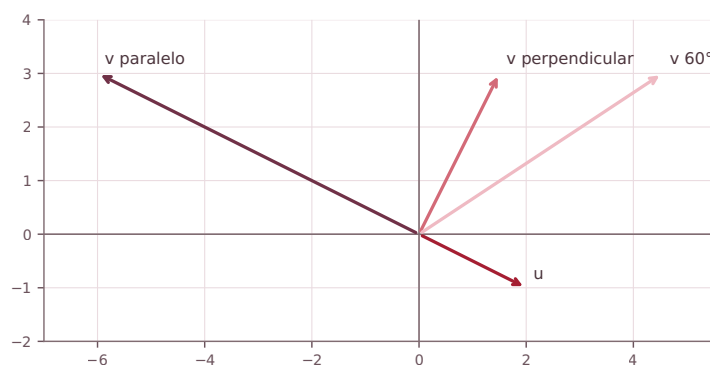
1.63 $a = -2 + \sqrt{3}$.



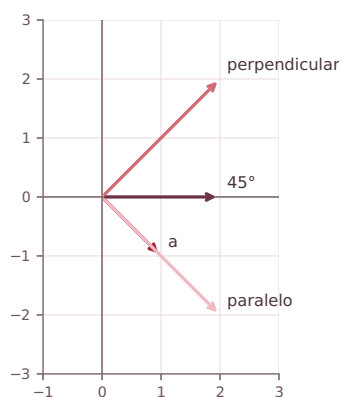
1.64 $x = -\frac{1}{3}; x = 3$.



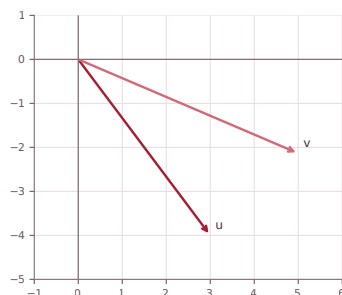
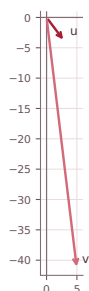
1.65 Ortogonales: $3/2$. Ángulo 60° : $\frac{24}{11} + \frac{15 \cdot \sqrt{3}}{11}$. Igual dirección: -6 .



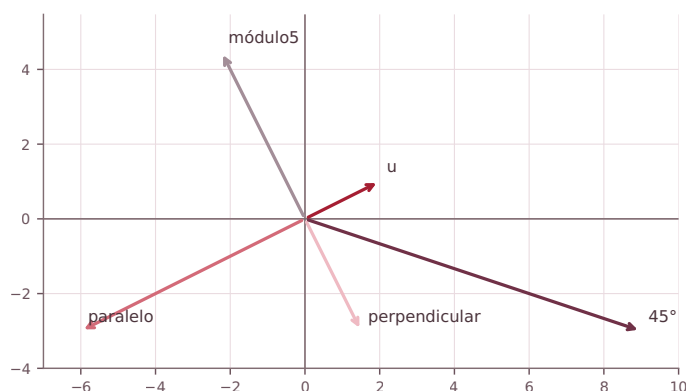
1.66 Ortogonales: $m=2$. Paralelos: $m=-2$. Unitario: no existe, pues $|b| \geq 2$. Ángulo 45° : $m=0$.



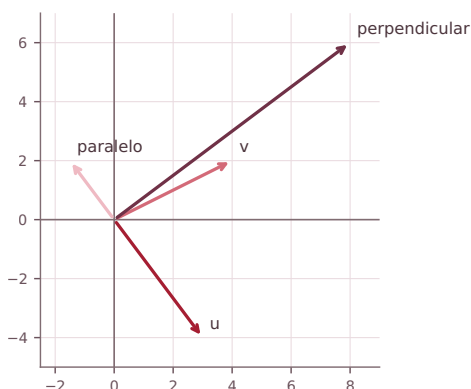
1.67 Perpendiculares: $15/4$. Ángulo 30° : $-\frac{240}{11} - \frac{125 \cdot \sqrt{3}}{11} \approx -41,5006$, $-\frac{240}{11} + \frac{125 \cdot \sqrt{3}}{11} \approx -2,1358$. Paralelos: $-20/3$.



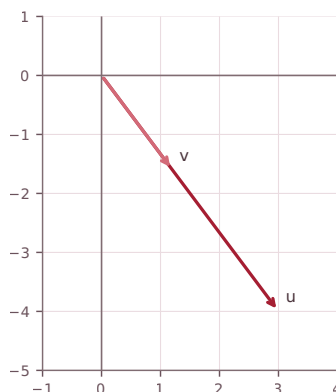
- 1.68** Paralelos: $a = -6$. Perpendiculares: $a = 3/2$. Ángulo 45° : $a = 9$. Perpendicular de módulo 5: $(-\sqrt{5}; 2\sqrt{5})$ o su opuesto.



- 1.69** $u \cdot v = 4$; $a = 4$; ángulo $\approx 79,6952^\circ$. Paralelos: $a = -3/2$. Perpendicular de módulo 10: $(8; 6)$ o su opuesto.



- 1.70** **a)** $(6/5; -8/5)$ o su opuesto. **b)** $(a \cdot b)c = -8(1/2; 4) = (-4; -32)$.
c) Son ortogonales, pero no ortonormales: el primer módulo es 1 y el segundo $\sqrt{6}/3$.
d) Positivo: ángulo agudo; cero: vectores perpendiculares si ambos son no nulos; negativo: ángulo obtuso. Ejemplos con $(1; 0)$: $(1; 1)$, $(0; 1)$, $(-1; 1)$.
e) $[(b \cdot c)a - (a \cdot c)b] \cdot c = (b \cdot c)(a \cdot c) - (a \cdot c)(b \cdot c) = 0$.



02 · Coordenadas y aplicaciones

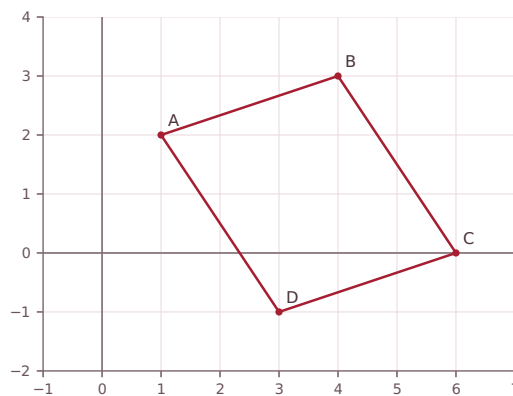
2.01 $M(-1; 2)$.

2.02 $A'(5; -16)$.

2.03 $k = 7$.

2.04 26 unidades.

2.05 $D(3; -1)$.



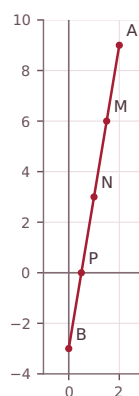
2.06 $M_{AC} = M_{BD} = (7/2; 1)$.

2.07 $AB = CD = \sqrt{10}$; $BC = AD = \sqrt{13}$; $AC = \sqrt{29}$; $BD = \sqrt{17}$.

2.08 **a)** (3; 4) **b)** (-1; -4) **c)** (7/2; 7/2)

2.09 $B(5; 1)$.

2.10 Desde A: (3/2; 6), (1; 3) y (1/2; 0).



2.11 **a)** $2 \cdot \sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{41}$ **c)** 6 **d)** 6

2.12 **a)** (4; 2) **b)** $(-3; \frac{1}{2})$ **c)** (2; 2) **d)** (3; 1)

2.13 $6\sqrt{2}$; M(-1; 1); S(8; -8).

2.14 M(3/2; 3/2); longitud $\sqrt{34}/2$.

2.15 AB = BC = 5; AC = 6.

2.16 B(5; -1).

2.17 S(6; 4).

2.18 M_AB(-3; 2), M_BC(0; 3), M_CA(-4; 4). Los vectores entre puntos medios son la mitad de los correspondientes vectores de los lados.

2.19 A(6; 9).

2.20 P(-2/3; 4), Q(11/3; 5).

2.21 P(-4/3; 5/3), Q(-2/3; 1/3).

2.22 D(4; -2).

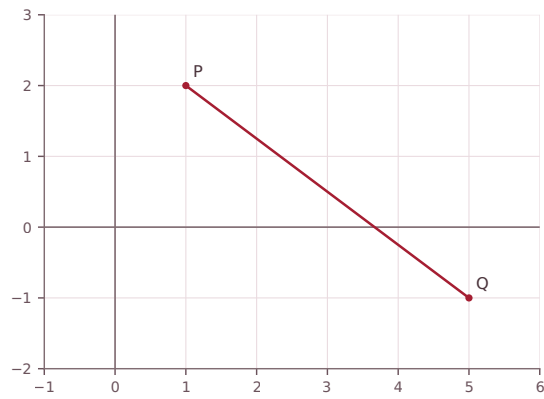
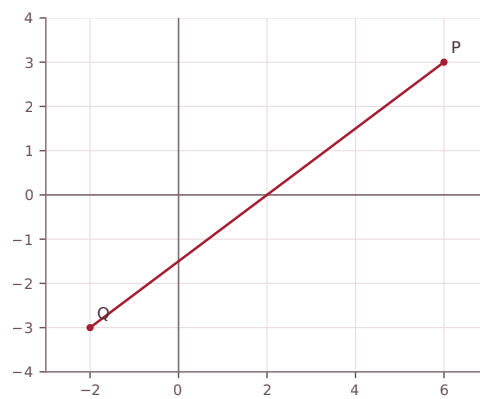
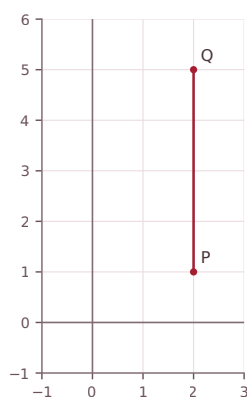
2.23 a = 6 o -18. PQ = (-12; -5) o (12; -5), respectivamente. Módulo 13.

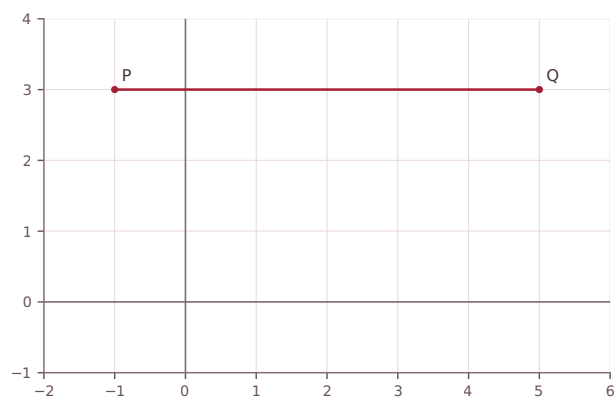
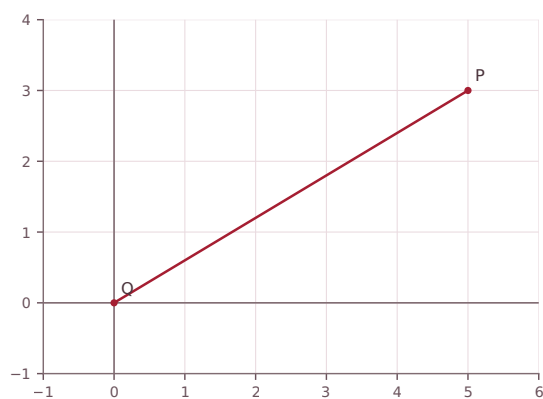
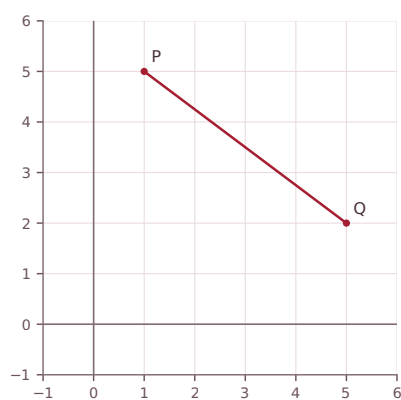
2.24 P(4; 3).

2.25 **a)** Sí: AB=(2; 1), AC=(-2; -1). **b)** No: el determinante de AB y AC es 1. **c)** k = -5/3.

2.26 M(3/2; 5/2); P(1/3; 2), Q(8/3; 3).

2.27 P(2; 2): BP=(2; 4), PA=(1; 2).

2.28 5**2.29** 10**2.30** 4

2.31 6**2.32** $\sqrt{34}$ **2.33** 5

03 · Rectas

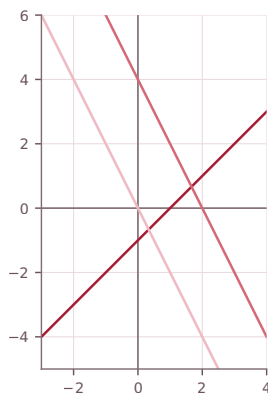
- 3.01** $r: 3x - y - 3 = 0$; $s: x - 2y + 4 = 0$; intersección: $(2; 3)$.
- 3.02** $r: y = x - 1$; $s: y = 2$; intersección: $(3; 2)$.
- 3.03** $r: y = 2x$; $s: x + y - 7 = 0$; intersección: $(7/3; 14/3)$.
- 3.04** $r: 3x + y - 5 = 0$; $s: 2x + y - 3 = 0$; intersección: $(2; -1)$.
- 3.05** Ambas coinciden con AB: $5x - y - 11 = 0$.
- 3.06** s, porque su pendiente es $2/5$.
- 3.07** $a = 3b$; para que sea una recta, $(a; b) \neq (0; 0)$.
- 3.08** Paralelas: $a = 3b$. Perpendiculares: $ab = -3$.
- 3.09** $m = -3$.
- 3.10** En $(x; y) = (2; 1) + \lambda(-1; 3)$, es decir, $3x + y - 7 = 0$.
- 3.11** Director $(0; 3)$. Recta $x = 3$; su pendiente no está definida.
- 3.12** **a)** $x = -2 + 3t$; $y = 3 + 4t$ **b)** $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{4}$ **c)** $4x - 3y + 17 = 0$ **d)** $y - 3 = \frac{4}{3}(x + 2)$
e) $y = \frac{4}{3}x + \frac{17}{3}$ **f)** $\frac{x}{-17/4} + \frac{y}{17/3} = 1$ **g)** $P(6; 41/3)$; $Q(-29/4; -4)$.
- 3.13** **a)** $3x - 2y - 11 = 0$. **b)** $2x + y = 0$. **c)** $x - 1 = 0$. **d)** $y - 2 = 0$. **e)** $3x + 2y - 16 = 0$.
- 3.14** **a)** $2/3$. **b)** 2 . **c)** -10 . **d)** $10/3$. **e)** $-9/2$. **f)** $\pm 2/3$. **g)** $k \neq \pm 2\sqrt{3}/3$.
- 3.15** $x + y - 11 = 0$.
- 3.16** Intersección: $(-1/7; 10/7)$. Recta: $5x - 17y + 25 = 0$.
- 3.17** $y = -x/2 - 3$.
- 3.18** Intersección: $(-1/7; -10/7)$. Recta: $2x - 3y - 4 = 0$.
- 3.19** $2x + y - 3 = 0$; $y = -2x + 3$.
- 3.20** M sí, para $t = -2$. N no: x exige $t = 1$, pero entonces $y = 4$.
- 3.21** AB: $x - 5y = 0$. AC: $4x - y = 0$. BC: $3x + 4y - 19 = 0$.
- 3.22** Paralelas distintas: $a = 1/2$, $b \neq -4$. Coincidentes: $a = 1/2$, $b = -4$. Perpendiculares: $a = -2$, b cualquiera.
- 3.23** Primera y tercera: $(x; y) = t(1; 1)$, $x=t$, $y=t$, $y=x$. Segunda y cuarta: $(x; y) = t(1; -1)$, $x=t$, $y=-t$, $y=-x$.

3.24 $y = \sqrt{3}x + 7 - 2\sqrt{3}$

3.25 $k = 5$; punto $(3; -1)$.

3.26 **a)** $(1; -3), (0; 1)$. **b)** $(1; 1), (0; 2)$. **c)** $(3; 1), (0; 1)$.

3.27 $r: y=x-1$; $s: y=-2x+4$; $t: y=-2x$.

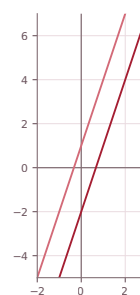
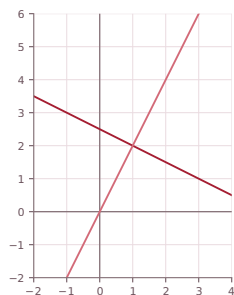


3.28 **a)** $r: y=x-1$; $m=1$. **b)** $s: y=-2x+4$; $m=-2$. **c)** $t: y=-2x$; $m=-2$.

3.29 **a)** $(x;y) = (1;2) + t(2;1)$ **b)** $x = 1 + 2t$; $y = 2 + t$ **c)** $\frac{x-1}{2} = y - 2$ **d)** $x-2y+3 = 0$.

e) $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

3.30 **a)** Secantes en $(1; 2)$. **b)** Paralelas distintas.



04 · Problemas de geometría analítica

4.01 Desde B: $2x+5y-4=0$. Desde C: $4x-y=0$. Ortocentro: $(2/11; 8/11)$.

4.02 Pie: $(2; 3)$; B $(1; 4)$.

4.03 13 unidades cuadradas.

4.04 C $(1; 2)$. Altura: $4x-5y+6=0$.

4.05 $a=4$; $b=-12$.

4.06 Sí, en B: $BA \cdot BC = 0$. $AB^2 = 100$, $BC^2 = 400$, $AC^2 = 500$.

4.07 C $(0; \pm 3\sqrt{3})$. Dos soluciones, ambas de área $9\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

4.08 Otros lados: $x+y=5$ y $2x-3y=-5$. Vértices: A $(2; 3)$, B $(11; 9)$, C $(14; 6)$, D $(5; 0)$.

4.09 Recta: $3x+2y-12=0$. Cortes: $(4; 0)$, $(0; 6)$. Área: 12 unidades cuadradas.

4.10 M $(2; 3)$; B $(6; 4)$.

4.11 $(11/8; 2)$.

4.12 $AB = AC = \sqrt{37}$. Área: $35/2$ unidades cuadradas.

4.13 P $(-1/5; 27/5)$, punto medio entre A y el pie de su perpendicular a r.

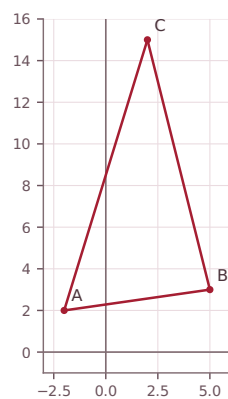
4.14 P' $(-1; 6)$.

4.15 P' $(6; 2)$.

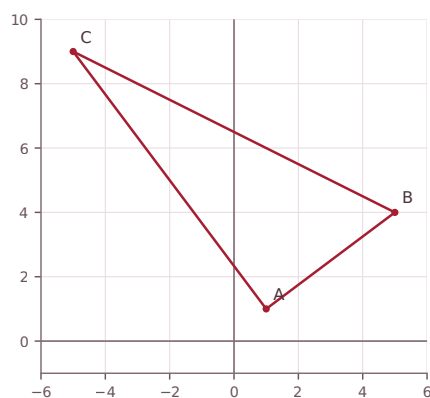
4.16 $15/2$ unidades cuadradas.

4.17 $BA \cdot BC = -\frac{35}{2}$; área = $\frac{35\sqrt{3}}{4}$.

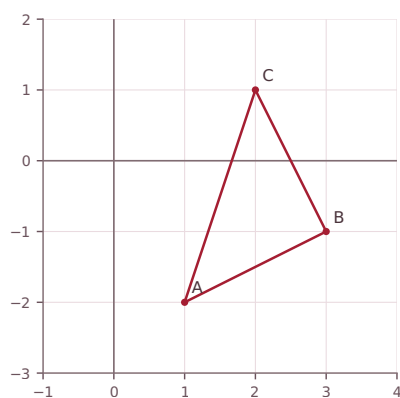
4.18 $A \approx 64,7672^\circ$; $B \approx 84,0939^\circ$; $C \approx 31,139^\circ$; área = $87/2$ unidades cuadradas.



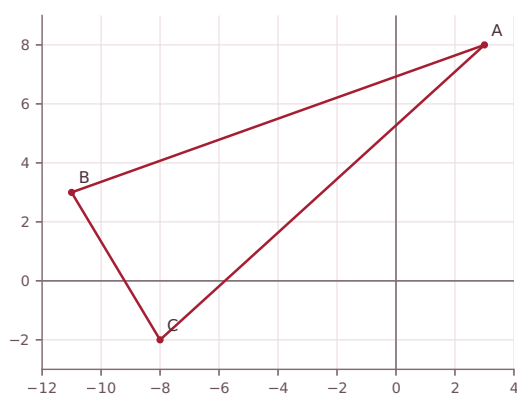
4.19 $AB=(4; 3)$, $AC=(-6; 8)$, producto escalar $-24+24=0$. Área: 25 unidades cuadradas.



4.20 $\frac{5}{2}$ unidades cuadradas.



4.21 $\frac{85}{2}$ unidades cuadradas.



4.22 1 unidades cuadradas.

