1.º BACHILLERATO

FUNCIONES

Practica, razona y comprueba tus respuestas.

01 Concepto, dominio y recorrido

Relaciones funcionales y conjuntos de definición.

02 Simetría, periodicidad y transformaciones

Lectura de gráficas y cambios de coordenadas.

03 Polinómicas, racionales y radicales

Rectas, parábolas, cocientes y raíces.

04 Exponenciales y logaritmos

Crecimiento, decrecimiento y representaciones.

05 Trigonométricas y sus inversas

Periodos, traslaciones y valores principales.

06 Funciones a trozos y valor absoluto

Tramos, continuidad y funciones escalonadas.

07 Operaciones, composición e inversas

Álgebra de funciones y reversibilidad.

08 Aplicaciones y modelos

Precios, poblaciones, geometría y entorno.

TU RUTA DE TRABAJO

Índice

Actividades organizadas por contenidos, con espacio para trabajar y soluciones al final.

01	Concepto, dominio y recorrido	3
02	Simetría, periodicidad y transformaciones	10
03	Polinómicas, racionales y radicales	17
04	Exponenciales y logaritmos	27
05	Trigonométricas y sus inversas	32
06	Funciones a trozos y valor absoluto	35
07	Operaciones, composición e inversas	39
08	Aplicaciones y modelos	47
•	Solucionario	52

Cómo usar el dossier

El código **1.12** identifica la actividad 12 del bloque 1. Busca ese mismo código en el solucionario. Puedes seguir el orden completo o seleccionar un contenido para repasarlo.

Antes de empezar

Los ángulos se expresan en radianes. log indica logaritmo decimal y ln, natural. Un punto abierto no está incluido; uno cerrado sí. Al operar o simplificar funciones, conserva las restricciones del dominio original. Las inversas requieren inyectividad.

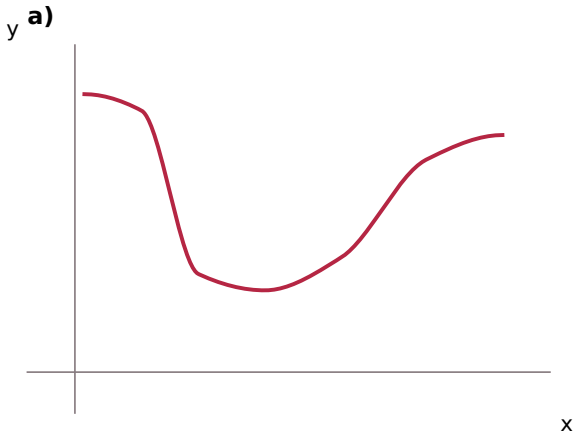
BLOQUE 01

Concepto, dominio y recorrido

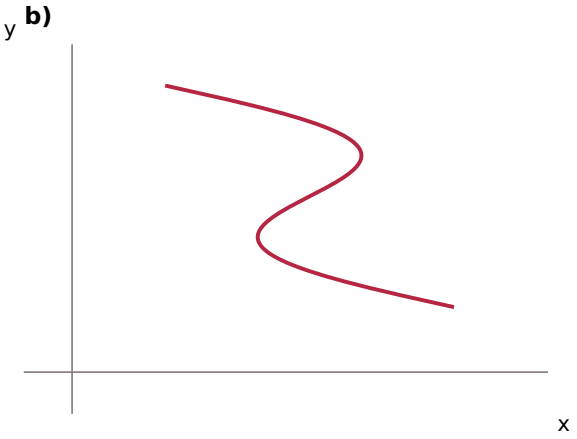
Relaciones funcionales y conjuntos de definición. · 15 actividades

1.01 Justifica si cada gráfica representa una función de x.

a)



b)



a) Gráfica a).

b) Gráfica b).

1.02 Razona si cada relación determina una función. Indica las condiciones necesarias.

a) Peso de fruta comprado, en kg, y número de piezas.

b) Peso de fruta comprado, en kg, e importe de la compra.

c) Peso de fruta comprado, en kg, y precio por kilogramo.

1.03 Determina el dominio de cada función.

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 9}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

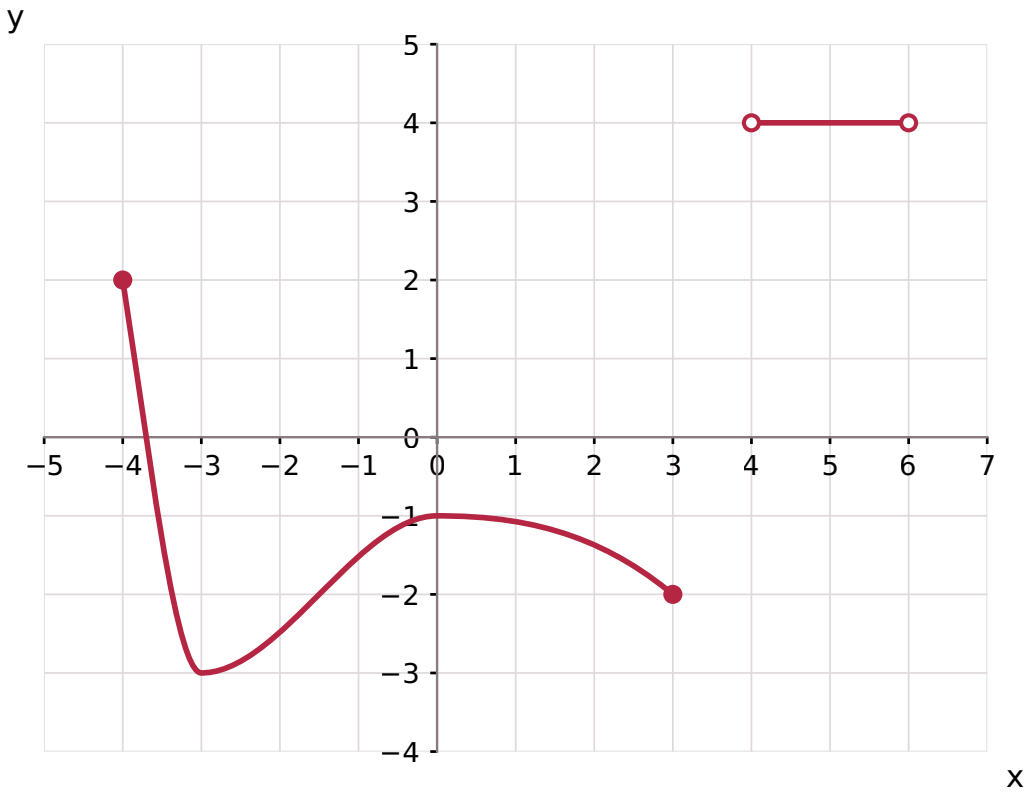
e) $f(x) = \cos(x + 1)$

f) $f(x) = \sqrt{3x - 1}$

g) $f(x) = \log(x - 16)$

h) $f(x) = e^{x^2 - 1}$

1.04 Halla el dominio y el recorrido de la función representada.



1.05 Halla el dominio de estas funciones con radicales.

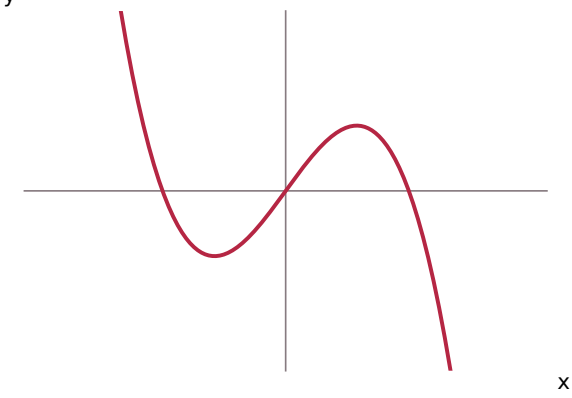
a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 36}$

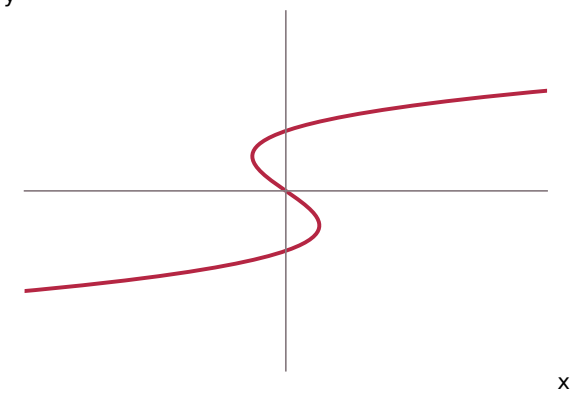
1.06 Calcula el dominio de $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x + 3}$.

1.07 Determina si cada gráfica corresponde a una función de x. Justifica con la prueba de la recta vertical.

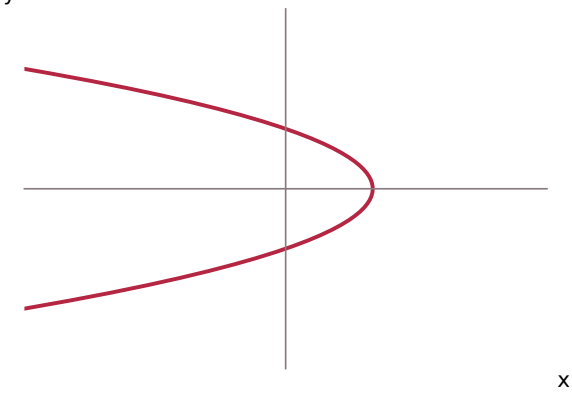
a)



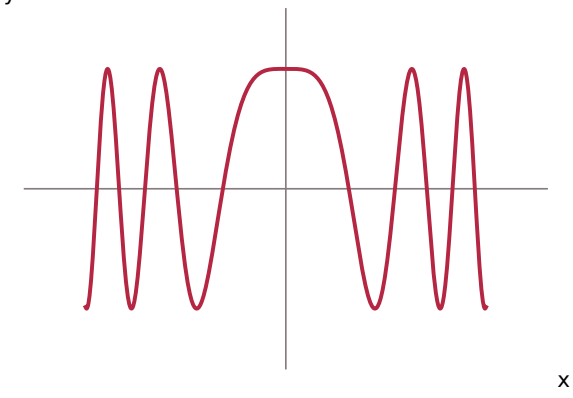
b)



c)



d)



a) Gráfica a).

b) Gráfica b).

c) Gráfica c).

d) Gráfica d).

1.08 Comprueba si $x = -3$, $x = 0$ y $x = 2$ pertenecen al dominio de cada función.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 + 3x}$

c) $f(x) = \sqrt{-2x + 1}$

d) $f(x) = \ln(-x - 4)$

1.09 Estudia si los valores indicados pertenecen al recorrido de cada función.

a) $y = 3$, 2 y -5 para $f(x) = \sqrt{3x - 3}$.

b) $y = 0$, 30 y -3 para $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

1.10 Halla el dominio de las funciones.

a) $f(x) = \dfrac{4 - 3x + x^2}{2}$

b) $f(x) = \dfrac{12x - x^2}{x - 5}$

c) $f(x) = \dfrac{5x - 3}{x^2 + 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 4x + 4}$

1.11 Estudia el dominio de estas funciones con radicales.

a) $f(x) = \sqrt{3x - 7}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 10}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$

d) $f(x) = \sqrt{3x^2 - x}$

1.12 Escribe el dominio de las funciones.

a) $f(x) = \log_4(x - 4)$

b) $f(x) = \cos(1 - x)$

c) $f(x) = 3^{\ln x}$

d) $f(x) = \text{sen}(x - \pi)$

1.13 Determina el dominio de las funciones.

a) $f(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt{8 - x}$

b) $f(x) = \sqrt{2x - 4} \cdot \sqrt{1 - x}$

1.14 Calcula el dominio de las funciones.

a) $f(x) = \sqrt{3x - 1}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{-x^2 - 1}$

d) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

1.15 Determina el dominio de estas funciones con radicales.

a) $f(x) = \dfrac{7x}{2 - \sqrt{x - 5}}$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x - 1}}{4 - \sqrt{x + 1}}$

BLOQUE 02

Simetría, periodicidad y transformaciones

Lectura de gráficas y cambios de coordenadas. · 18 actividades

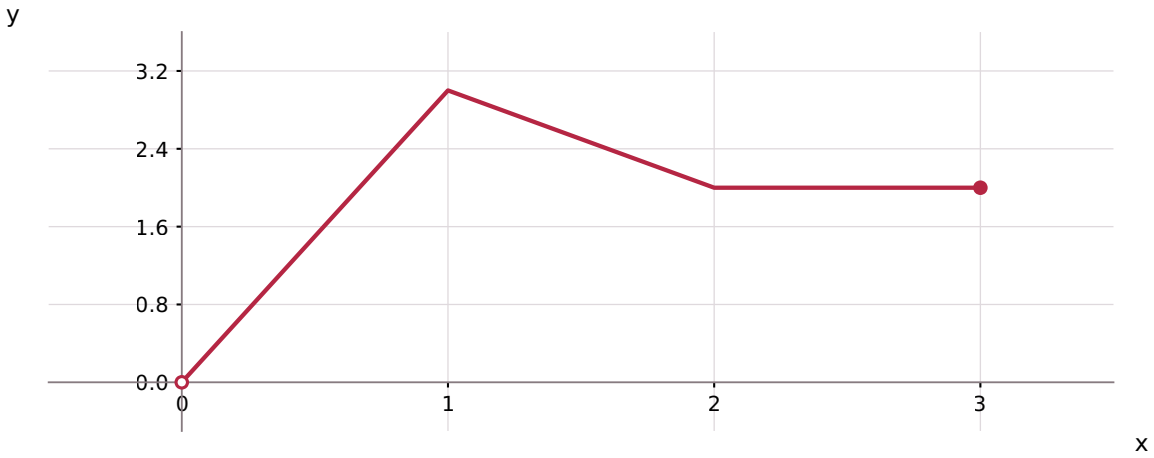
2.01 Estudia la simetría de cada función.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x - 7}{x^2}$

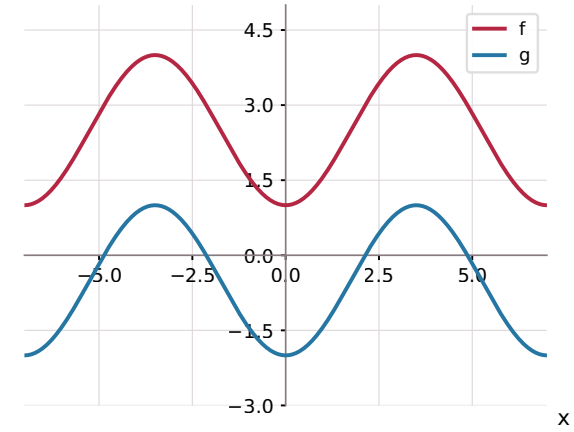
c) $f(x) = \dfrac{x^4 - 5}{3x^2}$

2.02 Completa la gráfica de esta función periódica de periodo 3. Repite el tramo hacia ambos lados.

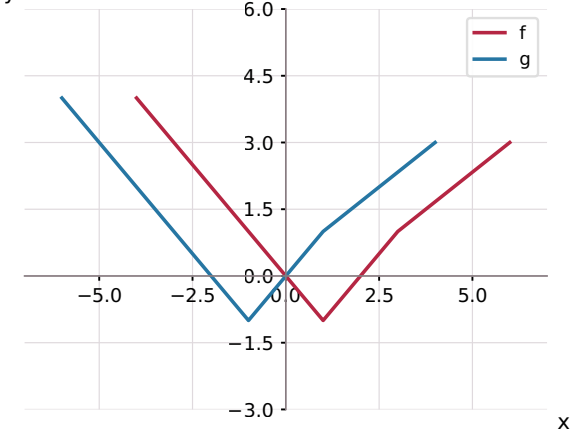


2.03 En cada dibujo, expresa g(x) a partir de f(x).

a)



b)



a) Gráfica a).

b) Gráfica b).

2.04 Representa $f(x) = x^2 - 2x + 1$. A partir de ella, dibuja estas funciones e indica la transformación.

a) $g(x) = x^2 - 2x + 3$

b) $h(x) = x^2 - 2x - 2$

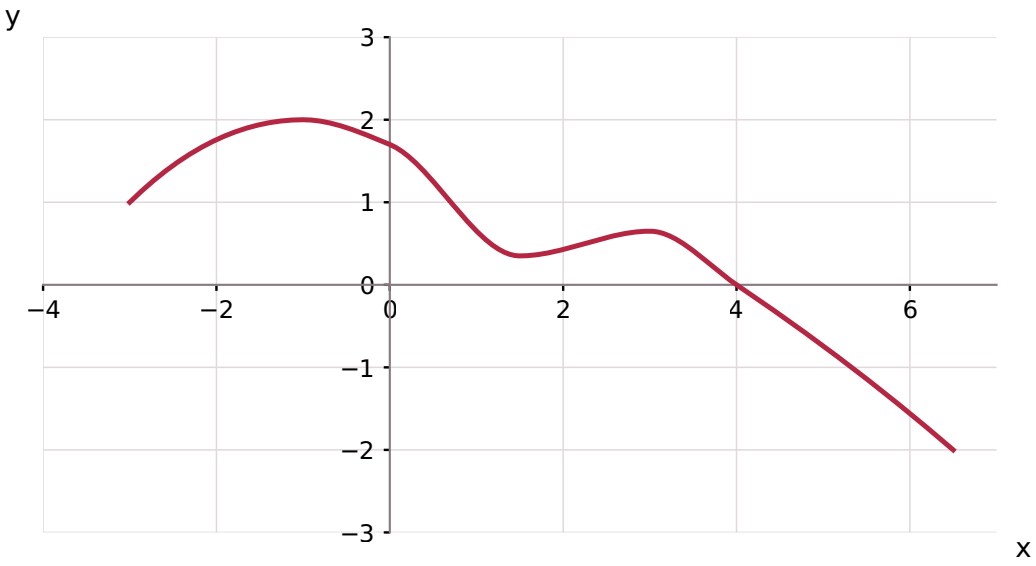
c) $i(x) = (x - 1)^2 - 2(x - 1) + 1$

d) $j(x) = x^2 + 2x + 1$

e) $k(x) = -x^2 + 2x - 1$

2.05 Determina el periodo fundamental de $f(x) = \cos(2x)$.

2.06 A partir de la gráfica de f, representa las funciones indicadas.



a) g(x) = f(x) − 3.

b) g(x) = f(x + 2).

2.07 Determina si las funciones son pares, impares o ninguna de las dos.

a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $f(x) = x^4 - 1$

c) $f(x) = x^2 - x$

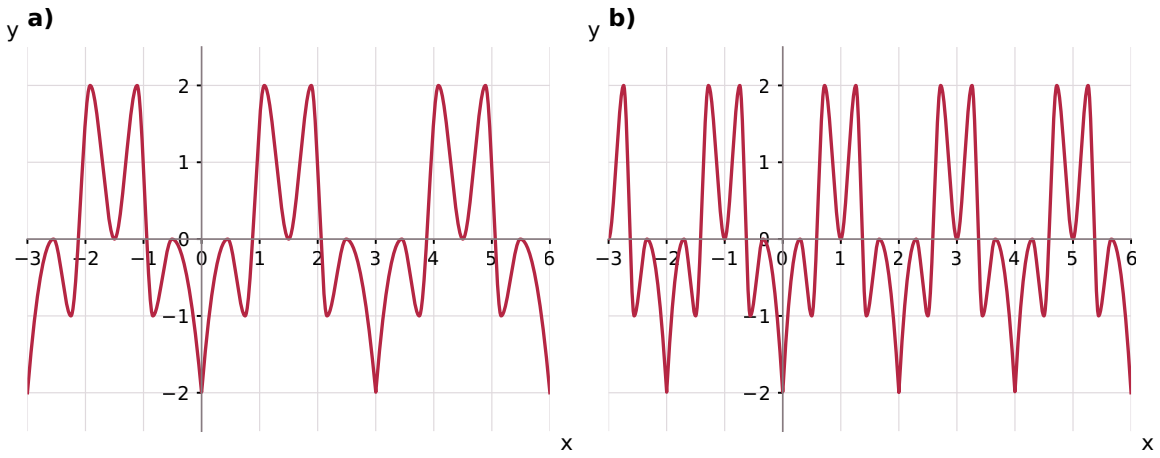
d) $f(x) = x^4 - 2x^2$

2.08 Estudia la simetría de las funciones.

a) $f(x) = \frac{3x^2 - x}{x}$

b) $f(x) = \frac{2x^3 - x}{x^2 + 1}$

2.09 Determina el periodo fundamental de cada gráfica.



a) Gráfica a).

b) Gráfica b).

2.10 Representa estas funciones en unos mismos ejes. Explica sus semejanzas y diferencias.

a) $f(x) = x^2$

b) $g(x) = x^2 + 3$

c) $h(x) = (x - 4)^2$

d) $i(x) = 2x^2$

2.11 Dibuja $f(x) = x^2 + 2x$. Obtén y representa las expresiones indicadas. Explica su relación con f.

a) $f(x - 2)$.

b) $f(x) - 4$.

c) $f(x + 1)$.

d) $f(x) + 2$.

2.12 Dada $f(x) = 2/x$, determina las expresiones de estas funciones.

a) $g(x) = f(x - 3)$.

b) $g(x) = f(x + 1)$.

c) $g(x) = f(x) - 2$.

d) $g(x) = f(x) + 3$.

e) $g(x) = f(-x)$.

f) $g(x) = -f(x)$.

2.13 Sin dibujarlas, explica la relación entre estas funciones y $f(x) = 12/x$.

a) $g(x) = \dfrac{12}{x + 4}$

b) $h(x) = \dfrac{12}{x} + 1$

c) $i(x) = -\dfrac{12}{x}$

2.14 Representa f(x) = 3/x. A partir de ella, representa estas funciones e indica sus transformaciones.

a) $g(x) = \dfrac{x + 4}{x + 1}$

b) $h(x) = \dfrac{2x - 5}{x - 1}$

c) $i(x) = \dfrac{-2x + 1}{x + 1}$

2.15 Partiendo de $g(x) = 4^x$, representa estas funciones e indica sus transformaciones.

a) $f(x) = 4^{x-3}$

b) $f(x) = 4^{x+1}$

c) $f(x) = 1 + 4^x$

d) $f(x) = -4^x$

e) $f(x) = 2 - 4^x$

f) $f(x) = 4^x - 1$

2.16 A partir de $g(x) = 4^x$, representa las funciones e indica el cambio horizontal.

a) $f(x) = 4^{2x}$

b) $f(x) = 4^{x/2}$

2.17 Partiendo de g(x) = log x, representa las funciones e indica la transformación.

a) f(x) = log x − 3

b) f(x) = log x + 1

c) f(x) = 1 − log x

d) f(x) = − log x

e) f(x) = 2 − log x

f) f(x) = log x − 1

2.18 A partir de g(x) = log x, representa las funciones.

a) f(x) = log(2x)

b) f(x) = $\log(\frac{x}{2})$

BLOQUE 03

Polinómicas, racionales y radicales

Rectas, parábolas, cocientes y raíces. · 22 actividades

3.01 Representa en unos mismos ejes $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = 5x + 4$. Halla su intersección.

3.02 Representa gráficamente cada función cuadrática.

a) $f(x) = -3x^2 - x - 1$

b) $f(x) = x^2 + 2x - 2$

3.03 Representa estas funciones racionales.

a) $f(x) = \frac{3}{x}$

b) $f(x) = -\frac{3}{x}$

c) $f(x) = -\frac{4}{x}$

d) $f(x) = -\frac{1}{x}$

3.04 Representa las funciones. Indica las asíntotas y algunos puntos.

a) $f(x) = \frac{1}{2x}$

b) $f(x) = -\frac{1}{2x}$

c) $f(x) = \frac{5}{3x}$

d) $f(x) = -\frac{2}{5x}$

3.05 Representa las funciones con radicales.

a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$

b) $f(x) = \sqrt{x - 4}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

3.06 Representa gráficamente las funciones.

a) $f(x) = x^5$

b) $f(x) = -x^4$

3.07 Representa las funciones racionales mediante traslaciones.

a) $f(x) = -\frac{1}{x - 1}$

b) $f(x) = \frac{2x + 2}{x - 2}$

3.08 Representa las funciones lineales, afines y constantes usando su pendiente y su ordenada en el origen.

a) $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$

b) $f(x) = -2$

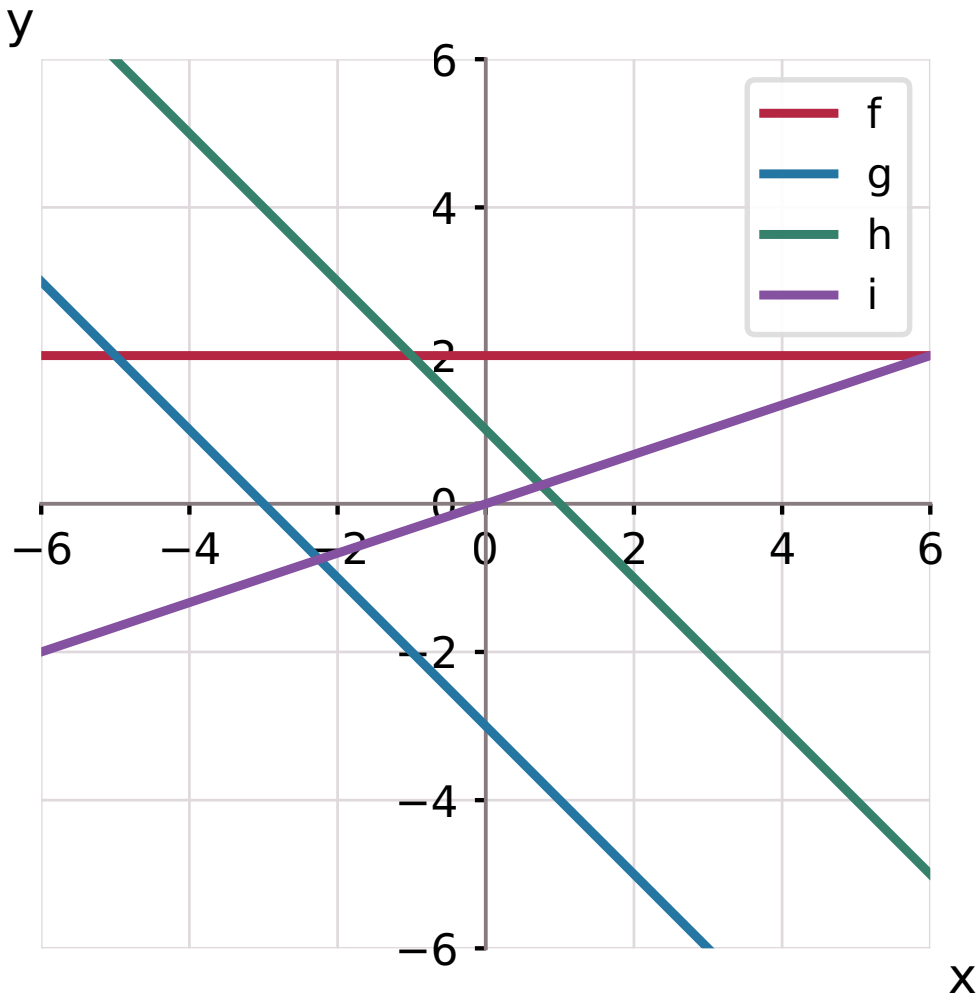
c) $f(x) = \frac{7}{2}$

d) $f(x) = \frac{2x - 3}{5}$

e) $f(x) = -3x + \frac{5}{2}$

f) $f(x) = -\frac{2}{3}x$

3.09 Escribe la expresión algebraica de cada recta representada e indica su pendiente y su ordenada en el origen.



a) f.

b) g.

c) h.

d) i.

3.10 Representa estas funciones en los mismos ejes y relaciona la abertura de sus ramas con el coeficiente de x^2.

a) $f(x) = x^2$

b) $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

c) $h(x) = 2x^2$

d) $i(x) = \frac{1}{4}x^2$

3.11 Halla el vértice de cada función cuadrática.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 10$

b) $f(x) = -x^2 - 4x + 10$

c) $f(x) = x^2 - 4$

d) $f(x) = -x^2 - 4x + 2$

3.12 Representa estas parábolas. Usa el vértice y las intersecciones con los ejes.

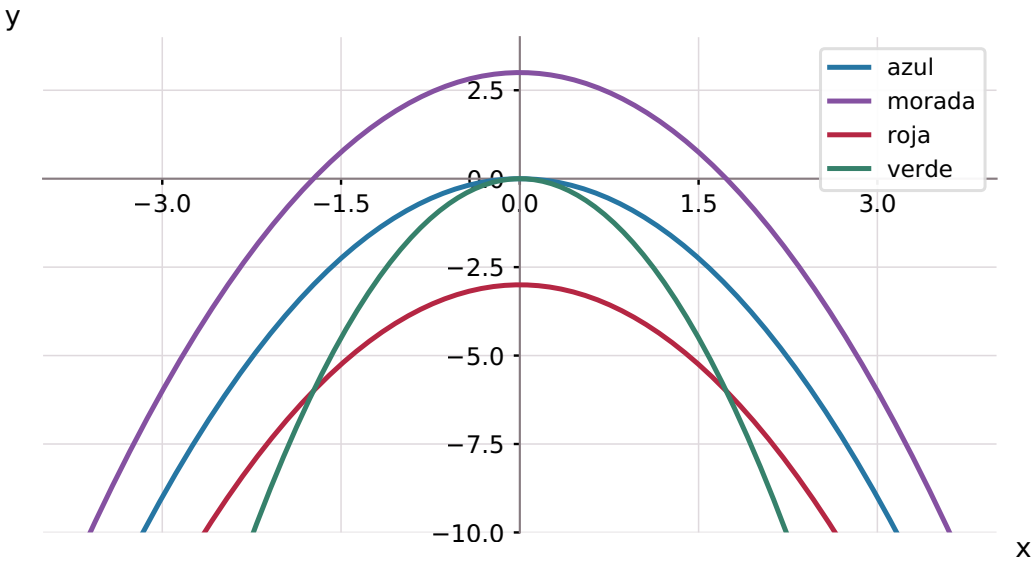
a) $f(x) = x^2 + x - 6$

b) $f(x) = x^2 - 10x + 25$

c) $f(x) = x^2 - 3x + 5$

d) $f(x) = -x^2 - 3x + 1$

3.13 Asocia cada expresión con el color de su gráfica.



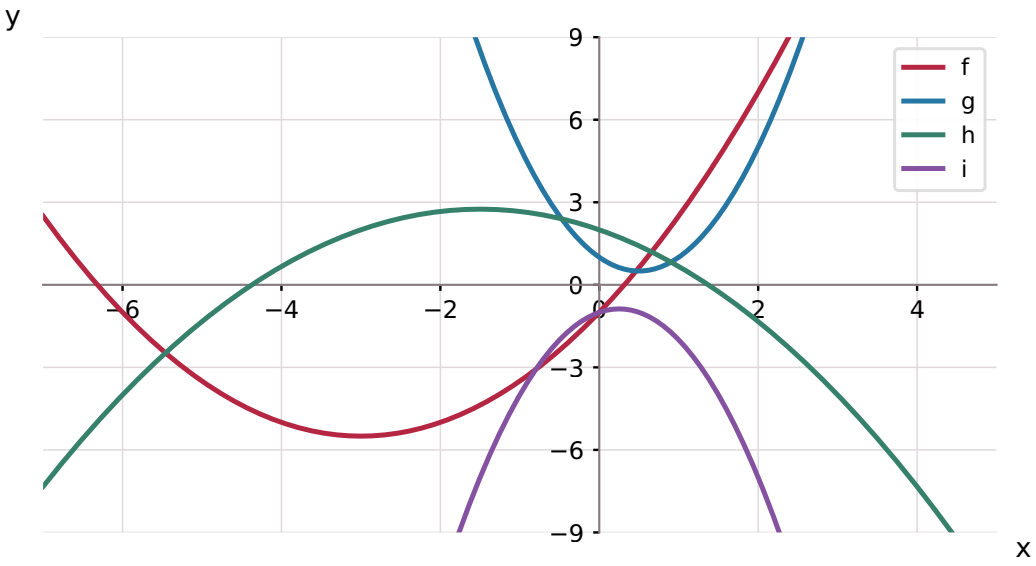
a) $f(x) = -x^2$

b) $g(x) = -x^2 + 3$

c) $h(x) = -x^2 - 3$

d) $i(x) = -2x^2$

3.14 Relaciona cada expresión con las curvas f, g, h e i del dibujo.



a) $y = \frac{x^2}{2} + 3x - 1$

b) $y = 2x^2 - 2x + 1$

c) $y = -\frac{x^2}{3} - x + 2$

d) $y = -2x^2 + x - 1$

3.15 Construye una tabla de valores y dibuja cada función. Utiliza los valores de x que se indican.

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3$. Usa $x = -2{,}5; -2; -1{,}5; -1; -0{,}5; 0; 1; 2$.

b) $f(x) = -x^3 + 6x + 1$. Usa $x = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$.

3.16 Representa estas funciones polinómicas e indica sus cortes con los ejes.

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$

b) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + 12$

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$

d) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

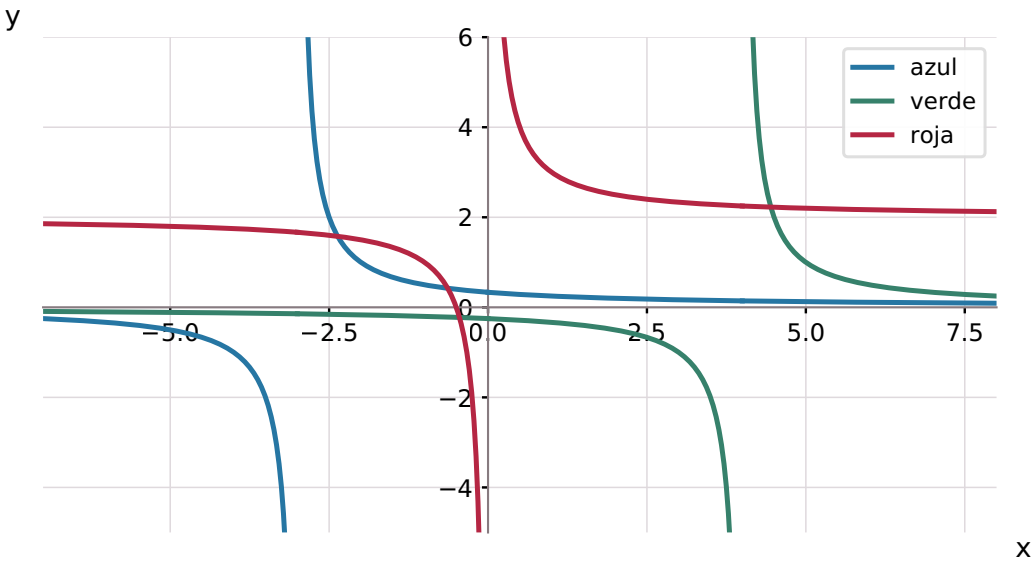
3.17 Halla y representa el polinomio de menor grado que pasa por los puntos indicados.

a) A(0, 0), B(5, 5/2), C(−2, −1).

b) A(3, 0), B(4, 1), C(5, 0).

c) A(1, 0), B(2, 1), C(3, 0), D(4, 1).

3.18 Asocia cada expresión con el color de su gráfica.

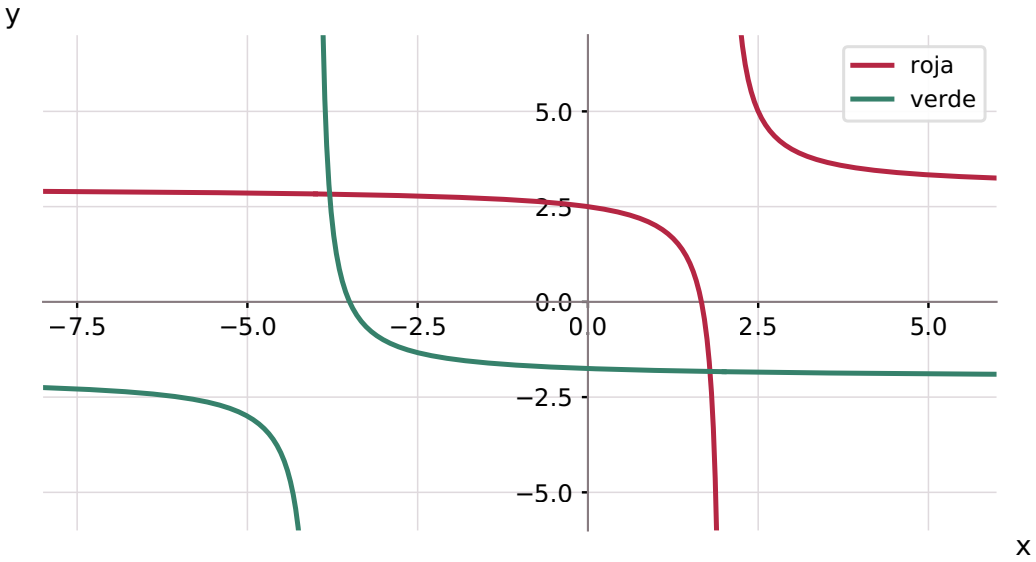


a) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x-4}$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x} + 2$

3.19 Asocia cada función con la gráfica roja o verde.



a) $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

b) $g(x) = \frac{1}{x+4} - 2$

3.20 Representa las funciones racionales.

a) $f(x) = -\frac{1}{2x^3}$

b) $f(x) = \frac{1}{2x^4}$

c) $f(x) = -\frac{1}{2x^6}$

3.21 Representa las funciones con radicales en el denominador.

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

c) $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x}} + 2$

d) $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x-2}} - 3$

3.22 ¿Para qué x es mayor la diferencia $\sqrt{x^2+1} - |x|$?

BLOQUE 04

Exponenciales y logaritmos

Crecimiento, decrecimiento y representaciones. · 13 actividades

4.01 Razona, sin dibujar, si estas funciones exponenciales son crecientes o decrecientes.

a) $f(x) = 1{,}2^x$

b) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

c) $f(x) = 0{,}8^x$

d) $f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$

4.02 Representa las funciones. Explica qué ocurre con la base negativa del apartado e).

a) $f(x) = 3^x$

b) $f(x) = -(3^x)$

c) $f(x) = 3^{-x}$

d) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

e) $f(x) = \left(-\frac{2}{3}\right)^x$

f) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$

4.03 Sin representar las gráficas, razona si estas funciones logarítmicas son crecientes o decrecientes.

a) $f(x) = \log_{1,2} x$

b) $f(x) = \log_{2/3} x$

c) $f(x) = \log_7 x$

d) $f(x) = \log_{0,8} x$

e) $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$

f) $f(x) = \log_{8,2} x$

4.04 Representa las funciones logarítmicas.

a) $f(x) = \log_3 x$

b) $f(x) = \log_{1/3} x$

c) $f(x) = \log_3(-x)$

d) $f(x) = -\log_{1/3} x$

e) $f(x) = -\log_3(-x)$

f) $f(x) = -\log_{1/3}(-x)$

4.05 Representa $f(x) = 2 \log x$, con logaritmo decimal.

4.06 Representa la función exponencial $f(x) = 3^{2x} - 3$.

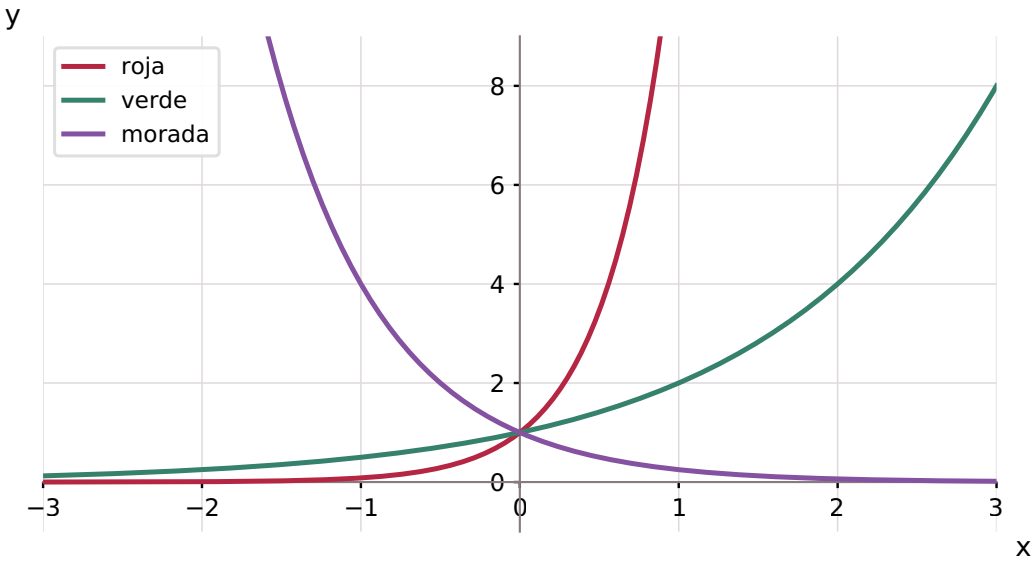
4.07 Dibuja las gráficas de estas funciones exponenciales.

a) $f(x) = 3^{2x}$

b) $f(x) = (\frac{1}{3})^{3x}$

4.08 Representa $f(x) = \log(10x^2)$, con logaritmo decimal.

4.09 Asocia cada expresión con el color de su gráfica.



a) $f(x) = 12^x$

b) $g(x) = 2^x$

c) $h(x) = (\frac{1}{4})^x$

4.10 Representa en unos mismos ejes cada terna de funciones exponenciales.

a) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 5^x$, $h(x) = 10^x$

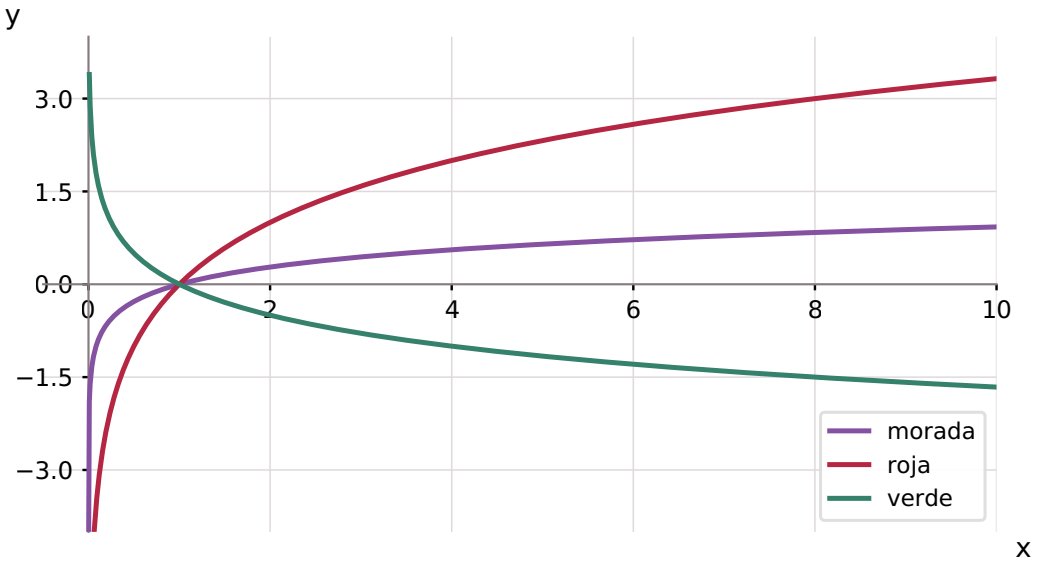
b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$, $g(x) = (\frac{1}{5})^x$, $h(x) = 10^x$

4.11 Representa en unos mismos ejes cada terna de funciones logarítmicas.

a) $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_5 x$, $h(x) = \log_{10} x$

b) $f(x) = \log_{1/2} x$, $g(x) = \log_{1/5} x$, $h(x) = \log_{1/10} x$

4.12 Asocia cada expresión con el color de su gráfica.



a) $f(x) = \log_{12} x$

b) $g(x) = \log_2 x$

c) $h(x) = \log_{1/4} x$

4.13 Sean $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Comprueba que $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$.

BLOQUE 05

Trigonométricas y sus inversas

Periodos, traslaciones y valores principales. · 11 actividades

5.01 Representa las funciones y simplifícalas mediante identidades trigonométricas.

a) $f(x) = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$

b) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

5.02 Representa las siguientes funciones trigonométricas.

a) $f(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2})$

b) $f(x) = \operatorname{tg}(x + 1)$

5.03 Calcula los valores principales en radianes.

a) $\operatorname{arcsen}(\frac{\sqrt{2}}{2})$

b) $\arccos(0)$

c) $\operatorname{arctg}(-1)$

5.04 Representa las funciones trigonométricas inversas.

a) $f(x) = \arccos(x + \frac{\pi}{2})$

b) $f(x) = \operatorname{arcsen}(x - \pi)$

5.05 Dibuja g(x) = cos x. A partir de ella, representa las funciones y explica su transformación.

a) $f(x) = \cos(-x)$

b) $f(x) = -\cos x$

c) $f(x) = \cos(x + \pi)$

d) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

e) $f(x) = \cos x + 2$

f) $f(x) = 1 - \cos x$

5.06 Dibuja g(x) = sen x. A partir de ella, representa estas funciones.

a) $f(x) = \operatorname{sen}(-x)$

b) $f(x) = -\operatorname{sen} x$

c) $f(x) = \operatorname{sen}(x + \pi)$

d) $f(x) = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{2})$

e) $f(x) = \operatorname{sen} x + 2$

f) $f(x) = 1 - \operatorname{sen} x$

5.07 Utiliza g(x) = sen x y h(x) = sen(2x) como referencia para representar las funciones.

a) $f(x) = \operatorname{sen}(4x)$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{x}{2})$

5.08 Utiliza g(x) = cos x y h(x) = cos(x/2) como referencia para representar las funciones.

a) $f(x) = \cos(\frac{x}{4})$

b) f(x) = cos(2x)

5.09 A partir de g(x) = tg x, representa las funciones.

a) f(x) = tg(x + π)

b) f(x) = 1 − tg x

5.10 A partir de g(x) = arcsen x, representa estas funciones.

a) f(x) = 2 − arcsen x

b) $f(x) = \frac{1}{2} + \text{arcsen } x$

c) f(x) = arcsen(x + 1)

d) $f(x) = \text{arcsen}(x - \frac{1}{2})$

5.11 A partir de g(x) = arccos x, representa estas funciones.

a) f(x) = 1 + arccos x

b) $f(x) = \frac{1}{2} - \arccos x$

c) f(x) = arccos(x + 1)

d) $f(x) = \arccos(x - \frac{1}{2})$

BLOQUE 06

Funciones a trozos y valor absoluto

Tramos, continuidad y funciones escalonadas. · 16 actividades

6.01 Representa la función $f(x) = \begin{cases} 2, & x < -2 \\ x^2 - 7, & -2 \le x \le 0 \\ -7 - x, & x > 0 \end{cases}$ y describe sus características.

6.02 Representa la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x \le 2 \text{ y } x \neq 0 \\ x^2 - 6x + 9, & 2 < x \le 4 \\ 5, & x > 4 \end{cases}$ y describe sus características.

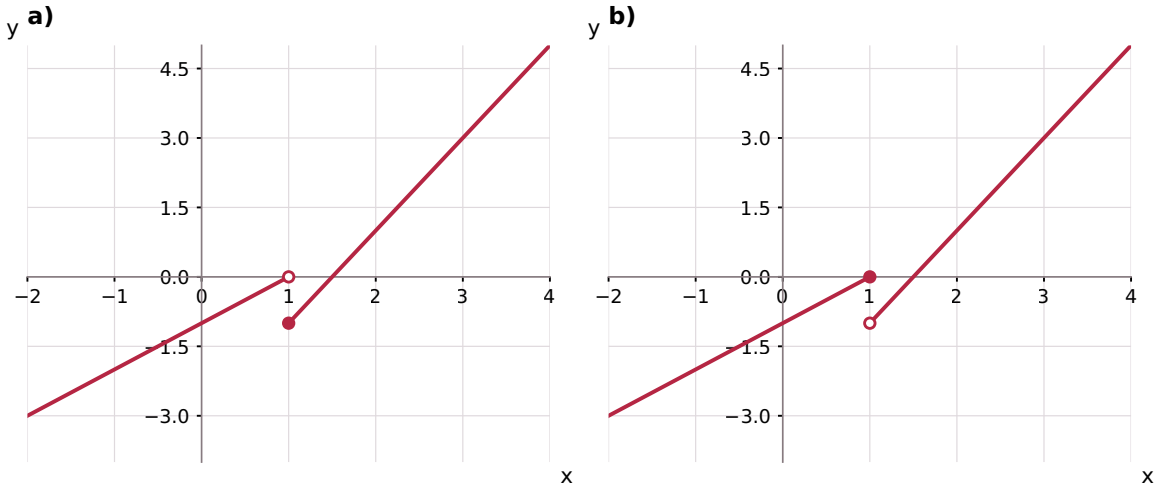
6.03 Representa $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, donde $\lfloor x \rfloor$ es el mayor entero menor o igual que x, y analiza sus propiedades.

6.04 Dibuja $f(x) = |\text{sen } x|$ en $[0, 2\pi]$.

6.05 Dibuja la gráfica de $f(x) = 2x - |x|$.

6.06 Halla $f(-1)$, $f(0)$ y $f(1/2)$ para $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ x^2, & x = 0 \\ x^2 - 1, & x > 0 \end{cases}$.

6.07 Indica cuál de las dos gráficas corresponde a $f(x) = \begin{cases} x - 1, x < 1 \\ 2x - 3, x \geq 1 \end{cases}$.



6.08 Representa las funciones definidas a trozos.

a) $f(x) = \begin{cases} x - 3, x \leq 0 \\ 2, 0 < x < 3 \\ -x, x \geq 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1, x > 0 \\ 1, x = 0 \\ -x + 1, x < 0 \end{cases}$

6.09 Representa $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, x < -1 \\ -4, x = -1 \\ -x + 3, x > -1 \end{cases}$. Completa las tablas indicadas y describe qué ocurre cerca de $x = -1$.

a) Tabla izquierda: $x = -2; -1{,}5; -1{,}1; -1{,}05$.

b) Tabla derecha: $x = 0; -0{,}5; -0{,}9; -0{,}95$.

c) Compara los valores a ambos lados con $f(-1)$.

6.10 Escribe $g(x) = x/|x|$ como función a trozos y calcula los valores pedidos.

a) $g(3)$.

b) $g(-5)$.

c) $g(-3{,}4)$.

d) $g(0)$.

6.11 Representa las funciones y describe su dominio, recorrido, continuidad y variación.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x < 0 \\ 2x - 3, & x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq -2 \\ \dfrac{-x + 10}{3}, & -2 < x < 1 \\ -x^2 + 3x, & x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2}, & x < -2 \\ -x^2 + 4, & -2 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x - 2}, & x > 2 \end{cases}$

6.12 Representa y describe las características de estas funciones definidas a trozos.

a) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ \dfrac{2}{x - 3}, & 0 < x \leq 4 \\ \sqrt{x}, & x > 4 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 1 \\ \log x, & x > 1 \end{cases}$

6.13 Representa las funciones con valor absoluto.

a) $|2x - 3|$

b) $|-3x + 1|$

c) $|x^2 + 6x + 5|$

d) $|-x^2 + x - 2|$

6.14 Expresa cada función como una función definida a trozos.

a) $f(x) = |x| + |x + 2|$

b) $f(x) = |x + 1| - |1 - x|$

c) $f(x) = |x - 1| - |1 - x|$

d) $f(x) = |2x + 1| - |2 - x|$

6.15 Expresa como funciones definidas a trozos.

a) $|x^2 - 4|$

b) $|1/(x + 2)| - \operatorname{sen} x$

c) $|\sqrt[3]{x - 3}|$

6.16 Representa $f(x) = |||x - 1| - 2| - 3|$ en $[-8, 8]$.

BLOQUE 07

Operaciones, composición e inversas

Álgebra de funciones y reversibilidad. · 25 actividades

7.01 Calcula las funciones inversas. Si no hay inyectividad en todo el dominio, indica una restricción que permita obtener una inversa.

a) $f(x) = -\frac{x}{2} + 1$

b) $f(x) = -x^2 + 4$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2} - 2}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

7.02 Halla la inversa de $f(x) = \frac{7 + x}{x}$. Representa ambas funciones y comprueba su simetría respecto de $y = x$.

7.03 Sean $f(x) = \frac{x}{x + 1}$ y $g(x) = 3x^2 - 1$. Calcula las operaciones indicadas en $x = -2$.

a) $(f - g)(-2)$.

b) $(f \cdot g)(-2)$.

c) $(f/g)(-2)$.

7.04 Sean $f(x) = \sqrt{x^5}$ y $g(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$. Calcula los valores indicados, si existen.

a) $(f \cdot g)(4)$.

b) $(f/g)(-1)$.

c) $(f^2)(2)$.

7.05 Dadas $f(x) = x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{2x - 1}$, calcula las composiciones en $x = 2$.

a) $(f \circ g)(2)$.

b) $(g \circ f)(2)$.

c) $(f \circ f)(2)$.

d) $(g \circ g)(2)$.

7.06 Sean $f(x) = \sqrt{2x^3}$ y $g(x) = x - 4$. Halla las composiciones y evalúalas en $x = 5$. ¿Es conmutativa la composición?

a) $f \circ g$.

b) $g \circ f$.

7.07 Halla y representa las funciones inversas, indicando si es necesario restringir el dominio.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \log(x - 1)$

7.08 Expresa cada función como composición de funciones más sencillas.

a) $f(x) = \text{sen}^2(x^2 + 1)$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x - 1}}$

7.09 Comprueba si cada par de funciones son inversas.

a) $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = \dfrac{x + 5}{2}$

b) $f(x) = \dfrac{3 - x}{4}$, $g(x) = 3 - 4x$

c) $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

7.10 Calcula la función inversa, si existe en el dominio natural. Si no existe, razona por qué.

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = x^2 - 5$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

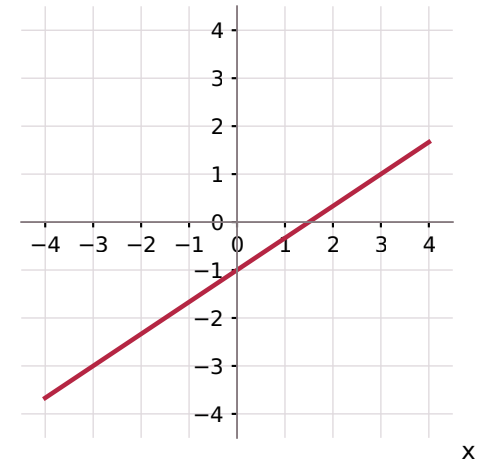
d) $f(x) = x^2 + x$

e) $f(x) = \sqrt{2 - 5x}$

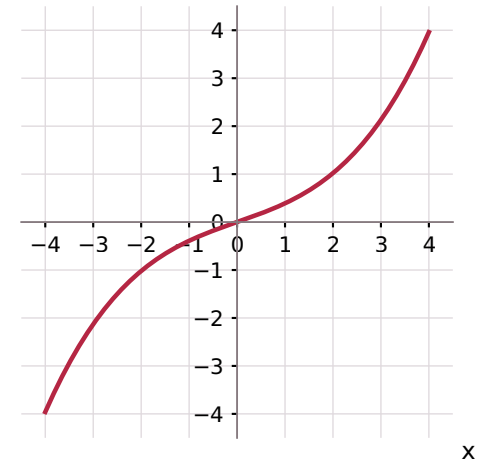
f) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

7.11 Dibuja la gráfica de la función inversa en cada caso.

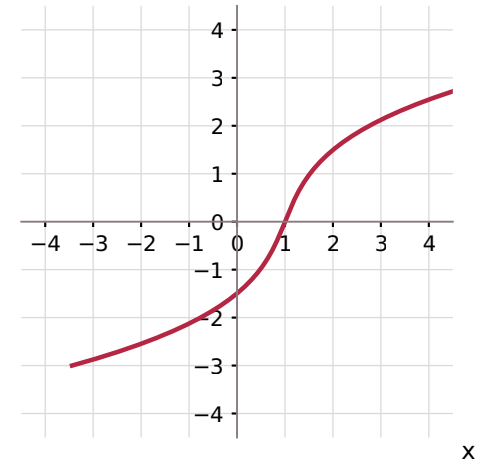
a)



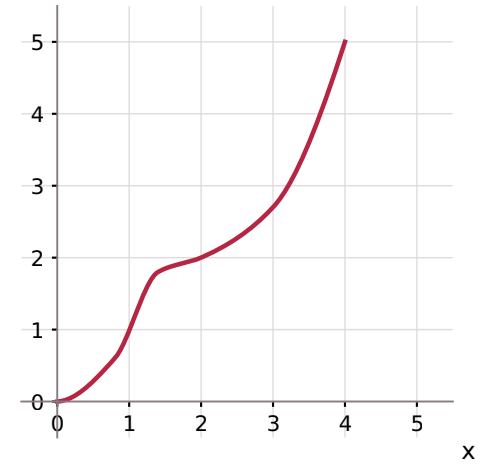
b)



c)



d)



7.12 Halla las inversas. En los casos periódicos o no inyectivos, indica una restricción válida del dominio.

a) $f(x) = \ln(x + 3)$

b) $f(x) = 3 + 4 \cdot 5^x$

c) $f(x) = \dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{2}$

d) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$

e) $f(x) = |x + 1|$

f) $f(x) = \dfrac{1 + \log_3 x}{5}$

7.13 Dadas $f(x) = \dfrac{5x - 1}{x + 3}$ y $g(x) = 4$, calcula.

a) $(f + g)(2)$

b) $(f \cdot g)(1)$

c) $(f - g)(3)$

d) $(f/g)(0)$

7.14 Calcula los dominios de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ y $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Utilízalos para hallar el dominio de las operaciones.

a) $(f + g)(x)$

b) $(f \cdot g)(x)$

c) $(f/g)(x)$

d) $(g/f)(x)$

7.15 Sean $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ y $h(x) = \sqrt{x+1}$. Obtén la expresión y el dominio de cada operación. Las potencias indican productos de una función por sí misma.

a) $f + g$

b) $f - (g + h)$

c) $f \cdot g$

d) g/h

e) f^2

f) $h^2 + f$

g) $g \cdot f + h^2$

h) $(f + g)/h$

7.16 Dadas $f(x) = 4x^2 + 11$ y $g(x) = (5/2)x$, calcula.

a) $(f \circ g)(2)$

b) $(g \circ f)(2)$

c) $(f \circ f)(2)$

d) $(g \circ g)(2)$

7.17 Calcula $(f \circ g)(2)$, sabiendo que $f(10) + 5 = 0$ y $g(2) - 10 = 0$.

7.18 Sean $f(x) = 4$ y $g(x) = -2x^2 + 6x$. Calcula $f \circ g$ y $g \circ f$.

7.19 Dadas $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 5$, calcula $f^{-1} \circ g$ y $g \circ f^{-1}$, indicando los dominios.

7.20 Comprueba, con $f(x) = \sqrt{x + 1}$ y $g(x) = 3x - 2$, que la composición no es conmutativa. Calcula los dominios.

7.21 Encuentra f y g tales que $(f \circ g)(x) = h(x)$.

a) $h(x) = \sqrt{x - 3}$

b) $h(x) = \sqrt{x} - 3$

c) $h(x) = (3x - 1)^4$

d) $h(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x - 2} + 1}$

7.22 Explica cómo componer $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, $g(x) = 5x + 1$ y $h(x) = \dfrac{2}{x + 1}$ para obtener cada función.

a) $i(x) = 5\sqrt{x^2 + 4} + 1$

b) $i(x) = 25x + 6$

c) $i(x) = \dfrac{x + 11}{x + 1}$

d) $i(x) = \sqrt{x^2 + 8}$

7.23 Elige y justifica la opción correcta.

a) Parábola de eje vertical, vértice (2, 1), que pasa por (4, 9). ¿Por qué punto pasa? Opciones: (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6).

b) Si $f(3x - 1) = x^3 + x + 1$, ¿cuánto vale $f(5)$? Opciones: 7, 13, 31, 11, 131.

c) Si $f(x) + 2f(-x) = \operatorname{sen} x$ para todo x real, ¿cuánto vale $f(\pi/2)$? Opciones: -1, $-1/2$, $1/2$, 1, 2.

d) Si $f(x) = 3^x + 5$, ¿cuál es el dominio de f^{-1}? Opciones: $(0, +\infty)$, $(5, +\infty)$, $(8, +\infty)$, $\mathbb{R}$, $(3, +\infty)$.

e) ¿Cuántos ceros tiene $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ en $(0{,}01; 1)$? Opciones: 31, 28, 56, 14, 112.

7.24 ¿Cuántas soluciones tiene cada ecuación en $[-\pi, \pi]$? Razona con sus gráficas.

a) $e^x = 2 - x^2$

b) $\ln x = -x$

c) $\operatorname{sen} x = x/2$

7.25 Una función cumple $f(x) + f\left(\frac{1}{1 - x}\right) = x$ para $x \neq 0, 1$. Halla $f(2)$.

BLOQUE 08

Aplicaciones y modelos

Precios, poblaciones, geometría y entorno. · 19 actividades

8.01 Una tarifa de envío cobra 0,30 € por los primeros 25 g y 0,20 € por cada 25 g adicionales o fracción. Representa el coste para cartas de hasta 150 g.

8.02 Considera estas tarifas telefónicas. Calcula el precio de llamadas de 1, 5, 7, 9 y 12 minutos, indica si el precio es función de la duración y representa las que lo sean.

a) Establecimiento: 0,15 €; cada minuto o fracción: 0,03 €.

b) Sin establecimiento; cada minuto o fracción: 0,05 €.

c) Sin establecimiento; cada minuto o fracción: 0,04 € entre semana y 0,03 € en fin de semana.

8.03 Considera la relación entre el tiempo, en días, y la fracción iluminada del disco lunar que vemos desde la Tierra. ¿Puede modelizarse mediante una función periódica? Indica su periodo aproximado.

8.04 La altura de un objeto lanzado hacia arriba se modeliza mediante $h(t) = v_0 t - 4{,}9t^2 + h_0$, en metros, con t en segundos. Un cohete se lanza desde una plataforma a 2 m del suelo con velocidad inicial de 40 m/s.

a) ¿Qué altura máxima alcanza?

b) Si explota a los 5 s, ¿a qué altura se produce la explosión?

8.05 El precio de un artículo perecedero, en euros, varía con el tiempo t, en días, según $P(t) = \begin{cases} \frac{t}{4} + 8, \ 0 \leq t \leq 4 \\ -\frac{t^2}{4} + 2t + 5, \ 4 < t \leq 10 \end{cases}$.

a) ¿Cuál es el precio inicial?

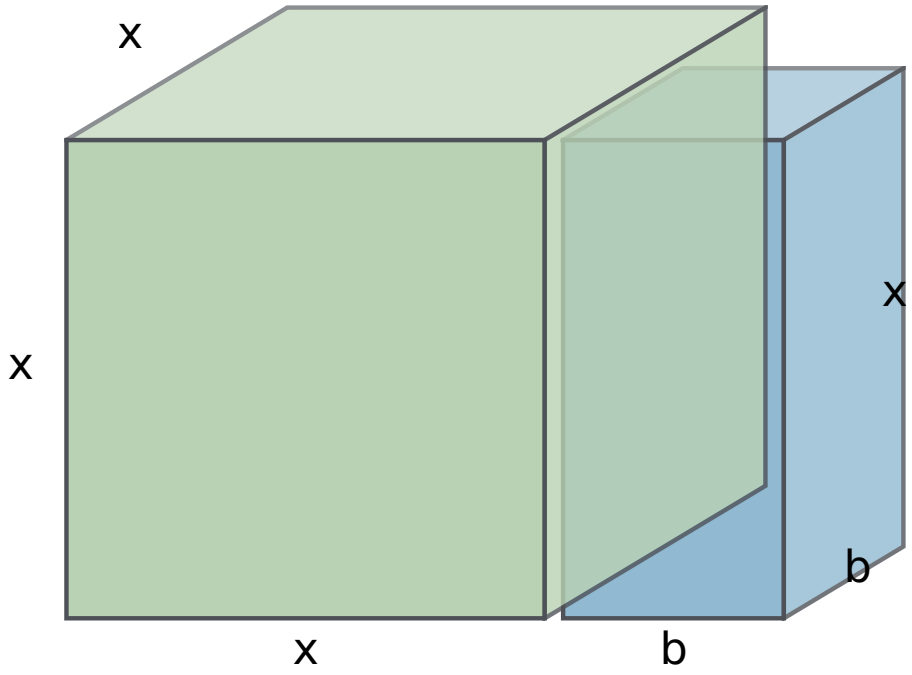
b) Dibuja P(t).

8.06 Un modelo estima el nivel de monóxido de carbono como $M(x) = 1 + 0{,}5x$ partes por millón, donde x es la población en miles. Esta evoluciona según $P(t) = 200 + 257 + 0{,}3t^2$.

a) Expresa el nivel como función del tiempo.

b) Calcula el nivel para t = 10.

8.07 Un sistema tiene dos tanques: uno cúbico de arista x y otro de altura x y base cuadrada de lado b. Obtén el volumen total en función de x y b.



8.08 Se introducen 50 peces en un lago. Un modelo supone que la población se triplica cada dos meses.

a) Escribe la función en función de los meses.

b) ¿Qué población predice después de cuatro años?

c) ¿Cuándo llega a 1000 individuos?

8.09 En un lago, los peces grandes se alimentan de peces pequeños y estos de plancton. El número de peces grandes es $f(x) = 30 + \sqrt{\frac{x}{120}}$, siendo x el número de peces pequeños. A su vez, $x = g(y) = 4y - 1$, donde y es la cantidad de plancton. Expresa la población de peces grandes en función de y.

8.10 La ley de enfriamiento de Newton es F(t) = T + (C − T)e^(−kt), donde T es la temperatura ambiente y C la inicial. Un objeto a 40 °C se deja a 25 °C. A los 10 minutos está a 34 °C. ¿Cuánto tiempo desde el inicio tarda en alcanzar 30 °C?

8.11 Una ONG estima que el número de personas hospitalizadas tras un tsunami es $P(t) = 1 + \frac{110}{t^2 + 10}$, en miles, para $0 < t < 30$, con t en días.

a) ¿Cuántas personas hay el primer día?

b) ¿Cuántas habrá al cabo de tres semanas?

c) Si hay 2000 camas, ¿hasta cuándo se supera la capacidad?

8.12 Las manecillas de un reloj miden 20 y 30 cm. Sea t el tiempo en minutos desde las 12:00, con $0 \leq t \leq 30$.

a) Expresa el ángulo entre ambas en función de t.

b) Halla el área del triángulo formado por los extremos y el centro. ¿Puede valer 0? ¿Cuándo es máxima?

c) Expresa la distancia entre los extremos en función de t.

8.13 Se apilan esferas iguales formando un tetraedro con n esferas en cada arista. Calcula el número total de puntos de tangencia en función de n.

8.14 En un modelo simplificado del perfil atmosférico ecuatorial, la estratosfera se representa entre 15 y 50 km de altura. ¿Qué espesor tiene?

8.15 ¿Cómo varía la temperatura con la altura en las capas de la atmósfera? ¿Basta una única proporcionalidad directa?

8.16 ¿En qué parte de la atmósfera se registran las temperaturas más bajas?

8.17 Para estimar la temperatura atmosférica a 110 km de altura, ¿basta conocer la altura? Explica cómo usarías un gráfico de temperatura frente a altura.

8.18 ¿Dónde está la capa de ozono? Investiga su recuperación y explica por qué es importante conservarla.

8.19 La temperatura al nivel del mar es 20 °C. Un modelo troposférico supone un descenso de 6 °C por kilómetro. Estima la temperatura a 8848 m, altura del Everest utilizada en el modelo.

COMPRUEBA TUS RESULTADOS

Solucionario

Respuestas y justificaciones. Los códigos coinciden con los de las actividades.

01 · Concepto, dominio y recorrido

1.01

a) Sí. Cada abscisa tiene una única ordenada.

b) No. Algunas rectas verticales cortan la curva en más de un punto.

1.02

a) No en general: un mismo peso puede corresponder a diferentes números de piezas, porque su tamaño varía.

b) Sí, si se conoce una tarifa por kilogramo: a cada peso le corresponde un único importe. Sin fijar la tarifa, el peso por sí solo no determina el importe.

c) No queda determinado por el peso comprado: depende del tipo de fruta y de la tarifa. Con una tarifa fija sería una función constante.

1.03

a) $\mathbb{R}$.

b) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

c) $\mathbb{R}$.

d) $\mathbb{R}$.

e) $\mathbb{R}$.

f) $[1/3, +\infty)$.

g) $(16, +\infty)$.

h) $\mathbb{R}$.

1.04 Dominio: $[-4, 3] \cup (4, 6)$. Recorrido: $[-3, 2] \cup \{4\}$. Los puntos vacíos no se incluyen.

1.05

a) $\mathbb{R}$: la raíz cúbica admite cualquier radicando real.

b) $(-\infty, -6] \cup [6, +\infty)$, porque $x^2 - 36 \geq 0$.

1.06 Se exige $x \neq 0$ y $x + 3 \geq 0$. Dominio: $[-3, 0) \cup (0, +\infty)$.

1.07

a) Sí. Cada abscisa tiene una sola ordenada.

b) No. Hay abscisas con más de una ordenada.

c) No. Algunas rectas verticales cortan dos veces la curva.

d) Sí. La oscilación de la curva no impide que cada x tenga un único valor de y.

1.08

a) Los tres: es un polinomio.

b) Solo $x = 2$. El denominador $x(x + 3)$ se anula en -3 y 0.

c) $x = -3$ y $x = 0$ sí; $x = 2$ no, pues se exige $x \leq 1/2$.

d) Ninguno: se necesita $-x - 4 > 0$, es decir, $x < -4$.

1.09

a) $y = 3$ sí, para $x = 4$; $y = 2$ sí, para $x = 7/3$; $y = -5$ no, porque una raíz cuadrada es no negativa.

b) $y = 0$ sí, para $x = 2$ o 3; $y = 30$ sí, para $x = -3$ u 8; $y = -3$ no, porque el mínimo de la parábola es $-1/4$.

1.10

a) $\mathbb{R}$.

b) $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

c) $\mathbb{R}$: $x^2 + 1$ nunca es cero.

d) $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$: el denominador es $(x + 2)^2$.

1.11

a) $[7/3, +\infty)$.

b) $\mathbb{R}$: $x^2 + x + 10$ es siempre positivo.

c) $(-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$.

d) $(-\infty, 0] \cup [1/3, +\infty)$.

1.12

a) $(4, +\infty)$.

b) $\mathbb{R}$.

c) $(0, +\infty)$, por el logaritmo del exponente.

d) $\mathbb{R}$.

1.13

a) $[-1, 8]$: deben cumplirse $x \geq -1$ y $x \leq 8$.

b) Dominio vacío: la primera raíz exige $x \geq 2$ y la segunda $x \leq 1$; no pueden cumplirse ambas condiciones.

1.14

a) $[1/3, +\infty)$.

b) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

c) $\mathbb{R}$: la raíz cúbica admite radicandos negativos.

d) $[0, +\infty)$.

1.15

a) Se exige $x \geq 5$ y $2 - \sqrt{(x - 5)} \neq 0$. Dominio $[5, 9) \cup (9, +\infty)$.

b) Se exige $x \geq 1/3$ y $4 - \sqrt{(x + 1)} \neq 0$. Dominio $[1/3, 15) \cup (15, +\infty)$.

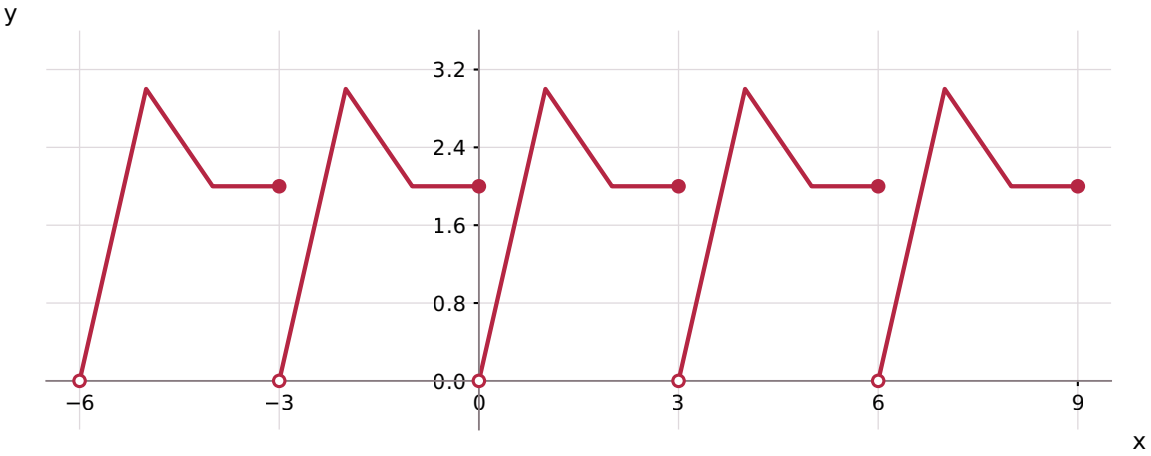
02 · Simetría, periodicidad y transformaciones

2.01 **a)** Impar: $f(-x) = -f(x)$, con dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Ni par ni impar: $f(-x) = 1 + 6/x - 7/x^2$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$.

c) Par: $f(-x) = f(x)$, con dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2.02 Se traslada el tramo horizontalmente 3k unidades, con k entero: $f(x + 3) = f(x)$. En los múltiplos de 3 se toma el valor 2, extremo cerrado; el valor 0 es un extremo abierto.



2.03 **a)** $g(x) = f(x) - 3$: traslación de 3 unidades hacia abajo.

b) $g(x) = f(x + 2)$: traslación de 2 unidades hacia la izquierda.

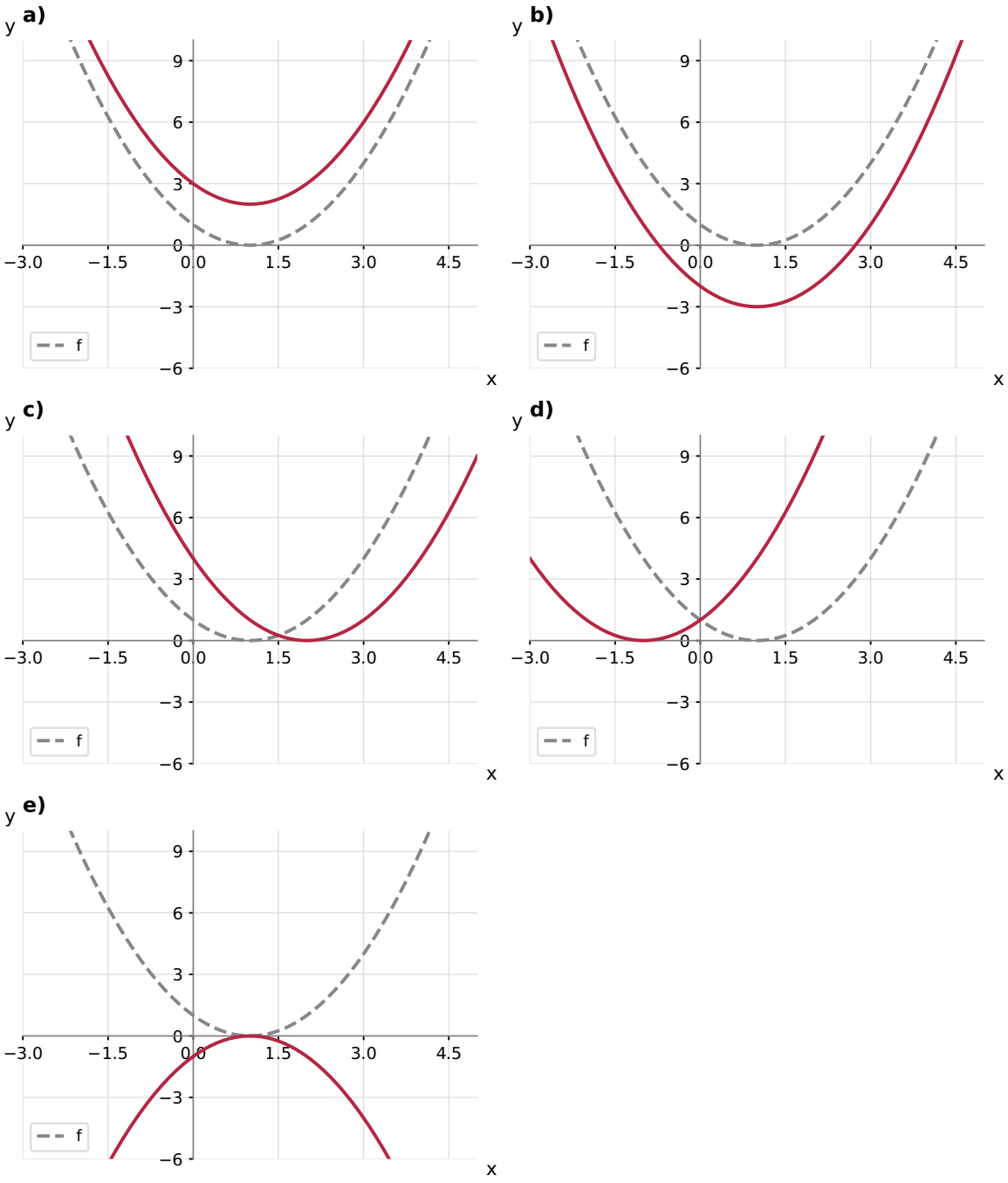
2.04 **a)** g(x) = f(x) + 2. Traslación de 2 unidades hacia arriba; vértice (1, 2).

b) h(x) = f(x) − 3. Traslación de 3 unidades hacia abajo; vértice (1, −3).

c) i(x) = f(x − 1). Traslación de 1 unidad hacia la derecha; vértice (2, 0).

d) j(x) = f(−x). Simetría respecto a Y; vértice (−1, 0).

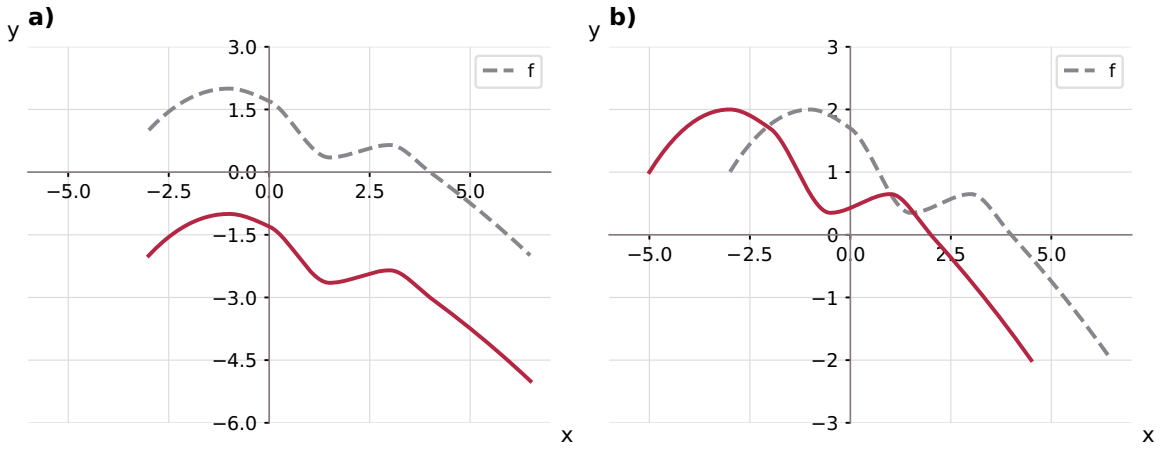
e) k(x) = −f(x). Simetría respecto a X; vértice (1, 0) y ramas hacia abajo.



2.05 T = 2π/2 = π, porque cos(2(x + π)) = cos(2x + 2π) = cos(2x).

2.06 **a)** Se traslada toda la curva 3 unidades hacia abajo: (x, y) pasa a (x, y − 3).

b) Se traslada toda la curva 2 unidades hacia la izquierda: (x, y) pasa a (x − 2, y).



2.07 **a)** Impar: f(−x) = −f(x).

b) Par: f(−x) = f(x).

c) Ni par ni impar.

d) Par: f(−x) = f(x).

2.08 **a)** Ni par ni impar. Para $x \neq 0$, $f(x) = 3x - 1$ y $f(-x) = -3x - 1$.

b) Impar: el numerador es impar y el denominador es par y no se anula.

2.09 **a)** T = 3: un mismo patrón completo se repite cada 3 unidades.

b) T = 2: el patrón completo se repite cada 2 unidades.

2.10 Todas son parábolas con ramas hacia arriba. f tiene vértice (0, 0); g traslada f 3 unidades hacia arriba y tiene vértice (0, 3); h la traslada 4 unidades a la derecha, con vértice (4, 0); i mantiene el vértice (0, 0) y tiene menor abertura.

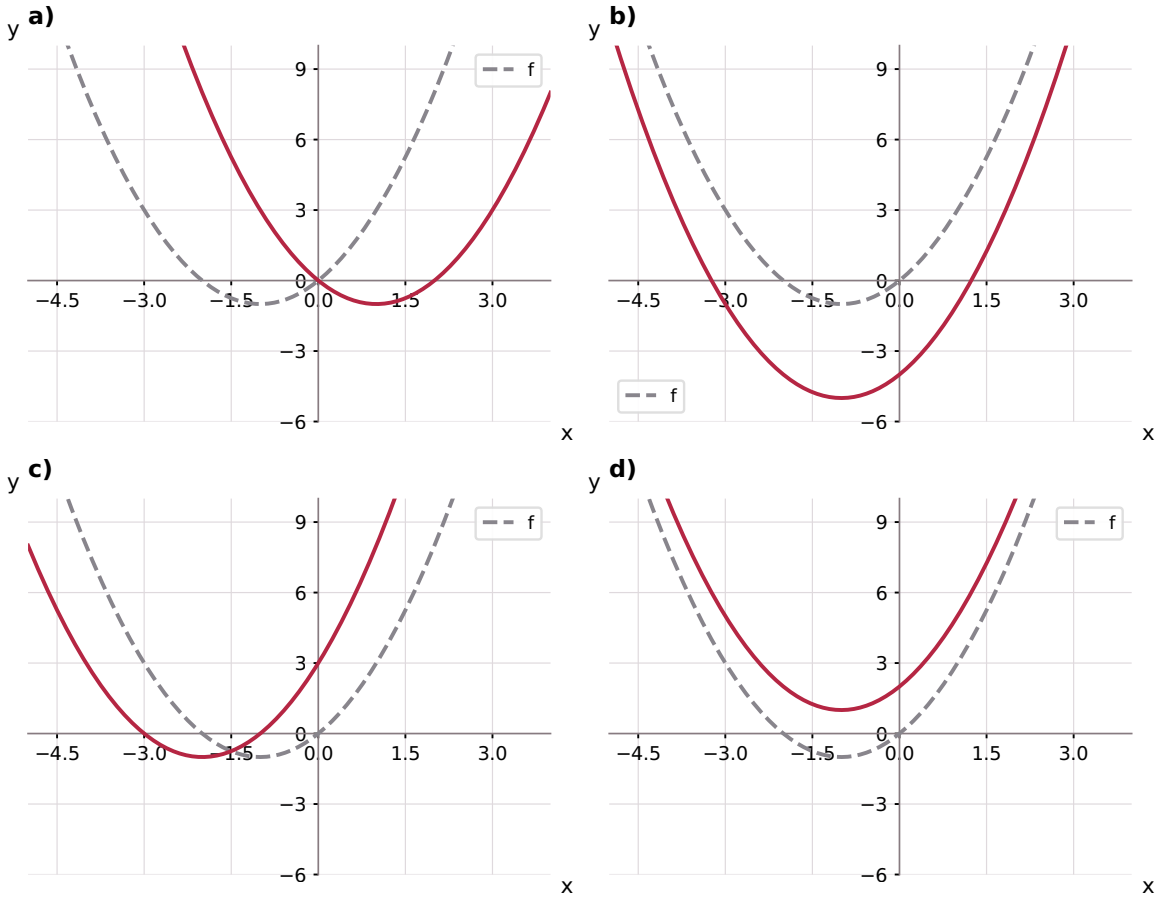


2.11 **a)** $f(x-2) = x^2 - 2x$: traslación 2 unidades a la derecha; vértice $(1, -1)$.

b) $f(x) - 4 = x^2 + 2x - 4$: traslación 4 unidades hacia abajo; vértice $(-1, -5)$.

c) $f(x+1) = x^2 + 4x + 3$: traslación 1 unidad a la izquierda; vértice $(-2, -1)$.

d) $f(x) + 2 = x^2 + 2x + 2$: traslación 2 unidades hacia arriba; vértice $(-1, 1)$.



2.12 **a)** $g(x) = \dfrac{2}{x-3}$

b) $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$

c) $g(x) = \dfrac{2}{x} - 2$

d) $g(x) = \dfrac{2}{x} + 3$

e) $g(x) = -\dfrac{2}{x}$

f) $g(x) = -\dfrac{2}{x}$

2.13 **a)** $g(x) = f(x+4)$: traslación de 4 unidades a la izquierda.

b) $h(x) = f(x) + 1$: traslación de 1 unidad hacia arriba.

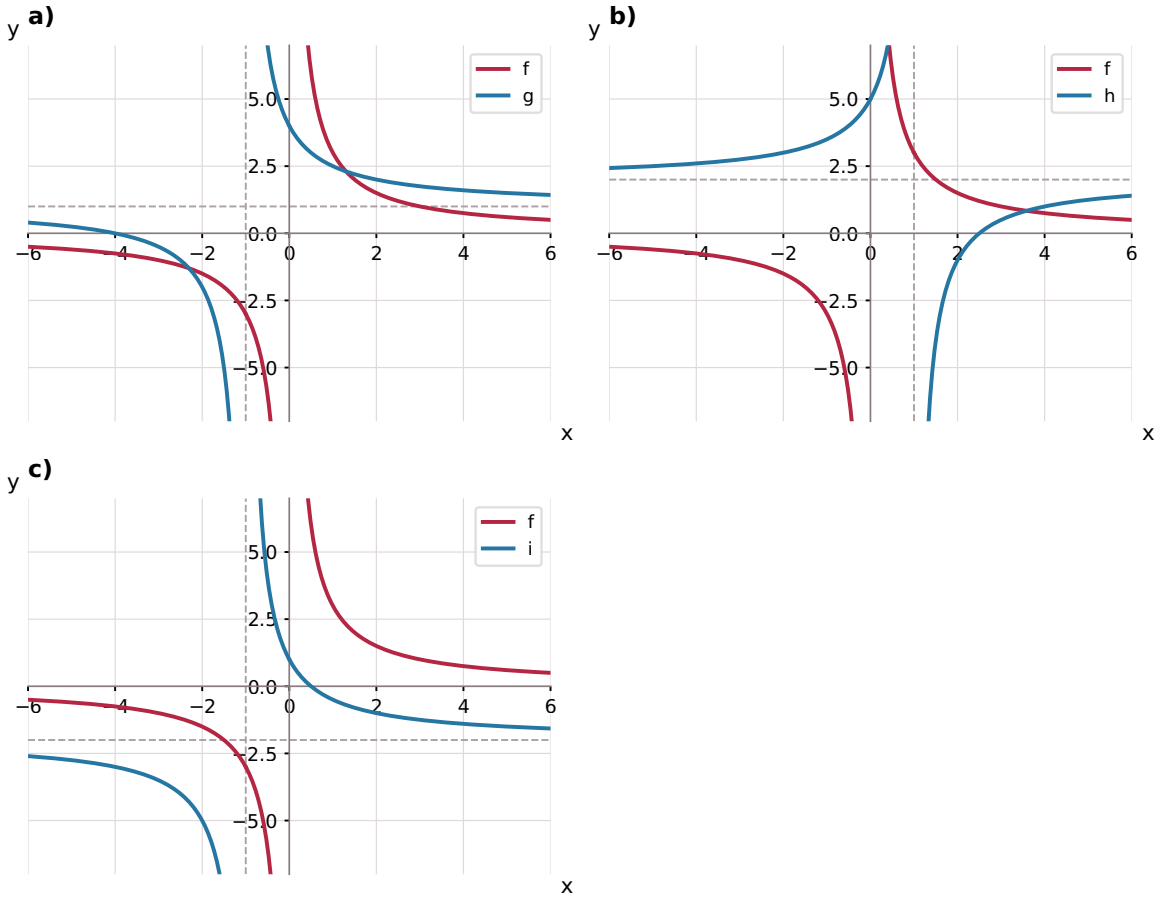
c) $i(x) = -f(x)$: simetría respecto de X. Como f es impar, coincide también con $f(-x)$, la simétrica respecto de Y.

2.14

a) $g(x) = 1 + \dfrac{3}{x+1} = f(x+1) + 1$. Asíntotas $x = -1$ e $y = 1$.

b) $h(x) = 2 - \dfrac{3}{x-1} = -f(x-1) + 2$. Asíntotas $x = 1$ e $y = 2$.

c) $i(x) = -2 + \dfrac{3}{x+1} = f(x+1) - 2$. Asíntotas $x = -1$ e $y = -2$.



2.15

a) g(x − 3): 3 unidades hacia la derecha; asíntota y = 0.

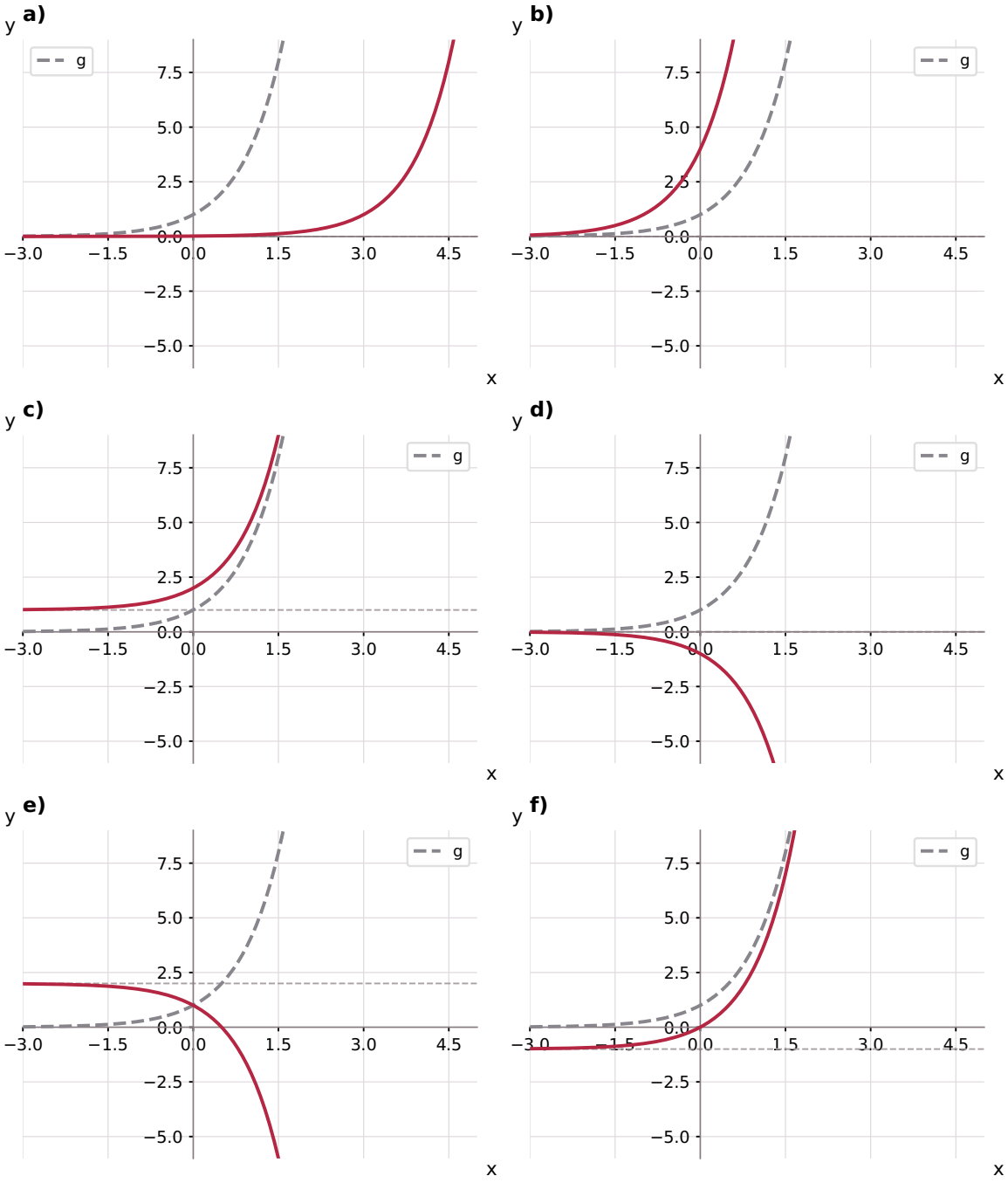
b) g(x + 1): 1 unidad hacia la izquierda; asíntota y = 0.

c) g(x) + 1: 1 unidad hacia arriba; asíntota y = 1.

d) −g(x): simetría respecto de X; asíntota y = 0.

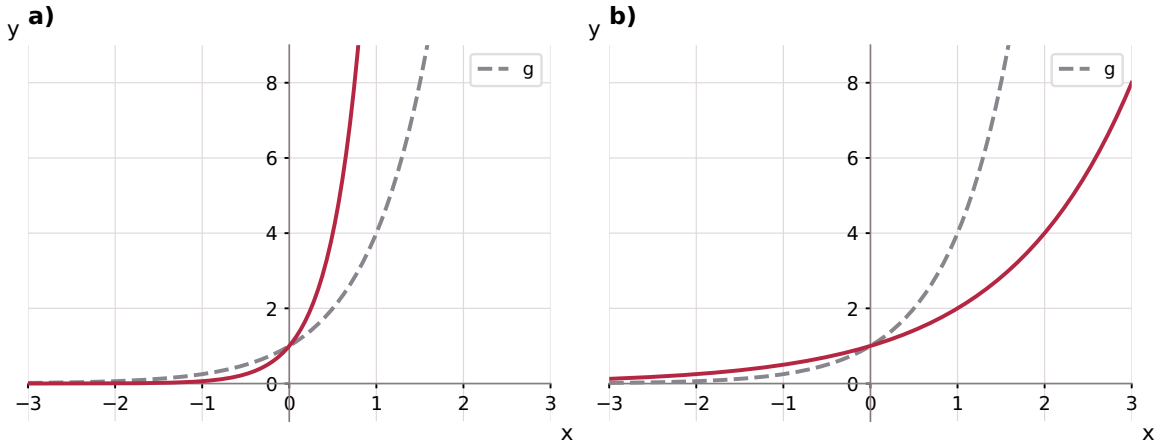
e) −g(x) + 2: simetría respecto de X y traslación 2 unidades hacia arriba; asíntota y = 2.

f) g(x) − 1: 1 unidad hacia abajo; asíntota y = −1.



2.16 **a)** $4^{2x} = 16^x = g(2x)$: las abscisas de la gráfica de g se dividen por 2.

b) 4^(x/2) = 2^x = g(x/2): las abscisas se multiplican por 2. Ambas pasan por (0, 1) y tienen asíntota y = 0.



2.17 **a)** g(x) − 3: 3 unidades hacia abajo.

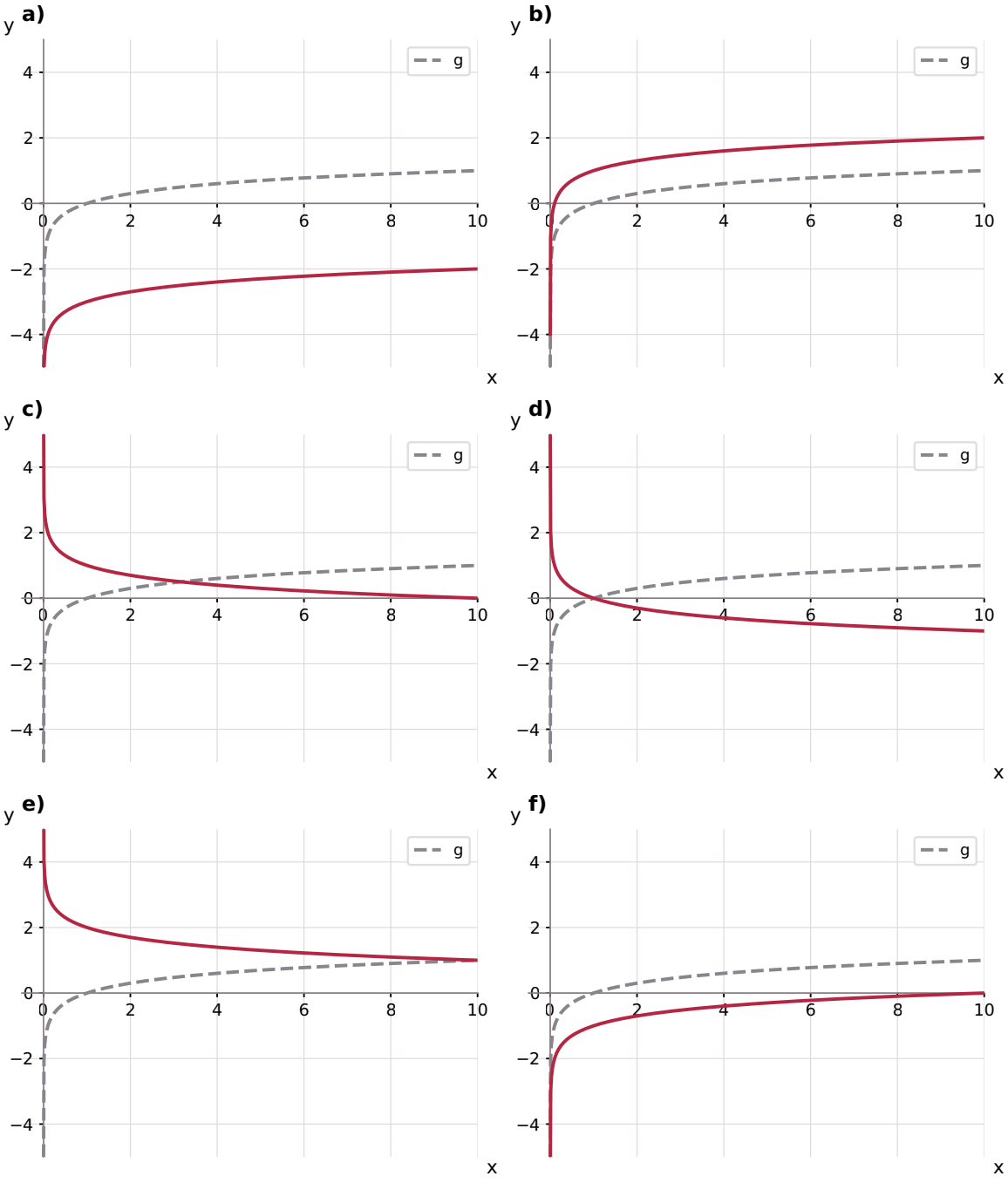
b) g(x) + 1: 1 unidad hacia arriba.

c) −g(x) + 1: simetría respecto de X y 1 unidad hacia arriba.

d) −g(x): simetría respecto de X.

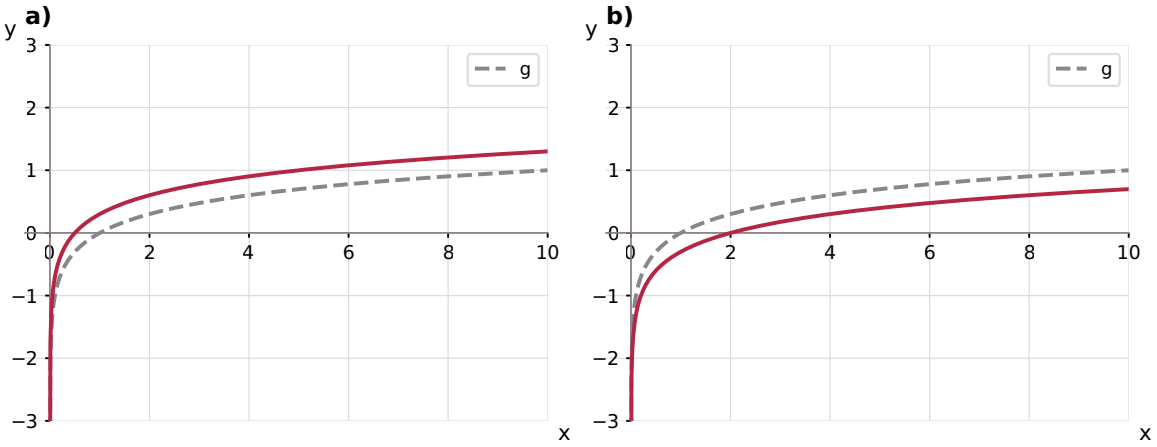
e) −g(x) + 2: simetría respecto de X y 2 unidades hacia arriba.

f) g(x) − 1: 1 unidad hacia abajo. Todas tienen dominio (0, +∞), recorrido ℝ y asíntota x = 0.



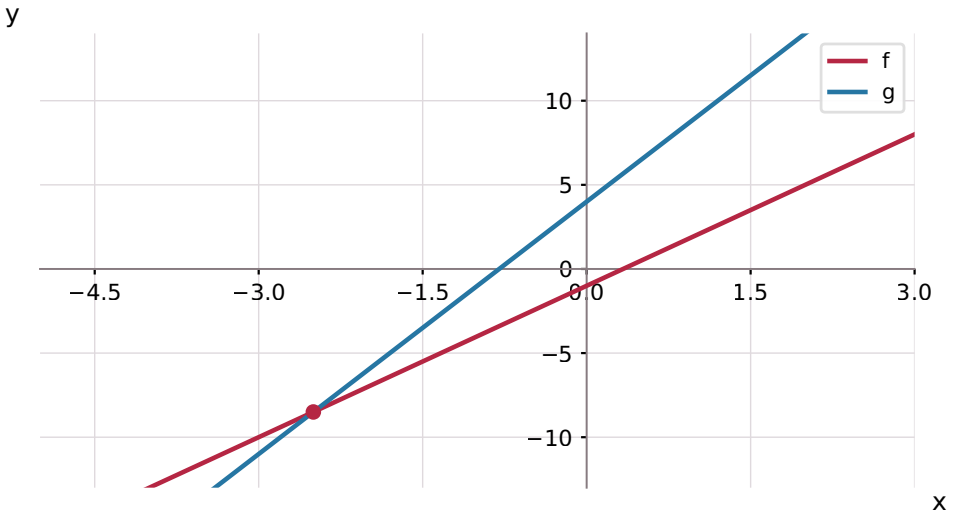
2.18 **a)** log(2x) = log x + log 2: traslación vertical log 2 ≈ 0,301 unidades hacia arriba; equivale a dividir las abscisas por 2. Cero x = 1/2.

b) log(x/2) = log x − log 2: traslación vertical log 2 unidades hacia abajo; equivale a multiplicar las abscisas por 2. Cero x = 2.



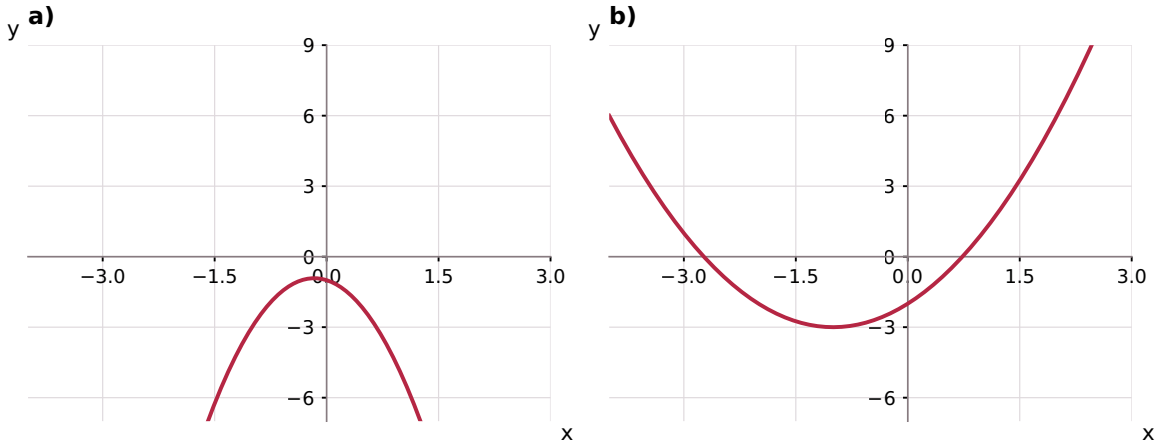
03 · Polinómicas, racionales y radicales

3.01 $3x - 1 = 5x + 4$ da $x = -5/2$. El punto común es $(-5/2, -17/2)$.



3.02 **a)** Vértice $(-1/6, -11/12)$, eje $x = -1/6$ y ramas hacia abajo. No corta X; corta Y en $(0, -1)$.

b) Vértice $(-1, -3)$, eje $x = -1$ y ramas hacia arriba. Cortes con X: $x = -1 \pm \sqrt{3}$; con Y: $(0, -2)$.

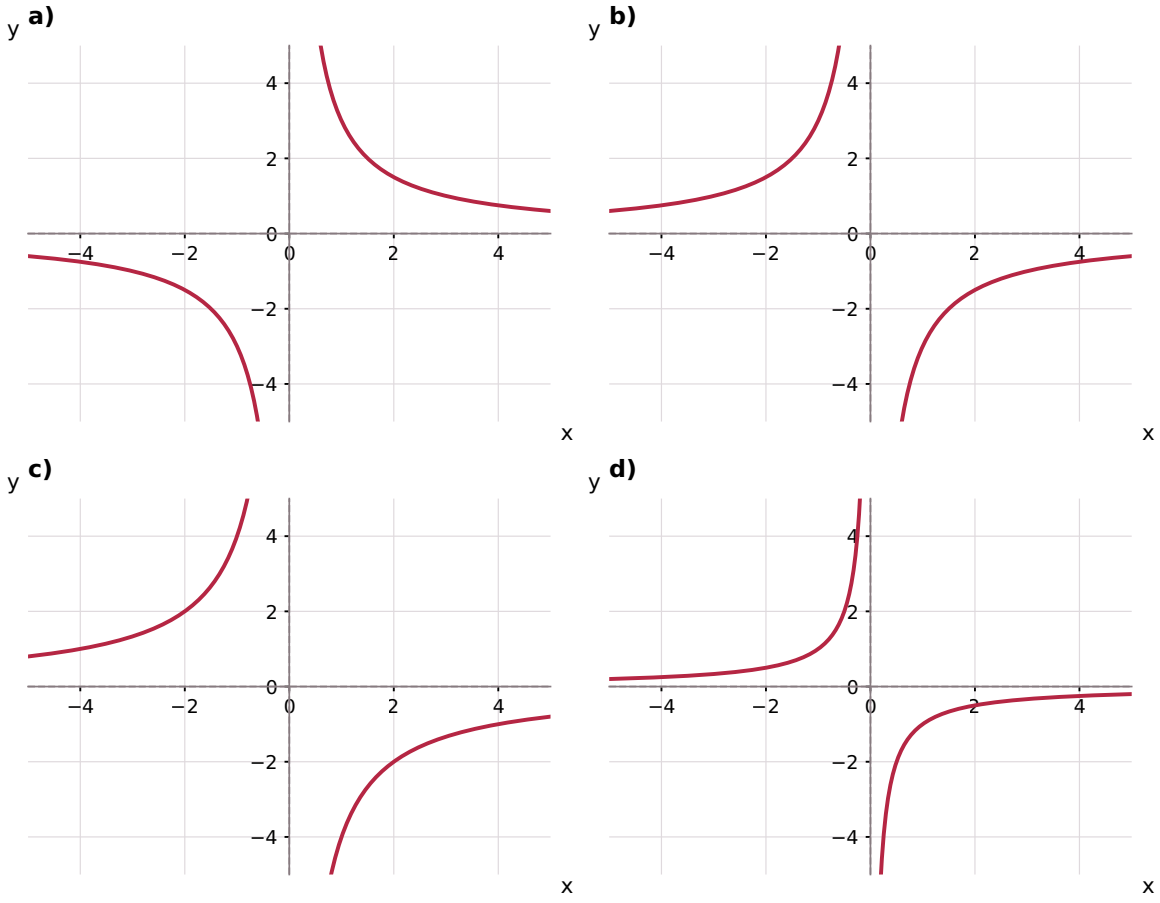


3.03 **a)** Cuadrantes I y III; puntos (1, 3), (3, 1), (−1, −3), (−3, −1).

b) Cuadrantes II y IV; puntos (1, −3), (3, −1), (−1, 3), (−3, 1).

c) Cuadrantes II y IV; puntos (1, −4), (2, −2), (−1, 4), (−2, 2).

d) Cuadrantes II y IV; puntos (1, −1), (−1, 1). En todos los casos las asíntotas son x = 0 e y = 0.



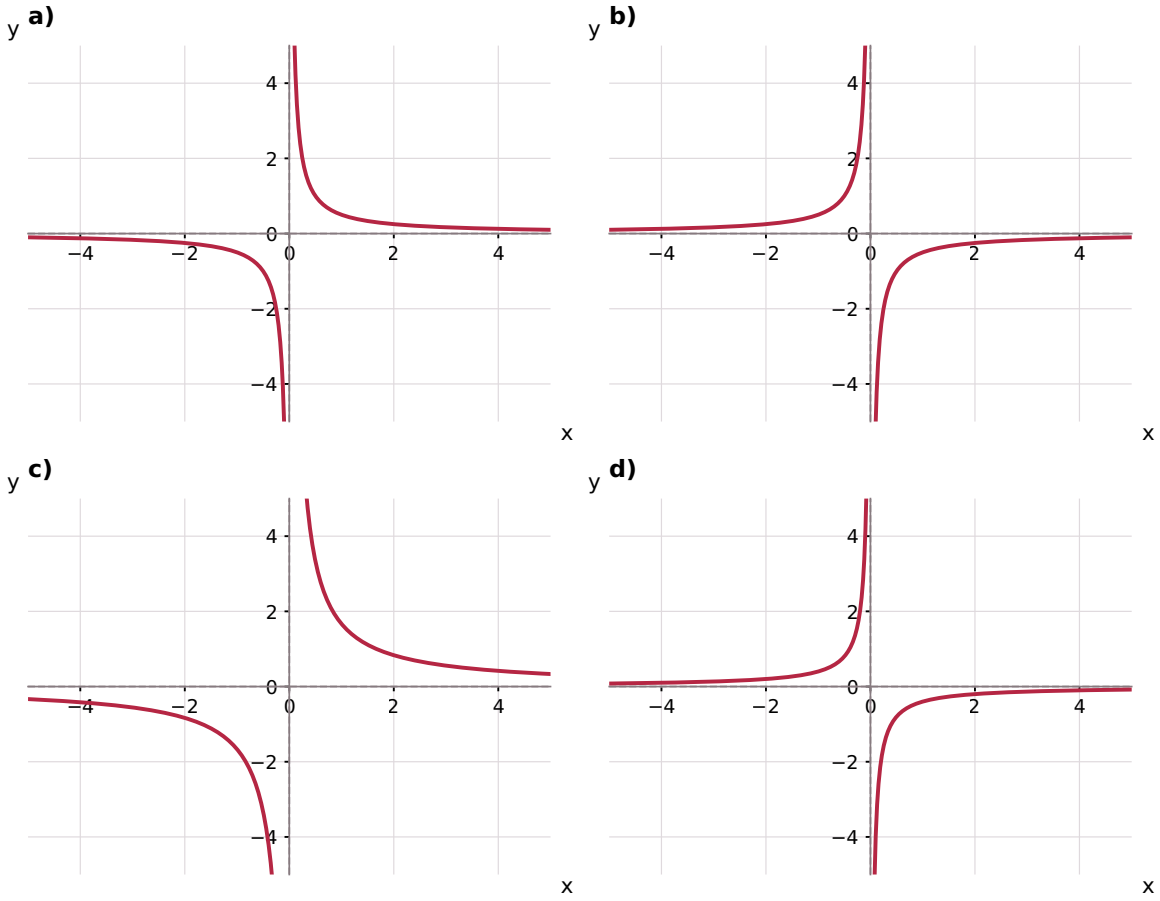
3.04

a) Asíntotas x = 0 e y = 0. Puntos (1, 1/2), (1/2, 1), (−1, −1/2).

b) Asíntotas x = 0 e y = 0. Puntos (1, −1/2), (1/2, −1), (−1, 1/2).

c) Asíntotas x = 0 e y = 0. Puntos (1, 5/3), (5/3, 1), (−1, −5/3).

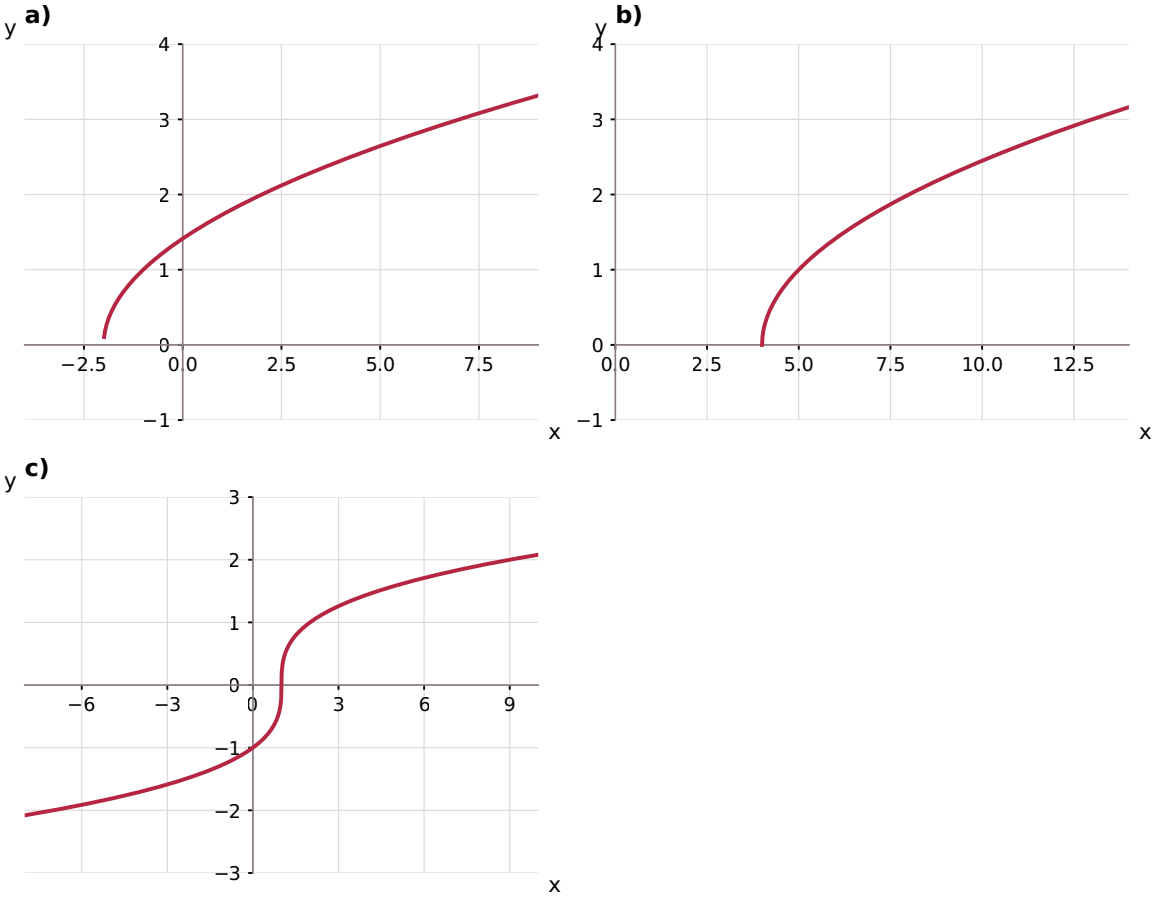
d) Asíntotas x = 0 e y = 0. Puntos (1, −2/5), (2/5, −1), (−1, 2/5).



3.05 **a)** Dominio $[-2, +\infty)$, recorrido $[0, +\infty)$. Puntos $(-2, 0)$, $(-1, 1)$, $(2, 2)$, $(7, 3)$.

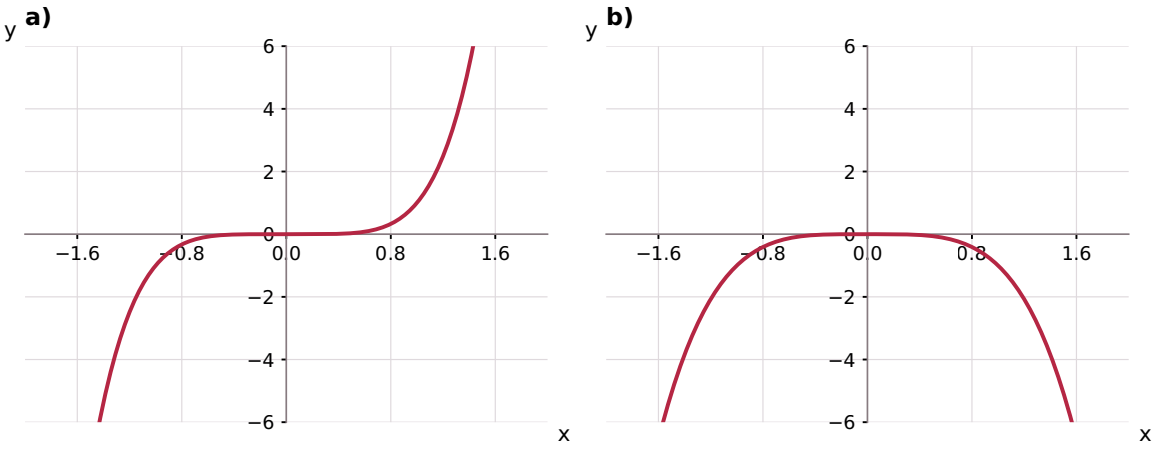
b) Dominio $[4, +\infty)$, recorrido $[0, +\infty)$. Puntos $(4, 0)$, $(5, 1)$, $(8, 2)$, $(13, 3)$.

c) Dominio y recorrido $\mathbb{R}$. Puntos $(-7, -2)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(9, 2)$.



3.06 **a)** x^5 es impar, estrictamente creciente y pasa por $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$. Dominio y recorrido $\mathbb{R}$.

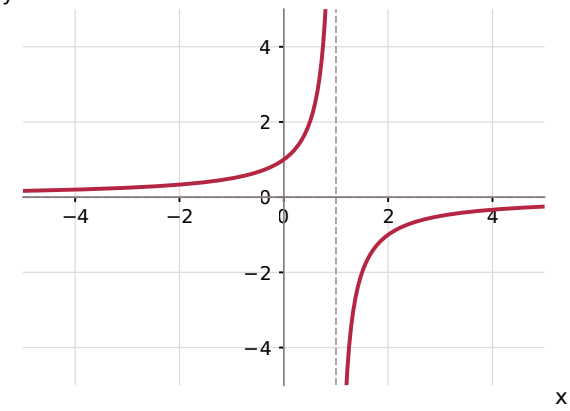
b) $-x^4$ es par, crece en $(-\infty, 0]$ y decrece en $[0, +\infty)$. Máximo absoluto $(0, 0)$; recorrido $(-\infty, 0]$.



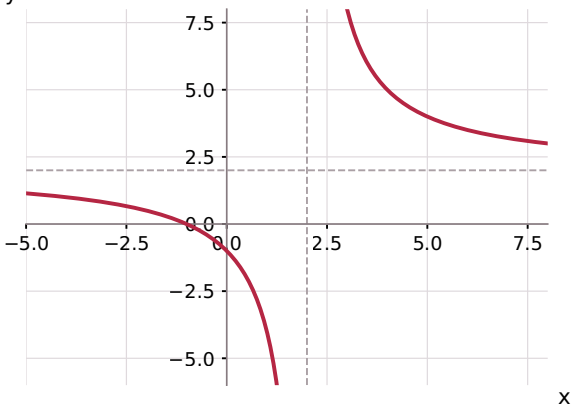
3.07 **a)** Es $-1/x$ trasladada 1 unidad a la derecha. Asíntotas $x = 1$ e $y = 0$. Punto $(0, 1)$.

b) $f(x) = 2 + \frac{6}{x - 2}$. Es $6/x$ trasladada 2 unidades a la derecha y 2 hacia arriba. Asíntotas $x = 2$ e $y = 2$. Cortes $(-1, 0)$ y $(0, -1)$.

a)



b)



3.08

a) m = 2/3, n = −1/2; corte con X en x = 3/4.

b) Recta horizontal y = −2; pendiente 0.

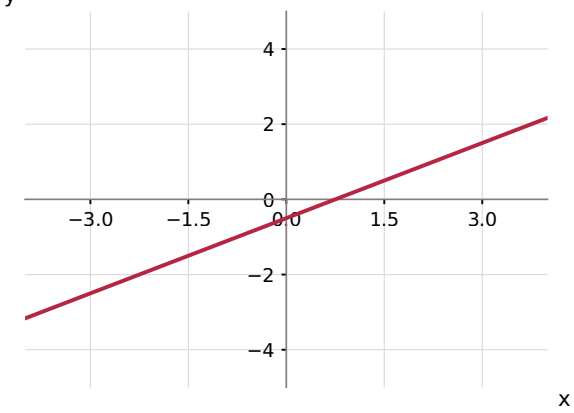
c) Recta horizontal y = 7/2; pendiente 0.

d) m = 2/5, n = −3/5; corte con X en x = 3/2.

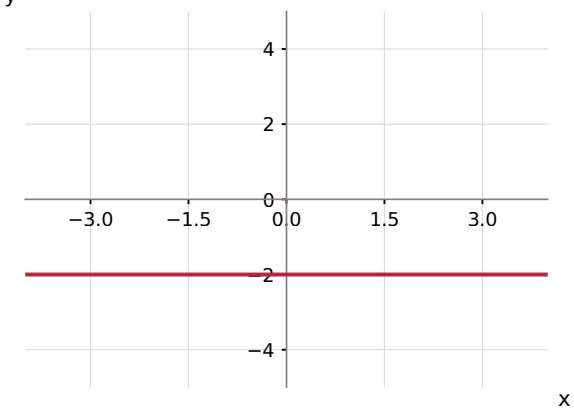
e) m = −3, n = 5/2; corte con X en x = 5/6.

f) m = −2/3, n = 0; pasa por el origen.

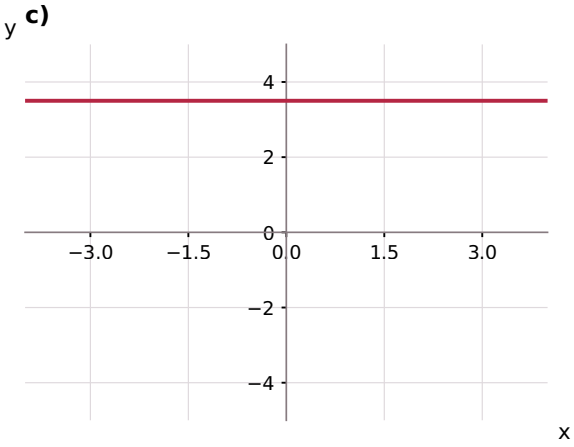
a)



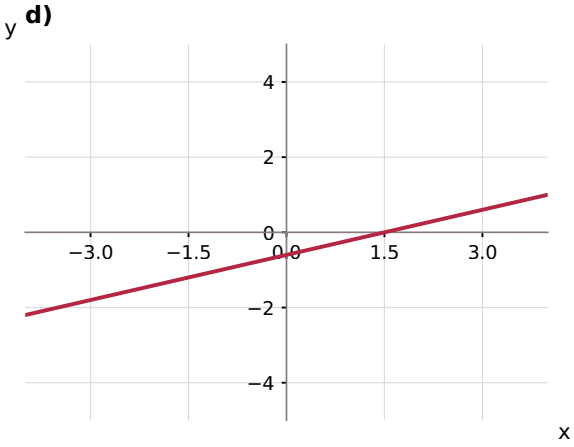
b)



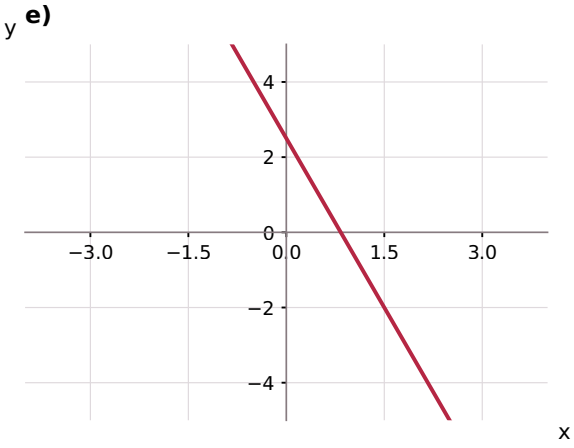
c)



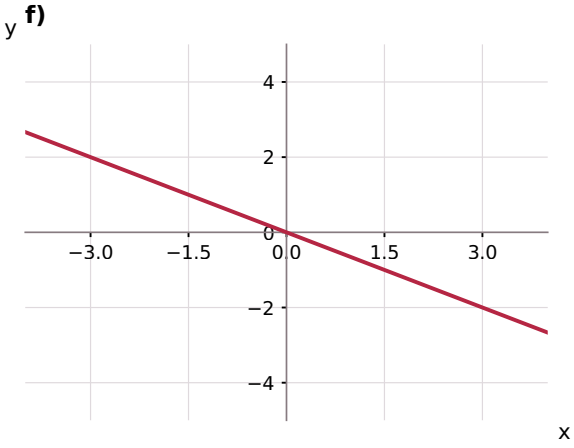
d)



e)



f)



3.09

a) f(x) = 2; pendiente 0, ordenada 2.

b) g(x) = −x − 3; pendiente −1, ordenada −3.

c) h(x) = −x + 1; pendiente −1, ordenada 1.

d) i(x) = x/3; pendiente 1/3, ordenada 0.

3.10

Todas tienen vértice (0, 0), eje Y y ramas hacia arriba. Cuanto mayor es el coeficiente positivo de x^2, menor es la abertura. De más estrecha a más ancha: h, f, g, i.



3.11

a) V(3, 1).

b) V(−2, 14).

c) V(0, −4).

d) V(−2, 6).

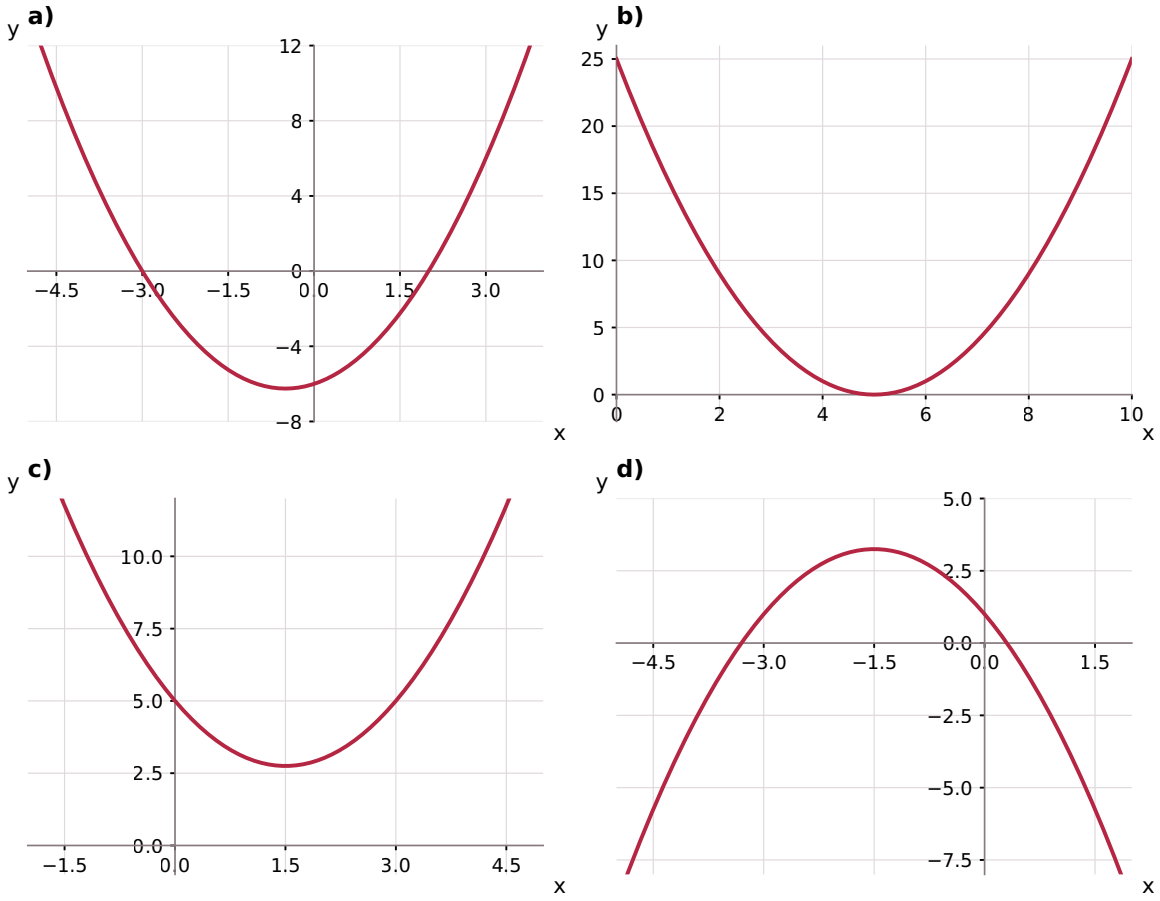
3.12

a) V(−1/2, −25/4); ceros −3 y 2; corte con Y en −6. Ramas hacia arriba.

b) f(x) = (x − 5)²; V(5, 0), raíz doble 5 y corte con Y en 25. Ramas hacia arriba.

c) V(3/2, 11/4); no tiene ceros reales y corta Y en 5. Ramas hacia arriba.

d) V(−3/2, 13/4); ceros (−3 ± √13)/2; corte con Y en 1. Ramas hacia abajo.



3.13

a) Azul: vértice (0, 0), abertura de $-x^2$.

b) Morada: vértice (0, 3).

c) Roja: vértice (0, −3).

d) Verde: vértice (0, 0) y menor abertura que $-x^2$.

3.14

a) Curva f. Vértice (−3, −11/2), ramas hacia arriba.

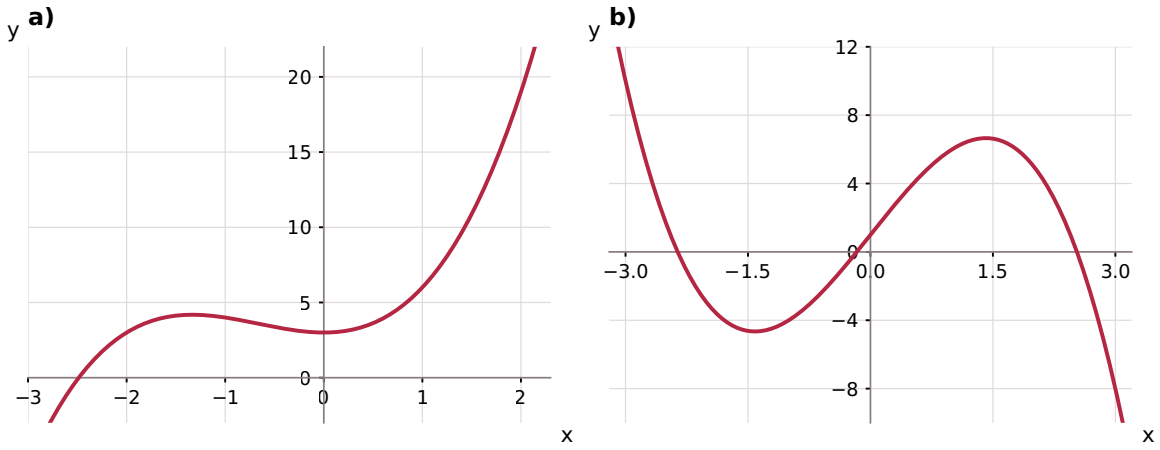
b) Curva g. Vértice (1/2, 1/2), ramas hacia arriba.

c) Curva h. Vértice (−3/2, 11/4), ramas hacia abajo.

d) Curva i. Vértice (1/4, −7/8), ramas hacia abajo.

3.15 **a)** Para x = −2,5; −2; −1,5; −1; −0,5; 0; 1; 2, los valores son −0,125; 3; 4,125; 4; 3,375; 3; 6; 19.

b) Para x = −3; −2; −1; 0; 1; 2; 3, los valores son 10; −3; −4; 1; 6; 5; −8.

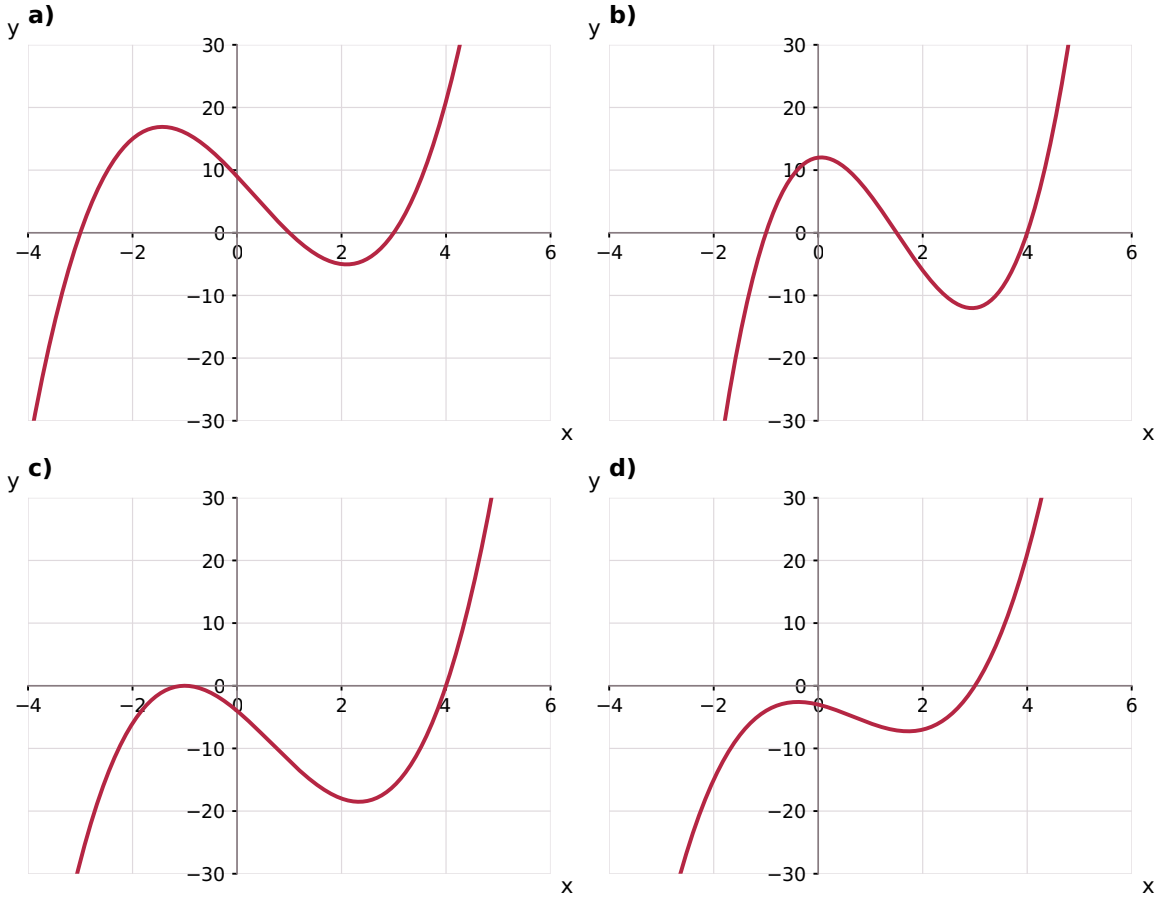


3.16 **a)** f(x) = (x + 3)(x − 1)(x − 3). Cortes con X: (−3, 0), (1, 0), (3, 0); con Y: (0, 9).

b) f(x) = (x + 1)(2x − 3)(x − 4). Cortes con X: (−1, 0), (3/2, 0), (4, 0); con Y: (0, 12).

c) f(x) = $(x + 1)^2(x - 4)$. Cortes con X: (−1, 0), raíz doble, y (4, 0); con Y: (0, −4).

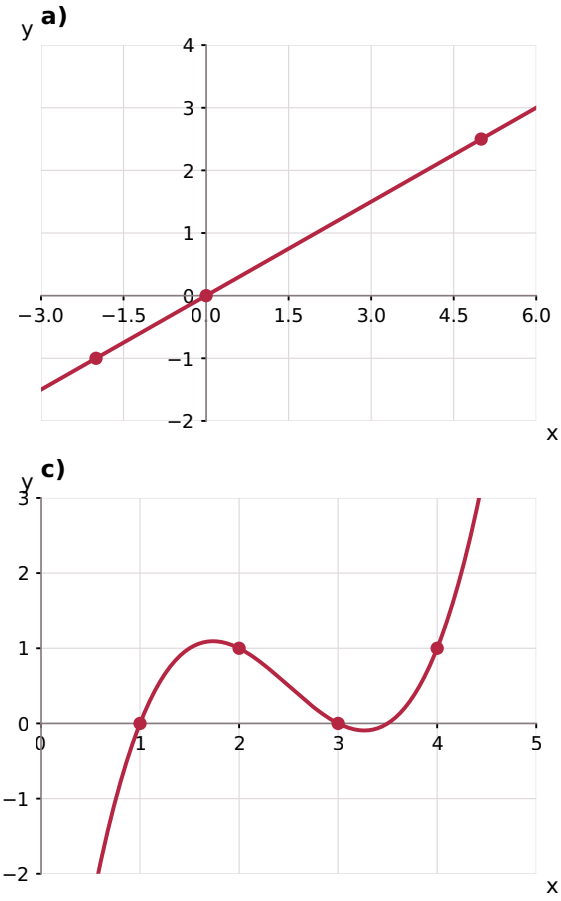
d) f(x) = $(x - 3)(x^2 + x + 1)$. Único cero real x = 3; corte con Y: (0, −3).

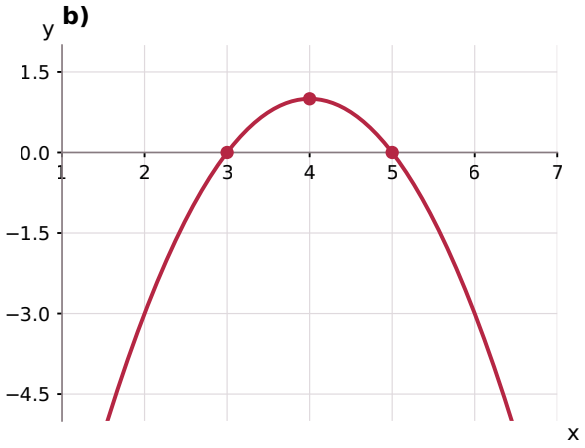


3.17 **a)** f(x) = x/2. Los tres puntos están alineados; grado 1.

b) $f(x) = -x^2 + 8x - 15 = -(x - 3)(x - 5)$; grado 2.

c) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + \frac{34}{3}x - 7$. Grado 3: un polinomio de grado 2 con ceros 1 y 3 y valor 1 en x = 2 daría −3 en x = 4, no 1.





3.18 **a)** Azul: asíntotas x = −3 e y = 0.

b) Verde: asíntotas x = 4 e y = 0.

c) Roja: asíntotas x = 0 e y = 2.

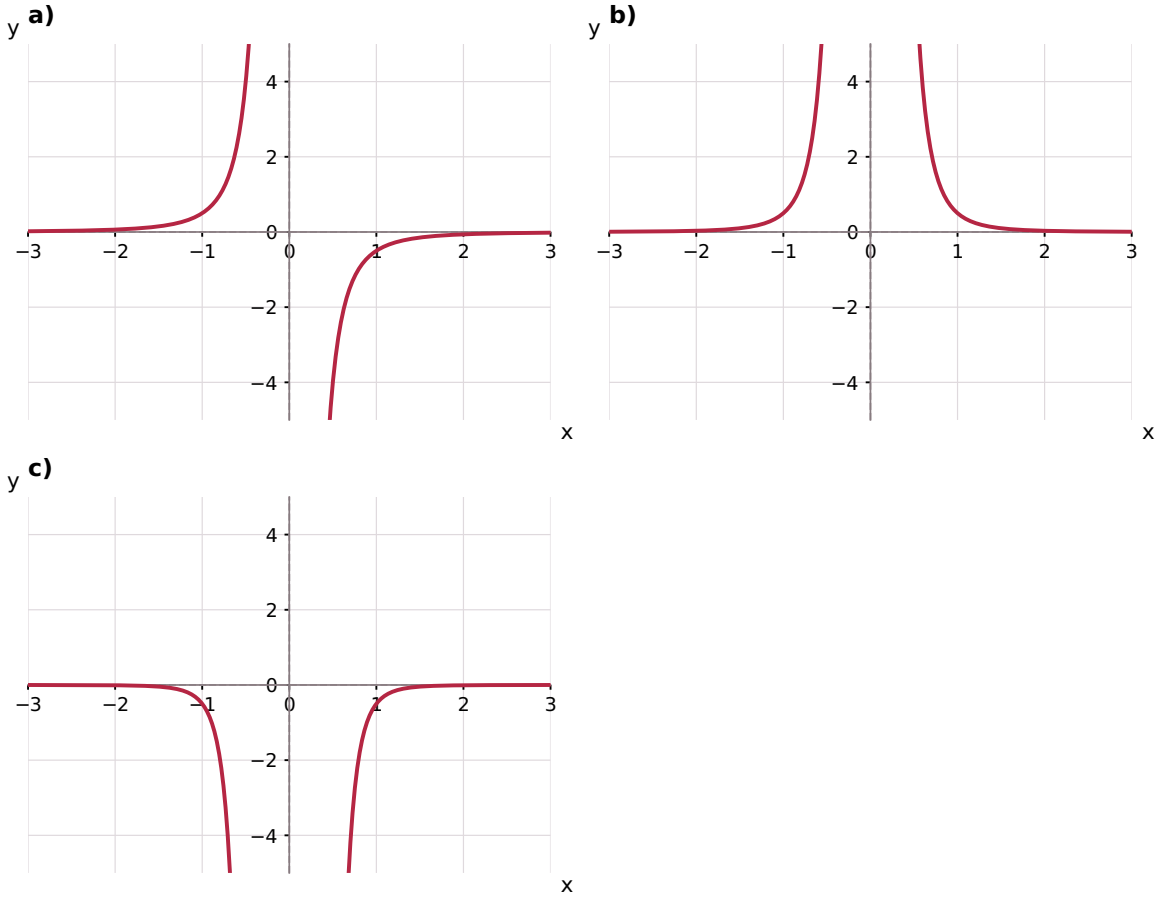
3.19 **a)** Roja: asíntotas x = 2 e y = 3.

b) Verde: asíntotas x = −4 e y = −2.

3.20 **a)** Impar; positiva para $x < 0$ y negativa para $x > 0$. Pasa por $(-1, 1/2)$, $(1, -1/2)$.

b) Par y positiva; pasa por $(\pm 1, 1/2)$.

c) Par y negativa; pasa por $(\pm 1, -1/2)$. En todos los casos, dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y asíntotas $x = 0$ e $y = 0$.

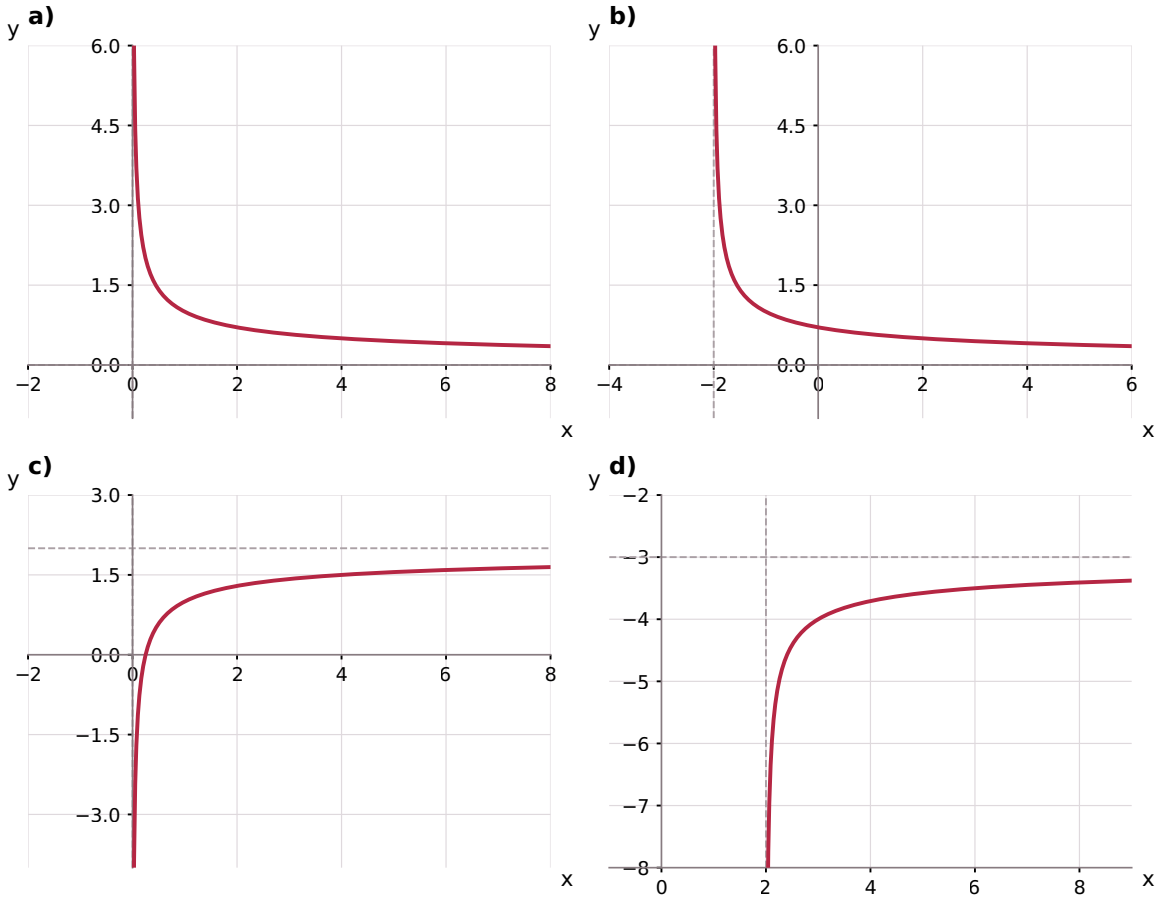


3.21 **a)** Dominio $(0, +\infty)$, recorrido $(0, +\infty)$, decreciente; asíntotas $x = 0$ e $y = 0$.

b) Dominio $(-2, +\infty)$, recorrido $(0, +\infty)$, decreciente; asíntotas $x = -2$ e $y = 0$.

c) Dominio $(0, +\infty)$, recorrido $(-\infty, 2)$, creciente; asíntotas $x = 0$ e $y = 2$.

d) Dominio $(2, +\infty)$, recorrido $(-\infty, -3)$, creciente; asíntotas $x = 2$ e $y = -3$.



3.22 Racionalizando, vale $1/(\sqrt{(x^2 + 1)} + |x|)$. El denominador es al menos 1 y solo vale 1 cuando $x = 0$. El máximo es 1, alcanzado en $x = 0$.

04 · Exponenciales y logaritmos

4.01

a) Creciente: $1{,}2 > 1$.

b) Decreciente: $0 < 2/3 < 1$.

c) Decreciente: $0 < 0{,}8 < 1$.

d) Creciente: $\sqrt{3} > 1$.

4.02

a) 3^x es creciente, positiva y pasa por (0, 1). Asíntota y = 0.

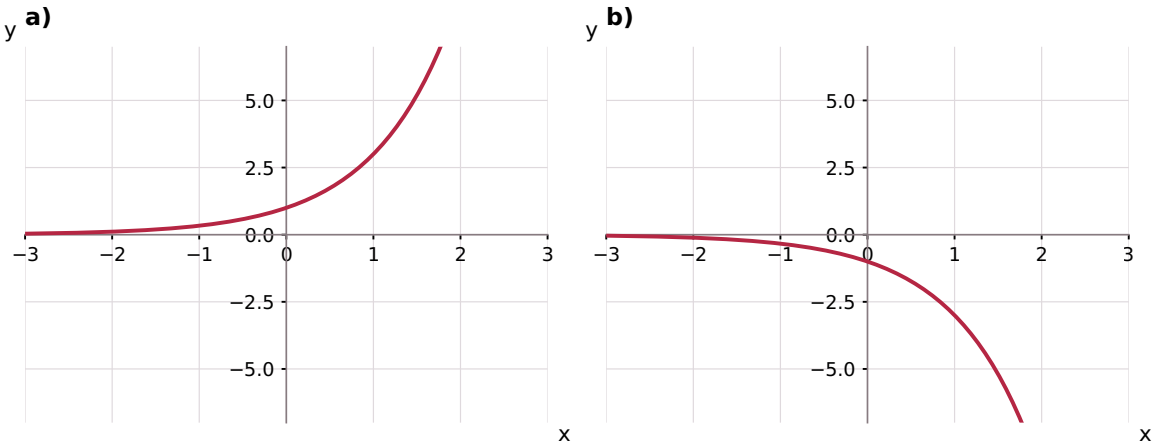
b) -3^x es decreciente, negativa y pasa por (0, −1). Es la simétrica de a) respecto de X.

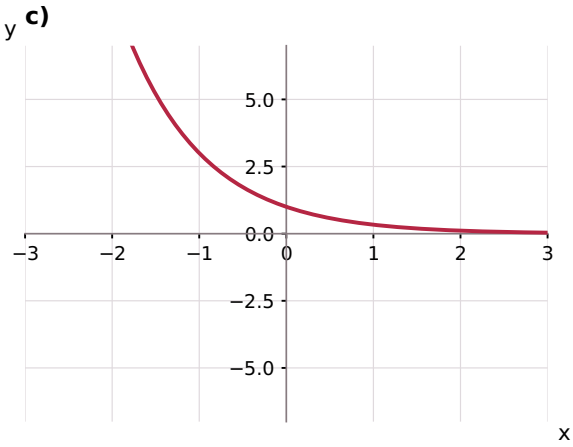
c) $3^{-x} = (1/3)^x$ es decreciente y pasa por (0, 1).

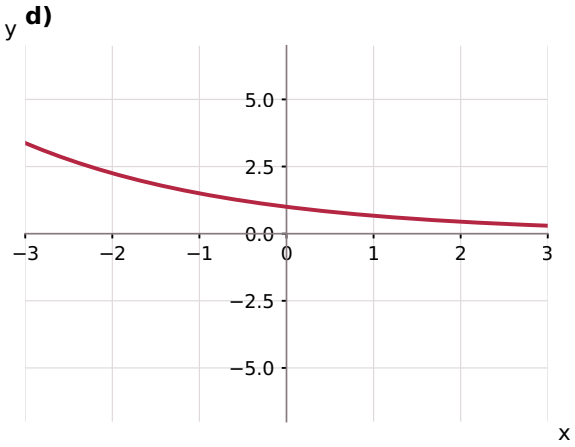
d) $(2/3)^x$ es decreciente y pasa por (0, 1).

e) $(-2/3)^x$ no define una función exponencial real en todo $\mathbb{R}$: por ejemplo, x = 1/2 no produce un valor real. Puede evaluarse para ciertos exponentes, pero no como una curva exponencial real continua en $\mathbb{R}$.

f) $(2/3)^{-x} = (3/2)^x$ es creciente y pasa por (0, 1).

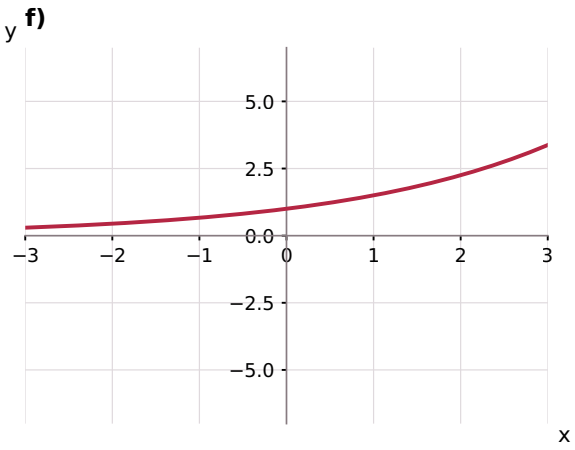








No es una exponencial real definida en todo $\mathbb{R}$.



4.03

a) Creciente: la base 1,2 es mayor que 1.

b) Decreciente: la base 2/3 está entre 0 y 1.

c) Creciente: la base 7 es mayor que 1.

d) Decreciente: la base 0,8 está entre 0 y 1.

e) Creciente: la base $\sqrt{3}$ es mayor que 1.

f) Creciente: la base 8,2 es mayor que 1.

4.04 **a)** Dominio $(0, +\infty)$, creciente; puntos $(1, 0)$, $(3, 1)$, $(1/3, -1)$.

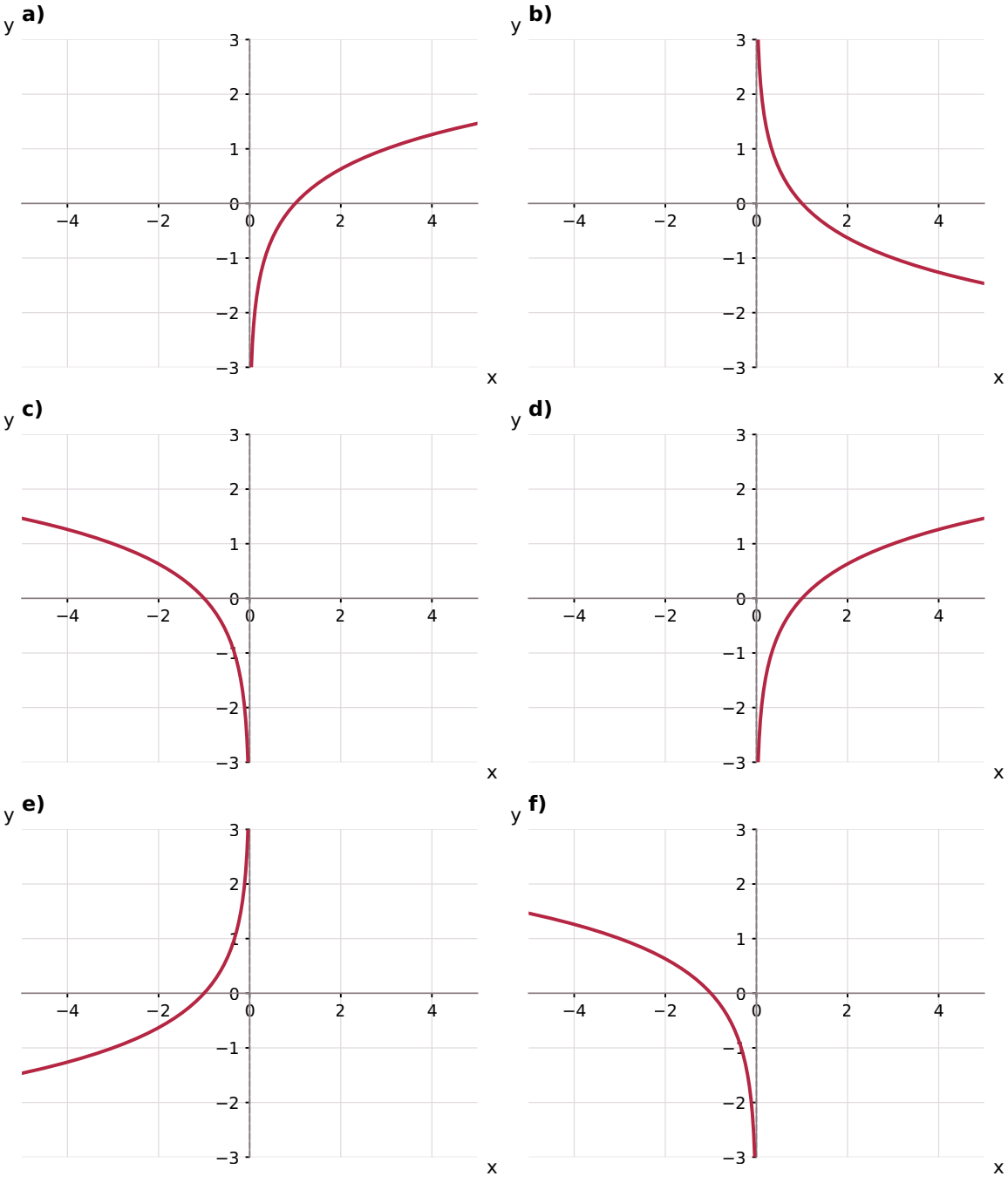
b) Dominio $(0, +\infty)$, decreciente; puntos $(1, 0)$, $(3, -1)$, $(1/3, 1)$.

c) Dominio $(-\infty, 0)$, decreciente; puntos $(-1, 0)$, $(-3, 1)$, $(-1/3, -1)$.

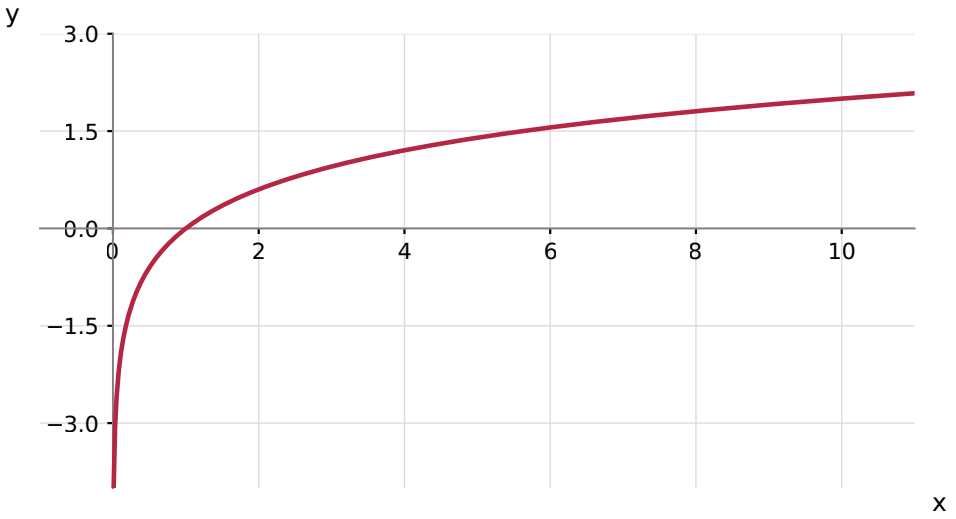
d) Coincide con a), porque $-\log_{1/3} x = \log_3 x$.

e) Dominio $(-\infty, 0)$, creciente; puntos $(-1, 0)$, $(-3, -1)$, $(-1/3, 1)$.

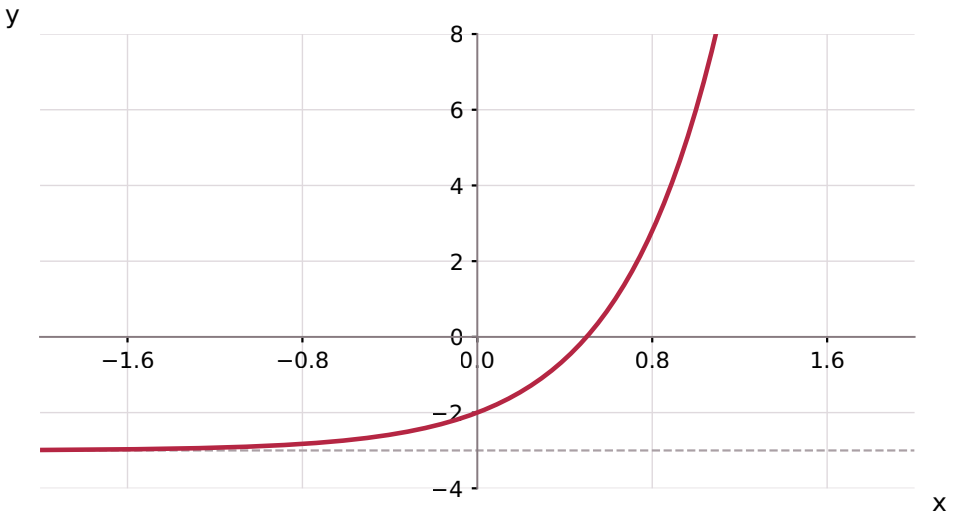
f) Coincide con c), porque $-\log_{1/3}(-x) = \log_3(-x)$. Todas tienen asíntota vertical $x = 0$.



4.05 Dominio $(0, +\infty)$, recorrido $\mathbb{R}$, creciente y asíntota $x = 0$. Pasa por $(1, 0)$, $(10, 2)$ y $(1/10, -2)$. Multiplica por 2 las ordenadas de $y = \log x$.

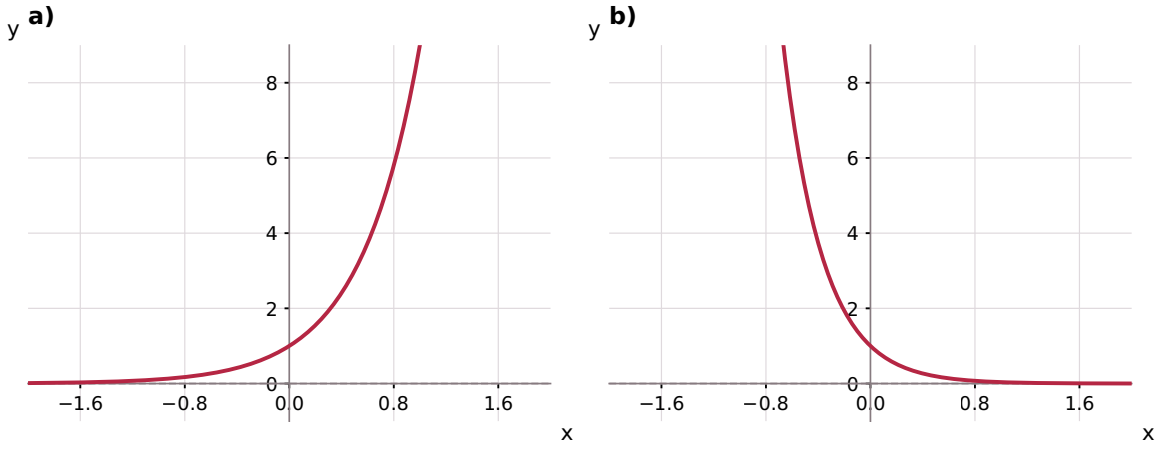


4.06 Equivale a $9^x - 3$. Dominio $\mathbb{R}$, recorrido $(-3, +\infty)$, creciente y asíntota $y = -3$. Corta Y en $(0, -2)$ y X en $(1/2, 0)$.



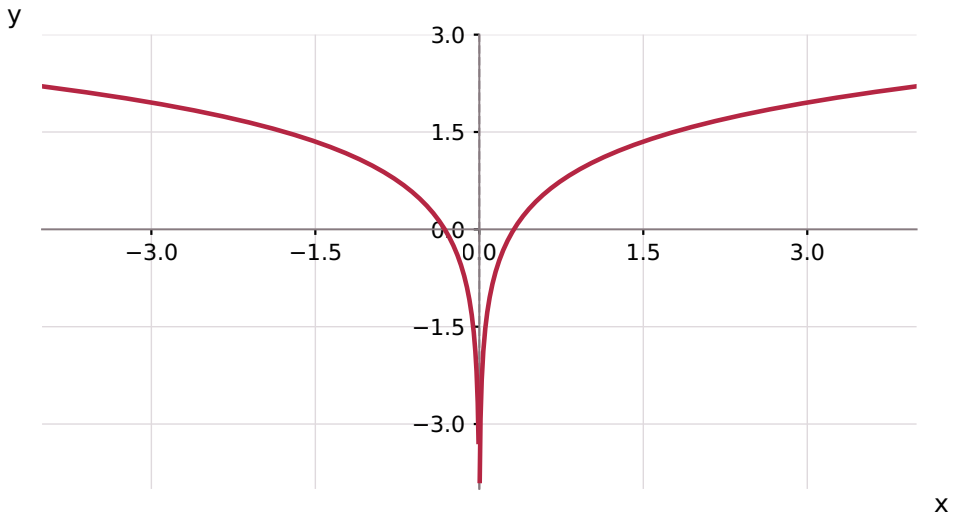
4.07 **a)** $3^{2x} = 9^x$: creciente, pasa por (0, 1) y (1, 9).

b) $(1/3)^{3x} = (1/27)^x$: decreciente, pasa por (0, 1) y (−1, 27). Ambas tienen dominio $\mathbb{R}$, recorrido (0, +∞) y asíntota y = 0.



4.08 **a)** Dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se simplifica como $1 + 2\log|x|$; no puede omitirse el valor absoluto. Es par y tiene dos ramas simétricas respecto a Y.

b) Recorrido $\mathbb{R}$; asíntota x = 0. Ceros $x = \pm 1/\sqrt{10}$. Pasa por (±1, 1), decrece en (−∞, 0) y crece en (0, +∞).



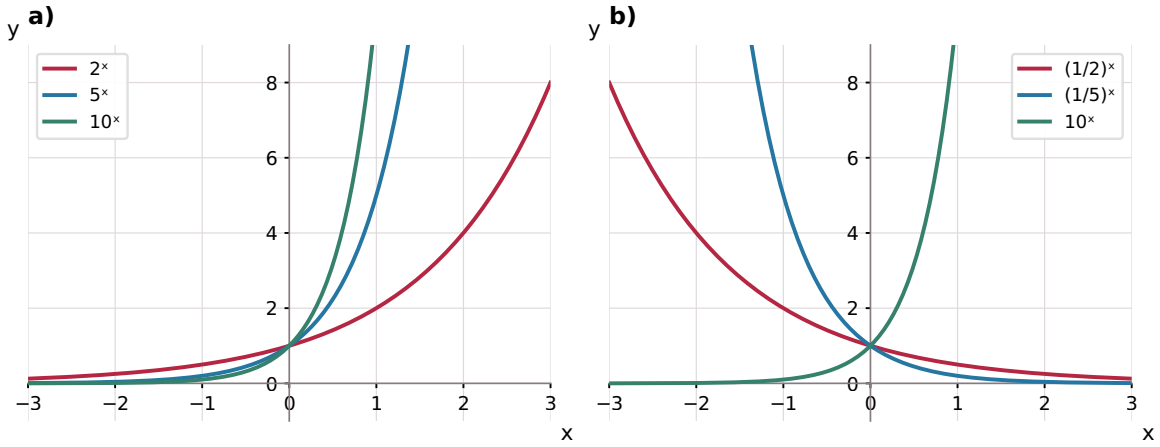
4.09 **a)** Roja: 12^x crece más deprisa que 2^x para x > 0.

b) Verde: 2^x.

c) Morada: $(1/4)^x$ es decreciente. Todas pasan por (0, 1).

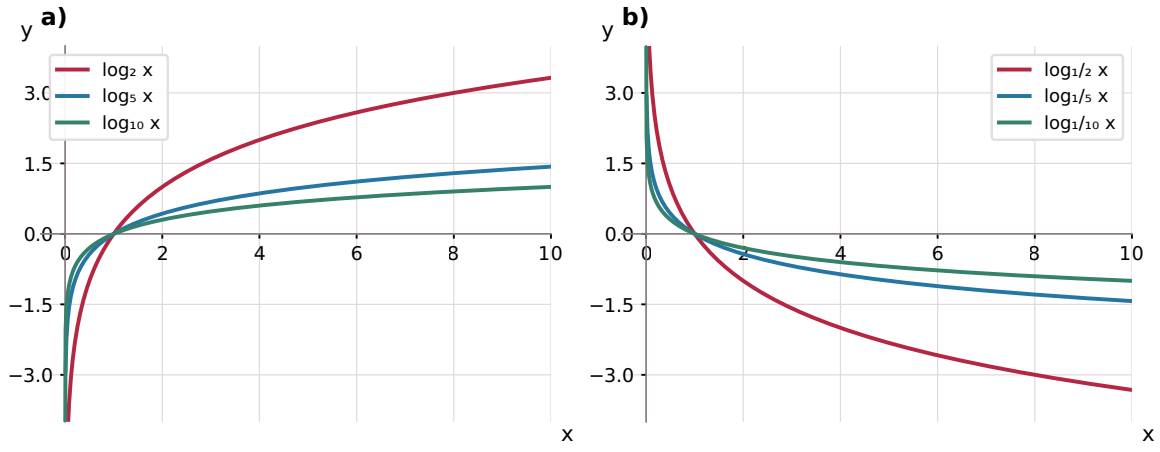
4.10 **a)** Las tres son crecientes y pasan por (0, 1). Para $x > 0$: $2^x < 5^x < 10^x$; para $x < 0$, el orden se invierte.

b) $(1/2)^x$ y $(1/5)^x$ son decrecientes; 10^x es creciente. Las tres pasan por (0, 1) y tienen asíntota $y = 0$. Para $x > 0$: $(1/5)^x < (1/2)^x < 10^x$.



4.11 **a)** Las tres son crecientes y pasan por (1, 0). Para $x > 1$: $\log_2 x > \log_5 x > \log_{10} x$; en $0 < x < 1$ el orden se invierte.

b) Las tres son decrecientes y pasan por (1, 0). Para $x > 1$: $\log_{1/2} x < \log_{1/5} x < \log_{1/10} x$. Son las simétricas de las del apartado a) respecto del eje X.



4.12 **a)** Morada: $\log_{12} x$, creciente y más plana para $x > 1$.

b) Roja: $\log_2 x$.

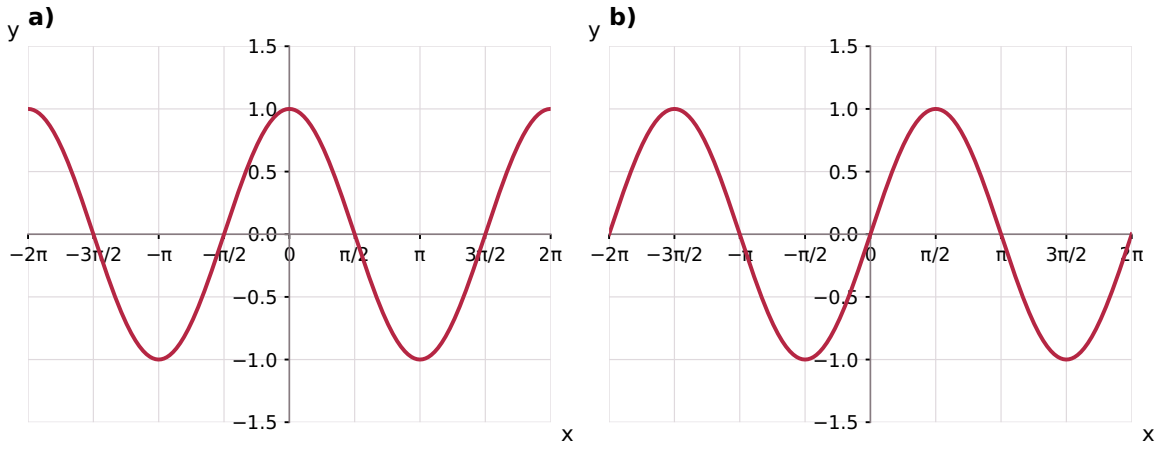
c) Verde: $\log_{1/4} x$, decreciente.

4.13 $\dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} = \dfrac{4e^x e^{-x}}{4} = 1$. Se aplica $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$.

05 · Trigonométricas y sus inversas

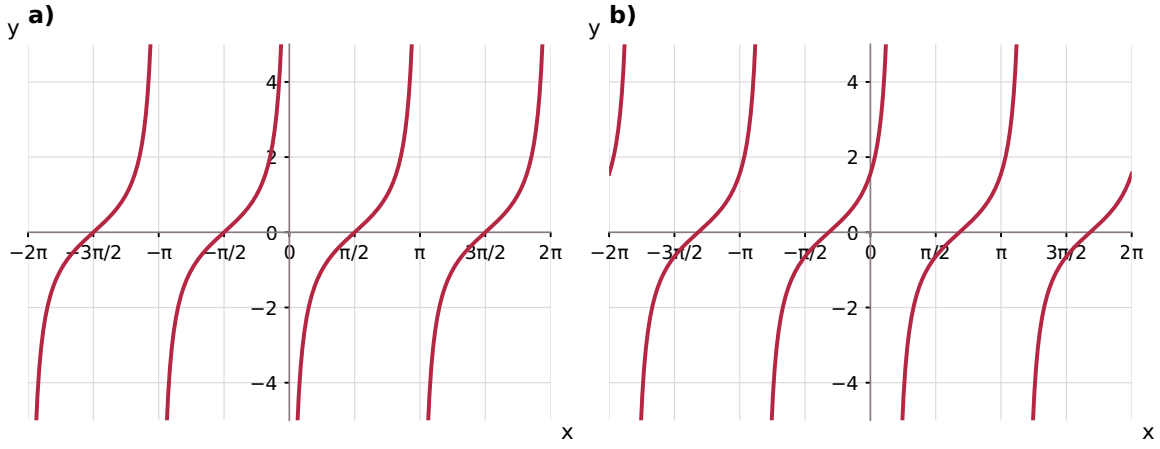
5.01 **a)** sen(x + π/2) = cos x. Dominio ℝ, recorrido [−1, 1], periodo 2π.

b) cos(x − π/2) = sen x. Dominio ℝ, recorrido [−1, 1], periodo 2π.



5.02 **a)** tg(x − π/2). Periodo π; asíntotas x = kπ, con k entero. Ceros x = π/2 + kπ.

b) tg(x + 1). Periodo π; asíntotas x = π/2 − 1 + kπ. Ceros x = −1 + kπ. En cada intervalo entre asíntotas ambas son crecientes.



5.03

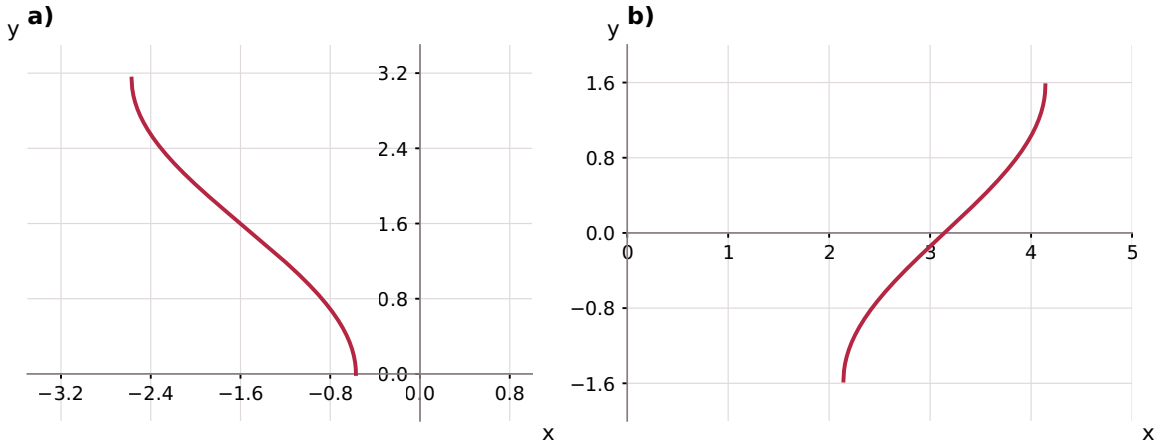
a) $\frac{\pi}{4}$

b) $\frac{\pi}{2}$

c) $-\frac{\pi}{4}$

5.04 **a)** Dominio $[-1 - \pi/2, 1 - \pi/2]$, recorrido $[0, \pi]$. Es arccos x trasladada $\pi/2$ hacia la izquierda; decreciente.

b) Dominio $[\pi - 1, \pi + 1]$, recorrido $[-\pi/2, \pi/2]$. Es arcsen x trasladada π hacia la derecha; creciente.



5.05 **a)** cos(−x) = cos x: coincide con g, porque el coseno es par.

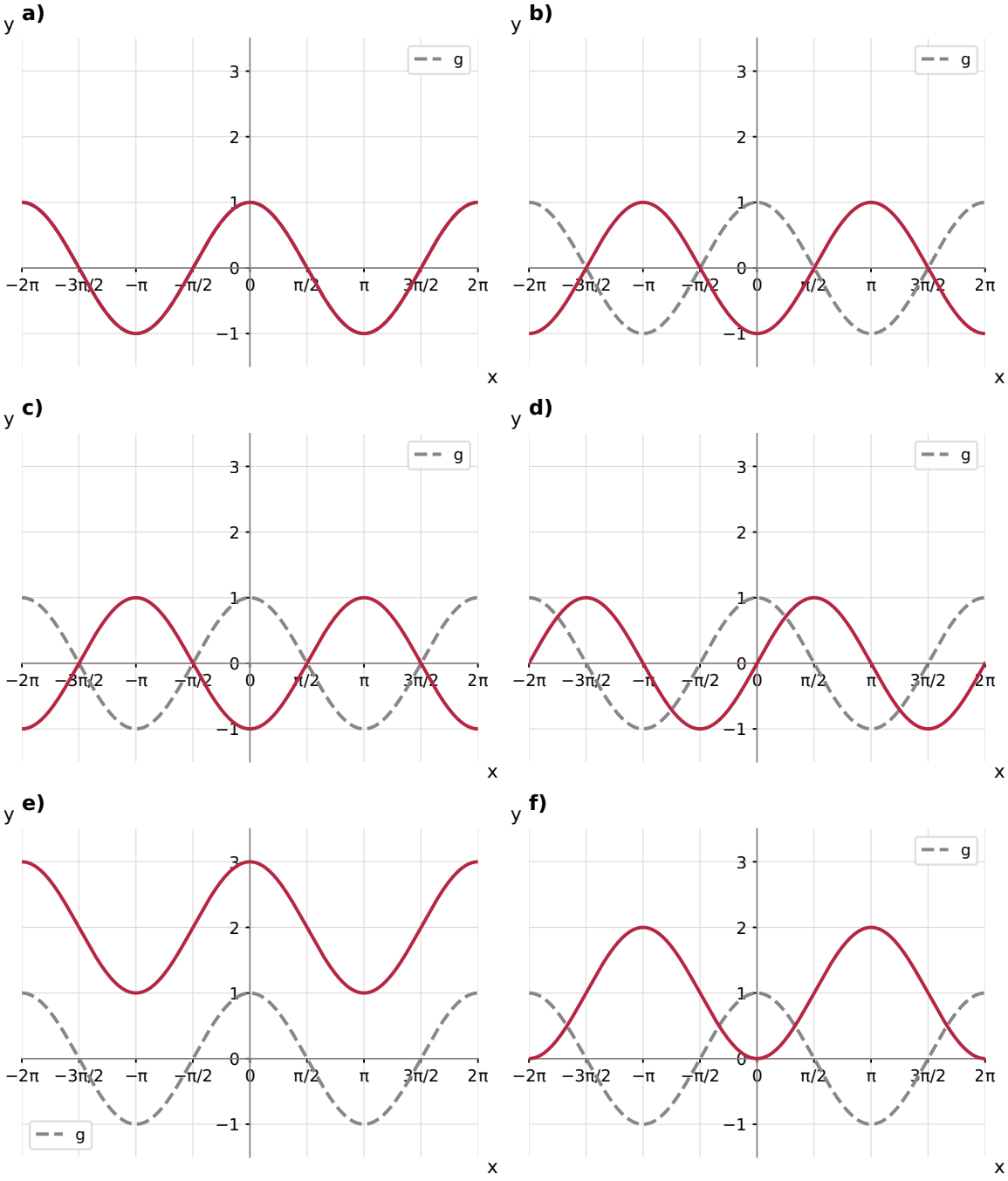
b) −cos x: simetría respecto de X.

c) cos(x + π) = −cos x: traslación π hacia la izquierda; coincide con b).

d) cos(x − π/2) = sen x: traslación π/2 hacia la derecha.

e) cos x + 2: traslación 2 unidades hacia arriba; recorrido [1, 3].

f) 1 − cos x: simetría respecto de X y traslación 1 unidad hacia arriba; recorrido [0, 2]. Todas tienen periodo 2π.



5.06 **a)** sen(−x) = −sen x: simetría respecto de Y, que coincide con la simetría respecto de X.

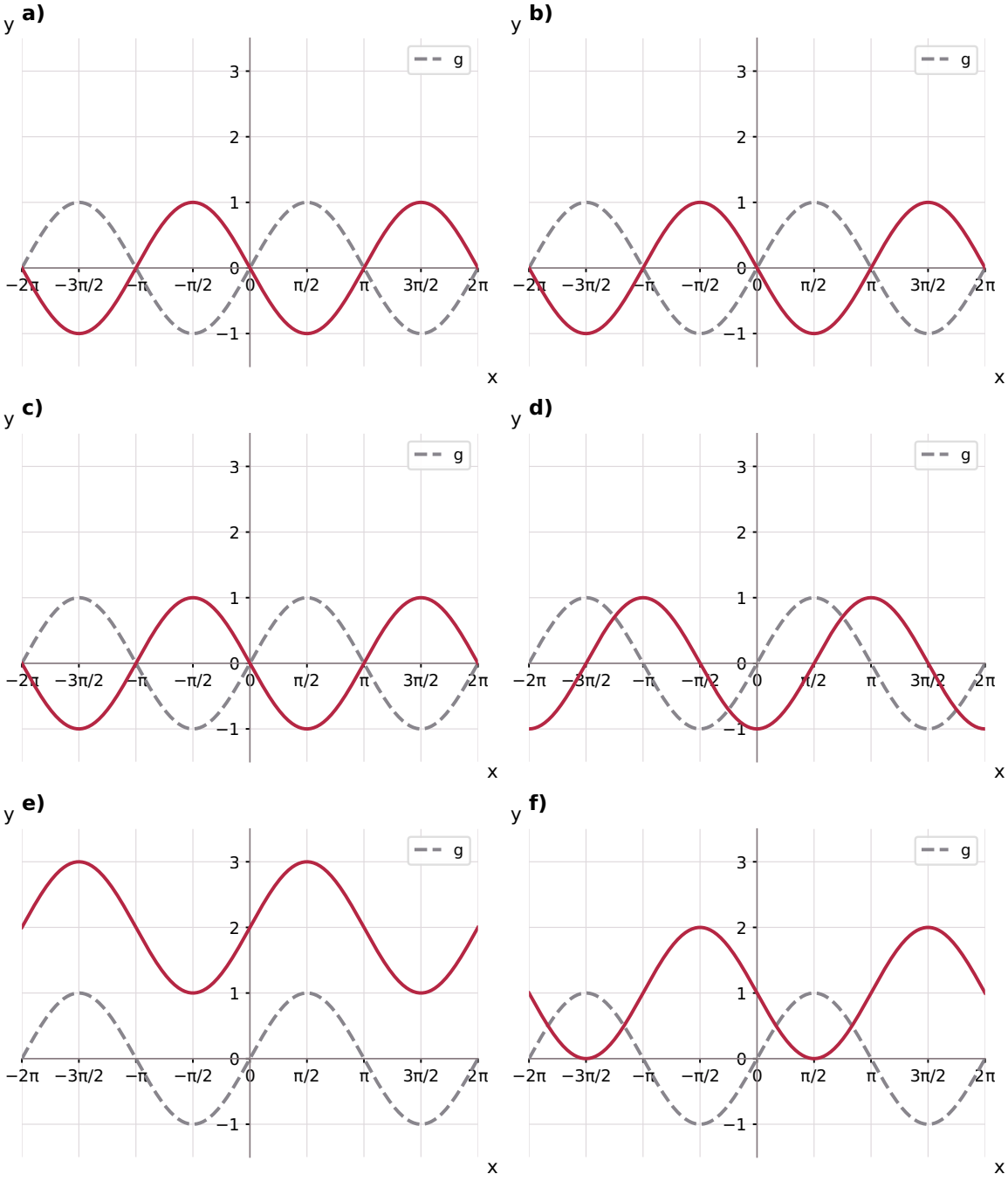
b) −sen x: simetría respecto de X; coincide con a).

c) sen(x + π) = −sen x: traslación π hacia la izquierda; coincide con a) y b).

d) sen(x − π/2) = −cos x: traslación π/2 hacia la derecha.

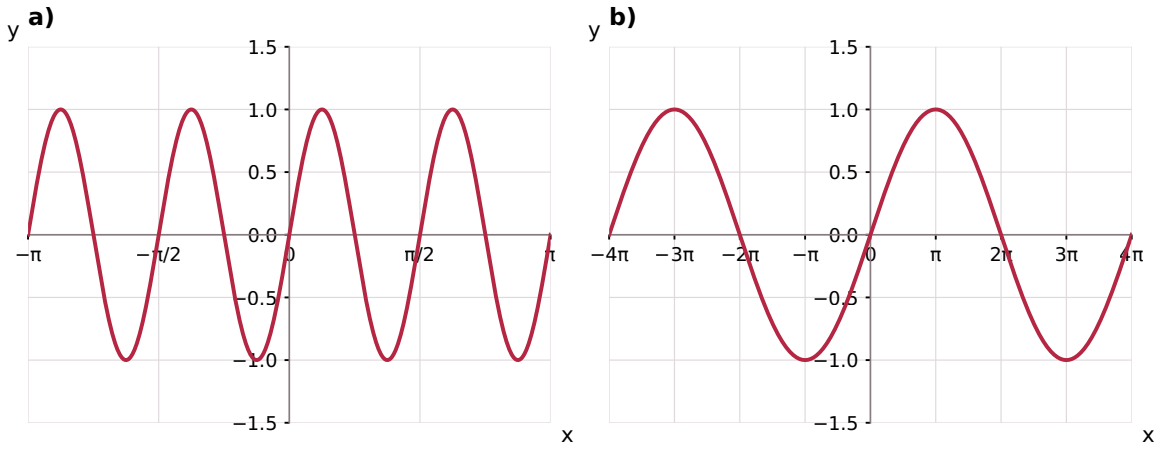
e) sen x + 2: traslación 2 unidades hacia arriba; recorrido [1, 3].

f) 1 − sen x: simetría respecto de X y traslación 1 unidad hacia arriba; recorrido [0, 2]. Todas tienen periodo 2π.



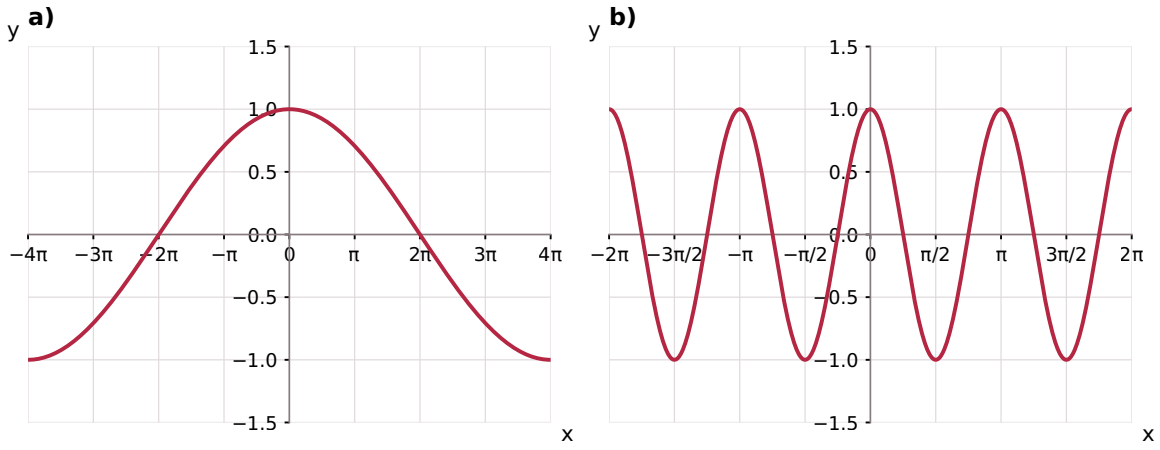
5.07 **a)** sen(4x) = g(4x) = h(2x): periodo π/2, amplitud 1; las abscisas de g se dividen por 4.

b) sen(x/2) = g(x/2): periodo 4π, amplitud 1; las abscisas de g se multiplican por 2.



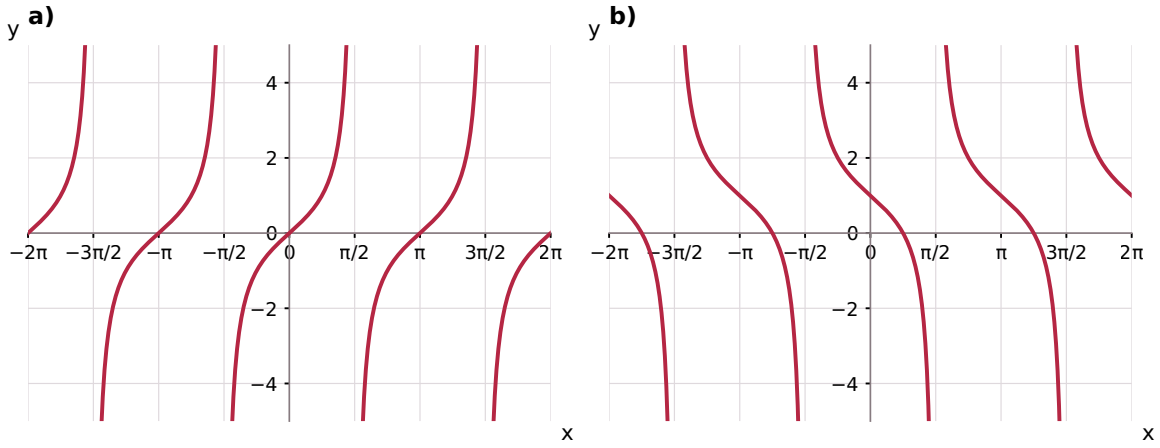
5.08 **a)** cos(x/4) = g(x/4) = h(x/2): periodo 8π y amplitud 1.

b) cos(2x) = g(2x): periodo π y amplitud 1.



5.09 **a)** tg(x + π) = tg x: la gráfica coincide con g porque su periodo es π.

b) 1 − tg x: simetría de g respecto de X y traslación 1 unidad hacia arriba. Es decreciente entre asíntotas; pasa por (0, 1). Las asíntotas de ambas son x = π/2 + kπ.

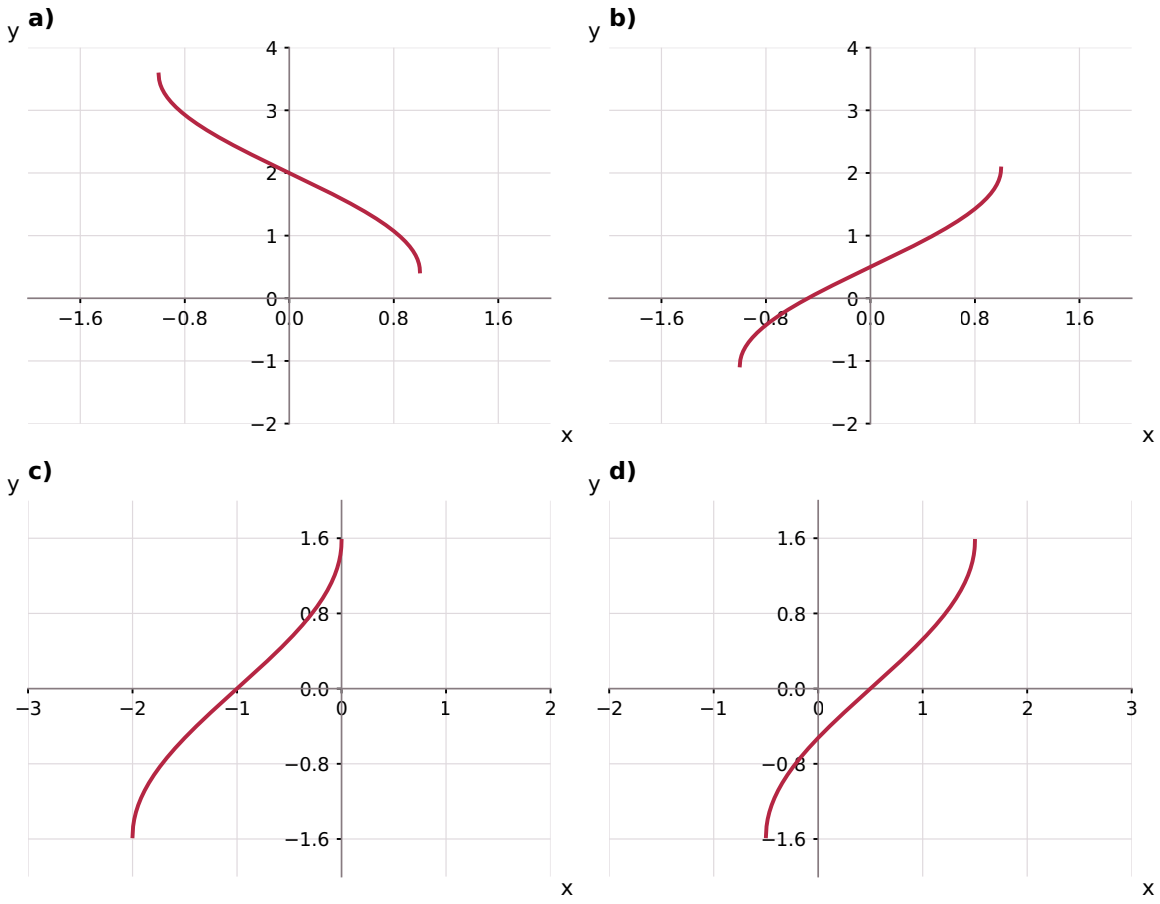


5.10 **a)** 2 − g(x): simetría respecto de X y 2 unidades hacia arriba; dominio [−1, 1], recorrido [2 − π/2, 2 + π/2].

b) g(x) + 1/2: traslación de 1/2 unidad hacia arriba; dominio [−1, 1], recorrido [(1 − π)/2, (1 + π)/2].

c) g(x + 1): traslación de 1 unidad hacia la izquierda; dominio [−2, 0], recorrido [−π/2, π/2].

d) g(x − 1/2): traslación de 1/2 unidad hacia la derecha; dominio [−1/2, 3/2], recorrido [−π/2, π/2].

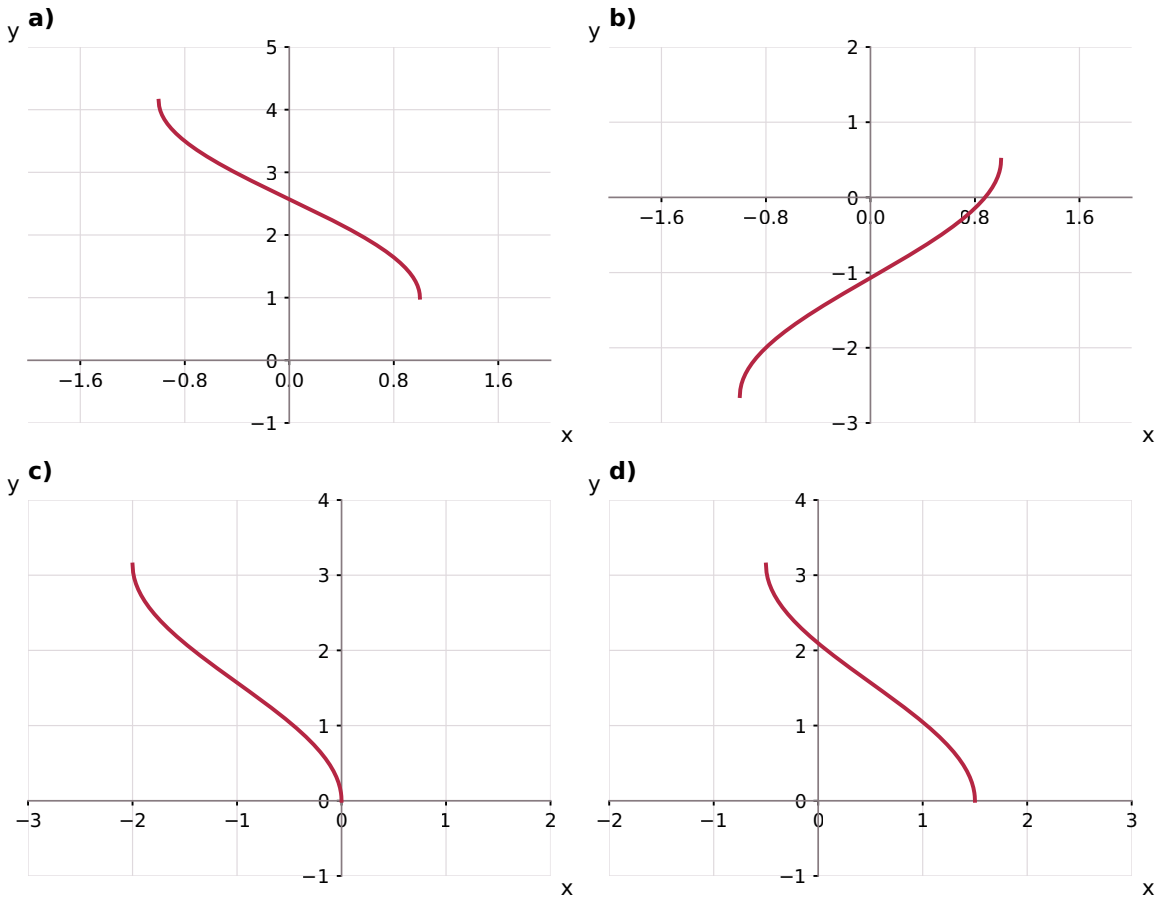


5.11 **a)** 1 + g(x): traslación 1 unidad hacia arriba; dominio [−1, 1], recorrido [1, 1 + π].

b) 1/2 − g(x): simetría respecto de X y 1/2 unidad hacia arriba; dominio [−1, 1], recorrido [1/2 − π, 1/2].

c) g(x + 1): traslación 1 unidad hacia la izquierda; dominio [−2, 0], recorrido [0, π].

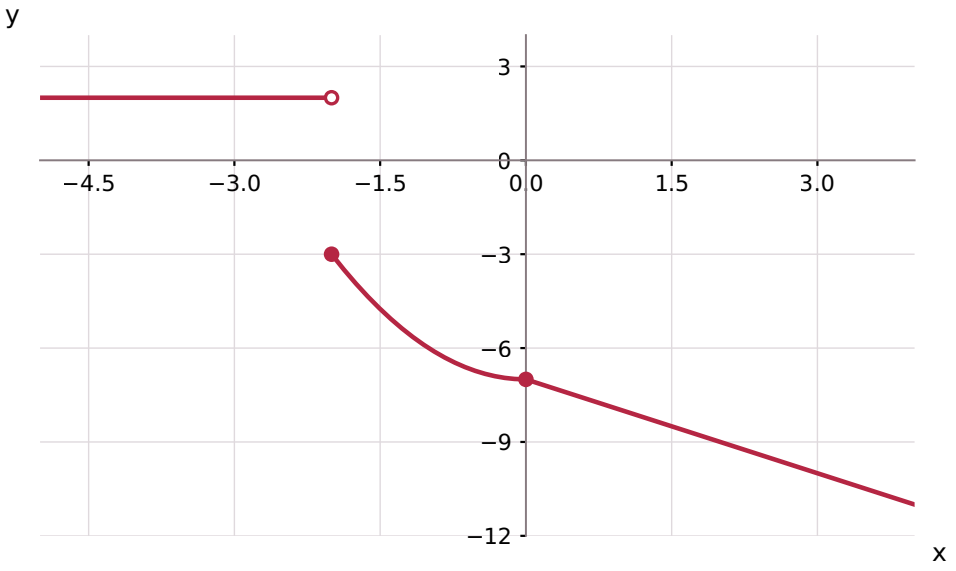
d) g(x − 1/2): traslación 1/2 unidad hacia la derecha; dominio [−1/2, 3/2], recorrido [0, π].



06 · Funciones a trozos y valor absoluto

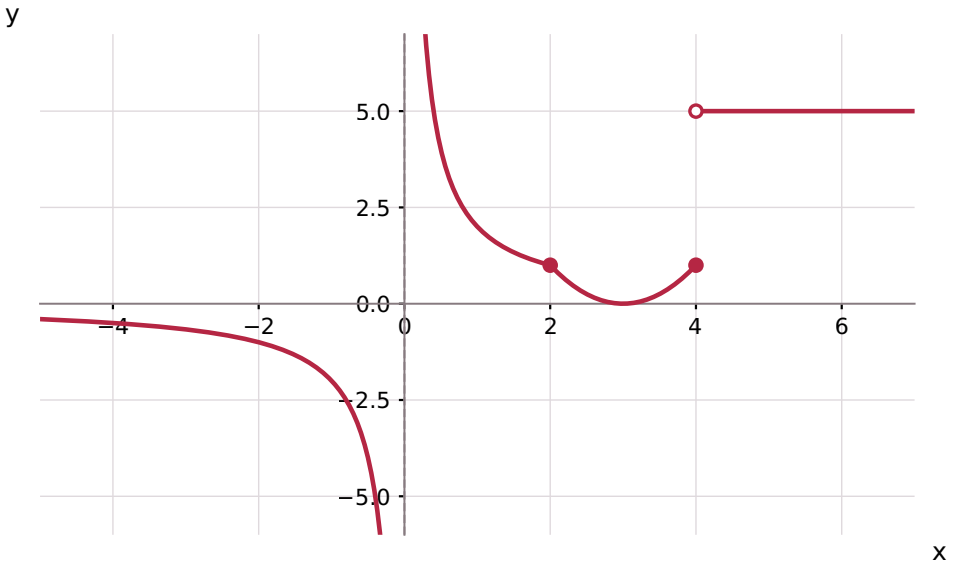
6.01 **a)** Dominio $\mathbb{R}$; recorrido $(-\infty, -3] \cup \{2\}$. Es constante en $(-\infty, -2)$ y estrictamente decreciente en $[-2, +\infty)$.

b) Tiene un salto en $x = -2$: el tramo izquierdo llega a 2 y $f(-2) = -3$. Es continua en $x = 0$, con $f(0) = -7$. No corta X; corta Y en $(0, -7)$. El máximo absoluto es 2 y no tiene mínimo absoluto.



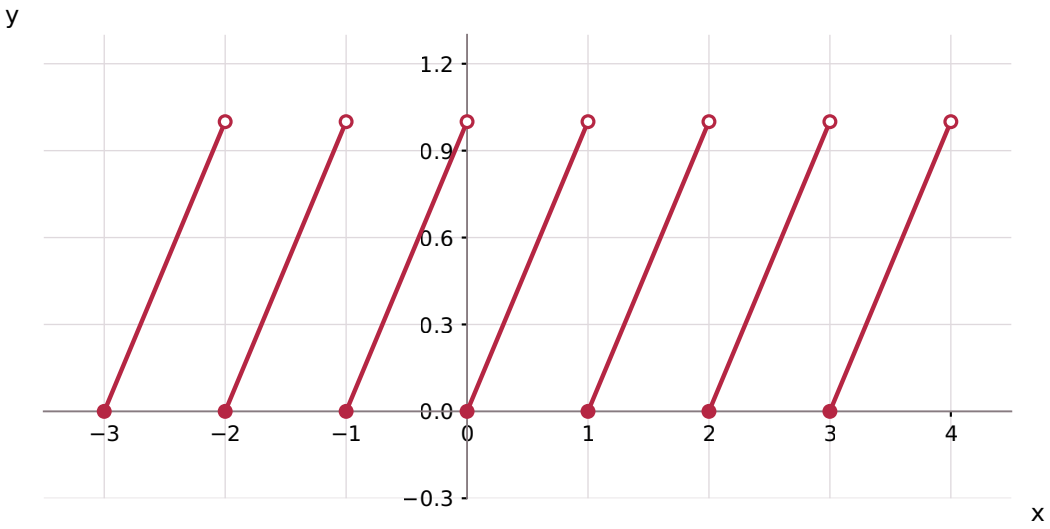
6.02 **a)** Dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; recorrido $\mathbb{R}$. Asíntota vertical $x = 0$; horizontal $y = 0$ hacia $-\infty$. Es constante e igual a 5 para $x > 4$.

b) Decrece en $(-\infty, 0)$ y en $(0, 3]$; crece en $[3, 4]$. Es continua en $x = 2$, con valor 1; tiene un salto en $x = 4$, desde $f(4) = 1$ al valor 5 del tramo derecho. Tiene mínimo relativo $(3, 0)$.

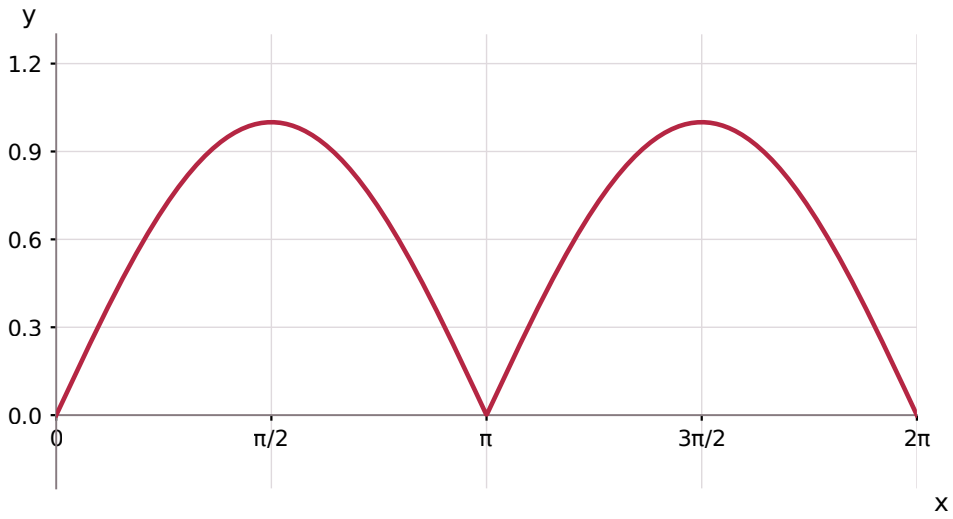


6.03 **a)** Dominio $\mathbb{R}$, recorrido $[0, 1)$. En cada intervalo $[k, k + 1)$, con k entero, $f(x) = x - k$. Es creciente en cada tramo y periódica de periodo 1.

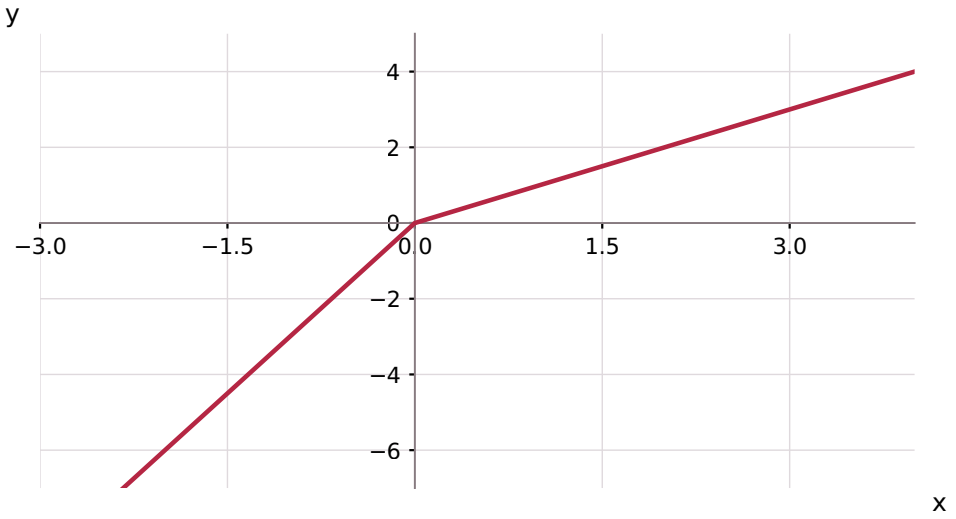
b) Tiene saltos en todos los enteros. No es par ni impar. Alcanza el mínimo absoluto 0 en cada entero; no alcanza un máximo, aunque su supremo es 1.



6.04 $f(x) = \text{sen } x$ para $0 \leq x \leq \pi$ y $f(x) = -\text{sen } x$ para $\pi < x \leq 2\pi$. Ceros en 0, π y 2π; máximos de valor 1 en $\pi/2$ y $3\pi/2$. Recorrido $[0, 1]$.



6.05 Para $x \geq 0$, $f(x) = x$; para $x < 0$, $f(x) = 3x$. Las dos semirrectas se unen en $(0, 0)$. Es continua y estrictamente creciente; dominio y recorrido $\mathbb{R}$.

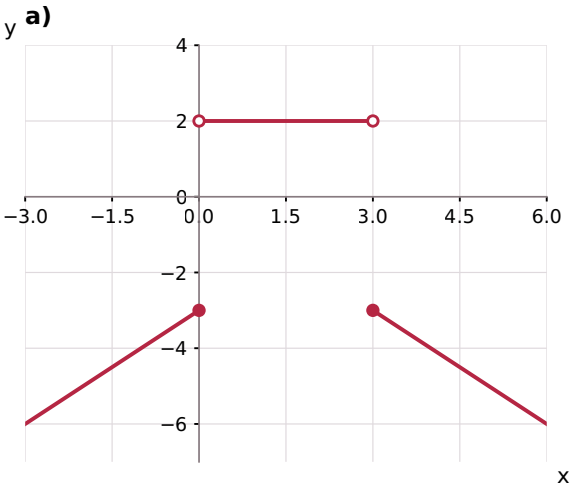


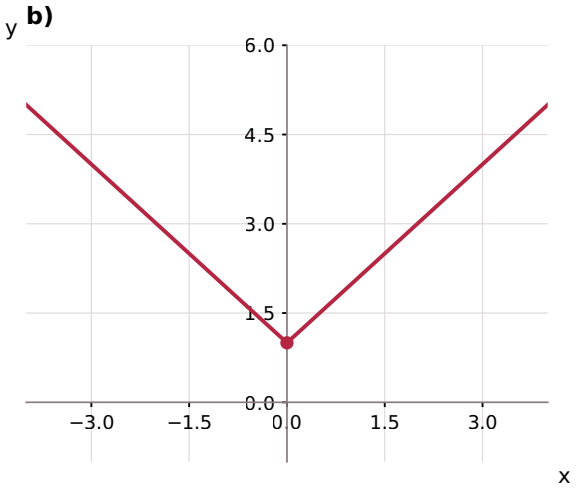
6.06 $f(-1) = 2$; $f(0) = 0$; $f(1/2) = -3/4$. Se aplica el tramo correspondiente a cada abscisa.

6.07 La gráfica a): el extremo $(1, 0)$ del primer tramo es abierto y $(1, -1)$ está incluido, porque $f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$.

6.08 **a)** Para $x \leq 0$, recta $y = x - 3$, con $(0, -3)$ incluido. Para $0 < x < 3$, tramo horizontal $y = 2$ con extremos abiertos. Para $x \geq 3$, recta $y = -x$, con $(3, -3)$ incluido.

b) Equivale a $|x| + 1$. Es continua, con vértice $(0, 1)$, dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $[1, +\infty)$.

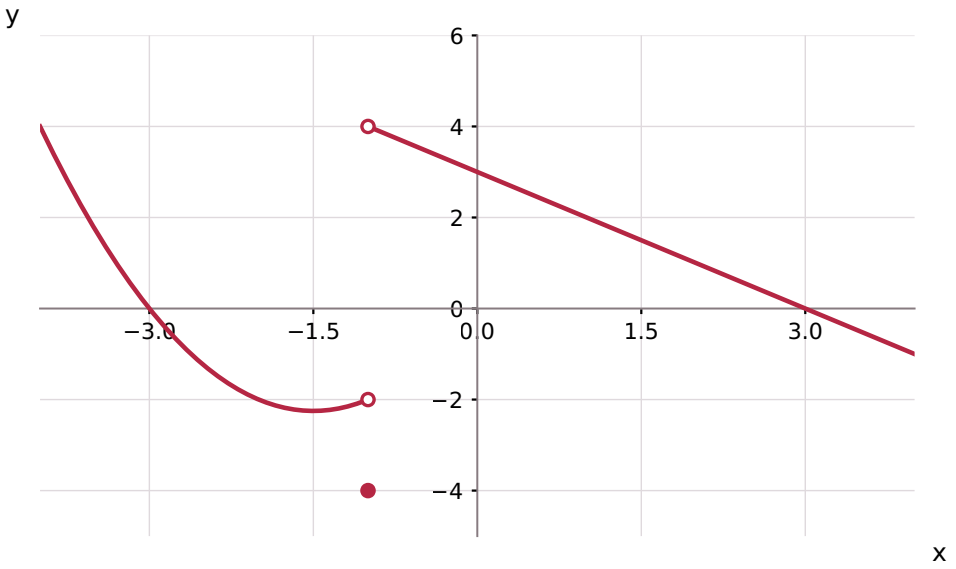




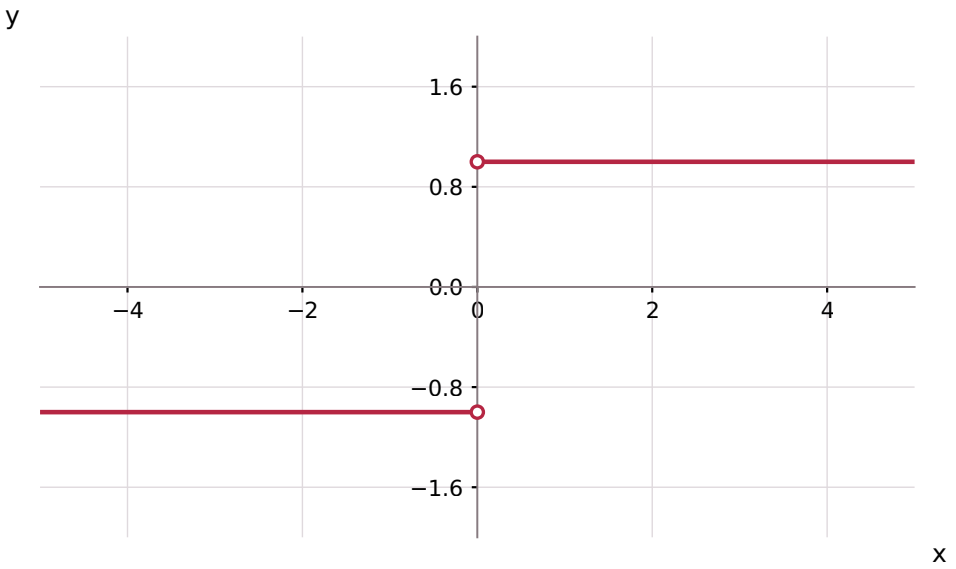
6.09 **a)** Por la izquierda, para x = −2; −1,5; −1,1; −1,05, se obtiene f(x) = −2; −2,25; −2,09; −2,0475. Los valores se acercan a −2.

b) Por la derecha, para x = 0; −0,5; −0,9; −0,95, se obtiene f(x) = 3; 3,5; 3,9; 3,95. Los valores se acercan a 4.

c) Los límites laterales son distintos: hay una discontinuidad de salto en x = −1. Además, f(−1) = −4.



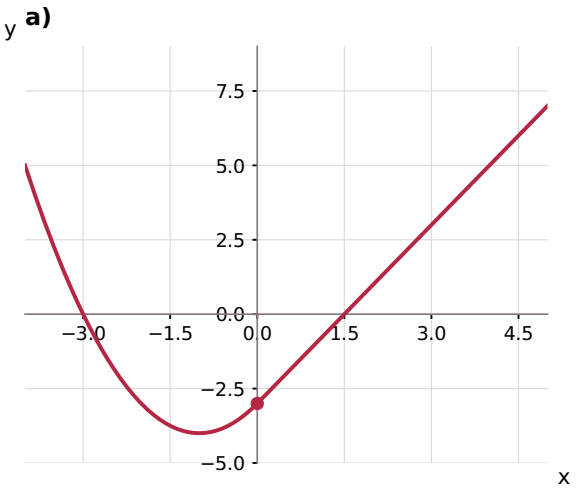
6.10 g(x) = 1 para x > 0 y g(x) = −1 para x < 0; no está definida en x = 0. Así, g(3) = 1, g(−5) = −1 y g(−3,4) = −1. g(0) no existe porque sería 0/0.

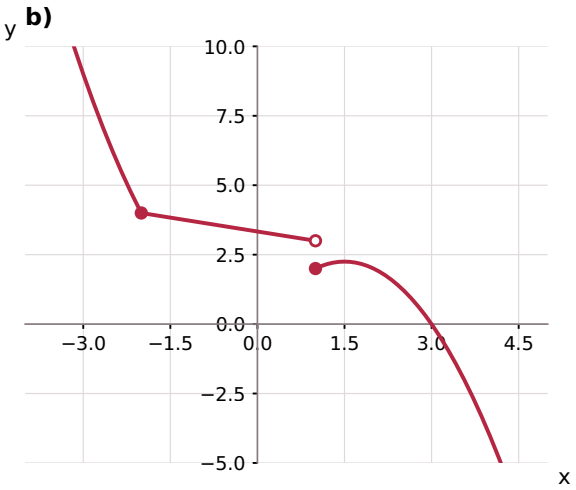


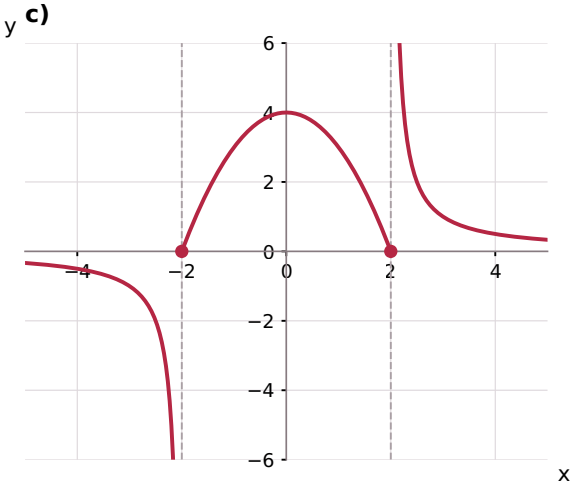
6.11 **a)** Dominio $\mathbb{R}$, recorrido $[-4, +\infty)$. Es continua. Decrece hasta $x = -1$ y crece después. Mínimo absoluto $(-1, -4)$. Los tramos se unen en $(0, -3)$.

b) Dominio $\mathbb{R}$, recorrido $(-\infty, 9/4] \cup (3, +\infty)$. Es continua en $x = -2$ y tiene un salto en $x = 1$: límite izquierdo 3, valor y límite derecho 2. Decrece hasta $x = 1$, crece en $[1, 3/2]$ y decrece después. Mínimo relativo $(1, 2)$ y máximo relativo $(3/2, 9/4)$.

c) Dominio y recorrido $\mathbb{R}$. Hay discontinuidades infinitas en $x = -2$ y $x = 2$, aunque $f(-2) = f(2) = 0$. Decrece en $(-\infty, -2)$, crece en $[-2, 0]$, decrece en $[0, 2]$ y decrece en $(2, +\infty)$. Máximo relativo $(0, 4)$ y mínimo relativo $(2, 0)$.



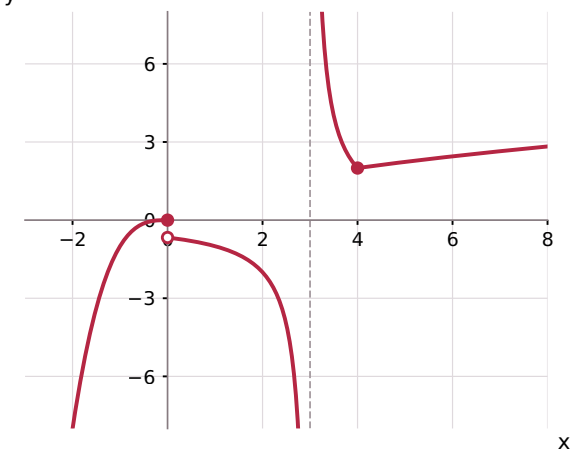




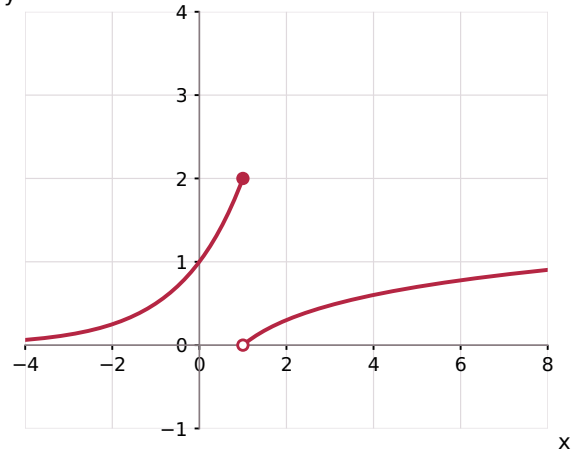
6.12 **a)** Dominio $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; recorrido $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$. Crece en $(-\infty, 0]$ y $[4, +\infty)$; decrece en $(0, 3)$ y $(3, 4]$. Máximo relativo $(0, 0)$ y mínimo relativo $(4, 2)$. Salto en $x = 0$; asíntota vertical $x = 3$. Es continua en $x = 4$.

b) Dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $(0, +\infty)$. Crece en $(-\infty, 1]$ y $(1, +\infty)$, pero no en todo $\mathbb{R}$ por el salto en $x = 1$. Máximo relativo $(1, 2)$. Límites en 1: izquierdo 2, derecho 0. Asíntota $y = 0$ cuando $x \to -\infty$.

a)



b)

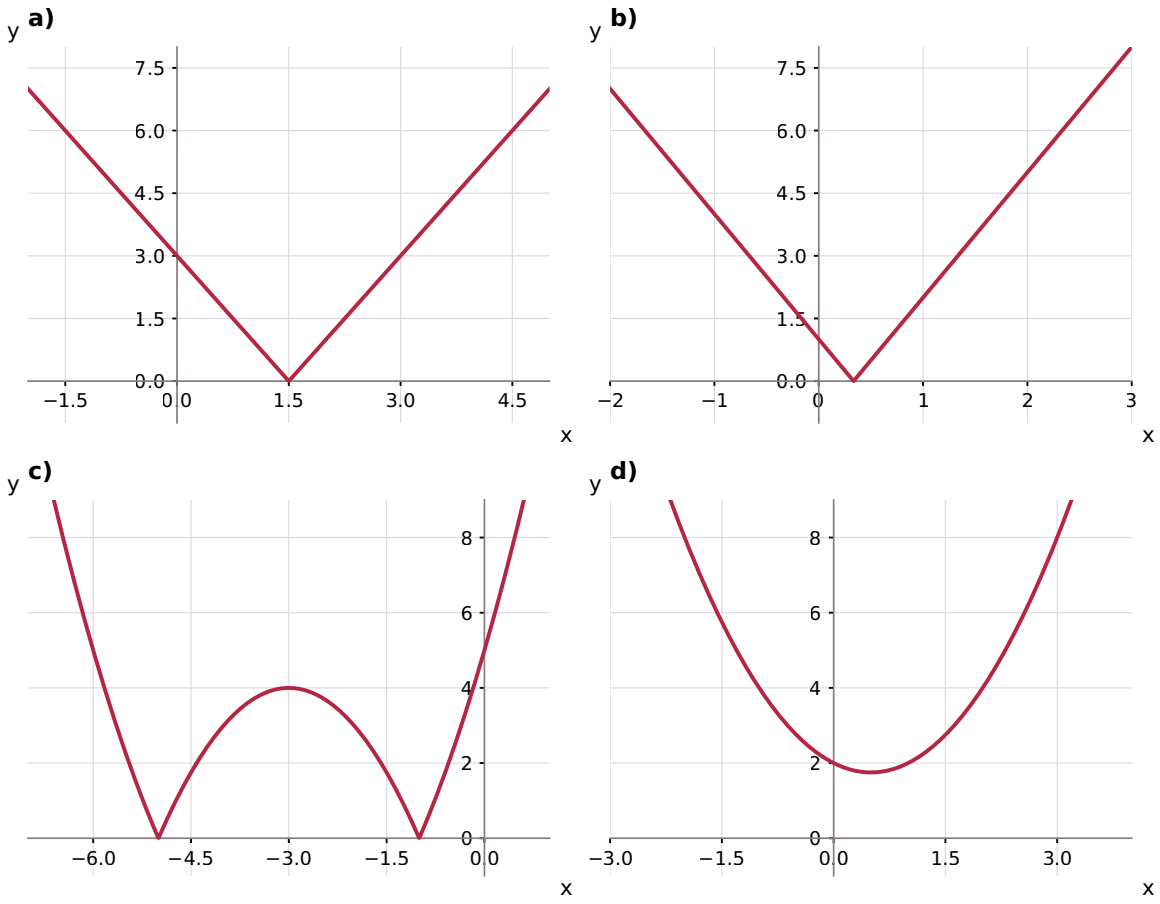


6.13 **a)** Vértice (3/2, 0). Es $3 - 2x$ para $x < 3/2$ y $2x - 3$ para $x \geq 3/2$.

b) Vértice (1/3, 0). Es $1 - 3x$ para $x \leq 1/3$ y $3x - 1$ para $x > 1/3$.

c) Es $x^2 + 6x + 5$ para $x \leq -5$ o $x \geq -1$; y $-x^2 - 6x - 5$ para $-5 < x < -1$. Mínimos $(-5, 0)$, $(-1, 0)$; máximo relativo $(-3, 4)$.

d) Como el interior siempre es negativo, $f(x) = x^2 - x + 2$. Vértice $(1/2, 7/4)$.



6.14

a) $f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -2 \\ 2, & -2 < x \leq 0 \\ 2x + 2, & x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq -1 \\ 2x, & -1 < x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = 0$ para todo x real, porque $|x - 1| = |1 - x|$.

d) $f(x) = \begin{cases} -x - 3, & x \leq -\frac{1}{2} \\ 3x - 1, & -\frac{1}{2} < x \leq 2 \\ x + 3, & x > 2 \end{cases}$

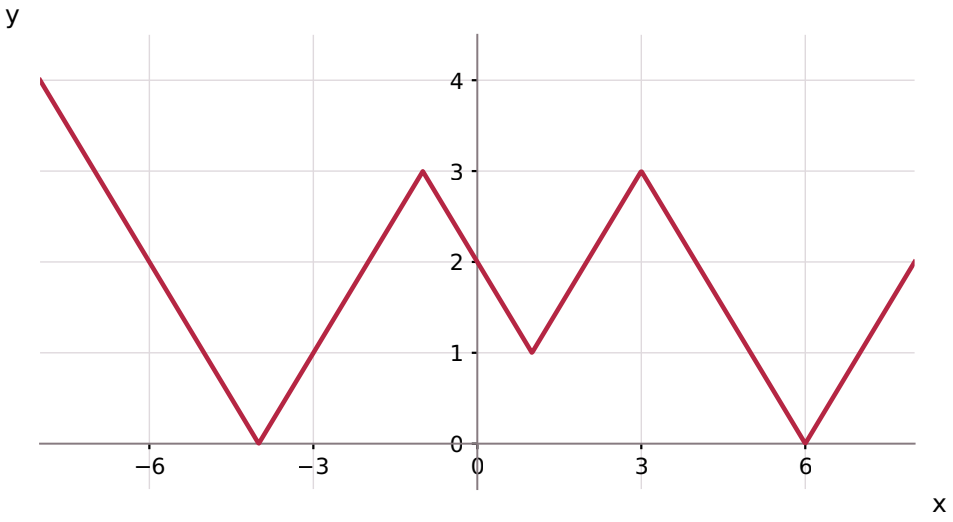
6.15

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, \ x \leq -2 \\ -x^2 + 4, \ -2 < x < 2 \\ x^2 - 4, \ x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x+2} - \operatorname{sen} x, \ x < -2 \\ \dfrac{1}{x+2} - \operatorname{sen} x, \ x > -2 \end{cases}$. No está definida en -2.

c) $f(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x-3}, \ x < 3 \\ \sqrt[3]{x-3}, \ x \geq 3 \end{cases}$

6.16 Poligonal que une $(-8, 4)$, $(-4, 0)$, $(-1, 3)$, $(1, 1)$, $(3, 3)$, $(6, 0)$ y $(8, 2)$. Sus pendientes son ± 1. El valor absoluto exterior impide valores negativos.



07 · Operaciones, composición e inversas

7.01 **a)** $f^{-1}(x) = -2x + 2$, definida en $\mathbb{R}$.

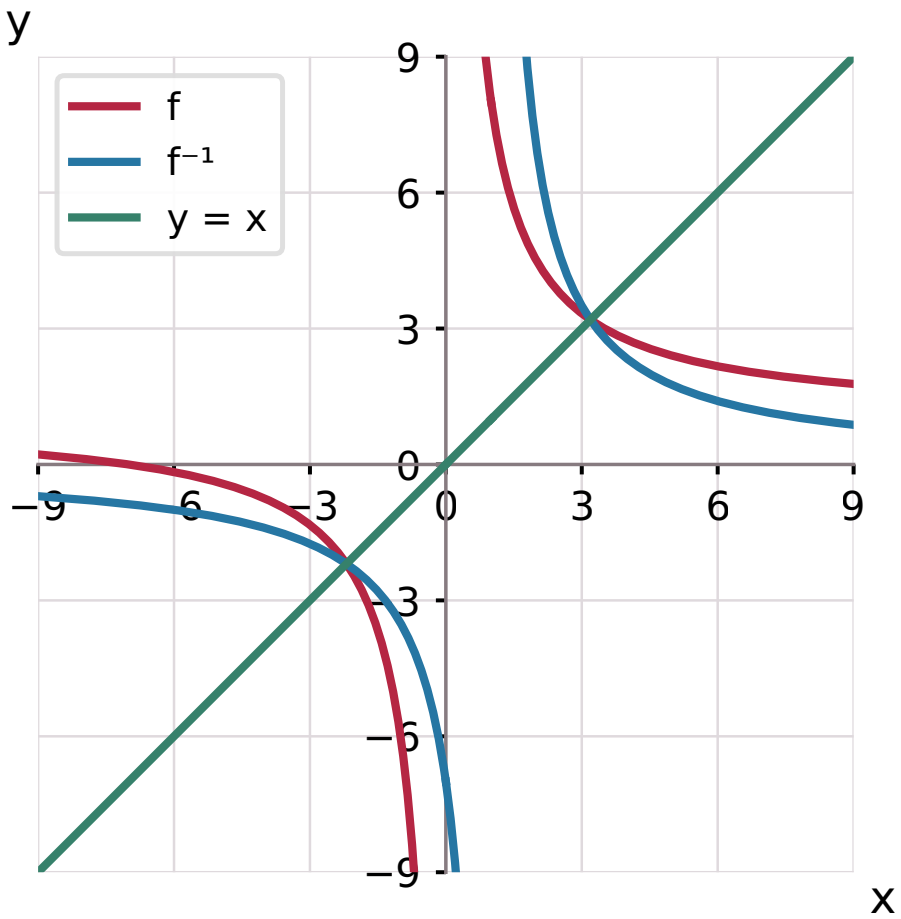
b) No es inyectiva en $\mathbb{R}$. Al restringir a $[0, +\infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x}$, con dominio $(-\infty, 4]$. La restricción $x \leq 0$ da $-\sqrt{(4 - x)}$.

c) $f^{-1}(x) = 2x^2 + 4$, con dominio $[0, +\infty)$, que es el recorrido de f.

d) No es inyectiva en $\mathbb{R}$. Al restringir a $[0, +\infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x^3 + 1}$, con dominio $[-1, +\infty)$. La restricción $x \leq 0$ da $-\sqrt{(x^3 + 1)}$.

7.02 **a)** $f^{-1}(x) = \dfrac{7}{x - 1}$. El dominio de f es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y el de f^{-1} es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Sus gráficas son simétricas respecto de $y = x$: cada punto (a, b) de f corresponde a (b, a) de f^{-1}. Las asíntotas $x = 0$, $y = 1$ se intercambian con $x = 1$, $y = 0$.



7.03 **a)** $f(-2) = 2$, $g(-2) = 11$; $(f - g)(-2) = -9$.

b) $(f \cdot g)(-2) = 22$.

c) $(f/g)(-2) = 2/11$.

7.04 **a)** f(4) = 32 y g(4) = 19/5; producto 608/5.

b) No existe: f(−1) no es real y g(−1) tampoco está definida.

c) f^2 significa el cuadrado de f, no la composición. $[f(2)]^2 = 2^5 = 32$.

7.05 **a)** f(g(2)) = f(1/3) = 1/9.

b) g(f(2)) = g(4) = 1/7.

c) f(f(2)) = f(4) = 16.

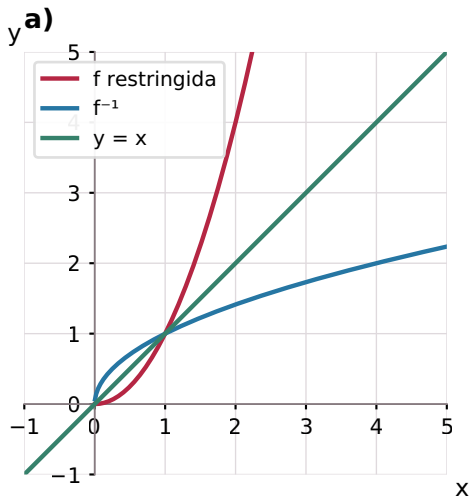
d) g(g(2)) = g(1/3) = −3.

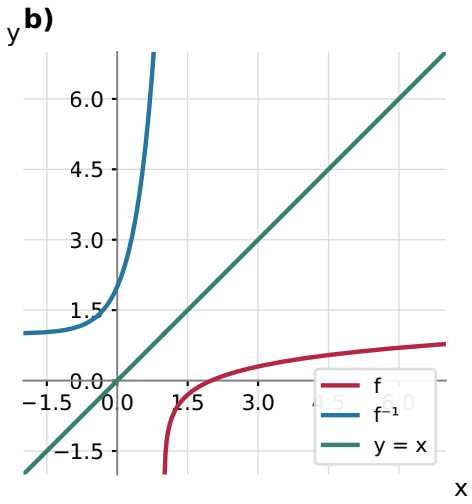
7.06 **a)** $(f\circ g)(x) = \sqrt{2(x-4)^3}$, con $x \geq 4$. En x = 5 vale √2.

b) $(g\circ f)(x) = \sqrt{2x^3} - 4$, con $x \geq 0$. En x = 5 vale $5\sqrt{10} - 4$. Los valores son distintos: la composición no es conmutativa en general.

7.07 **a)** x^2 no es inyectiva en ℝ. Restringiendo a [0, +∞), $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, con $x \geq 0$. En la restricción $x \leq 0$, la inversa es $-\sqrt{x}$. La relación $y = \pm\sqrt{x}$ completa no es una función.

b) $f^{-1}(x) = 10^x + 1$, definida en ℝ y con recorrido (1, +∞). Se obtiene de $y = \log(x-1) \Rightarrow x = 10^y + 1$.





7.08 **a)** Sean $u(x) = x^2 + 1$, v(x) = sen x y $w(x) = x^2$. Entonces $f = w \circ v \circ u$.

b) Sean u(x) = x − 1, v(x) = 1/x y $w(x) = \sqrt{x}$. Entonces $f = w \circ v \circ u$; su dominio real es (1, +∞).

7.09 **a)** Sí: f(g(x)) = g(f(x)) = x para todo x real.

b) Sí: f(g(x)) = (3 − (3 − 4x))/4 = x y g(f(x)) = x.

c) Sí: la raíz cúbica y el cubo se deshacen entre sí; ambas composiciones son x en ℝ.

7.10 **a)** $f^{-1}(x) = (x + 1)/2$, en $\mathbb{R}$.

b) No existe en todo $\mathbb{R}$: $f(x) = f(-x)$. Si se restringe a $x \geq 0$, la inversa es $\sqrt{(x + 5)}$, con $x \geq -5$.

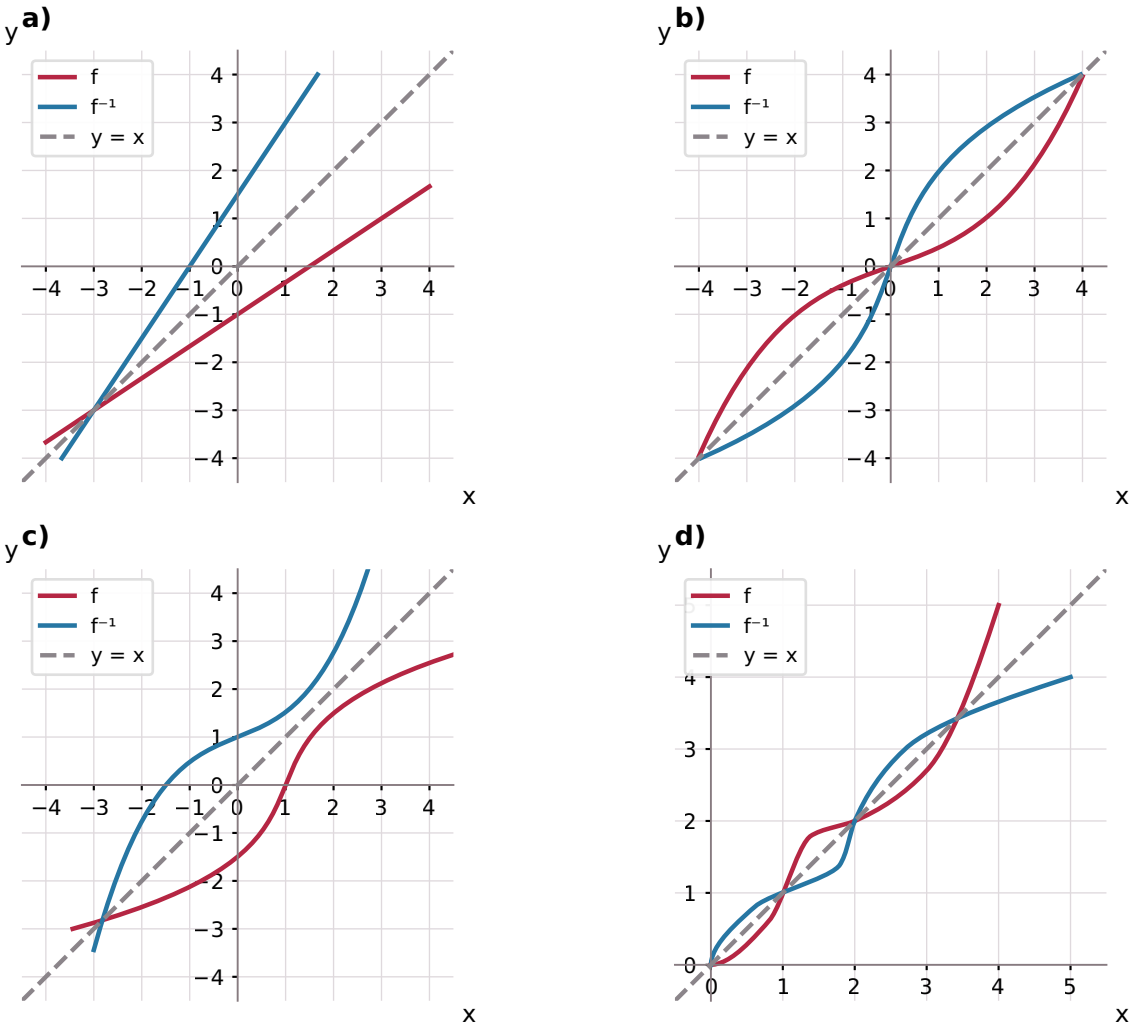
c) $f^{-1}(x) = 1/x - 2$, con $x \neq 0$.

d) No existe en $\mathbb{R}$: $x^2 + x = (x + 1/2)^2 - 1/4$ no es inyectiva. En $x \geq -1/2$, la inversa es $(-1 + \sqrt{(1 + 4x)})/2$, con $x \geq -1/4$.

e) $f^{-1}(x) = (2 - x^2)/5$, con dominio $[0, +\infty)$.

f) $f^{-1}(x) = 2 + 1/x$, con $x \neq 0$.

7.11 Las cuatro curvas son estrictamente crecientes en los tramos dibujados. Para obtener cada inversa, refleja la curva respecto de $y = x$: intercambia las coordenadas de todos sus puntos. Los cortes con X e Y también se intercambian.



7.12

a) $f^{-1}(x) = e^x - 3$, definida en $\mathbb{R}$.

b) $f^{-1}(x) = \log_5\left(\frac{x-3}{4}\right)$, con $x > 3$.

c) Restringiendo la tangente a $(-\pi/2, \pi/2)$: $f^{-1}(x) = \text{arctg}(2x - 1)$, con x real.

d) Restringiendo f a $[-\pi/4, \pi/4]$: $f^{-1}(x) = (\text{arcsen } x)/2$, con $-1 \leq x \leq 1$.

e) No es inyectiva en $\mathbb{R}$. En $x \geq -1$, la inversa es $x - 1$, con dominio $[0, +\infty)$. En $x \leq -1$ se obtiene $-x - 1$.

f) $f^{-1}(x) = 3^{5x-1}$, con dominio $\mathbb{R}$.

7.13

a) $\frac{29}{5}$

b) 4

c) $-\frac{5}{3}$

d) $-\frac{1}{12}$

7.14

a) Dom f = $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$; Dom g = $[-5, 5]$. La suma tiene dominio $[-5, -2] \cup [2, 5]$.

b) Producto: $[-5, -2] \cup [2, 5]$.

c) Cociente f/g: $(-5, -2] \cup [2, 5)$. Se excluyen los ceros de g, -5 y 5.

d) Cociente g/f: $[-5, -2) \cup (2, 5]$. Se excluyen los ceros de f, -2 y 2.

7.15

a) $\frac{3x^2 - 7x + 3}{x - 2}$; $x \neq 2$.

b) $3x - 1 - \frac{1}{x-2} - \sqrt{x+1}$; $x \geq -1$, $x \neq 2$.

c) $\frac{3x-1}{x-2}$; $x \neq 2$.

d) $\frac{1}{(x-2)\sqrt{x+1}}$; $x > -1$, $x \neq 2$.

e) $9x^2 - 6x + 1$; dominio $\mathbb{R}$.

f) $4x$; dominio $[-1, +\infty)$, heredado de h.

g) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$; $x \geq -1$, $x \neq 2$.

h) $\frac{3x^2 - 7x + 3}{(x-2)\sqrt{x+1}}$; $x > -1$, $x \neq 2$.

7.16

a) $f(g(2)) = f(5) = 111$.

b) $g(f(2)) = g(27) = 135/2$.

c) $f(f(2)) = f(27) = 4 \cdot 27^2 + 11 = 2927$.

d) $g(g(2)) = g(5) = 25/2$.

7.17

$g(2) = 10$ y $f(10) = -5$. Por tanto, $f(g(2)) = -5$.

7.18 **a)** $(f \circ g)(x) = 4$ para todo x real.

b) $(g \circ f)(x) = g(4) = -32 + 24 = -8$ para todo x real.

7.19 **a)** $f^{-1}(x) = x^2$, con dominio $[0, +\infty)$. Así, $(f^{-1} \circ g)(x) = (x^2 - 5)^2 = x^4 - 10x^2 + 25$, para $x \leq -\sqrt{5}$ o $x \geq \sqrt{5}$.

b) $(g \circ f^{-1})(x) = x^4 - 5$, con dominio $[0, +\infty)$.

7.20 **a)** $(f \circ g)(x) = \sqrt{3x - 1}$; dominio $[1/3, +\infty)$.

b) $(g \circ f)(x) = 3\sqrt{x + 1} - 2$; dominio $[-1, +\infty)$. Las expresiones y los dominios son diferentes.

7.21 **a)** $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x - 3$.

b) $f(x) = x - 3$; $g(x) = \sqrt{x}$.

c) $f(x) = x^4$; $g(x) = 3x - 1$.

d) $f(x) = \sqrt{(x + 1)}$; $g(x) = 1/(x - 2)$. Dominio de la composición: $(-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$.

7.22 **a)** $g \circ f$: $g(f(x)) = 5\sqrt{(x^2 + 4)} + 1$.

b) $g \circ g$: $g(g(x)) = 25x + 6$.

c) $g \circ h$: $g(h(x)) = 10/(x + 1) + 1 = (x + 11)/(x + 1)$, para $x \neq -1$.

d) $f \circ f$: $f(f(x)) = \sqrt{(x^2 + 8)}$.

7.23 **a)** $(1, 3)$: $y = 2(x - 2)^2 + 1$.

b) 11: toma $x = 2$ en $f(3x - 1) = x^3 + x + 1$.

c) -1. Si $A = f(\pi/2)$, $B = f(-\pi/2)$, entonces $A + 2B = 1$ y $B + 2A = -1$; $A = -1$.

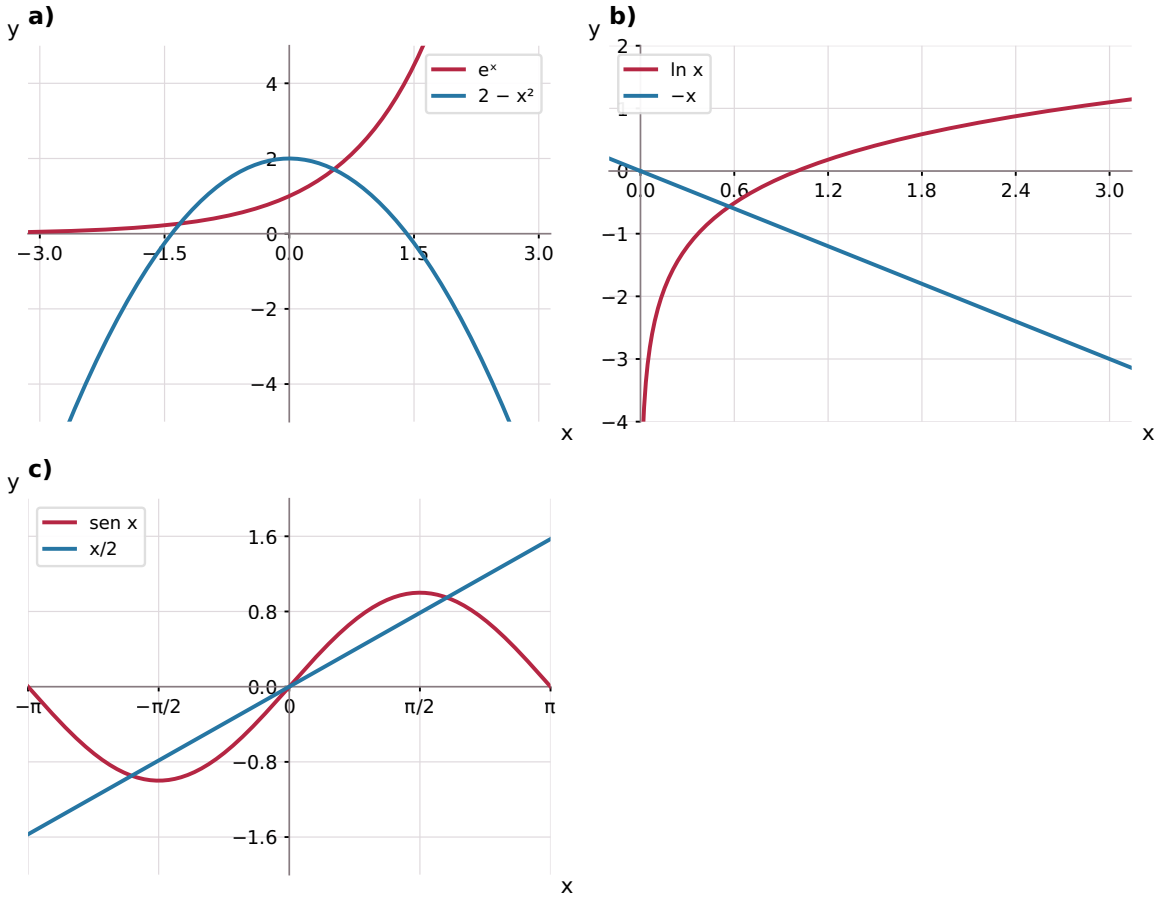
d) $(5, +\infty)$, recorrido de $3^x + 5$. La inversa es $\log_3(x - 5)$.

e) 31 ceros: $x = 1/(n\pi)$, con $1 \leq n \leq 31$, cumple $0{,}01 < x < 1$.

7.24 **a)** Dos: $x \approx -1{,}316$ y $x \approx 0{,}537$. $e^x + x^2 - 2$ es estrictamente convexa, negativa en 0 y positiva en ambos extremos.

b) Una: $x \approx 0{,}567$. En su dominio $x > 0$, $\ln x + x$ es estrictamente creciente y cambia de signo entre 0 y 1.

c) Tres: $x = 0$ y $x \approx \pm 1{,}895$. En $(0, \pi)$, $\operatorname{sen} x - x/2$ crece primero y después decrece, con un cero positivo. La simetría impar da el negativo.



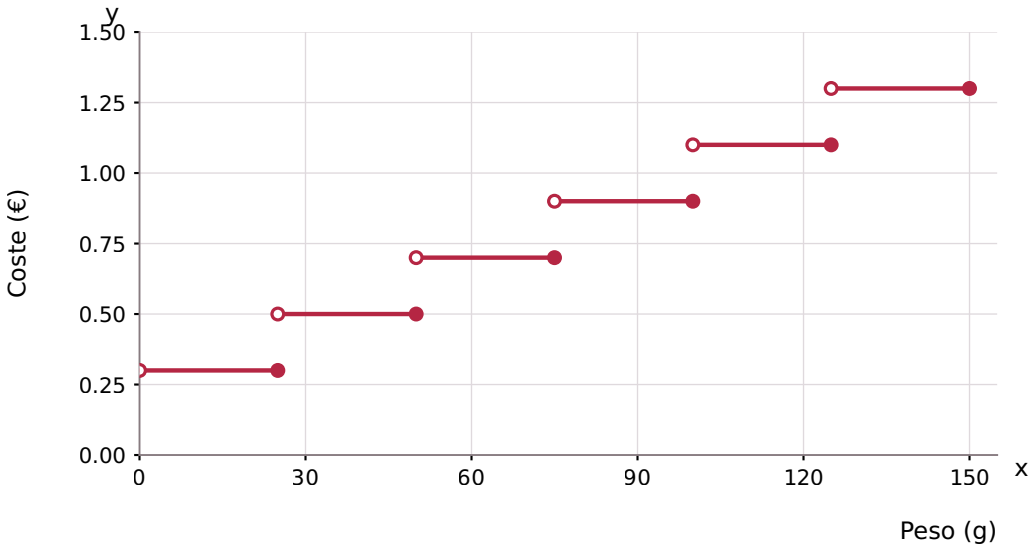
7.25 **a)** Con $x = 2, -1$ y $1/2$ se obtiene $f(2) + f(-1) = 2$; $f(-1) + f(1/2) = -1$; $f(1/2) + f(2) = 1/2$.

b) Suma la primera y la tercera y resta la segunda: $2f(2) = 7/2$. Así, $f(2) = 7/4$.

08 · Aplicaciones y modelos

8.01 **a)** Para $0 < x \leq 150$, el coste es 0,30; 0,50; 0,70; 0,90; 1,10 y 1,30 €, respectivamente, en los intervalos (0, 25], (25, 50], (50, 75], (75, 100], (100, 125] y (125, 150].

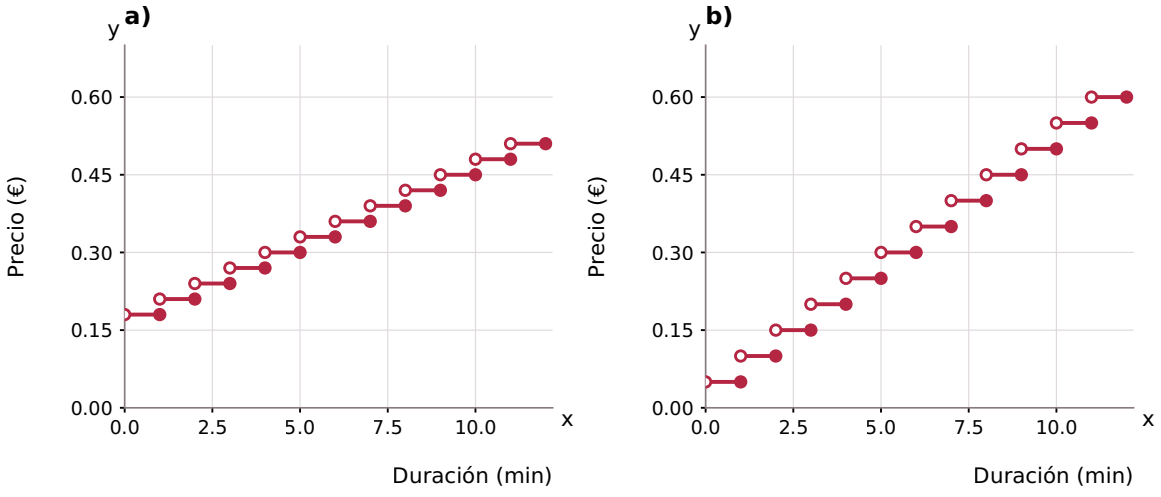
b) Es una función escalonada. Los extremos derechos de cada tramo están incluidos y los izquierdos, excluidos. Una fórmula es $C(x) = 0{,}30 + 0{,}20(\lceil x/25 \rceil - 1)$, donde $\lceil t \rceil$ es el menor entero mayor o igual que t.



8.02 **a)** Tarifa 1: 0,18; 0,30; 0,36; 0,42; 0,51 €. Para $t > 0$: $C_1(t) = 0{,}15 + 0{,}03\lceil t \rceil$. Sí es función.

b) Tarifa 2: 0,05; 0,25; 0,35; 0,45; 0,60 €. Para $t > 0$: $C_2(t) = 0{,}05\lceil t \rceil$. Sí es función.

c) Tarifa 3: entre semana, 0,04; 0,20; 0,28; 0,36; 0,48 €; en fin de semana, 0,03; 0,15; 0,21; 0,27; 0,36 €. La duración sola no determina un precio único sin fijar el tipo de día. Para cada tipo de día sí se obtiene una función escalonada.



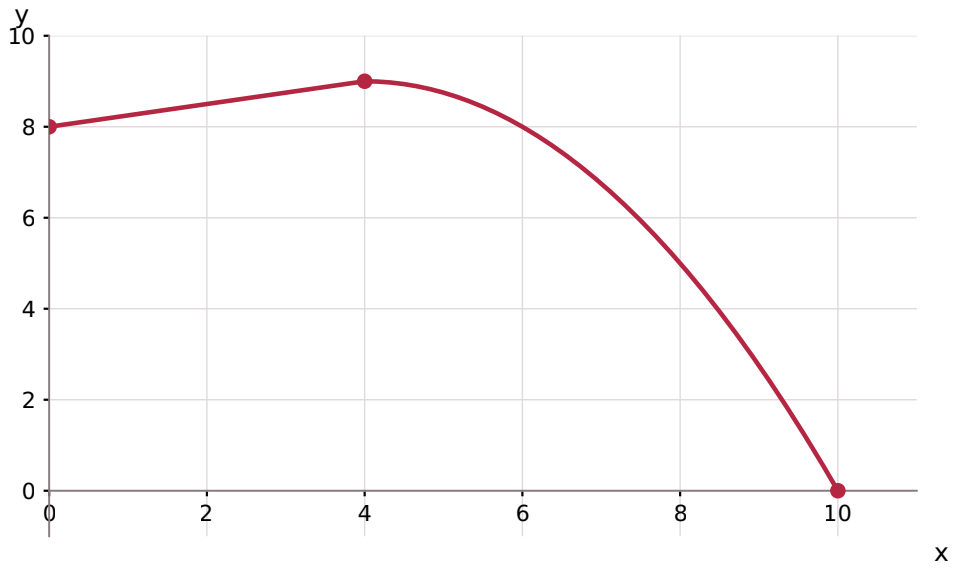
8.03 Sí, mediante un modelo periódico de las fases lunares. El ciclo de una luna nueva a la siguiente dura aproximadamente 29,5 días. Es una aproximación: los ciclos reales presentan pequeñas variaciones.

8.04 **a)** $h(t) = -4{,}9t^2 + 40t + 2$. El vértice está en $t = 40/9{,}8 \approx 4{,}08$ s. Altura máxima: $2 + 1600/19{,}6 \approx 83{,}63$ m.

b) $h(5) = -4{,}9 \cdot 25 + 40 \cdot 5 + 2 = 79{,}5$ m.

8.05 **a)** $P(0) = 8$ €.

b) Segmento de (0, 8) a (4, 9), seguido del arco de parábola que pasa por (6, 8), (8, 5) y (10, 0). Es continua; máximo de 9 € en $t = 4$.



8.06 **a)** $(M \circ P)(t) = 1 + 0{,}5(457 + 0{,}3t^2) = 229{,}5 + 0{,}15t^2$ partes por millón.

b) Para $t = 10$: $229{,}5 + 0{,}15 \cdot 100 = 244{,}5$ partes por millón.

8.07 El cubo tiene volumen x^3 y el prisma, b^2x. Así, $V(x, b) = x^3 + b^2x$, con $x, b > 0$. Si b es fijo, V es función de x.

8.08 **a)** P(m) = 50·3^(m/2), con $m \geq 0$, en el modelo exponencial continuo.

b) Cuatro años son 48 meses: $P(48) = 50 \cdot 3^{24} = 14\,121\,476\,824\,050$ peces. Es el resultado del modelo; el crecimiento ilimitado no describe a largo plazo un lago real.

c) $m = 2 \log_3 20 \approx 5{,}45$ meses. Si se cuentan meses completos, el primero con al menos 1000 es el sexto; observando cada dos meses, también es el sexto.

8.09 $(f \circ g)(y) = 30 + \sqrt{\dfrac{4y - 1}{120}}$. El modelo exige $y \geq 1/4$.

8.10 **a)** $34 = 25 + 15e^{(-10k)}$, por lo que $k = \ln(5/3)/10 \approx 0{,}05108$ min^{-1}.

b) Para 30 °C: $e^{(-kt)} = 1/3$. Así, $t = 10 \ln 3/\ln(5/3) \approx 21{,}51$ minutos desde el inicio, unos 11,51 minutos tras la medición a 34 °C.

8.11 **a)** $P(1) = 11$ miles: 11 000 personas.

b) $P(21) = 1 + 110/451 \approx 1{,}243902$ miles: aproximadamente 1244 personas.

c) $P(t) > 2$ equivale a $t^2 < 100$. La capacidad está desbordada para $0 < t < 10$; el día 10 se iguala a 2000 personas.

8.12 **a)** Las velocidades son $\pi/30$ y $\pi/360$ rad/min. El ángulo es $\alpha(t) = 11\pi t/360$, menor que π en el intervalo.

b) $A(t) = 300 \operatorname{sen}(\frac{11\pi t}{360})$ cm². Es 0 a las 12:00 y máximo, 300 cm², en $t = 180/11 \approx 16{,}36$ min: a las 12:16:22, aproximadamente.

c) $d(t) = 10\sqrt{13 - 12\cos(\frac{11\pi t}{360})}$ cm, por el teorema del coseno.

8.13 **a)** Hay seis direcciones de contacto, paralelas a las aristas. En cada dirección se cuentan como los puntos de un tetraedro con $n - 1$ esferas por arista: $(n - 1)n(n + 1)/6$.

b) Multiplicando por seis: $C(n) = n(n - 1)(n + 1) = n^3 - n$. Para $n = 1$ hay 0 contactos; para $n = 2$ hay 6.

8.14 $50 - 15 = 35$ km. Corresponde a los límites del modelo; las alturas reales de transición varían.

8.15 No. En general, disminuye en la troposfera, aumenta en la estratosfera, disminuye en la mesosfera y aumenta en la termosfera. Se necesitan distintos tramos; un tramo afín con temperatura inicial no nula tampoco es proporcionalidad directa.

8.16 En la mesopausa, límite superior de la mesosfera, donde pueden aproximarse a −90 °C. No corresponde a la estratosfera.

8.17 Se necesita un perfil térmico concreto: localiza los 110 km en el eje de altura y lee la temperatura en la curva. No hay un valor exacto universal: esa región de la termosfera varía con las condiciones y la actividad solar.

8.18 **a)** La mayor concentración de ozono está en la estratosfera. Absorbe radiación ultravioleta perjudicial.

b) La reducción de sustancias que destruyen el ozono, como los CFC, favorece su recuperación a largo plazo, aunque persisten variaciones y episodios de agotamiento. Mantener esas medidas protege la salud y los ecosistemas. No debe confundirse con la reducción de todos los gases de efecto invernadero.

8.19 $T(h) = 20 - 6h$, con h en kilómetros. $T(8{,}848) = 20 - 6 \cdot 8{,}848 = -33{,}088$ °C, aproximadamente −33,1 °C. Es una estimación del modelo.