DOSSIER DE EJERCICIOS

1.º BACHILLERATO

Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

01 Composición y función inversa

02 Funciones exponenciales

03 Funciones logarítmicas

04 Funciones trigonométricas

05 Crecimiento y modelos

06 Repaso integrado

57 actividades · 6 apartados

Índice · Ejercicios · Solucionario final

CONTENIDOS

Índice

Actividades organizadas por conceptos para practicar, repasar y comprobar las respuestas. Cada ejercicio tiene un código que lo identifica también en el solucionario.

01 Composición y función inversa **3**

02 Funciones exponenciales **7**

03 Funciones logarítmicas **9**

04 Funciones trigonométricas **12**

05 Crecimiento y modelos **15**

06 Repaso integrado **18**

S Solucionario **21**

Cómo trabajar. Resuelve los ejercicios en el espacio disponible o en tu cuaderno. Comprueba los procedimientos y resultados al terminar cada bloque.

APARTADO 01

Composición y función inversa

16 actividades

001 ACTIVIDAD

Si $f(x) = x^2 - 5x + 3$ y $g(x) = x^2$, obtén las expresiones de $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$.

Halla $f[g(4)]$ y $g[f(4)]$.

002 ACTIVIDAD

Si $f(x) = \text{sen } x$, $g(x) = x^2 + 5$, halla $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$. Halla el valor de estas funciones en $x = 0$ y $x = 2$.

003 ACTIVIDAD

Representa $y = 2x$, $y = x/2$ y comprueba que son inversas.

004 ACTIVIDAD

Comprueba que hay que descomponer $y = x^2 - 1$ en dos ramas para hallar sus inversas respecto de la recta $y = x$. Averigua cuáles son.

005 ACTIVIDAD

Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x - 1$, comprueba que $f[g(x)] = x$. ¿Son $f(x)$ y $g(x)$ funciones inversas? Comprueba que el punto $(a, a + 1)$ está en la gráfica de f y que el punto $(a + 1, a)$ está en la gráfica de g. Representa las dos funciones y observa su simetría respecto de la recta $y = x$.

006 ACTIVIDAD

Dadas las funciones $f(x) = x + 3$ y $g(x) = \frac{5x}{2}$, halla:

a) $f[g(2)]$ b) $g[f(-1)]$ c) $f[g(x)]$ d) $g[f(x)]$

007 ACTIVIDAD

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x$ obtén la expresión de las siguientes funciones:

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ f$ d) $g \circ g$

008 ACTIVIDAD

¿Cuál es la función inversa de $f(x) = 2x - 3$?

Representa $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes coordenados y comprueba su simetría respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

009 ACTIVIDAD

Considera las funciones f y g definidas por $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \frac{1}{x}$.

Calcula:

a) $(f \circ g)(2)$ b) $(g \circ f)(-3)$ c) $(g \circ g)(x)$ d) $(f \circ g)(x)$

010 ACTIVIDAD

Dadas las funciones $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, halla:

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$ c) $(g \circ g)(x)$

011 ACTIVIDAD

Con las funciones $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = x - 2$, hemos obtenido por composición las funciones $p(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ y $q(x) = \frac{1}{x^2} - 2$. Indica cuál de estas expresiones corresponde a $f \circ g$ y cuál a $g \circ f$.

012 ACTIVIDAD

Halla la función inversa de estas funciones:

a) $y = 3x$ b) $y = x + 7$ c) $y = 3x - 2$

013 ACTIVIDAD

Dada la función $f(x) = 1 + \sqrt{x}$, halla $f^{-1}(x)$. Representa las dos funciones y comprueba su simetría respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

014 ACTIVIDAD

Considera estas funciones:

$$f(x) = x - 5 \qquad g(x) = \sqrt{x} \qquad h(x) = \frac{1}{x + 2}$$

Explica cómo, a partir de f, g y h, se pueden obtener, por composición, p, q y r:

$$p(x) = \sqrt{x - 5};\ q(x) = \sqrt{x} - 5;\ r(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

015 ACTIVIDAD

Si $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \log_2 x$, ¿cuál es la función $(f \circ g)(x)$?

¿Y $(g \circ f)(x)$?

016 ACTIVIDAD

Halla la función inversa de estas funciones:

a) $y = 3 \cdot 2^{x-1}$

b) $y = 1 + 3^x$

APARTADO 02

Funciones exponenciales

6 actividades

017 ACTIVIDAD

Con ayuda de la calculadora, haz una tabla de valores de la función $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ y represéntala gráficamente.

018 ACTIVIDAD

Representa la función $y = (6/5)^x$. ¿Es creciente o decreciente?

019 ACTIVIDAD

Comprueba que las gráficas de $y = 3^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ son simétricas respecto al eje OY.

020 ACTIVIDAD

Representa las funciones:

a) $y = 2^x + 1$

b) $y = 2^x - 3$

021 ACTIVIDAD

Representa las siguientes funciones:

a) $y = 2^{x-1}$

b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$

c) $y = 1 - 2^x$

d) $y = 2^{-x}$

022 ACTIVIDAD

La gráfica de una función exponencial del tipo $y = k\,a^x$ pasa por los puntos (0; 0,5) y (1; 1,7).

Calcula k y a, y representa la función.

APARTADO 03

Funciones logarítmicas

11 actividades

023 ACTIVIDAD

Haz una tabla de valores de la función $y = 3^x$. A partir de ella, representa la función $y = \log_3 x$.

( ) ( )

024 ACTIVIDAD

Representa la gráfica de $y = \log_{1/3} x$ a partir de la gráfica de $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

025 ACTIVIDAD

Haz, con la calculadora, una tabla de valores de la función $y = 5\log x$ y represéntala gráficamente.

026 ACTIVIDAD

Representa la función $y = 1 + \ln x$.

027 ACTIVIDAD

Representa estas funciones a partir de la gráfica de $y = \log_2 x$:

a) $y = 1 + \log_2 x$

b) $y = \log_2 (x - 1)$

$(\quad \infty)$

028 ACTIVIDAD

¿Cuál es el dominio de esta función?

$$y = \log_2 (2 - x)$$

Represéntala.

029 ACTIVIDAD

Estas gráficas corresponden a funciones del tipo $y = a^x$, $y = \log_a x$. Identifícalas e indica, en cada caso, si es $a > 1$ ó $0 < a < 1$.

030 ACTIVIDAD

En las funciones $y = a^x$ e $y = \log_a x$, ¿puede ser negativa la y? ¿Podemos dar a x valores negativos?

031 ACTIVIDAD

Las gráficas de las funciones $y = \log_a x$ tienen un punto en común. ¿Cuál es ese punto? ¿Cuál es el punto común de las funciones $y = a^x$?

032 ACTIVIDAD

Di para qué valores de a es creciente y para cuáles es decreciente cada una de las funciones $y = a^x$ e $y = \log_a x$.

033 ACTIVIDAD

¿Para qué valores de x se verifica $0 < a^x < 1$, siendo $a > 1$?

APARTADO 04

Funciones trigonométricas

7 actividades

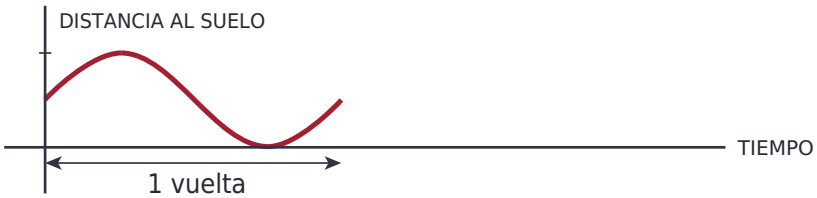
034 ACTIVIDAD

Modificando la escala, representa la función:

x: tiempo transcurrido

y: distancia al suelo

correspondiente a cuatro vueltas de la noria.



035 ACTIVIDAD

Representa las funciones:

a) $y = 1 + \operatorname{sen} x$

b) $y = -\cos x$

036 ACTIVIDAD

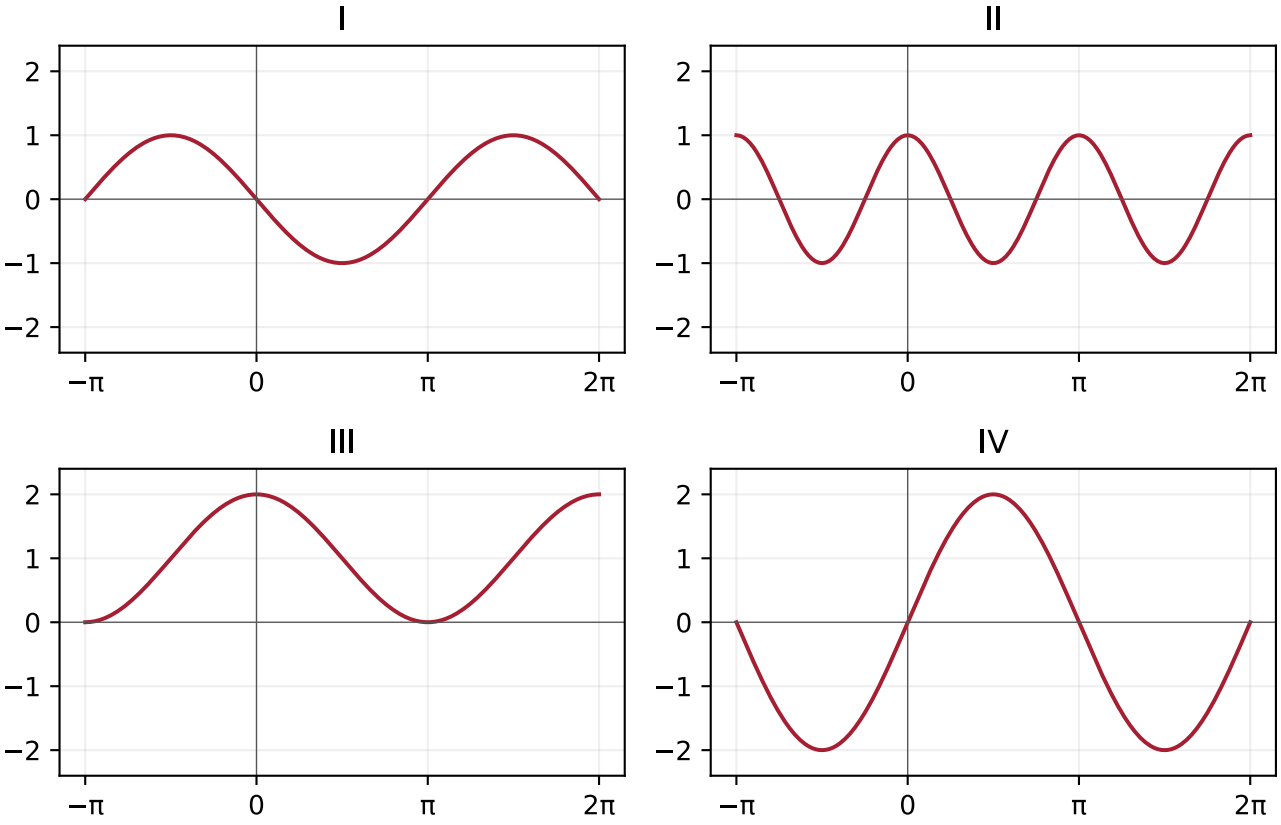
Asocia a cada función su gráfica:

a) $y = \cos(2x)$.

b) $y = -\operatorname{sen}(x)$.

c) $y = 2\operatorname{sen}(x)$.

d) $y = 1 + \cos(x)$.



037 ACTIVIDAD

Representa las siguientes funciones:

a) $y = |\operatorname{sen} x|$

b) $y = |\cos x|$

038 ACTIVIDAD

Busca, en cada caso, los valores de x comprendidos entre 0 y 2π que verifiquen:

a) $\operatorname{sen} x = 0$

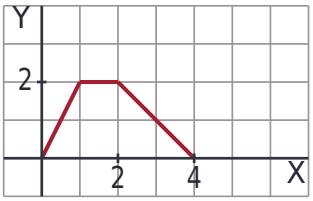
b) $\operatorname{sen} x = -1$

c) $\cos x = 1$

d) $\cos x = 0$

039 ACTIVIDAD

La siguiente gráfica representa la variación de un movimiento que se repite periódicamente:



a) Represéntala en el intervalo [0, 10].

b) Calcula $f(7)$, $f(10)$ y $f(20)$.

040 ACTIVIDAD

Considera las funciones $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$.

a) ¿Cuál es su periodo?

b) ¿Entre qué valores están acotadas?

c) ¿Para qué valores de x es $\operatorname{sen} x < 0$? ¿Y $\cos x < 0$?

APARTADO 05

Crecimiento y modelos

8 actividades

041 ACTIVIDAD

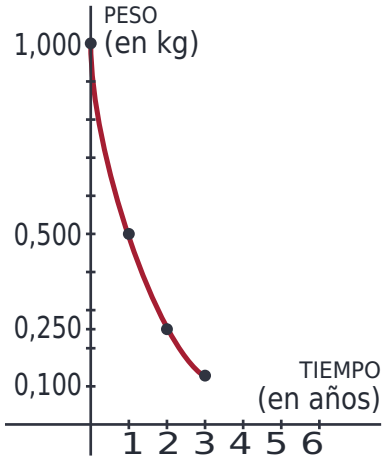
Una población de amebas parte de un individuo y se duplica cada hora. a) Completa la tabla para las horas 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6; los primeros valores son 1, 2 y 4 amebas. b) Representa el número de amebas frente al tiempo. c) Intercambia los ejes y representa el tiempo en función del número de amebas.

042 ACTIVIDAD

a) Completa la tabla siguiente (utiliza la calculadora para obtener los valores con tres cifras decimales):

TIEMPO (años)	0	1	2	3	4	5	6
SUSTANCIA (kg)	1	0,5	0,250	0,125			

b) Representa gráficamente los datos en papel cuadriculado.



c) Cambia los ejes y representa la función cuyas variables son, ahora:

x: peso de la sustancia radiactiva (en kg)

y: tiempo transcurrido (en años)

043 ACTIVIDAD

La masa de madera de un bosque aumenta en un 40% cada 100 años. Si tomamos como unidad de masa vegetal (biomasa) la que había en el año 1800, que consideramos instante inicial, y como unidad de tiempo 100 años, la función $M = 1{,}4^t$ nos da la cantidad de masa vegetal, M, en un instante cualquiera, t expresado en siglos a partir de 1800 (razona por qué).

a) Averigua cuándo habrá una masa de madera triple que en 1800 ($1{,}4^t = 3$) y cuándo había la tercera parte. Observa que los dos periodos de tiempo son iguales.

b)Calcula la cantidad de madera que habrá, o había, en 1900, 1990, 2000, 1600 y 1550.

044 ACTIVIDAD

Una sustancia radiactiva sigue el modelo $\mathbf{M = m \cdot 0{,}76^t}$, donde m es la cantidad inicial y t se expresa en miles de años. Comprueba que su periodo de semidesintegración es aproximadamente de 2 500 años. Sustituye t = 2,5 y compara M con m/2.

045 ACTIVIDAD

Se llama inflación a la pérdida de valor del dinero; es decir, si un artículo que costó 100 € al cabo de un año cuesta 104 €, la inflación ha sido del 4%. Si la inflación se mantiene constante en el 4% anual, ¿cuánto costará dentro de 5 años un terreno que hoy cuesta 12 000 €?

046 ACTIVIDAD

Un capital de 10 000 € se deposita en un banco al 8,4% de interés anual con pago mensual de intereses. Escribe la función que nos dice en cuánto se transforma ese capital en m meses.

Calcula cuánto tarda en duplicarse el capital.

047 ACTIVIDAD

La concentración de un fármaco en sangre viene dada por $y = 100\ (0{,}94)^t$ (y en mg, t en h).

a) Di cuál es la dosis inicial y la cantidad de ese fármaco que tiene el paciente al cabo de 3 h.

b)Representa la función.

c) Si queremos que la concentración no baje de 60 mg, ¿al cabo de cuánto tiempo tendremos que inyectarle de nuevo?

048 ACTIVIDAD

Un cultivo de bacterias crece según la función $y = 1 + 2^{x/10}$ (y: miles de bacterias, x: horas). ¿Cuántas había en el momento inicial? ¿Y al cabo de 10 horas? ¿Cuánto tardarán en duplicarse?

APARTADO 06

Repaso integrado

9 actividades

049 ACTIVIDAD

Dadas las funciones:

$f(x) = 2x + 1$; $g(x) = x^2 - 5$, halla:

a) $g[f(-2)]$

b) $f[g(0)]$

c) $f \circ_f (x)$

d) $f \circ_g (x)$

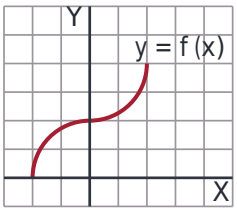
050 ACTIVIDAD

¿Cuál es la función inversa de $f(x) = \sqrt{3x - 2}$?

Comprueba que $f \circ f^{-1}(4) = 4$.

051 ACTIVIDAD

Representa la gráfica de la función inversa de $y = f(x)$.



052 ACTIVIDAD

Representa las siguientes funciones:

a) $y = 0{,}8^x$ b) $y = 1{,}5^x$ c) $y = \ln x$

053 ACTIVIDAD

La gráfica de la función $y = ka^x$ pasa por los puntos $\left(0, \frac{1}{5}\right)$ y (5; 6,4). Halla k y a y di si se trata de una función creciente o decreciente.

054 ACTIVIDAD

Justifica cuál de las siguientes funciones es la función inversa de $y = 3^x - 2$.

a) $y = 2 + \log_3 x$ b) $y = \sqrt[3]{x + 2}$ c) $y = \log_3 (x + 2)$

055 ACTIVIDAD

El precio de una furgoneta baja un 10% por año de utilización. Si costó 18 000 €, ¿cuánto tardará en reducirse a la mitad?

056 ACTIVIDAD

Una población de insectos crece según la función $y = 1 + 0{,}5 \cdot 2^{0{,}4x}$ (x = tiempo en días; y = número de insectos en miles).

a) ¿Cuál es la población inicial?

b)Calcula cuánto tarda en duplicarse.

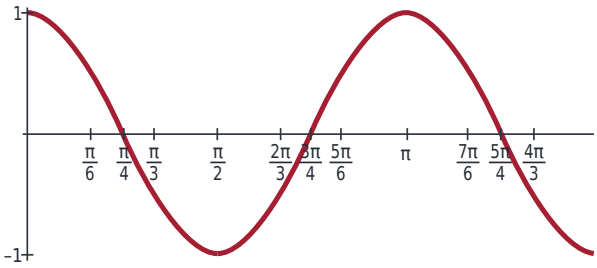
057 ACTIVIDAD

Asocia a esta gráfica una de las siguientes expresiones y di cuál es su periodo:

a) $y = \cos x$

b) $y = \cos 2x$

c) $y = 2\cos x$



Completa estos puntos para que pertenezcan a la gráfica:

$(5\pi/6, \ldots)$, $(4\pi/3, \ldots)$, $(-\pi/4, \ldots)$.

COMPRUEBA TUS RESPUESTAS

Solucionario

Busca el código de cada actividad. En las preguntas abiertas se ofrece una respuesta orientativa.

01 · Composición y función inversa

001 SOLUCIÓN

$f[g(x)] = f[x^2] = x^4 - 5x^2 + 3$

$g[f(x)] = g[x^2 - 5x + 3] = (x^2 - 5x + 3)^2$

$f[g(4)] = 179; \quad g[f(4)] = 1$

002 SOLUCIÓN

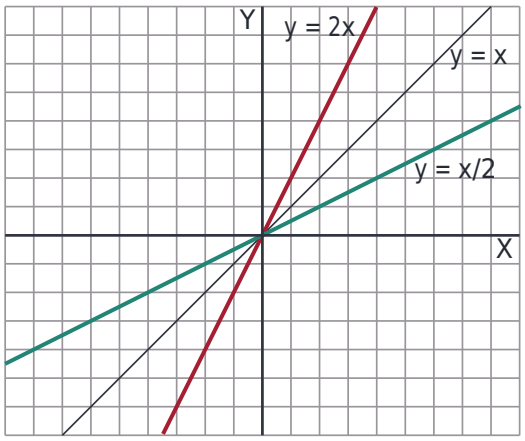
$f \circ_g (x) = \text{sen}(x^2 + 5); \; f \circ_g (0) = -0{,}96; \quad f \circ_g (2) = 0{,}41$

$g \circ_f (x) = \text{sen}^2 x + 5; \; g \circ_f (0) = 5; \quad g \circ_f (2) = 5{,}83$

$f \circ_f (x) = \text{sen}(\text{sen } x); \; f \circ_f (0) = 0; \quad f \circ_f (2) = 0{,}79$

$g \circ_g (x) = (x^2 + 5)^2 + 5; \quad g \circ_g (0) = 30; \quad g \circ_g (2) = 86$

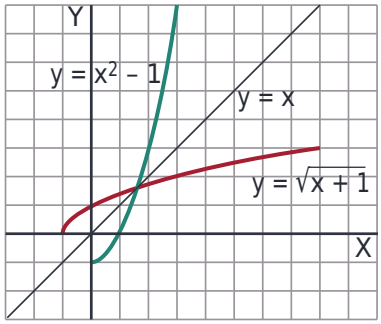
003 SOLUCIÓN



004 SOLUCIÓN

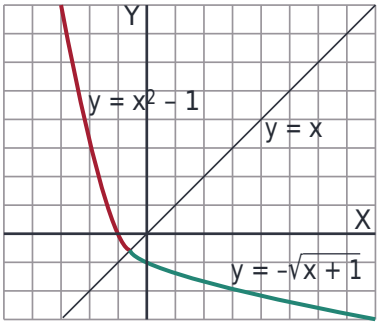
a) $y = x^2 - 1$ si $x \geq 0$

$y^{-1} = \sqrt{x + 1}$



b) $y = x^2 - 1$ si $x < 0$

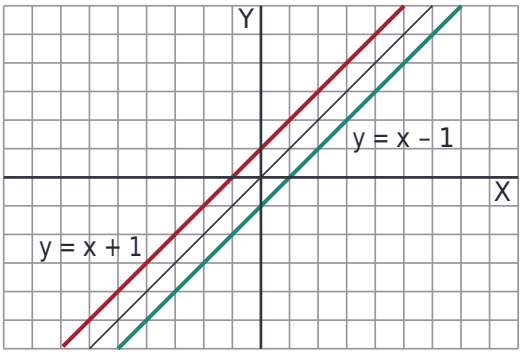
$y^{-1} = -\sqrt{x + 1}$



005 SOLUCIÓN

$f[g(x)] = f(x - 1) = (x - 1) + 1 = x$

Son funciones inversas.



006 SOLUCIÓN

a) $f[g(2)] = f\left[\frac{5 \cdot 2}{2}\right] = f(5) = 5 + 3 = 8$

b) $g[f(-1)] = g(-1 + 3) = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$

c) $f[g(x)] = f\left(\frac{5x}{2}\right) = \frac{5x}{2} + 3$

d) $g[f(x)] = g(x + 3) = \frac{5(x + 3)}{2}$

007 SOLUCIÓN

a) $f \circ g(x) = f[g(x)] = f(x^2 - 2x) = 2(x^2 - 2x) + 3 = 2x^2 - 4x + 3$

b) $g \circ f(x) = g[2x + 3] = (2x + 3)^2 - 2(2x + 3) = 4x^2 + 8x + 3$

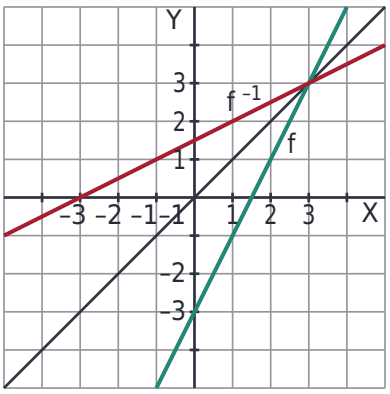
c) $f \circ f(x) = f(2x + 3) = 2(2x + 3) + 3 = 4x + 9$

d) $g \circ g(x) = g(x^2 - 2x) = (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x$

008 SOLUCIÓN

$y = 2x - 3 \rightarrow x = 2y - 3 \rightarrow \frac{x + 3}{2} = y$

$f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{2}$



009 SOLUCIÓN

a) $(f \circ g)(2) = f[g(2)] = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}$

b) $(g \circ f)(-3) = g[f(-3)] = g(10) = \frac{1}{10}$

c) $(g \circ g)(x) = g[g(x)] = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1/x} = x$

d) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1$

010 SOLUCIÓN

a) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\sqrt{x}\right) = 3\sqrt{x} + 2$

b) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(3x + 2) = \sqrt{3x + 2}$

c) $(g \circ g)(x) = g[g(x)] = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$

011 SOLUCIÓN

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \frac{1}{(x-2)^2} \rightarrow (f \circ g)(x) = p(x)$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \frac{1}{x^2} - 2 \rightarrow (g \circ f)(x) = q(x)$$

012 SOLUCIÓN

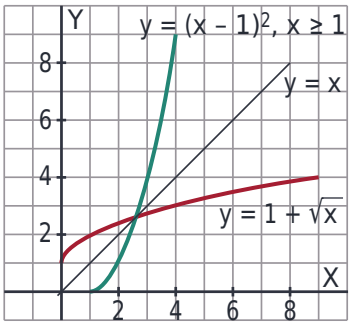
a) $y = 3x \rightarrow x = 3y \rightarrow y = \frac{x}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$

b) $y = x + 7 \rightarrow x = y + 7 \rightarrow y = x - 7 \rightarrow f^{-1}(x) = x - 7$

c) $y = 3x - 2 \rightarrow x = 3y - 2 \rightarrow y = \frac{x+2}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$

013 SOLUCIÓN

$$y = 1 + \sqrt{x} \rightarrow x = 1 + \sqrt{y} \rightarrow (x-1)^2 = y \rightarrow f^{-1}(x) = (x-1)^2$$



014 SOLUCIÓN

$p = g \circ f$ $q = f \circ g$ $r = h \circ g$

015 SOLUCIÓN

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

016 SOLUCIÓN

a) $x = 3 \cdot 2^{y-1}$; $\frac{x}{3} = 2^{y-1}$; $\log_2 \frac{x}{3} = y - 1$

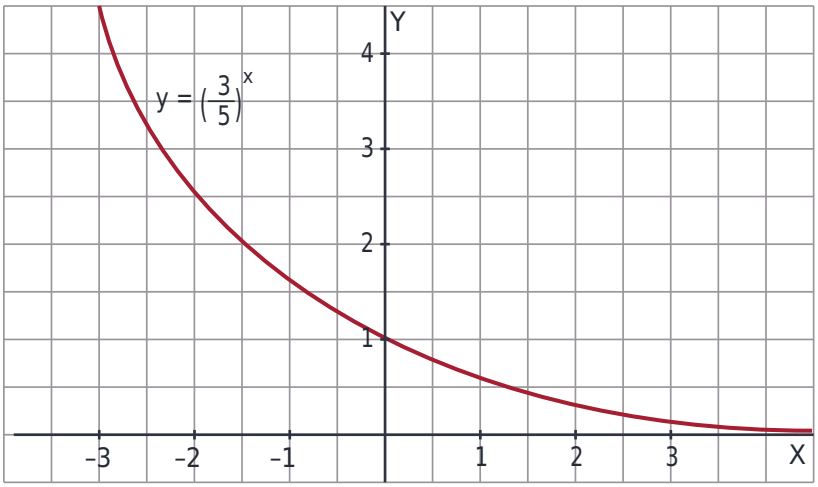
$y = 1 + \log_2 \frac{x}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \log_2 \frac{x}{3}$

b) $x = 1 + 3^y$; $x - 1 = 3^y$; $\log_3(x - 1) = y \rightarrow f^{-1}(x) = \log_3 (x - 1)$

02 · Funciones exponenciales

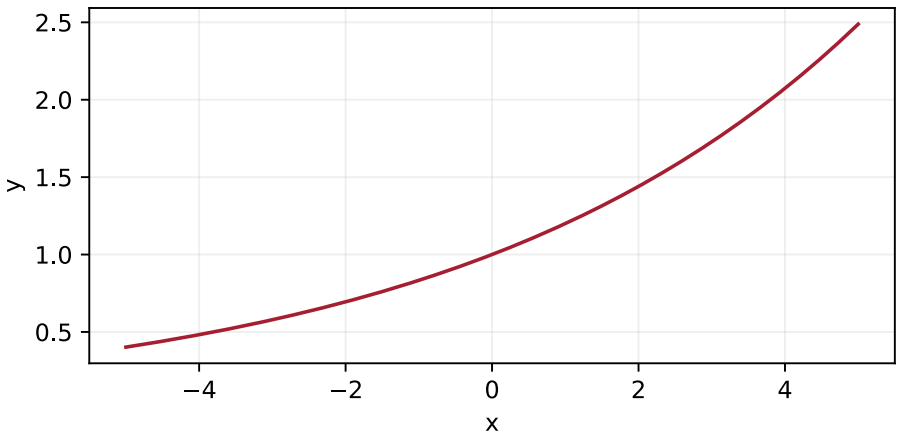
017 SOLUCIÓN

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	4,63	2,78	1,67	1	0,6	0,36	0,22

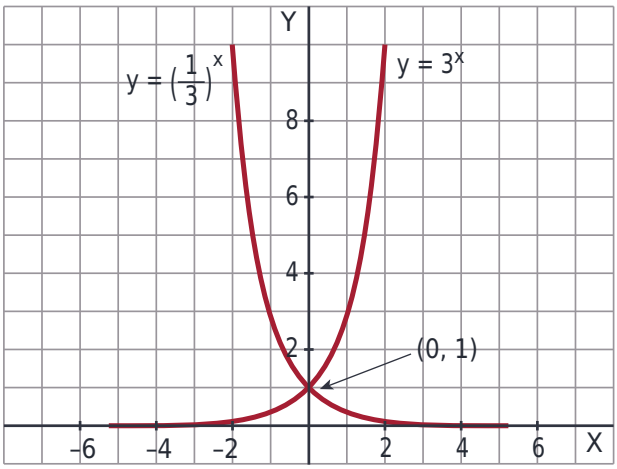


018 SOLUCIÓN

Es creciente porque la base 6/5 es mayor que 1. Pasa por (0, 1), su dominio es $\mathbb{R}$ y su recorrido es $(0, +\infty)$.

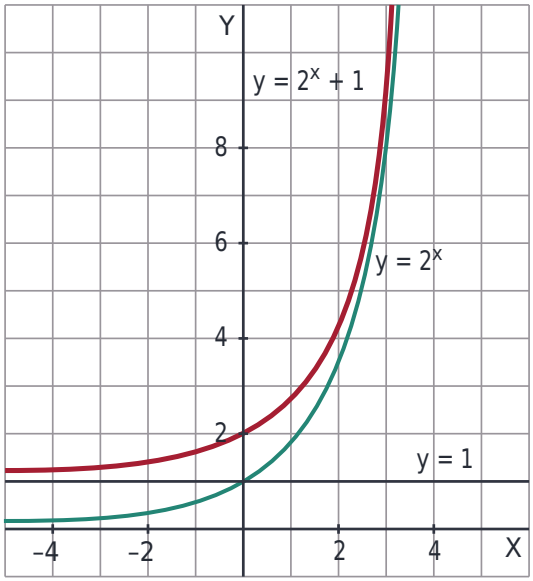


019 SOLUCIÓN

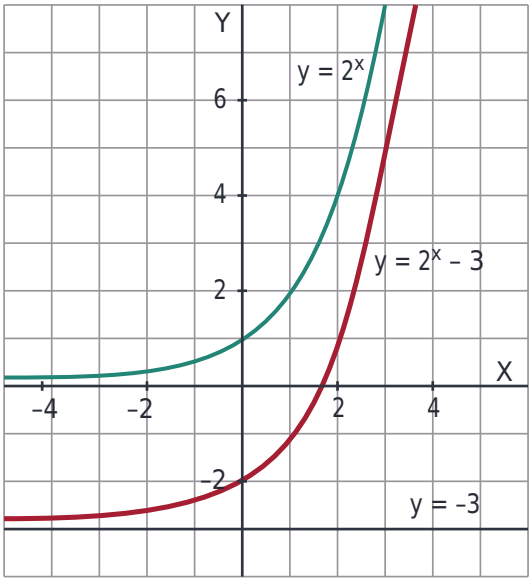


020 SOLUCIÓN

a)

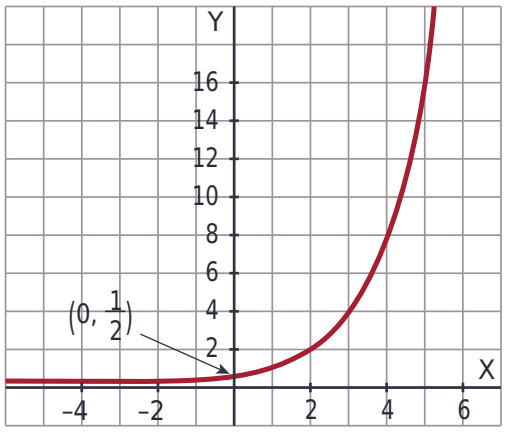


b)

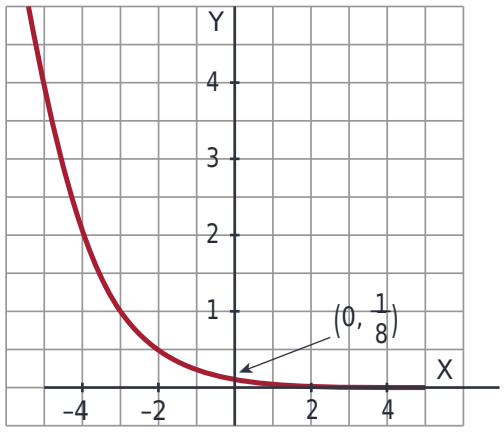


021 SOLUCIÓN

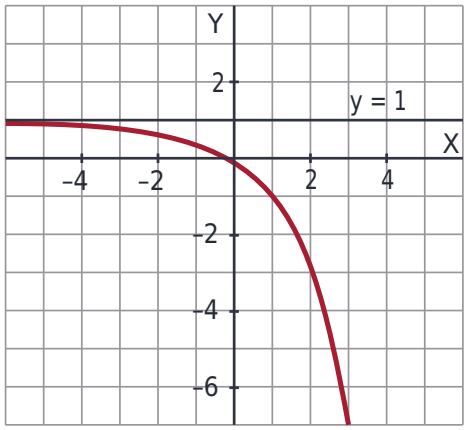
a)



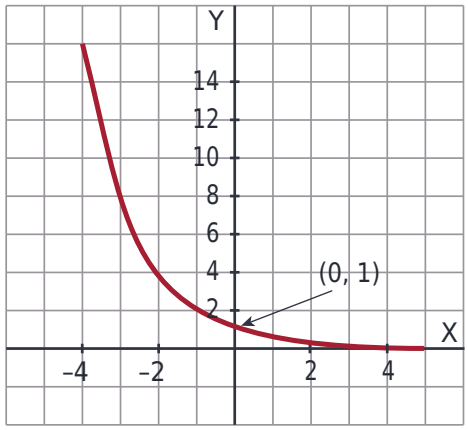
b)



c)



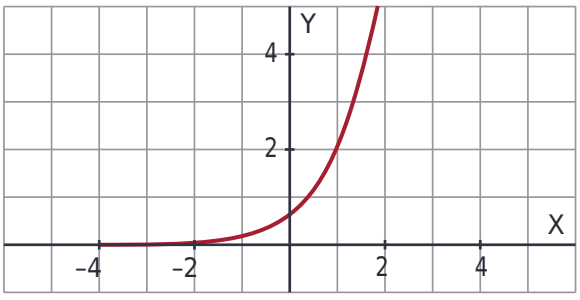
d)



022 SOLUCIÓN

$$\begin{matrix} 0{,}5 = k \cdot a^0 \\ 1{,}7 = k \cdot a^1 \end{matrix} \quad \begin{cases} 0{,}5 = k \\ 1{,}7 = k \cdot a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k = 0{,}5 \\ a = 3{,}4 \end{cases}$$

La función es $y = 0{,}5 \cdot (3{,}4)^x$

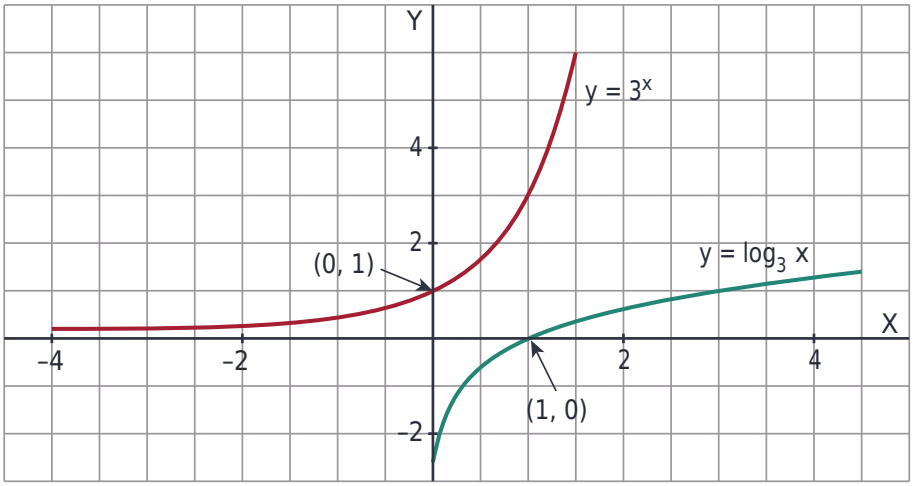


03 · Funciones logarítmicas

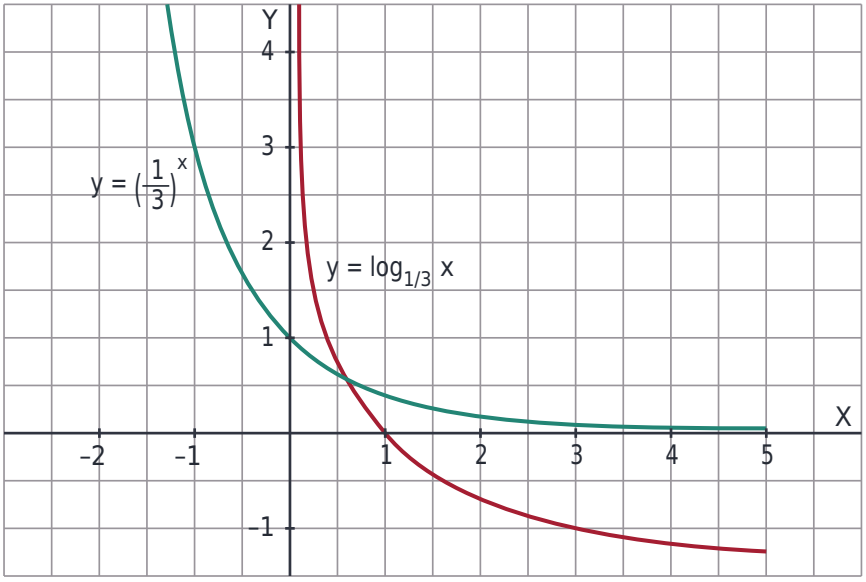
023 SOLUCIÓN

x	-2	-1	0	1	2
3^x	$1/9$	$1/3$	1	3	9

x	$1/9$	$1/3$	1	3	9
$\log_3 x$	-2	-1	0	1	2

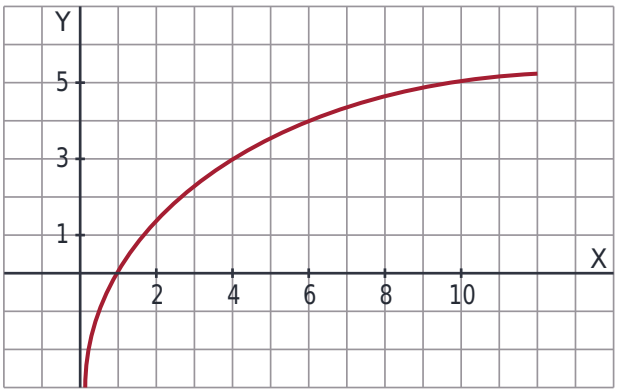


024 SOLUCIÓN

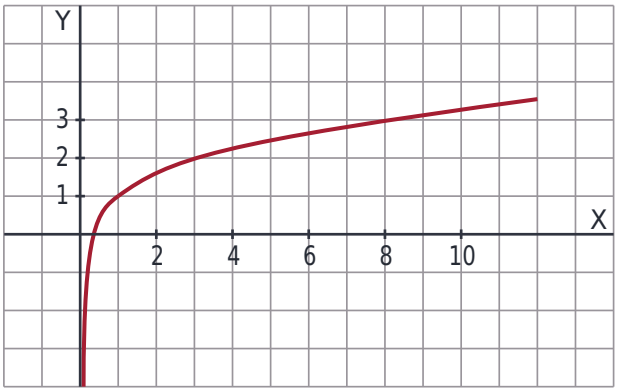


025 SOLUCIÓN

x	0,5	1	1,5	2	3	6	10
y	–1,5	0	0,88	1,5	2,38	3,89	5

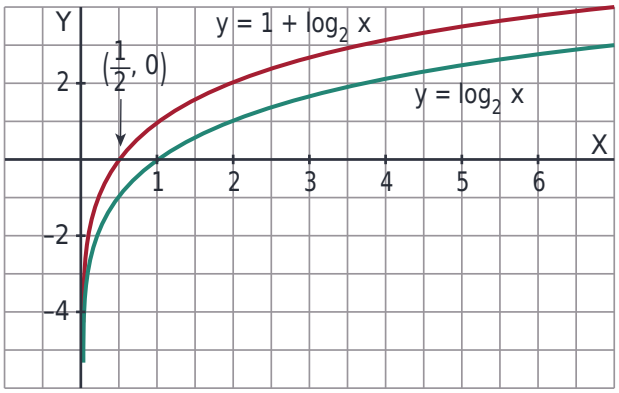


026 SOLUCIÓN

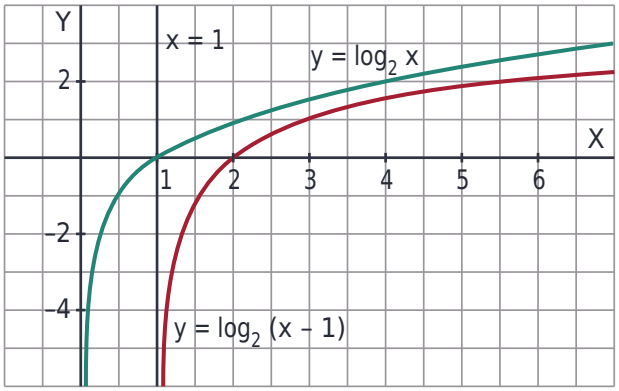


027 SOLUCIÓN

a) $y = 1 + \log_2 x$

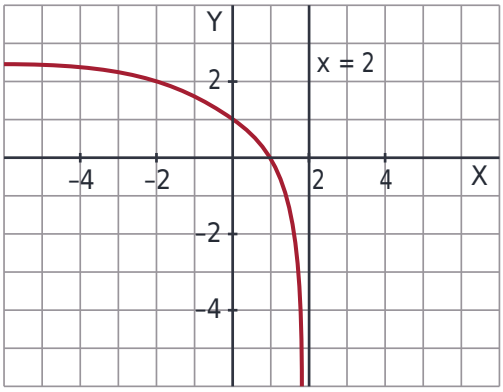


b) $y = \log_2 (x - 1)$

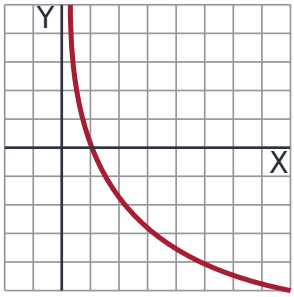


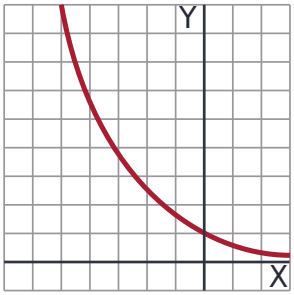
028 SOLUCIÓN

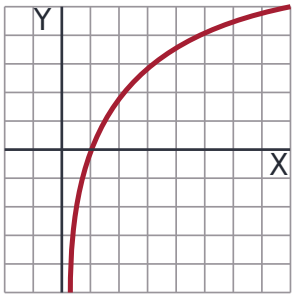
Dominio: $(-\infty, 2)$

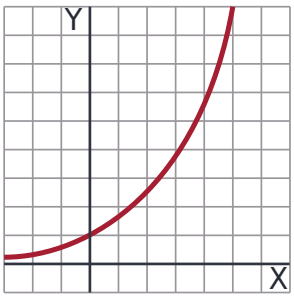


029 SOLUCIÓN

1) 

2) 

3) 

4) 

1) $y = \log_a x$, $0 < a < 1$

2) $y = a^x$, $0 < a < 1$

3) $y = \log_a x$, $a > 1$

4) $y = a^x$, $a > 1$

030 SOLUCIÓN

Para $y = a^x$: La y no puede ser negativa y podemos dar a x valores negativos.

Para $y = \log_a x$: La y puede ser negativa y no podemos dar a x valores negativos.

031 SOLUCIÓN

(1, 0) es el punto común de las funciones $y = \log_a x$.

(0, 1) es el punto común de las funciones $y = a^x$.

032 SOLUCIÓN

Para $a > 1$ la función $y = \log_a x$ es creciente.

Para $0 < a < 1$ la función $y = \log_a x$ es decreciente.

Para $a > 1$ la función $y = a^x$ es creciente.

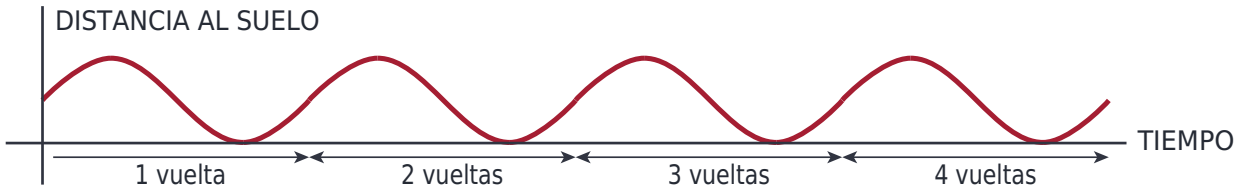
Para $0 < a < 1$ la función $y = a^x$ es decreciente.

033 SOLUCIÓN

$x < 0$

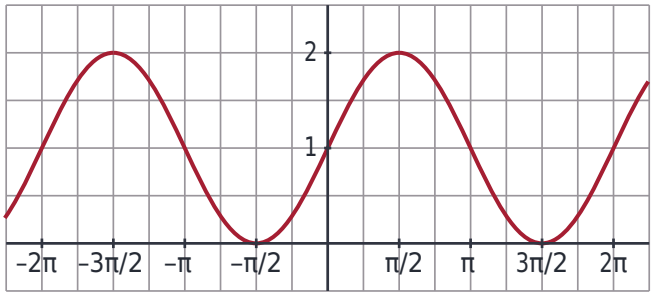
04 · Funciones trigonométricas

034 SOLUCIÓN

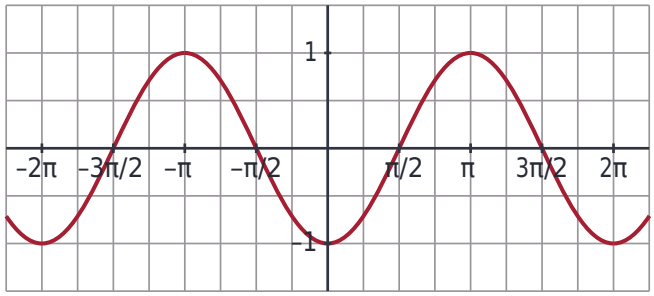


035 SOLUCIÓN

a)



b)



036 SOLUCIÓN

a) II: periodo π y amplitud 1.

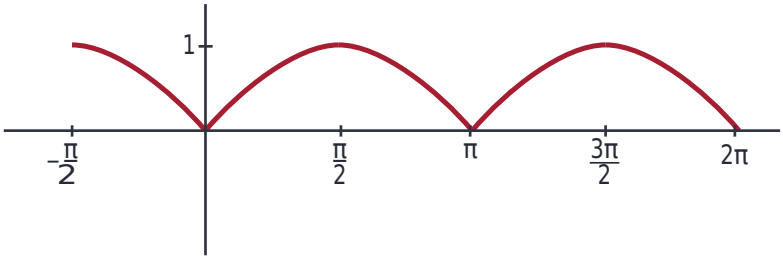
b) I: función seno reflejada sobre el eje X.

c) IV: amplitud 2.

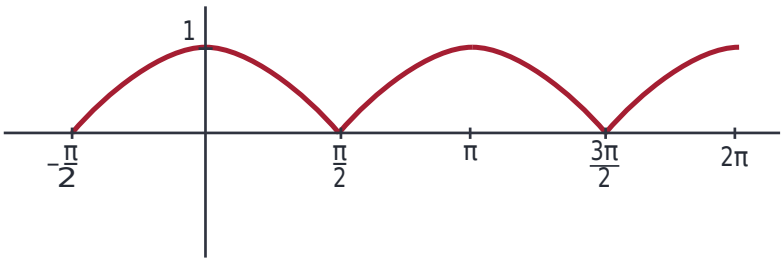
d) III: coseno desplazado una unidad hacia arriba.

037 SOLUCIÓN

a)



b)



038 SOLUCIÓN

a) $\text{sen } x = 0 \rightarrow x = 0;\ x = \pi;\ x = 2\pi$

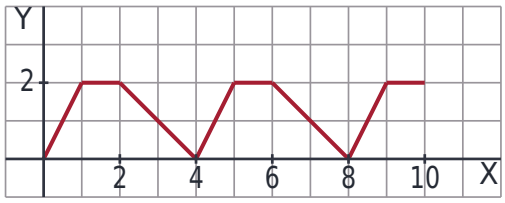
b) $\text{sen } x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

c) $\cos x = 1 \rightarrow x = 0;\ x = 2\pi$

d) $\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2};\ x = \frac{3\pi}{2}$

039 SOLUCIÓN

a)



b) $f(7) = 1;\quad f(10) = 2;\quad f(20) = 0$

040 SOLUCIÓN

a) 2π

b) Entre –1 y 1.

c) Entre 0 y 2π: $\operatorname{sen} x < 0$ para $x \in (\pi, 2\pi)$

$\cos x < 0$ para $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

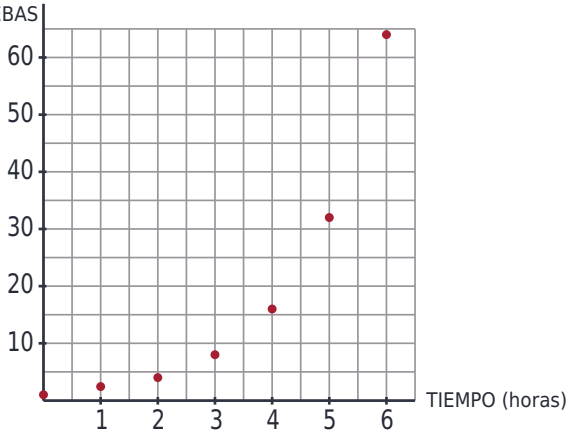
05 · Crecimiento y modelos

041 SOLUCIÓN

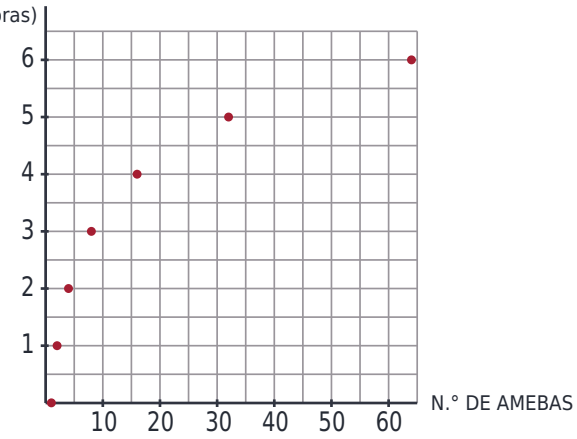
a)

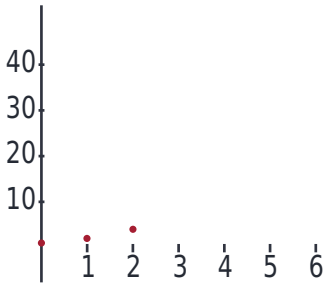
TIEMPO (horas)	0	1	2	3	4	5	6
N.º DE AMEBAS	1	2	4	8	16	32	64

b)



c)



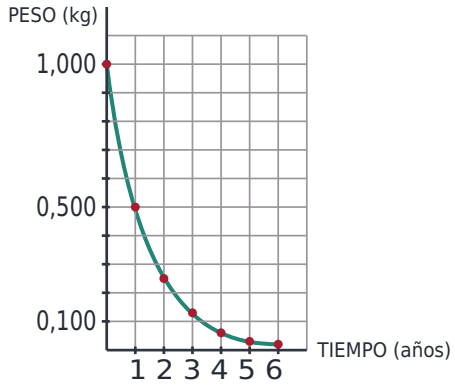


042 SOLUCIÓN

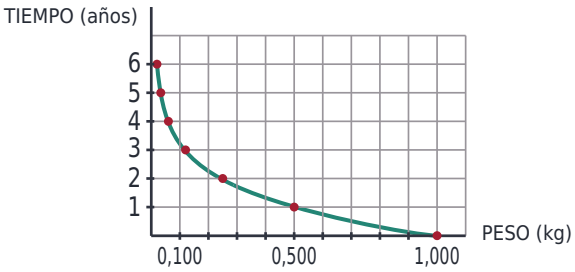
a)

TIEMPO (años)	0	1	2	3	4	5	6
SUSTANCIA (kg)	1	0,5	0,250	0,125	0,063	0,031	0,016

b)



c)



043 SOLUCIÓN

$M = 1{,}4^t$

a) • Buscamos el valor de t para el cual $1{,}4^t = 3$:

$$1{,}4^t = 3 \rightarrow \ln (1{,}4)^t = \ln (3) \rightarrow t \ln (1{,}4) = \ln (3) \rightarrow t = \frac{\ln 3}{\ln 1{,}4} \approx 3{,}27$$

Cuando pasen $3{,}27 \cdot 100 = 327$ años, se habrá triplicado la masa de madera. Esto es, en el año $1800 + 327 = 2127$.

• Buscamos el valor de t para el cual $1{,}4^t = \frac{1}{3} = 3^{-1}$:

$$1{,}4^t = 3^{-1} \rightarrow \ln (1{,}4)^t = \ln (3)^{-1} \rightarrow t \ln (1{,}4) = -\ln (3) \rightarrow t = -\frac{\ln 3}{\ln 1{,}4} \approx -3{,}27$$

Hace $3{,}27 \cdot 100 = 327$ años, había la tercera parte de masa de madera. Esto es, en el año $1800 - 327 = 1473$.

b) $1900 \rightarrow t = 1 \rightarrow M = 1{,}4^1 = 1{,}4$

$$1990 \rightarrow t = \frac{1990 - 1800}{100} = 1{,}9 \rightarrow M = 1{,}4^{1{,}9} \approx 1{,}90$$

$$2000 \rightarrow t = \frac{2000 - 1800}{100} = 2 \rightarrow M = 1{,}4^2 = 1{,}96$$

$$1600 \rightarrow t = \frac{1600 - 1800}{100} = -2 \rightarrow M = 1{,}4^{-2} \approx 0{,}51$$

$$1550 \rightarrow t = \frac{1550 - 1800}{100} = -2{,}5 \rightarrow M = 1{,}4^{-2{,}5} \approx 0{,}43$$

044 SOLUCIÓN

$M = m \cdot 0{,}76^t$

Si $t = 0 \rightarrow M = m \cdot 0{,}76^0 = m$

Si $t = 0{,}25 \rightarrow M = m \cdot 0{,}76^{2{,}5} \approx m \cdot 0{,}5 = \frac{m}{2}$

La cantidad inicial se ha reducido (aproximadamente) a la mitad en 2 500 años.

045 SOLUCIÓN

$12\,000 \cdot (1{,}04)^5 = 14\,599{,}83\ €$

046 SOLUCIÓN

$C = 10\,000\left(1 + \frac{8{,}4}{1\,200}\right)^m = 10\,000 \cdot (1{,}007)^n$

$20\,000 = 10\,000 \cdot (1{,}007)^m \rightarrow 2 = 1{,}007^m \rightarrow m = \frac{\log 2}{\log 1{,}007} = 99{,}36$

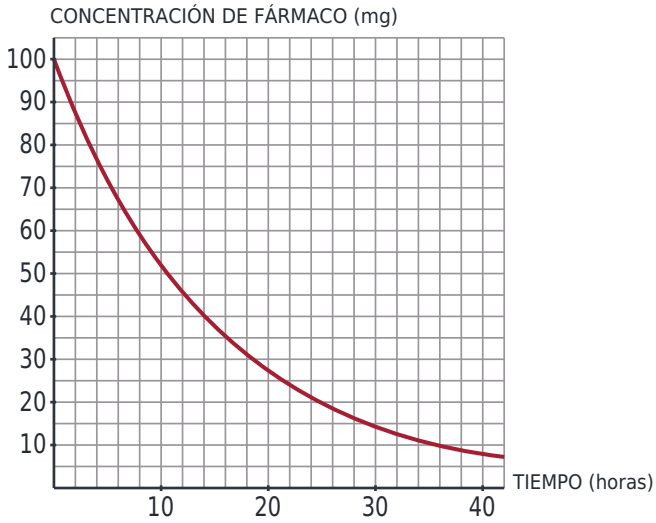
Tarda 100 meses en duplicarse.

047 SOLUCIÓN

a) $t = 0 \rightarrow y = 100$ mg

$t = 3 \rightarrow y = 83$ mg en 3 horas

b)



c) $100 \cdot (0{,}94)^t = 60 \rightarrow t \approx 8$ h 15 min

Al cabo de, aproximadamente, 8 h 15 min.

048 SOLUCIÓN

$x = 0 \rightarrow y = 1 + 2^0 = 1 + 1 = 2 \rightarrow$ 2 000 bacterias en el momento inicial.

$x = 10 \rightarrow y = 1 + 2 = 3 \rightarrow$ 3 000 bacterias al cabo de 10 horas.

$1 + 2^{x/10} = 4 \rightarrow x = \dfrac{10 \log 3}{\log 2} \approx 15{,}8$ h ≈ 16 h

Tardarán en duplicarse unas 16 horas.

06 · Repaso integrado

049 SOLUCIÓN

a) $g[f(-2)] = g[2 \cdot (-2) + 1] = g(-3) = (-3)^2 - 5 = 9 - 5 = 4$

b) $f[g(0)] = f[0^2 - 5] = f(-5) = 2(-5) + 1 = -9$

c) $f \circ_f (x) = f[f(x)] = f(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 2 + 1 = 4x + 3$

d) $f \circ_g (x) = f[g(x)] = f(x^2 - 5) = 2(x^2 - 5) + 1 = 2x^2 - 10 + 1 = 2x^2 - 9$

050 SOLUCIÓN

Para hallar la inversa de $y = \sqrt{3x - 2}$, cambiamos la x por la y, y despejamos la y:

$$x = \sqrt{3y - 2} \rightarrow x^2 = 3y - 2 \rightarrow 3y = x^2 + 2 \rightarrow y = \frac{x^2 + 2}{3}$$

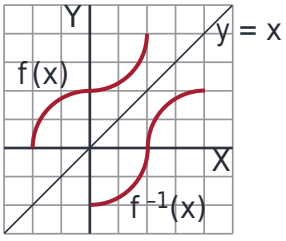
Así, $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 + 2}{3}$

Por otra parte:

$$f \circ f^{-1}(4) = f\left(\frac{4^2 + 2}{3}\right) = f\left(\frac{18}{3}\right) = \sqrt{3 \cdot \frac{18}{3} - 2} = \sqrt{16} = 4$$

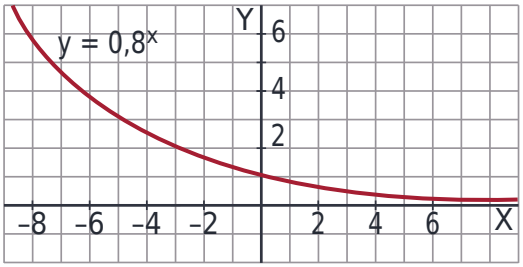
051 SOLUCIÓN

La función $f^{-1}(x)$ es simétrica a $f(x)$ respecto a la recta $y = x$. Así:

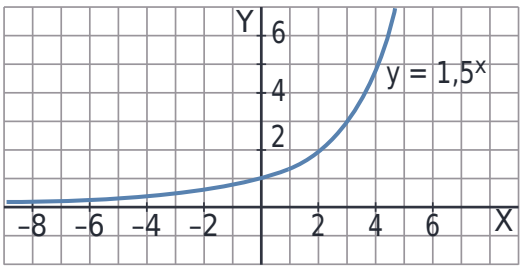


052 SOLUCIÓN

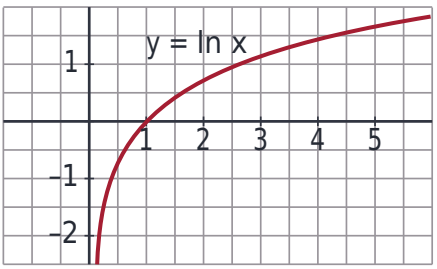
a)



b)



c)



053 SOLUCIÓN

- Pasa por $\left(0, \frac{1}{5}\right)$:

$$\frac{1}{5} = k \cdot a^0 = k \rightarrow k = \frac{1}{5}$$

- Pasa por (5; 6,4):

$$6{,}4 = \frac{1}{5}a^5 \rightarrow a^5 = 32 \rightarrow a = 2$$

Por tanto, la función es $y = \frac{1}{5}2^x$. Es una función creciente, puesto que la base es mayor que 1.

054 SOLUCIÓN

La función es $f(x) = 3^x - 2$. Veamos cada uno de los casos:

a) $f(2 + \log_3 x) = 3^{(2 + \log_3 x)} - 2 = 3^2 \cdot 3^{\log_3 x} - 2 = 9x - 2 \neq x$

$y = 2 + \log_3 x$ no es la inversa de $f(x)$.

b) $f(\sqrt[3]{x + 2}) = 3^{\sqrt[3]{x + 2}} - 2 \neq x$

$y = \sqrt[3]{x + 2}$ no es la inversa de $f(x)$.

c) $f[\log_3 (x + 2)] = 3^{\log_3 (x + 2)} - 2 = (x + 2) - 2 = x$

$y = \log_3 (x + 2)$ sí es la inversa de $f(x)$.

055 SOLUCIÓN

La función que describe esta situación es:

$$C = 18\,000 \cdot 0{,}9^t$$

Como queremos que el capital final sea 9 000 €:

$$9\,000 = 18\,000 \cdot 0{,}9^t \rightarrow 0{,}9^t = 0{,}5 \rightarrow t = \log_{0{,}9} 0{,}5 = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}9} = 6{,}58$$

Por tanto, el capital se habrá reducido a la mitad entre el 6.º y el 7.º año.

056 SOLUCIÓN

a) La población inicial se calcula haciendo $x = 0$.

$$y(0) = 1 + 0{,}5 \cdot 2^{0{,}4 \cdot 0} = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$$

La población inicial es de 1 500 insectos.

b) Se duplicará al llegar a 3 000 insectos, es decir:

$$3 = 1 + 0{,}5 \cdot 2^{0{,}4x} \rightarrow 2^{0{,}4x} = \frac{2}{0{,}5} \rightarrow 2^{0{,}4x} = 4 \rightarrow 2^{0{,}4x} = 2^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0{,}4x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{0{,}4} \rightarrow x = 5$$

Por tanto, la población de insectos se duplicará en 5 días.

057 SOLUCIÓN

La gráfica corresponde a la función b), $y = \cos 2x$.

Su periodo es $\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} = \pi$.

Los puntos buscados son: $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$