1.º BACHILLERATO

ECUACIONES E INECUACIONES

Practica, razona y comprueba tus respuestas.

01 Polinomios

Operaciones, Ruffini, raíces y factorización.

02 Fracciones algebraicas

Simplificación, operaciones y restricciones.

03 Ecuaciones de segundo grado

Resolución, discriminante y relaciones entre raíces.

04 Ecuaciones de grado superior

Factorización, bicuadradas y cambios de variable.

05 Ecuaciones racionales y radicales

Denominadores, raíces y comprobación.

06 Exponenciales y logarítmicas

Potencias, logaritmos y condiciones de validez.

07 Inecuaciones y dominios

Estudio de signos, intervalos y dominios.

08 Problemas y razonamiento

Modelos, aplicaciones y retos algebraicos.

TU RUTA DE TRABAJO

Índice

Actividades organizadas por contenidos, con espacio para trabajar y soluciones al final.

01	Polinomios	3
02	Fracciones algebraicas	10
03	Ecuaciones de segundo grado	12
04	Ecuaciones de grado superior	17
05	Ecuaciones racionales y radicales	23
06	Exponenciales y logarítmicas	30
07	Inecuaciones y dominios	39
08	Problemas y razonamiento	45
•	Solucionario	50

Cómo usar el dossier
El código **1.12** identifica la actividad 12 del bloque 1. Busca ese mismo código en el solucionario. Puedes seguir el orden completo o seleccionar un contenido para repasarlo.

Antes de empezar
Trabaja con números reales y conserva los valores exactos cuando sea posible. «log» indica logaritmo decimal y «ln», logaritmo natural. En las expresiones con letras, respeta las condiciones del enunciado y evita denominadores nulos.

BLOQUE 01

Polinomios

Operaciones, Ruffini, raíces y factorización. · 29 actividades

1.01 Escribe un polinomio de grado 3 y término independiente -1. Determina sus términos y su valor numérico para $x = 2$ y $x = -2$.

1.02 Efectúa $(-2x^3 + x^2 + x - 1)(x - 2) + (3x + 1)(x + 3)$.

1.03 Dados $P(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ y $Q(x) = 3x^2 - 2x - 2$, calcula.

a) $P(1) + P(-1)$

b) $P(0) - 2Q(0)$

c) $P(3) + Q(2)$

d) $P(-2)\cdot Q(-2)$

e) $P(-1) - 3Q(-1)$

f) $Q(-4) + 4Q(1)$

1.04 Divide e indica cociente y resto.

a) $(10x^4 - 3x^2 + 1):(x^2 - 1)$

b) $(6x^3 + 5x):(2x^2)$

1.05 Divide mediante la regla de Ruffini e indica cociente y resto.

a) $(x^3 + 3):(x + 1)$

b) $(4x^5 - 12x^3 - 20x + 2):(x + 2)$

1.06 Comprueba si estos números son raíces de $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x - 8$.

a) $x = 1$

b) $x = 2$

c) $x = -1$

d) $x = -4$

1.07 Encuentra las raíces enteras de los polinomios.

a) $x^5 + 4x^4 + x^3 - 6x^2$

b) $x^3 - 5x^2 - 29x + 105$

1.08 Factoriza.

a) $2x^4 - 2x^2$

b) $x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 4x$

1.09 Encuentra las raíces enteras de los polinomios.

a) $2x^4 - 13x^3 + 27x^2 - 18x$

b) $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3$

1.10 Escribe un polinomio que cumpla cada condición y calcula su valor para $x = 3$ y $x = -1$.

a) De grado 4 y sin término independiente.

b) De grado 3 y sin términos de grado 2 ni 1.

c) De grado 2 y con suma de coeficientes igual a 10.

d) Un binomio de grado 3 con término independiente.

1.11 Efectúa las operaciones con polinomios.

a) $(3x^2 - 2x + 5) + (x^3 - 5x^2 + 2x - 1) - (x^4 + 1)$

b) $(-2x^3 + \frac{5}{2}x - 1)(x + 2/3)$

c) $(5 + 3x^2)[(9 - \frac{x^3}{3}) - (x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 5)]$

d) $(3x - 2)(2x - 3) - [(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4})(x - \frac{x^2}{2})]$

1.12 Calcula el valor de $P(x) = 6x^4 - 61x^3 + 185x^2 - 158x + 40$ para cada x.

a) $x = -5$

b) $x = 5$

c) $x = 4$

d) $x = -4$

e) $x = -\frac{1}{2}$

f) $x = \frac{1}{2}$

g) $x = -\frac{2}{3}$

h) $x = \frac{2}{3}$

1.13 Divide e indica cociente y resto.

a) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1):(x^2 - 3)$

b) $(5x^2 - 3x + 2):(2x - 3)$

c) $(3x^6 + 5x^3 - x + 3):(x^3 - 2x + 1)$

d) $(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1):(x^3 - x + 1)$

1.14 Divide mediante Ruffini. Indica cociente y resto.

a) $(2x^5 + 3x^4 + 7x^3 - 11x^2 - 1):(x - 1)$

b) $(4x^2 - x + 1):(x + 1)$

c) $(3x^6 + 5x^3 - x + 3):(x + 3)$

d) $(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1):(x - 2)$

1.15 Comprueba cuáles de los valores -1, 0, 1 son raíces de cada polinomio.

a) $x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x$

b) $x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 10$

c) $x^5 - 1$

d) $x^5 - x^4 - \frac{13}{4}x^3 + \frac{13}{4}x^2 - 3x + 3$

1.16 Comprueba cuáles de los valores -2, 1 son raíces de cada polinomio.

a) $4x^3 + 3x^2 - 9x + 2$

b) $x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 27x^2 - 18x$

c) $x^5 - 2x^4 - 22x^3 + 8x^2 + 117x + 90$

d) $x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 64x^2 - 27x - 90$

1.17 Comprueba si $M(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 4$ es divisible entre $x-2$. Si lo es, encuentra $N(x)$ tal que $M(x) = (x-2)\cdot N(x)$.

1.18 Encuentra las raíces reales de los polinomios.

a) $(x - 3)(x + 5)(x - 2)$

b) $x(x - 2)^2(2x + 1)$

c) $(2x - 1)(3x + 2)(x + 3)^2$

d) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

e) $x^3 + 8x^2 + 17x + 10$

f) $3x^3 + 7x^2 - 22x - 8$

g) $2x^4 - 11x^3 + 21x^2 - 16x + 4$

h) $x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32x + 64$

1.19 Encuentra las raíces reales de los polinomios.

a) $(x + 2)(x - 5)(x - 1)$

b) $x^2(x + 2)(3x - 1)$

c) $(x^2 - 4)(x^2 - 9)$

d) $6x^4 + 13x^3 - 18x^2 - 7x + 6$

1.20 Escribe un polinomio de segundo grado Q(x) con raíces 1 y 3 y que cumpla Q(0) = 6.

1.21 Obtén m para que $P(x) = mx^3 - 6x^2 - 4x + 8$ tenga 2 por raíz.

1.22 Halla q para que $x^3 - 2x^2 + qx + 5$ sea divisible entre x+1.

1.23 ¿Qué valor de a hace que el resto de dividir $x^3 + ax^2 - 3x - a$ entre x−4 sea 67?

1.24 Halla a y b para que $x^3 + ax^2 + bx - 6$ sea divisible entre x−2 y x+3.

1.25 Escribe dos polinomios de segundo grado cuyas raíces sean 2 y −3.

1.26 Escribe un polinomio de tercer grado cuya única raíz sea −1.

1.27 Encuentra un polinomio P(x) de segundo grado con raíces 1 y −2 que cumpla P(3) = 30.

1.28 Encuentra un polinomio Q(x) de tercer grado con raíces 1, −1 y −2 que cumpla Q(0) = −6.

1.29 Descompón $P(x) = x^5 - 209x + 56$ como producto de dos factores, sabiendo que tiene dos raíces inversas entre sí.

BLOQUE 02

Fracciones algebraicas

Simplificación, operaciones y restricciones. · 6 actividades

2.01 Simplifica e indica las restricciones de la expresión original.

a) $\dfrac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$

b) $\dfrac{2x^2 + 2x - 12}{4x + 12}$

2.02 Reduce a común denominador $\dfrac{5}{x^2 + 2x - 3}$, $\dfrac{3x}{x^2 - 1}$ y $\dfrac{x - 1}{x^2 + 2x + 1}$.

2.03 Opera y simplifica $\dfrac{3}{3x^2 + 6x} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2 - x}{6x + 12}$.

2.04 Opera, simplifica e indica las restricciones.

a) $\dfrac{5}{x^2 + 2x - 3} \cdot \dfrac{x^2 - 1}{3x}$

b) $\dfrac{x - 1}{x^2 + 2x + 1} : \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$

2.05 Opera, simplifica e indica las restricciones.

a) $\frac{y^2}{x} + \frac{x^3}{y^2} - \frac{3}{x^2}$

b) $\frac{5}{x} + \frac{3x-2}{x+1}$

c) $\frac{3x^2}{x^2-4} + \frac{2}{x-2} + \frac{5x}{x+2}$

d) $\frac{1-x}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$

2.06 Opera, simplifica e indica las restricciones.

a) $\frac{3x-1}{4x+12} - \frac{x+2}{4x-12}$

b) $\frac{2-x}{x^2-3x} - \frac{1}{4x-12} + \frac{5}{6x-18}$

c) $\frac{4}{a+b} - \frac{5}{a-b}$

d) $\frac{4-x^2}{x+2} + \frac{9-x^2}{x+3}$

BLOQUE 03

Ecuaciones de segundo grado

Resolución, discriminante y relaciones entre raíces. · 18 actividades

3.01 Clasifica las ecuaciones de segundo grado como completas o incompletas y resuélvelas.

a) $x^2 - 10x + 21 = 0$

b) $3x^2 + 20x + 12 = 0$

c) $3x^2 + 9x - 4 = 0$

d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

e) $3x^2 - 18x = 0$

f) $4x^2 - 36 = 0$

g) $-8x^2 + 40 = 0$

h) $-5x^2 + 30x = 0$

3.02 Resuelve en $\mathbb{R}$ y comprueba las soluciones.

a) $x^2 + 2x = 15$

b) $2x^2 = 7x + 2$

c) $3x^2 - 3 = 20 - 2(x - 5)$

d) $8x^2 + (2 - x)(5x + 1) = 15x + (3 + x)(x - 1) - 3$

3.03 Determina el número de soluciones reales sin resolver las ecuaciones.

a) $-2x^2+5x-8=0$

b) $9x^2+30x+25=0$

c) $-5x^2+9x-6=0$

d) $2x^2-x-3=0$

e) $-x^2+9x-2=0$

f) $0{,}34x^2+0{,}5x-1=0$

3.04 Determina k para que la ecuación tenga el número de soluciones reales indicado.

a) $3x^2-6x+k=0$: dos soluciones.

b) $3x^2-6x+k=0$: una soluciones.

c) $3x^2-6x+k=0$: cero soluciones.

d) $x^2+kx+25=0$: dos soluciones.

e) $x^2+kx+25=0$: una soluciones.

f) $x^2+kx+25=0$: cero soluciones.

3.05 Comprueba si el valor indicado es solución de la ecuación.

a) $2(x^2-x-2)+6(3-x)-2(x-3)-8=0$; $x=-2$.

b) $2(-x-2)(1-x)-2(x+1)=0$; $x=\sqrt{3}$.

c) $(2+x)5x-(3x-4)+3(x-1)-x^2+2(x+4)=0$; $x=-3/2$.

d) $3x(x-2)+2(1+9x)+11=0$; $x=1/2$.

3.06 Resuelve en $\mathbb{R}$ y comprueba las soluciones.

a) $3x^2 - 48 = 0$

b) $3x^2 - 48x = 0$

c) $3x^2 + 48 = 0$

d) $x^2 + 3x + 9 = 0$

e) $x^2 - 3x + 9 = 0$

f) $-3x^2 + 18x - 3 = 0$

g) $-3x^2 - 18x + 3 = 0$

h) $x^2 + x - 18 = 0$

3.07 Resuelve en $\mathbb{R}$ y comprueba las soluciones.

a) $\frac{3x^2 - 1}{2} + \frac{x^2 - x}{3} - x^2 = 0$

b) $\frac{x - 2}{2} + 1 = \frac{3x^2 - 2x + 3}{3} + \frac{19x}{6}$

c) $\frac{x(x + 1) - 10}{5} = \frac{x^2 + 2x}{2} - 2$

d) $x^2 + \frac{11x - 5}{6} = \frac{2x^2 - 1}{3} + x$

3.08 La suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado es 4 y su producto es -21.

a) Escribe la ecuación correspondiente.

b) Determina sus soluciones.

3.09 Indica el número de soluciones reales de cada ecuación.

a) $3x^2 - 4x + 5 = 0$

b) $12 - 2x^2 + 3x = 0$

c) $-x + x^2 - 3 = 0$

d) $6x - x^2 + 9 = 0$

3.10 Deduce la fórmula de las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, completando el cuadrado. Relaciona el resultado con el número de soluciones reales.

3.11 Halla k para que $x^2 - 13x + k = 0$ tenga por solución $x = 7$. ¿Cuál es la otra solución?

3.12 ¿Qué valores deben tomar a y b para que $ax^2 + bx - 30 = 0$ tenga las soluciones 5 y -3?

3.13 Sin resolverlas, calcula la suma y el producto de las raíces. Después halla las raíces para comprobarlo.

a) $x^2 + 5x - 14 = 0$

b) $x^2 + x = 0$

c) $6x^2 + 13x - 5 = 0$

d) $9x^2 + 9x - 10 = 0$

e) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

f) $10x^2 + 3x - 1 = 0$

3.14 Escribe una ecuación de segundo grado con las soluciones indicadas.

a) $x_1 = 2, x_2 = -5$

b) $x_1 = -4, x_2 = 4$

c) $x_1 = 0, x_2 = -2$

d) $x_1 = -1/3, x_2 = -2/3$

3.15 Determina la suma y el producto de las soluciones de $x^2 - 9x + 14 = 0$. Encuentra las soluciones y explica la relación con los coeficientes.

3.16 Si r y s son las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, ¿cuáles son las soluciones de $cx^2 - bx + a = 0$? Estudia también los casos en que alguna raíz sea cero.

3.17 Discute las soluciones reales de $x^2 - 2x + \log m = 0$ según m.

3.18 Sean x_1 y x_2 las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean las indicadas.

a) Los cuadrados de x_1 y x_2.

b) Los inversos de x_1 y x_2.

c) Los opuestos de x_1 y x_2.

BLOQUE 04

Ecuaciones de grado superior

Factorización, bicuadradas y cambios de variable. · 16 actividades

4.01 Resuelve las ecuaciones bicuadradas.

a) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

b) $x^4 - x^2 + 2 = 16x^2 - 14$

c) $11(x^4 + 1) - 7 = 25x^2(1 - x^2)$

4.02 Resuelve las ecuaciones factorizadas.

a) $2(x - 3)(x + 5)(x - 1) = 0$

b) $x^2(x + 4)(x - 4)(x - 9) = 0$

c) $(3x - 1)(2x + 3)(x + 2) = 0$

d) $3x(x + 5)^2(3x - 1) = 0$

e) $(x^2 + x - 2)(x^2 - 9) = 0$

4.03 Factoriza y resuelve.

a) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24 = 0$

b) $x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 6x^2 + 9x = 0$

c) $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 16 = 0$

4.04 Escribe una ecuación polinómica no nula cuyas soluciones sean 2, 3 y 7. ¿Cuál es el mínimo grado posible?

4.05 Resuelve mediante un cambio de variable.

a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

b) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

d) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$

e) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

f) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

4.06 Resuelve en $\mathbb{R}$ y comprueba las soluciones.

a) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

b) $3x^5 - 13x^4 + 16x^3 - 4x^2 = 0$

c) $4x^5 - 12x^4 + 9x^3 - 2x^2 = 0$

d) $x^4 - 1 = 0$

4.07 Resuelve las ecuaciones bicuadradas.

a) $25x^4 - 101x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

c) $3x^4 - 30x^2 + 27 = 0$

4.08 Resuelve en $\mathbb{R}$ mediante un cambio de variable.

a) $x^8 + 3x^4 - 4 = 0$

b) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$

c) $x^{12} + 7x^6 + 12 = 0$

d) $36x^{10} + x^5 - 6 = 0$

4.09 Resuelve en $\mathbb{R}$ y comprueba las soluciones.

a) $(x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2) = 0$

b) $(x^2 - x)(x^2 + 16) = 0$

c) $(x - 1)(x^2 + 4)(x^2 - 9) = 0$

d) $(x^2 - 4x - 5)(x^2 - 2x - 8) = 0$

4.10 Resuelve en $\mathbb{R}$ y comprueba las soluciones.

a) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$

b) $x^2(x + 6) = 32$

c) $x^2(x^2 + 1) + 2x^3 + 36 = 12x(x + 1)$

d) $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8 = 0$

4.11 Resuelve en $\mathbb{R}$ y comprueba las soluciones.

a) $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$

b) $4x^3(x - 3) + 2x^2 + 30(x + 1) = 23x(x - 1)$

c) $x^4 + 3x^3 - 11x^2 + 2x = 0$

d) $x^2(x^2 - x - 6) = 3(x^2 - 3x)$

4.12 Resuelve en $\mathbb{R}$ y comprueba las soluciones.

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

b) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$

c) $x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4 = 0$

d) $x^3 - 7x^2 + 4x - 28 = 0$

4.13 Escribe una ecuación que cumpla cada condición.

a) Tiene como soluciones 1, 2 y 3.

b) Es de grado 3 y su única solución real es 1/2.

c) Es de grado 3 y tiene dos soluciones reales distintas, una opuesta a la otra.

d) Es de grado 2, tiene coeficientes enteros y soluciones $-1/3$ y $2/5$.

e) Es de grado 3, tiene coeficientes enteros y dos de sus soluciones son $\sqrt{2}/2$ y -3.

4.14 Estudia los coeficientes de $ax^4 + bx^2 + c = 0$, con $a \neq 0$, para que tenga cuatro, tres, dos, una o ninguna solución real distinta.

4.15 Relaciona los coeficientes de $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, con $a \neq 0$, con la suma de sus tres raíces, su producto y la suma de los productos de cada pareja de raíces.

4.16 Prueba que las sumas de las primeras, segundas y terceras potencias de las tres raíces de $P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ tienen el mismo valor.

BLOQUE 05

Ecuaciones racionales y radicales

Denominadores, raíces y comprobación. · 21 actividades

5.01 Resuelve y comprueba las restricciones.

a) $\frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{1}{x}$

b) $\frac{2x^4+4}{x^4} = \frac{x^2-3}{x^2} + 2$

5.02 Resuelve y comprueba las ecuaciones con radicales.

a) $x - 41 = 2\sqrt{x+1}$

b) $1 + 2\sqrt{x+1} = 3\sqrt{4x-3} - 4$

5.03 Resuelve e indica los valores excluidos.

a) $\frac{2x^3-x^2-2x+25}{x^2-1} = 2x$

b) $\frac{x^3+x^2+7x+2}{x^2+2x+4} = x - 2$

c) $\frac{x^3+5x^2-5x-21}{x^2+x-6} = x + 3$

5.04 Resuelve las ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\frac{x^2 - x}{3x + 1} = \frac{-x}{2x - 1}$

b) $\frac{x}{x + 6} = \frac{x - 5}{x - 3}$

c) $\frac{x - 1}{x - 3} = \frac{x - 2}{x - 4}$

d) $\frac{x - 3}{x - 1} = \frac{x - 4}{x - 2}$

5.05 Resuelve y comprueba las soluciones en la ecuación inicial.

a) $\sqrt{x^2 - 3} = 1$

b) $x = \sqrt{x + 6}$

c) $\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{x}{2} + 6}$

d) $\sqrt{3x + 19} = x + 3$

5.06 Resuelve y comprueba las ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{2x + 8} - \sqrt{x} = 2$

b) $\sqrt{x^2 - 5} + \sqrt{x - 2} = 3$

c) $\sqrt{2x} + \sqrt{4x - 7} = x + 1$

d) $\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x^2 + 3x + 9} = 2x + 1$

5.07 Encuentra las soluciones reales y compruébalas.

a) $\dfrac{x^3 - x}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{4x} = 0$

b) $9(1 - x^2)(1 + x^2) + 80x^2 = 0$

c) $1 - \dfrac{18}{x^2} + \dfrac{81}{x^4} = 0$

5.08 Resuelve las ecuaciones con fracciones algebraicas y comprueba al menos una solución.

a) $\dfrac{1 - x^2}{x} + \dfrac{3x + 1}{4} + \dfrac{1}{6} = 0$

b) $\dfrac{x^2 + 4}{x} + \dfrac{1 - 4x}{3} + \dfrac{8}{15} = 0$

c) $\dfrac{2 - x}{2x} = \dfrac{5}{6} - \dfrac{3x^2 - 2x}{3x}$

5.09 Resuelve en $\mathbb{R}$ y comprueba las restricciones de los denominadores.

a) $\dfrac{x^2 + 1}{x} - x = \dfrac{7x^2 - 7 - 6x}{6x^2 - 6}$

b) $\dfrac{x + 4}{4x + 7} = \dfrac{x - 3}{x^2 - x - 6}$

c) $\dfrac{x + 1}{2x - 1} - \dfrac{7}{4x^2 - 1} = \dfrac{x}{2x + 1}$

d) $\dfrac{4}{x^2 - 1} + 1 = \dfrac{x}{x + 1}$

e) $\dfrac{1}{x + 3} - \dfrac{1}{x - 3} = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

5.10 Resuelve en $\mathbb{R}$ y comprueba las restricciones de los denominadores.

a) $\dfrac{2x(x^3 - 7x)}{2x^2 - 12} = 6$

b) $3x^2(x^2 - 2) = \dfrac{x^2 - 2}{3}$

c) $8x + \dfrac{12}{x} = \dfrac{20}{x^3}$

d) $\dfrac{9x}{2x^2} = 1 - 3x^2$

5.11 Resuelve en $\mathbb{R}$ y comprueba las restricciones de los denominadores.

a) $\dfrac{4}{x + 3} = \dfrac{1}{2x + 1}$

b) $\dfrac{x + 2}{2 - x} + \dfrac{3x}{2x - 1} = 0$

c) $\dfrac{3}{x - 3} - \dfrac{2}{3x + 5} = 0$

d) $\dfrac{x}{x - 1} = \dfrac{x - 3}{x - 2}$

5.12 Resuelve en $\mathbb{R}$ y comprueba las restricciones de los denominadores.

a) $\dfrac{x - 1}{x} = \dfrac{2}{x + 1} + \dfrac{1}{2x}$

b) $x^2 - 3x - 4 + \dfrac{12}{x} = 0$

c) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x} + 3 = 0$

d) $\dfrac{2x}{3x - 4} - \dfrac{x}{x - 1} = 0$

5.13 Resuelve en $\mathbb{R}$ y comprueba las restricciones de los denominadores.

a) $1 + \frac{5}{1+x} + \frac{x}{1-x} = 0$

b) $\frac{10x+1}{2(x+1)} - \frac{4x^2+3x-4}{2(x+1)^2} = 3$

c) $\frac{2x-1}{x-4} + \frac{x}{x-1} - \frac{2x+3}{x} = 1$

d) $\frac{1}{x-1} + 1 = \frac{x^2}{x^2+3x-4}$

e) $\frac{x^2-5x+2}{2x-5} + \frac{x-2}{x+1} + \frac{2x-5}{x-1} = -1 + \frac{-3x}{4}$

f) $\frac{x^2-4}{x^2+x+1} - \frac{x+1}{x-2} + 2x + \frac{1}{7} = 0$

g) $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x}{x^3-1} + \frac{2x}{x^2+x+1} = 0$

5.14 Completa con un número para que la ecuación tenga la solución indicada.

a) $\sqrt{x+7} - 2\sqrt{4x+1} = \square$; $x = 2$.

b) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+5}} = \square - \frac{1}{\sqrt{4x}}$; $x = 4$.

5.15 Resuelve y comprueba las ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{6x-2} = 4$

b) $\sqrt{6x-8} = x$

c) $\sqrt{x^2+9} - 1 = x$

d) $\sqrt{2x^2+7x-1} = x+1$

5.16 Resuelve las ecuaciones con raíces cúbicas.

a) $\sqrt[3]{x+9} = 4$

b) $\sqrt[3]{x^2 - 7x} = 2$

5.17 Resuelve y comprueba en la ecuación original.

a) $\sqrt{2x-10} = 5\sqrt{x-10}$

b) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+3} = 5$

c) $\sqrt{4x-11} = 7\sqrt{2x-29}$

d) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1} = 3$

5.18 Resuelve las ecuaciones con radicales. Si no puedes expresar una solución de forma sencilla, aproxímala y compruébala.

a) $\sqrt{3x^2 - 4x + 5} + 3x + 5 = \frac{x^2}{5}$

b) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x+3} = 5$

c) $\sqrt{x^2 + x + 5/9} = 4 - \sqrt{3x+8}$

d) $\sqrt{5 - 8x} + \sqrt{x^2 - 6x + 3/4} = -10x$

5.19 Resuelve y comprueba las ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x+2} = 0$

b) $\sqrt{x - \sqrt{1-x}} + \sqrt{x} = 1$

5.20 Resuelve en $\mathbb{R}$ y comprueba las restricciones de los denominadores.

a) $\frac{x^3 + x^2}{3} + x \cdot \frac{x + 1}{6} = x + 1$

b) $3x^2(4 + \frac{7}{x}) = \frac{6(17x - 4)}{x}$

c) $\frac{x^2}{16}(x + 7) + x + 1 = 0$

d) $\frac{3}{x + 1} + \frac{2}{x - 1} - \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

e) $\frac{2x^2(x - 2) + 4x}{x^2 + 1} = 3$

5.21 Calcula las soluciones reales de $\sqrt[3]{1729 - x} + \sqrt[3]{x} = 19$.

BLOQUE 06

Exponenciales y logarítmicas

Potencias, logaritmos y condiciones de validez. · 24 actividades

6.01 Resuelve y comprueba el dominio.

a) $\log(x - 2) + \log(2x - 1) = \log(3x - 4)$

b) $\log(x + 3) = \log(7x - 27) - \log(x - 4)$

6.02 Resuelve, respetando las condiciones de las bases y los argumentos.

a) $\log_3(2x - 1) = 1$

b) $\log_2(3x - 2) = 2$

c) $\log_x 2 + \log_x 5 = 1$

d) $\log_x 12 + \log_x 18 = 3$

6.03 Resuelve las ecuaciones exponenciales.

a) $5^{3x+1} = 625$

b) $2^{\frac{3x+1}{4}} = 1/32$

c) $3^{x^2-7x+12} = 729$

d) $5^{\frac{x-1}{x+2}} = 25$

e) $4^{x^3-7x^2+12x+3} = 64$

f) $4^{x-6} = 32$

g) $3^{\frac{x-2}{3}} = 1/3$

h) $6^{2x^2+3/5} = 6^{23x/10}$

i) $17^{\frac{x-3}{3x-2}} = 289$

j) $3^{x^4+13x^2+4} = 3^{6x^3-12x}$

6.04 Halla x.

a) $4^x = 2^{x-6}$

b) $3^{\frac{7x-3}{4}} = 9^{x-2}$

c) $49^x = 7^{3-x^2}$

d) $5^{x^4+4} = 25^{5x^2/2}$

6.05 Resuelve.

a) $3^{2x-1} - 2^x = 0$

b) $(1/2)^{3-x} + 3^{2-x} = 0$

c) $5^{3x+2} = 3^{5x+2}$

d) $\sqrt[3]{3^{x^2}} = 9^{x-1}$

6.06 Halla x.

a) $\log_5 x = 4$

b) $\log(x - 1) = 2$

c) $\log_3(7x - 1) = 3$

d) $\log(x^2 + 36) = 2$

6.07 Halla x y comprueba que la base sea positiva y distinta de 1.

a) $\log_x 32 = 5$

b) $\log_x 0{,}1 = -1$

c) $\log_{x^2} 64 = 3$

d) $\log_{x-2} 27 = 3$

6.08 Halla x y comprueba que la base sea positiva y distinta de 1.

a) $\log_x 3 = -1$

b) $\log_x 5 = 2$

c) $\log_x 3 = -2$

d) $\log_x 2 = 5$

6.09 Halla x, respetando las condiciones de los logaritmos.

a) $\log_x 8 = 4$

b) $\log_x(1/4) = -4$

c) $\log_x 3 = 5$

d) $\log_x(4/9) = -2$

e) $\log_x 343 = 3$

f) $\log_x 2 = 4$

g) $\log_x(-125/8) = -3$

h) $\log_x 49 = 6$

6.10 Calcula x.

a) $\log_3 9^x = 2$

b) $\log 2^x = 3/2$

c) $\ln 3^x = -1$

d) $\log_2 4^{x+4} = -2$

e) $\log_3 9^{x+3} = 3$

f) $\log 2^{x/2} = 3/2$

g) $\ln 3^{x+6} = 3$

h) $\log_3 27^{3x+4} = -2$

6.11 Resuelve las ecuaciones logarítmicas.

a) $\log x = -1 + \log 5$

b) $\log_5 x = 2 + \log_5 7$

c) $\log_2 x = 3 + \log_2 9$

6.12 Resuelve las ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_4 x = 2 + \log_4(1/2)$

b) $\log(3x-1) = -2 + \log 50$

c) $\log_2 \dfrac{3x-1}{4} = 2 + \log_2(1/16)$

6.13 Resuelve y comprueba las condiciones de los logaritmos.

a) $\log_x 9 + \frac{1}{2}\log_x 16 = 2$

b) $\log_{x+1}(6x + 1) = 2$

c) $\log_{1/2}(x^2 - 3x + 3) = 0$

d) $\log_2 x^3 - \log_2 x^2 = 4$

e) $\log_2(x^2 + 4x - 1) = 2$

6.14 Resuelve y comprueba el dominio. Aproxima cuando sea necesario.

a) $\log(x - 3) + \log(x + 1) = 1 - \log(x - 5)$

b) $\log_3(x^2 + x + 1) = 27$

c) $\log_5(x + 1/2) + \log_5(x + 3/4) = 1 - \log_5(x + 1/3)$

d) $\log \frac{x-2}{2} + \log \frac{x-3}{2} + \log \frac{2x-1}{3} = 1$

6.15 Resuelve las ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_3 \sqrt{x - 5} + \log_3 \sqrt{2x - 3} = 1$

b) $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \sqrt[3]{x} = 2/3$

6.16 Resuelve y comprueba el dominio.

a) $\log_5(x - 1) + \log_5(x + 1) = \log_5(3x)$

b) $\log_2(x - 3) - \log_2(2x + 21) = 1 - \log_2(x - 2)$

6.17 Resuelve las ecuaciones exponenciales.

a) $4^x = 1/64$

b) $2^{x-5} = 32$

c) $3^{6-x} = 27^{x-2}$

d) $32^{x-2} = 2$

e) $16^{2x-4} = 1$

f) $2^{x+1} = 8$

g) $2^{x+1} = 16$

h) $2^{x+1} = 128$

6.18 Resuelve las ecuaciones exponenciales.

a) $64^{2x-5} = 16^{x-2}$

b) $125^{x-3} = 25^{x-3}$

c) $5^{x-3} = 1$

d) $2^{x+1} = 1/8$

e) $2^{x+1} = 1/16$

f) $2^{x+1} = 1/128$

6.19 Resuelve las ecuaciones exponenciales.

a) $3 \cdot 27^{x-2} = 9^{x}$

b) $5^{x+4} = 125^{x-4}$

c) $\frac{1}{81^{6-x}} = 3^{4-x}$

d) $32^{2x-3} = 2^{x+3}$

e) $125^{x+2} = 5^{2x}$

f) $256^{x} = 4 \cdot 4^{2x-3}$

6.20 Opera con las potencias y resuelve.

a) $3^{x^3 - x^2/10 - 4x/5 + 3/10} = 1$

b) $\frac{2^{x^3 - x^2 - 5x}}{8} = 1$

6.21 Resuelve las ecuaciones exponenciales.

a) $(3/2)^{x^3 - 34x^2/5 - 48x/5} = 1$

b) $(3/7)^{x^3} = (7/3)^{-\frac{1}{3}(2x^2 + 16x)}$

c) $(1/7)^{5-x^3} \cdot \sqrt{7^{13x^2 + 13x}} = 1$

6.22 Halla x. Las demás letras son constantes. En a–e considera bases positivas y distingue el caso en que la base es 1. En f–g comprueba que las potencias estén definidas.

a) $a^{2x-1} = a^2$

b) $m^{x-3} = (m^2)^{2x}$

c) $(3a)^{2x-5} = 9a^2$

d) $(p-3)^{5x} = p^2 - 6p + 9$

e) $(a^2 + 2ab + b^2)^2 = (a+b)^{2x}$

f) $(9 - 2x - x^2)^{x-3} = 1$

g) $(x+1)^{x-1} = 1$

6.23 Resuelve mediante un cambio de variable.

a) $9^{2x} - 3\cdot 9^x + 2 = 0$

b) $(2/3)^{2x} - 2\cdot(2/3)^x = 35$

c) $7^{4x} - 3\cdot 7^{3x} - 5\cdot 7^{2x} + 13\cdot 7^x + 6 = 0$

d) $(5/6)^{4x} - 2\cdot(5/6)^x + 1 = 0$

6.24 Resuelve mediante un cambio de variable.

a) $3^{3x} + 5\cdot 3^{2x-1} - 11\cdot 3^{x-1} + 1 = 0$

b) $4\cdot(1/2)^{3x} = 9\cdot 2^{-2x} - 2^{-x+1}$

c) $(3/2)^{3x+1} + 1 = (3/2)^{2x} + (3/2)^{x+1}$

BLOQUE 07

Inecuaciones y dominios

Estudio de signos, intervalos y dominios. · 16 actividades

7.01 Resuelve y expresa la solución como intervalo.

a) $3x - 5 < 4x - 7$

b) $2x - 30 \leq 5x + 3$

c) $5 - (2 - 3x) \geq 2(3x - 5) + x$

d) $2(2 - x) > x - 5$

7.02 Resuelve las inecuaciones.

a) $1 - \frac{3 - 2x}{3} \leq \frac{x}{4}$

b) $\frac{2x - 5}{3} - \frac{1 - 3x}{6} > 1 - \frac{x}{4}$

7.03 Resuelve las inecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$

b) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

c) $x^2 - 9x > 0$

d) $x^2 - 9 < 0$

e) $x^2 + 2 \leq 0$

f) $(x - 3)(x + 4) \geq 0$

g) $(x + 3)x < 4$

h) $x^2 - 30 > x$

i) $x^2 + x + 3 < 0$

j) $4x^2 - 4x + 1 < 0$

7.04 Resuelve mediante el estudio de signos.

a) $(x - 2)(x - 3)(x^2 - 2) \geq 0$

b) $x(x - 4)(x + 1)(x^3 - 1) \leq 0$

c) $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 < 0$

d) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 9x - 9 > 0$

7.05 Resuelve $\dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 4} \geq x$.

7.06 Indica si $x = 2$ es solución de cada inecuación.

a) $3(x - 2) > 1 - 3(2x - 3)$

b) $5(4 - 3x) + 3 \leq 1 + 3x$

c) $2(x - 3) - 4(3 - 2x) > 0$

7.07 Resuelve y expresa la solución mediante intervalos.

a) $2x - 30 \leq 5x + 3$

b) $2x - 6 < 5x + 18$

c) $11 - 3x \leq 23$

d) $3x + 2 \geq x + 10$

e) $6 - 5x > 2x + 3$

f) $-14x + 5 \leq x$

7.08 Resuelve y expresa la solución mediante intervalos.

a) $3(x - 5) + 4(x - 2) \leq 5$

b) $x - 2(x + 2) - 3(2 - 4x) \leq 9$

c) $4(10 - 2x) - 3(2x + 1) \geq -3(x + 1) - (2 - 3x)$

7.09 Resuelve y expresa la solución mediante intervalos.

a) $\frac{x}{3} + 1 < \frac{3x}{4} + 3$

b) $\frac{3(x-1)}{2} + x \leq \frac{x}{3} + 8$

c) $\frac{x-1}{10} < \frac{x+2}{40} + \frac{x-2}{30}$

7.10 Resuelve y expresa la solución mediante intervalos.

a) $x^2 - x - 6 < 0$

b) $-x^2 - 2x + 8 < 0$

c) $2x^2 + 5x + 6 < 0$

d) $-x^2 + 3x - 4 < 0$

e) $2x^2 + 5x - 3 > 0$

f) $6x^2 + 31x + 18 \leq 0$

7.11 Resuelve y expresa la solución mediante intervalos.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 > 0$

b) $x^4 + 8x^2 - 20 \leq 0$

7.12 Resuelve y expresa la solución mediante intervalos.

a) $x^2 + 6x - 1 < 3x^2 + 3x - 6$

b) $2x^2 + 25x > x(x - 10)$

c) $x^2 - (2x + 1)(x - 1) \leq 7$

d) $(x - 1)^2 < (2x + 1)^2 - 10$

7.13 Resuelve y expresa la solución mediante intervalos.

a) $\frac{x + 2}{3} + \frac{x(x - 1)}{5} > 0$

b) $\frac{3x - 1}{2} - \frac{x - x^2}{3} + 1 < 0$

c) $x - \frac{1 - 2x}{3} - \frac{2x^2 + 1}{4} \geq 5$

d) $3 - \frac{2x - 3}{2} + \frac{16x + x^2}{3} \geq 0$

e) $\frac{x - 1}{4} - \frac{12x - x^2}{3} \geq \frac{2x^2 + 1}{3} - x$

7.14 Resuelve y expresa la solución mediante intervalos.

a) $\frac{x + 3}{x - 5} < 0$

b) $\frac{2x - 3}{x + 3} < 0$

c) $\frac{-x + 1}{2 - 3x} > 0$

d) $\frac{2 - x}{2x + 5} - 1 > 0$

7.15 Resuelve y expresa la solución mediante intervalos.

a) $\frac{x^2 - 1}{x + 1} \leq 0$

b) $\frac{-x^2 + 3}{2x - 3} < 0$

c) $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4} > 0$

d) $\frac{-x + 3}{2x^2 - 18} \geq 0$

7.16 Determina para qué valores reales de x están definidas estas expresiones.

a) $\sqrt{5 - 3x}$

b) $\sqrt{x - 3}$

c) $\sqrt{4 - 3x - x^2}$

d) $\log(2 - 5x)$

e) $\log(6 - x - x^2)$

f) $\log(x^2 - 2^x + 1)$

BLOQUE 08

Problemas y razonamiento

Modelos, aplicaciones y retos algebraicos. · 24 actividades

8.01 El número aproximado de clientes que atiende por hora un dependiente, tras d días de trabajo, se modeliza mediante $C(d) = \frac{40d}{d + 3}$.

a) ¿Cuántos clientes por hora atendería tras dos días?

b) La empresa lo considera rentable cuando atiende al menos 32 clientes por hora. ¿A partir de cuándo sucede?

c) Investiga qué ocurre cuando acumula mucha experiencia. ¿Qué característica observas?

8.02 Hace cuatro años una persona tenía la mitad más la tercera parte de la edad que tiene ahora. ¿Cuál es su edad actual?

8.03 Una lancha recorre 50 metros por minuto al bajar un río y 20 metros por minuto al subirlo. ¿Qué distancia máxima puede bajar si dispone de 3 horas para ir y volver al punto de partida?

8.04 Descompón 60 en dos números de modo que, al dividir el mayor entre el menor, el cociente sea 3 y el resto 8.

8.05 Halla dos números enteros consecutivos sabiendo que la suma de la cuarta y la quinta parte del menor y la suma de la tercera y la séptima parte del mayor son también enteros consecutivos.

8.06 Un comerciante compra melones a 0,40 €/kg y los vende a 0,60 €/kg. ¿Cuántos kilogramos compró si se estropearon 10 kg y obtuvo un beneficio neto de 42 €?

8.07 En dos cubos A y B de igual capacidad se distribuyen 10 litros de agua en cantidades distintas. A se llenaría al añadirle dos tercios del agua de B; B se llenaría al añadirle la mitad del agua de A. Halla el agua que contiene cada cubo y su capacidad.

8.08 Una madre da a su hijo 1 € por cada ejercicio correcto y le cobra 0,50 € por cada ejercicio incorrecto. Tras 20 ejercicios, el hijo ha ganado 15,50 €. ¿Cuántos hizo bien?

8.09 Al aumentar en 4 cm la arista de un cubo, su volumen se multiplica por 8. Halla la arista original.

8.10 Una fábrica de vasos tiene unos gastos fijos de 3000 € y un coste de materia prima de 1,50 € por vaso. ¿Cuántos vasos puede fabricar con un gasto máximo de 7000 €?

8.11 Con 8 m de alambre se forma un rectángulo. ¿Entre qué valores puede estar su área?

8.12 Una madre de 24 años acaba de tener un hijo. ¿Cuándo estará la edad del hijo entre un quinto y dos quintos de la edad de su madre?

8.13 El triple de un número menos su mitad es mayor que 3. ¿Qué números cumplen esta propiedad?

8.14 Si al cuadrado de un número se le resta su mitad, el resultado es menor que 1. ¿Qué valores puede tomar?

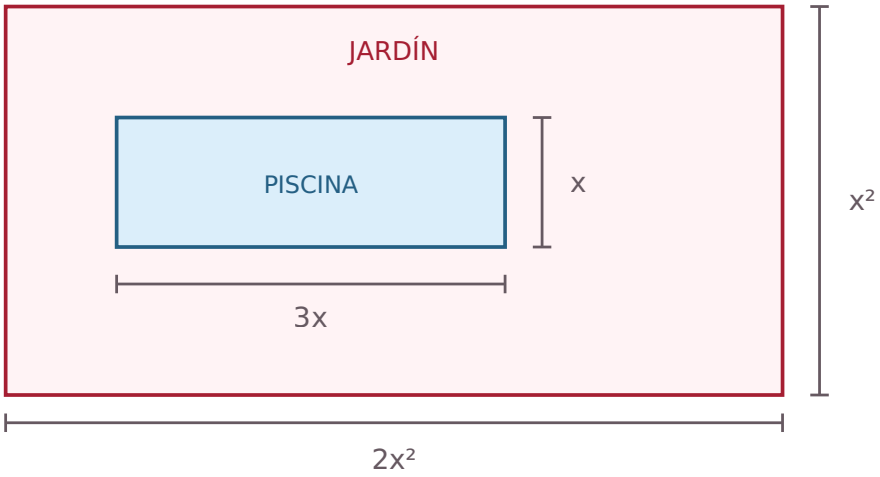
8.15 En un modelo de consumo eléctrico se comparan tres tarifas: A, 6,70 € fijos más 0,18 €/kWh; B, 9,60 € fijos más 0,13 €/kWh; C, 14 € fijos más 0,09 €/kWh.

a) ¿A partir de qué consumo B es más barata que A?

b) ¿A partir de qué consumo C es más barata que A?

c) ¿A partir de qué consumo C es la más barata de las tres?

8.16 En un jardín rectangular de lados $2x^2$ y x^2 metros se construye una piscina rectangular de lados $3x$ y x metros, con $x > 0$. La diferencia entre las áreas del jardín y la piscina es 135 m^2. Halla las dimensiones de la piscina.



8.17 Elige la respuesta correcta y justifica tu elección.

a) Un granjero tiene ovejas y gallinas. Si l es la media de patas por animal, ¿cuál es el cociente entre el número de ovejas y el de gallinas? Opciones: $\frac{1}{3(4-l)}$; $\frac{l-2}{4-l}$; $\frac{3(l-2)}{l}$; $\frac{(l-2)^2}{16-l^2}$; $\frac{7(l^2-4)}{5(16-l^2)}$.

b) Si $b > 1$, $x > 0$ y $(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$, ¿cuánto vale x? Opciones: 1/216; 1/6; 1; 6; no se puede determinar.

c) ¿Cuántas soluciones reales tiene $|x - |2x + 1|| = 3$? Opciones: 0; 1; 2; 3; 4.

d) ¿Cuál es el producto de las soluciones de $\sqrt{5|x| + 8} = \sqrt{x^2 - 16}$? Opciones: −64; −24; −9; 24; 576.

e) La edad de Juan, t años, es la suma de las edades de sus tres hijos. Hace n años su edad era el doble de esa suma. ¿Cuánto vale t/n? Opciones: 2; 11/3; 4; 25/6; 5.

8.18 Juan y Luis suben una escalera mecánica, ambos de peldaño en peldaño. Juan camina al triple de velocidad que Luis. Al llegar arriba, Juan ha contado 75 escalones y Luis, 50. ¿Cuántos peldaños visibles tiene la escalera?

8.19 Determina, con justificación, todos los pares de enteros (x, y) que verifican $x^2 - y^4 = 2009$.

8.20 ¿Qué ventajas aporta un teléfono móvil frente a un teléfono fijo?

8.21 En un modelo de llamadas de al menos un minuto se usa el coste C = 0,0968(N + M) + 0,1815N. N cuenta los primeros minutos, uno por llamada; M cuenta todos los minutos adicionales acumulados. Explica el significado de N, M y N+M.

8.22 En un plan C, cada minuto cuesta 0,0968 € y cada establecimiento de llamada, 0,1815 €. Si N es el número de llamadas y M la suma de los minutos adicionales al primero de cada llamada, plantea una inecuación para no superar 42 €.

8.23 Paula hace una llamada diaria durante 30 días y quiere gastar como máximo 40 €. Compara estos planes del ejercicio: B, cuota de 14,52 €, 60 minutos incluidos y 0,0726 € por minuto adicional; E, cuota de 29,50 €, 300 minutos incluidos y 0,2124 € por minuto adicional. En ambos se pagan 0,1815 € de establecimiento por cada llamada. ¿Cuántos minutos diarios puede hablar de media?

8.24 Investiga y compara tres ofertas de telefonía móvil vigentes cuando realices la actividad. Anota la fecha de consulta, la cuota fija, los minutos incluidos y los posibles costes por minuto o por establecimiento. Compara su coste para un mismo perfil de uso.

COMPRUEBA TUS RESULTADOS

Solucionario

Respuestas y justificaciones. Los códigos coinciden con los de las actividades.

01 · Polinomios

1.01 Respuesta abierta. Por ejemplo, $P(x) = 2x^3 + 3x - 1$. Sus términos son $2x^3$, $3x$ y -1; $P(2) = 21$ y $P(-2) = -23$.

1.02 $-2 \cdot x^4 + 5 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 5$

1.03 **a)** -4 **b)** 5 **c)** 7 **d)** -266 **e)** -12 **f)** 50

1.04 **a)** Cociente: $10 \cdot x^2 + 7$; resto: 8. **b)** Cociente: $3 \cdot x$; resto: $5 \cdot x$.

1.05 **a)** Cociente: $x^2 - x + 1$; resto: 2. **b)** Cociente: $4 \cdot x^4 - 8 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 4$; resto: 10.

1.06 **a)** $P(1) = 0$. Sí es raíz. **b)** $P(2) = 36$. No es raíz. **c)** $P(-1) = -18$. No es raíz. **d)** $P(-4) = 0$. Sí es raíz.

1.07 **a)** Factorización: $x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$. Raíces enteras: $-3; -2; 0; 1$.

b) Factorización: $(x - 7) \cdot (x - 3) \cdot (x + 5)$. Raíces enteras: $-5; 3; 7$.

1.08 **a)** $2 \cdot x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$ **b)** $x \cdot (x - 2)^2 \cdot (x^2 + 1)$

1.09 **a)** Factorización: $x \cdot (x - 3) \cdot (x - 2) \cdot (2 \cdot x - 3)$. Raíces enteras: $0; 2; 3$.

b) Factorización: $(x - 3) \cdot (x + 1) \cdot (3 \cdot x - 1)$. Raíces enteras: $-1; 3$.

1.10 **a)** $P(x) = x^4 + x$; $P(3) = 84$, $P(-1) = 0$. **b)** $P(x) = 4x^3 + 2$; $P(3) = 110$, $P(-1) = -2$.

c) $P(x) = 2x^2 + 5x + 3$; $P(3) = 36$, $P(-1) = 0$. **d)** $P(x) = x^3 - 1$; $P(3) = 26$, $P(-1) = -2$.

1.11 **a)** $-x^4 + x^3 - 2 \cdot x^2 + 3$ **b)** $-2 \cdot x^4 - \frac{4 \cdot x^3}{3} + \frac{5 \cdot x^2}{2} + \frac{2 \cdot x}{3} - \frac{2}{3}$

c) $-3 \cdot x^6 - x^5 - \frac{28 \cdot x^4}{5} - \frac{5 \cdot x^3}{3} + 11 \cdot x^2 + 20$

d) $-\frac{x^6}{8} + \frac{5 \cdot x^5}{12} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{2} + 6 \cdot x^2 - 13 \cdot x + 6$

1.12 **a)** 16830 **b)** 0 **c)** 0 **d)** 9072 **e)** $\frac{693}{4}$ **f)** 0 **g)** $\frac{6664}{27}$ **h)** 0

1.13 **a)** Cociente: $x^3 + x^2 + 4 \cdot x + 4$; resto: $12 \cdot x + 13$. **b)** Cociente: $\frac{5 \cdot x}{2} + \frac{9}{4}$; resto: $\frac{35}{4}$.

c) Cociente: $3 \cdot x^3 + 6 \cdot x + 2$; resto: $12 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1$.

d) Cociente: $x^5 - x^2 + x - 1$; resto: $x^2 - 2 \cdot x + 2$.

1.14 **a)** Cociente: $2 \cdot x^4 + 5 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2 + x + 1$; resto: 0. **b)** Cociente: $4 \cdot x - 5$; resto: 6.

c) Cociente: $3 \cdot x^5 - 9 \cdot x^4 + 27 \cdot x^3 - 76 \cdot x^2 + 228 \cdot x - 685$; resto: 2058.

d) Cociente: $x^7 + 2 \cdot x^6 + 3 \cdot x^5 + 6 \cdot x^4 + 13 \cdot x^3 + 26 \cdot x^2 + 51 \cdot x + 102$; resto: 205.

1.15 **a)** P(-1) = 0; P(0) = 0; P(1) = 0. Raíces entre los valores dados: -1, 0, 1.

b) P(-1) = 0; P(0) = -10; P(1) = -24. Raíces entre los valores dados: -1.

c) P(-1) = -2; P(0) = -1; P(1) = 0. Raíces entre los valores dados: 1.

d) P(-1) = 21/2; P(0) = 3; P(1) = 0. Raíces entre los valores dados: 1.

1.16 **a)** P(-2) = 0; P(1) = 0. Raíces entre los valores dados: -2, 1.

b) P(-2) = 120; P(1) = 0. Raíces entre los valores dados: 1.

c) P(-2) = 0; P(1) = 192. Raíces entre los valores dados: -2.

d) P(-2) = 140; P(1) = -64. Raíces entre los valores dados: ninguna.

1.17 M(2) = 0, por lo que sí es divisible. $N(x) = 2x^2 - x + 2$.

1.18 **a)** Factorización: $(x - 3) \cdot (x - 2) \cdot (x + 5)$. Raíces reales: $-5; 2; 3$.

b) Factorización: $x \cdot (x - 2)^2 \cdot (2 \cdot x + 1)$. Raíces reales: $-\frac{1}{2}; 0; 2$.

c) Factorización: $(x + 3)^2 \cdot (2 \cdot x - 1) \cdot (3 \cdot x + 2)$. Raíces reales: $-3; -\frac{2}{3}; \frac{1}{2}$.

d) Factorización: $(x - 4) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$. Raíces reales: $-2; 1; 4$.

e) Factorización: $(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 5)$. Raíces reales: $-5; -2; -1$.

f) Factorización: $(x - 2) \cdot (x + 4) \cdot (3 \cdot x + 1)$. Raíces reales: $-4; -\frac{1}{3}; 2$.

g) Factorización: $(x - 2)^2 \cdot (x - 1) \cdot (2 \cdot x - 1)$. Raíces reales: $\frac{1}{2}; 1; 2$.

h) Factorización: $(x - 4)^2 \cdot (x + 2)^2$. Raíces reales: $-2; 4$.

1.19 **a)** Factorización: $(x - 5) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$. Raíces reales: $-2; 1; 5$.

b) Factorización: $x^2 \cdot (x + 2) \cdot (3 \cdot x - 1)$. Raíces reales: $-2; 0; \frac{1}{3}$.

c) Factorización: $(x - 3) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$. Raíces reales: $-3; -2; 2; 3$.

d) Factorización: $(x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (2 \cdot x - 1) \cdot (3 \cdot x + 2)$. Raíces reales: $-3; -\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; 1$.

1.20 $Q(x) = 2(x - 1)(x - 3) = 2x^2 - 8x + 6$.

1.21 $P(2) = 8m-24 = 0$; por tanto, $m = 3$.

1.22 $P(-1) = 2-q = 0$; por tanto, $q = 2$.

1.23 $P(4) = 52+15a = 67$; por tanto, $a = 1$.

1.24 $P(2) = 0$ y $P(-3) = 0$ dan $4a+2b+2 = 0$ y $9a-3b-33 = 0$. Se obtiene $a = 2$ y $b = -5$.

1.25 Por ejemplo, $x^2 + x - 6$ y $2x^2 + 2x - 12$.

1.26 Por ejemplo, $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. La raíz -1 tiene multiplicidad 3.

1.27 $P(x) = 3(x - 1)(x + 2) = 3x^2 + 3x - 6$.

1.28 $Q(x) = 3(x - 1)(x + 1)(x + 2) = 3x^3 + 6x^2 - 3x - 6$.

1.29 $(x^2 - 4 \cdot x + 1) \cdot (x^3 + 4 \cdot x^2 + 15 \cdot x + 56)$. El factor x^2-4x+1 tiene raíces cuyo producto es 1.

02 · Fracciones algebraicas

2.01 **a)** $\frac{x}{x+1}$, $x \neq -1$. **b)** $\frac{x-2}{2}$, $x \neq -3$.

2.02 Denominador común: $(x+1)^2(x+3)(x-1)$. Numeradores respectivos: $5(x+1)^2$, $3x(x+1)(x+3)$ y $(x-1)^2(x+3)$. $x \neq -3, -1, 1$.

2.03 $\frac{x^2+4x+18}{6x(x+2)}$, con $x \neq 0, -2$.

2.04 **a)** $\frac{5(x+1)}{3x(x+3)}$, $x \neq -3, 0, 1$. **b)** $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$, $x \neq -1, 1, 2$.

2.05 **a)** $\frac{x^5+x\cdot y^4-3\cdot y^2}{x^2\cdot y^2}$; $x \neq 0$, $y \neq 0$. **b)** $\frac{3\cdot x^2+3\cdot x+5}{x^2+x}$; $x \neq 0, -1$.
c) $\frac{8\cdot x^2-8\cdot x+4}{x^2-4}$; $x \neq -2, 2$. **d)** $\frac{4\cdot x-2}{x^2-1}$; $x \neq -1, 1$.

2.06 **a)** $\frac{2\cdot x^2-15\cdot x-3}{4\cdot x^2-36}$; $x \neq -3, 3$. **b)** $\frac{24-5\cdot x}{12\cdot x^2-36\cdot x}$; $x \neq 0, 3$. **c)** $\frac{-a-9\cdot b}{a^2-b^2}$; $a \neq b$, $a \neq -b$.
d) $5-2\cdot x$; $x \neq -2, -3$.

03 · Ecuaciones de segundo grado

3.01 **a)** Completa. $x = 3;\ 7$. **b)** Completa. $x = -6;\ -\frac{2}{3}$.

c) Completa. $x = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{129}}{6};\ -\frac{\sqrt{129}}{6} - \frac{3}{2}$. **d)** Completa. $x = \frac{3}{2}$. **e)** Incompleta. $x = 0;\ 6$.

f) Incompleta. $x = -3;\ 3$. **g)** Incompleta. $x = -\sqrt{5};\ \sqrt{5}$. **h)** Incompleta. $x = 0;\ 6$.

3.02 **a)** $x = -5;\ 3$. **b)** $x = \frac{7}{4} - \frac{\sqrt{65}}{4};\ \frac{7}{4} + \frac{\sqrt{65}}{4}$. **c)** $x = -\frac{11}{3};\ 3$. **d)** $x = 2$.

3.03 **a)** Δ = -39. Ninguna solución real. **b)** $\Delta = 0$. Una solución doble.

c) Δ = -39. Ninguna solución real. **d)** $\Delta = 25$. Dos soluciones. **e)** $\Delta = 73$. Dos soluciones.

f) $\Delta = 161/100$. Dos soluciones.

3.04 **a)** $k < 3$. **b)** $k = 3$. **c)** $k > 3$. **d)** $k < -10$ o $k > 10$. **e)** $k = -10$ o 10. **f)** $-10 < k < 10$.

3.05 **a)** No; al sustituir resulta 40, no 0. **b)** Sí; la ecuación equivale a $2x^2-6 = 0$.

c) Sí; la ecuación equivale a $(2x+3)^2 = 0$. **d)** No; al sustituir resulta 79/4, no 0.

3.06 **a)** $x = -4;\ 4$. **b)** $x = 0;\ 16$. **c)** Sin soluciones reales. **d)** Sin soluciones reales.

e) Sin soluciones reales. **f)** $x = 3 - 2 \cdot \sqrt{2};\ 2 \cdot \sqrt{2} + 3$. **g)** $x = -3 + \sqrt{10};\ -\sqrt{10} - 3$.

h) $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{73}}{2};\ -\frac{\sqrt{73}}{2} - \frac{1}{2}$.

3.07 **a)** $x = -\frac{3}{5};\ 1$. **b)** $x = -1$. **c)** $x = -\frac{8}{3};\ 0$. **d)** $x = -3;\ \frac{1}{2}$.

3.08 **a)** Por ejemplo, $x^2 - 4x - 21 = 0$. **b)** Sus soluciones son -3 y 7.

3.09 **a)** Δ = -44. Ninguna solución real. **b)** $\Delta = 105$. Dos soluciones. **c)** $\Delta = 13$. Dos soluciones.

d) $\Delta = 72$. Dos soluciones.

3.10 $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$. Si $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, resulta $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Hay dos soluciones reales si $\Delta > 0$, una doble si $\Delta = 0$ y ninguna real si $\Delta < 0$.

3.11 $49-91+k = 0$, luego $k = 42$. La otra solución es $x = 6$.

3.12 $25a+5b-30 = 0$ y $9a-3b-30 = 0$. Se obtiene $a = 2$ y $b = -4$.

3.13 **a)** Suma: -5; producto: -14. $x = -7;\ 2$. **b)** Suma: -1; producto: 0. $x = -1;\ 0$.

c) Suma: $-\frac{13}{6}$; producto: $-\frac{5}{6}$. $x = -\frac{5}{2};\ \frac{1}{3}$. **d)** Suma: -1; producto: $-\frac{10}{9}$. $x = -\frac{5}{3};\ \frac{2}{3}$.

e) Suma: 1; producto: $\frac{1}{4}$. $x = \frac{1}{2}$. **f)** Suma: $-\frac{3}{10}$; producto: $-\frac{1}{10}$. $x = -\frac{1}{2};\ \frac{1}{5}$.

3.14 **a)** $x^2 + 3x - 10 = 0$ **b)** $x^2 - 16 = 0$ **c)** $x^2 + 2x = 0$ **d)** $9x^2 + 9x + 2 = 0$

3.15 Soluciones: 2 y 7. Suma 9 y producto 14. En una ecuación mónica $x^2 - Sx + P = 0$, la suma de las raíces es S y el producto es P.

3.16 **a)** Como $b = -a(r+s)$ y $c = ars$, la nueva ecuación es $a(rx+1)(sx+1) = 0$.

b) Si r y s son distintos de cero: $x = -1/r$ y $x = -1/s$.

c) Si solo $r = 0$: $x = -1/s$. Si solo $s = 0$: $x = -1/r$.

d) Si $r = s = 0$: queda $a = 0$, imposible, por lo que no hay solución.

3.17 Se exige $m > 0$. Si $0 < m < 10$, hay dos soluciones: $x = 1 \pm \sqrt{1 - \log m}$. Si $m = 10$, hay una doble, $x = 1$. Si $m > 10$, no hay soluciones reales. Para $m \leq 0$, la expresión $\log m$ no está definida en $\mathbb{R}$.

3.18 **a)** $a^2t^2 - (b^2 - 2ac)t + c^2 = 0$.

b) $ct^2 + bt + a = 0$, siempre que $c \neq 0$. Si $c = 0$, alguna raíz original es cero y su inverso no existe.

c) $at^2 - bt + c = 0$.

04 · Ecuaciones de grado superior

4.01 **a)** $x = -2; 2$. **b)** $x = -4; -1; 1; 4$. **c)** $x = -\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}$.

4.02 **a)** $x = -5; 1; 3$. **b)** $x = -4; 0; 4; 9$. **c)** $x = -2; -\frac{3}{2}; \frac{1}{3}$. **d)** $x = -5; 0; \frac{1}{3}$.
e) $x = -3; -2; 1; 3$.

4.03 **a)** $(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+4) = 0$. $x = -4; 1; 2; 3$. **b)** $x\cdot(x-3)^2\cdot(x^2+1) = 0$. $x = 0; 3$.
c) $(x+4)^2\cdot(x^2+1) = 0$. $x = -4$.

4.04 Por ejemplo, $(x-2)(x-3)(x-7) = 0$. Grado mínimo 3, pues tiene tres raíces distintas.

4.05 **a)** $x = 1; 2$. **b)** $x = -2; 1$. **c)** $x = -1; 2$. **d)** $x = -2; -1$. **e)** $x = -2; 2$. **f)** $x = -2; -1; 1; 2$.

4.06 **a)** $x = 0; 1; 2$. **b)** $x = 0; \frac{1}{3}; 2$. **c)** $x = 0; \frac{1}{2}; 2$. **d)** $x = -1; 1$.

4.07 **a)** $x = -2; -\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; 2$. **b)** $x = -4; -3; 3; 4$. **c)** $x = -3; -1; 1; 3$.

4.08 **a)** $x = -1$ o 1. **b)** $x = -2$ o 3. **c)** Sin soluciones reales: x^6 no puede ser -3 ni -4.
d) $x = \sqrt[5]{\frac{-1-\sqrt{865}}{72}} \approx -0{,}8417$ o $x = \sqrt[5]{\frac{-1+\sqrt{865}}{72}} \approx 0{,}8303$.

4.09 **a)** $x = -2; 1; 2$. **b)** $x = 0; 1$. **c)** $x = -3; 1; 3$. **d)** $x = -2; -1; 4; 5$.

4.10 **a)** $x = -3; -2; 1$. **b)** $x = -4; 2$. **c)** $x = -3; 2$. **d)** $x = -2; \frac{1}{2}; 4$.

4.11 **a)** $x = -\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; 1$. **b)** $x = -2; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; 3$. **c)** $x = 0; 2; -\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}; -\frac{\sqrt{29}}{2}-\frac{5}{2}$.
d) $x = -3; 0; 1; 3$.

4.12 **a)** $x = 1; 2; 3$. **b)** $x = -3; 1; 5$. **c)** $x = -2; -1; 1; 2$. **d)** $x = 7$.

4.13 **a)** $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$. **b)** $(2x-1)^3 = 0$.
c) $(x-1)^2(x+1) = 0$. Tiene dos soluciones reales distintas: 1 y -1. **d)** $(3x+1)(5x-2) = 0$.
e) $(2x^2-1)(x+3) = 0$.

4.14 **a)** Se hace $t = x^2$. Cada raíz positiva distinta de $at^2+bt+c = 0$ aporta dos soluciones; una raíz $t = 0$ aporta una; las negativas no aportan ninguna.

b) Cuatro: $\Delta = b^2-4ac > 0$, $-b/a > 0$ y $c/a > 0$ (dos raíces t positivas).

c) Tres: $c = 0$ y $-b/a > 0$ ($t = 0$ y otra raíz positiva).

d) Dos: $c/a < 0$ (una raíz t positiva y otra negativa), o $\Delta = 0$ y $-b/(2a) > 0$ (una raíz t positiva doble).

e) Una: $c = 0$ y $-b/a \leq 0$; la única solución es $x = 0$.

f) Ninguna: $\Delta < 0$; o $\Delta = 0$ y $-b/(2a) < 0$; o $\Delta > 0$, $c/a > 0$ y $-b/a < 0$.

4.15 **a)** $x_1 + x_2 + x_3 = -\,b/a$. **b)** $x_1x_2x_3 = -\,d/a$.

c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = c/a$. Se obtiene al desarrollar $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ e igualar coeficientes.

4.16 **a)** Sean S_1, S_2 y S_3 esas sumas. Por las relaciones entre raíces y coeficientes, $S_1 = -2$ y la suma de productos por parejas es 3.

b) $S_2 = S_1^2-2\cdot 3 = 4-6 = -2$.

c) Cada raíz r cumple $r^3+2r^2+3r+4 = 0$. Sumando las tres igualdades: $S_3+2S_2+3S_1+12 = 0$. Así, $S_3 = 4+6-12 = -2$.

05 · Ecuaciones racionales y radicales

5.01 **a)** $x = -1$; $x \neq 0, 1$. **b)** $x = -2$ o 2; $x \neq 0$.

5.02 **a)** $x = 43 + 2\sqrt{43}$. Se exige $x \geq 41$. La raíz $43 - 2\sqrt{43}$ obtenida al cuadrar no cumple la ecuación original.

b) $x = 3$. El candidato 57/64 que aparece al cuadrar no cumple la ecuación original.

5.03 **a)** $x = -5$ o 5; $x \neq -1, 1$. **b)** $x = -5$ o -2; el denominador es siempre positivo.

c) $x = -1$ o 3; $x \neq -3, 2$.

5.04 **a)** $x = 0$; $x \neq -1/3, 1/2$. **b)** $x = 15/2$; $x \neq -6, 3$.

c) Sin solución: al multiplicar resulta $2 = 0$; $x \neq 3, 4$.

d) Sin solución: al multiplicar resulta $2 = 0$; $x \neq 1, 2$.

5.05 **a)** $x = -2$ o 2. **b)** $x = 3$. Se descarta -2 porque el primer miembro sería negativo.

c) $x = 6$. Se descarta -4 porque $x/2$ debe ser no negativo.

d) $x = 2$. Se descarta -5 porque $x+3$ debe ser no negativo.

5.06 **a)** $x = 4$. **b)** $x = 3$. **c)** $x = 2$ o 8. **d)** $x = 5$.

5.07 **a)** $x = -1/2$ o $1/2$; $x \neq -1, 0, 1$. **b)** $x = -3$ o 3. **c)** $x = -3$ o 3; $x \neq 0$.

5.08 **a)** $x = -\frac{4}{3}$; 3. Se excluye $x = 0$; al sustituir $x = 3$ resulta $-8/3+5/2+1/6 = 0$.

b) $x = -\frac{12}{5}$; 5. Se excluye $x = 0$; al sustituir $x = 5$ resulta $29/5-19/3+8/15 = 0$.

c) $x = 1$. Se excluye $x = 0$; $x = 1$ da $1/2 = 5/6-1/3$.

5.09 **a)** $x = -\frac{\sqrt{22}}{7} - \frac{1}{7}; -\frac{1}{7} + \frac{\sqrt{22}}{7}; 2$. $x \neq -1, 0, 1$. **b)** $x = -1$. $x \neq -7/4, -2, 3$.

c) $x = \frac{3}{2}$. $x \neq -1/2, 1/2$. **d)** $x = -3$. $x \neq -1, 1$. **e)** Sin soluciones reales. $x \neq -3, 3$.

5.10 **a)** $x = -3; -2; 2; 3$. $x \neq -\sqrt{6}, \sqrt{6}$. **b)** $x = -\sqrt{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \sqrt{2}$. No hay denominadores variables.

c) $x = -1; 1$. $x \neq 0$.

d) Soluciones: -1,241566 (aproximadas). Al eliminar denominadores: $6 \cdot x^3 - 2 \cdot x + 9 = 0$. $x \neq 0$.

5.11 **a)** $x = -\frac{1}{7}$. $x \neq -3, -1/2$. **b)** $x = \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{73}}{2}; \frac{\sqrt{73}}{2} + \frac{9}{2}$. $x \neq 2, 1/2$. **c)** $x = -3$. $x \neq 3, -5/3$.

d) $x = \frac{3}{2}$. $x \neq 1, 2$.

5.12 **a)** $x = -\frac{1}{2}$; 3. $x \neq -1, 0$. **b)** $x = -2$; 2; 3. $x \neq 0$. **c)** $x = -\sqrt{10} - 2; -2 + \sqrt{10}$. $x \neq 0$.

d) $x = 0$; 2. $x \neq 4/3, 1$.

5.13 **a)** $x = \frac{3}{2}$. $x \neq -1, 1$.

b) $x = -\frac{1}{4}$. $x \neq -1$.

c) $x = -2; \frac{6}{5}$. $x \neq 0, 1, 4$.

d) $x = 0$. $x \neq -4, 1$.

e) Soluciones: -3,818602, -0,410915, 1,529518, 3,0 (aproximadas). Al eliminar denominadores: $(x - 3) \cdot (10 \cdot x^3 + 27 \cdot x^2 - 49 \cdot x - 24) = 0$. $x \neq 5/2, -1, 1$.

f) Soluciones: 0,5, 2,638423 (aproximadas). Al eliminar denominadores: $(2 \cdot x - 1) \cdot (7 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 23 \cdot x - 47) = 0$. $x \neq 2$.

g) $x = -\frac{2}{3}$; 0. $x \neq -1, 1$.

5.14 **a)** -3. **b)** 13/12.

5.15 **a)** $x = 3$. **b)** $x = 2$ o 4. **c)** $x = 4$.

d) $x = \frac{-5 + \sqrt{33}}{2}$. Se descarta la otra raíz porque x+1 debe ser no negativo.

5.16 **a)** $x = 55$. **b)** $x = -1$ o 8.

5.17 **a)** $x = 240/23$. **b)** Sin solución: la diferencia del primer miembro es negativa en todo su dominio.

c) $x = 15$. **d)** Sin solución: la diferencia del primer miembro es, como máximo, $\sqrt{2}$.

5.18 **a)** $x \approx$ -3,320457, 24,455528. Al cuadrar: $x^4 - 30x^3 + 100x^2 + 850x + 500 = 0$. Solo se conservan las raíces con $\frac{x^2}{5} - 3x - 5 \geq 0$.

b) $x = 1$. El candidato $x = 6$ no cumple la ecuación original.

c) $x = 1/3$. Las demás raíces de la ecuación obtenida al cuadrar no verifican la inicial.

d) $x = -1/2$. El otro candidato real obtenido al cuadrar no verifica la ecuación inicial.

5.19 **a)** $x = 2$. **b)** $x = 16/25$. Se descarta $x = 0$ al comprobar la ecuación original.

5.20 **a)** $x = -2; -1; \frac{3}{2}$. No hay denominadores variables. **b)** $x = -4; \frac{1}{4}$; 2. $x \neq 0$.

c) $x = -4$. No hay denominadores variables. **d)** $x = 2$. $x \neq -1, 0, 1$.

e) $x = 3$. El denominador es siempre positivo.

5.21 Sean $u = \sqrt[3]{x}$ y $v = \sqrt[3]{(1729-x)}$. Entonces $u+v = 19$ y $u^3+v^3 = 1729$. De $19^3 = 1729+57uv$ resulta $uv = 90$. Por tanto, u y v son 9 y 10. Las soluciones son $x = 729$ y $x = 1000$; ambas verifican la ecuación.

06 · Exponenciales y logarítmicas

6.01 **a)** $x = 3$. Dominio $x > 2$; el candidato $x = 1$ queda excluido.

b) $x = 5$. Dominio $x > 4$; el candidato $x = 3$ queda excluido.

6.02 **a)** $x = 2$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = 10$ **d)** $x = 6$

6.03 **a)** $x = 1$. **b)** $x = -7$. **c)** $x = 1$ o 6. **d)** $x = -5$; $x \neq -2$. **e)** $x = 0$, 3 o 4. **f)** $x = 17/2$. **g)** $x = -1$.

h) $x = 2/5$ o $x = 3/4$. **i)** $x = 1/5$; $x \neq 2/3$.

j) Sin soluciones reales. Al igualar exponentes se obtiene $(x^2 - 3x - 2)^2 + 8x^2 = 0$, cuyo primer miembro es estrictamente positivo para todo x real.

6.04 **a)** $x = -6$. **b)** $x = 12$. **c)** $x = -3$ o 1. **d)** $x = -2, -1, 1$ o 2.

6.05 **a)** $x = \dfrac{\log 3}{2\log 3 - \log 2} \approx 0{,}7304$. **b)** Sin solución real: los dos sumandos son positivos.

c) $x = \dfrac{2\log 3 - 2\log 5}{3\log 5 - 5\log 3} \approx 1{,}5369$. **d)** $x = 3 - \sqrt{3}$ o $x = 3 + \sqrt{3}$.

6.06 **a)** $x = 625$ **b)** $x = 101$ **c)** $x = 4$ **d)** $x = \pm 8$

6.07 **a)** $x = 2$ **b)** $x = 10$ **c)** $x = \pm 2$ **d)** $x = 5$

6.08 **a)** $x = 1/3$ **b)** $x = \sqrt{5}$ **c)** $x = \sqrt{3}/3$ **d)** $x = \sqrt[5]{2}$

6.09 **a)** $x = \sqrt[4]{8}$ **b)** $x = \sqrt{2}$ **c)** $x = \sqrt[5]{3}$ **d)** $x = 3/2$. **e)** $x = 7$. **f)** $x = \sqrt[4]{2}$

g) No hay solución real: el argumento $-125/8$ es negativo. **h)** $x = \sqrt[3]{7}$

6.10 **a)** $x = 1$ **b)** $x = \dfrac{3}{2\log 2}$ **c)** $x = \dfrac{-1}{\ln 3}$ **d)** $x = -5$ **e)** $x = -3/2$ **f)** $x = \dfrac{3}{\log 2}$ **g)** $x = \dfrac{3}{\ln 3} - 6$

h) $x = -14/9$

6.11 **a)** $x = 1/2$ **b)** $x = 175$ **c)** $x = 72$

6.12 **a)** $x = 8$ **b)** $x = 1/2$ **c)** $x = 2/3$

6.13 **a)** $x = 6$; la base debe ser positiva y distinta de 1.

b) $x = 4$; el candidato 0 produciría una base igual a 1. **c)** $x = 1$ o 2. **d)** $x = 16$; se exige $x > 0$.

e) $x = -5$ o 1.

6.14 **a)** $x \approx 5{,}586875$. Dominio $x > 5$.

b) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4 \cdot 3^{27} - 3}}{2}$. El argumento x^2+x+1 es siempre positivo.

c) $x \approx 1{,}190635$. Dominio $x > -1/3$. **d)** $x \approx 5{,}877511$. Dominio $x > 3$.

6.15 **a)** $x = 6$; el dominio exige $x > 5$. **b)** $x = 16$; el dominio exige $x > 0$.

6.16 **a)** $x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$. Dominio $x > 1$. **b)** $x = 12$. Dominio $x > 3$.

6.17 **a)** $x = -3$ **b)** $x = 10$ **c)** $x = 3$ **d)** $x = 11/5$ **e)** $x = 2$ **f)** $x = 2$ **g)** $x = 3$ **h)** $x = 6$

6.18 **a)** $x = 11/4$ **b)** $x = 3$ **c)** $x = 3$ **d)** $x = -4$ **e)** $x = -5$ **f)** $x = -8$

6.19 **a)** $x = 5$ **b)** $x = 8$ **c)** $x = 28/5$ **d)** $x = 2$ **e)** $x = -6$ **f)** $x = -1$

6.20 **a)** $x = -1;\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{3}{5}$. **b)** $x = -1;\ 3$.

6.21 **a)** $x = -\dfrac{6}{5};\ 0;\ 8$. **b)** $x = -2;\ 0;\ \dfrac{8}{3}$. **c)** $x = -5;\ -2;\ \dfrac{1}{2}$.

6.22 **a)** Si $a = 1$, cualquier x real; si $a > 0$ y $a \neq 1$, $x = 3/2$.

b) Si $m = 1$, cualquier x real; si $m > 0$ y $m \neq 1$, $x = -1$.

c) Si $a = 1/3$, cualquier x real; si $a > 0$ y $a \neq 1/3$, $x = 7/2$.

d) Si $p = 4$, cualquier x real; si $p > 3$ y $p \neq 4$, $x = 2/5$.

e) Si $a+b = 1$, cualquier x real; si $a+b > 0$ y $a+b \neq 1$, $x = 2$.

f) $x = -4$, 2 o 3. Los valores -4 y 2 hacen que la base sea 1; $x = 3$ anula el exponente, con base -6.

g) $x = 0$ o 1: base igual a 1 o exponente igual a 0, respectivamente.

6.23 **a)** $x = 0$ o $x = \dfrac{\log 2}{\log 9}$. **b)** $x = \dfrac{\log 7}{\log(2/3)}$. **c)** $x = \dfrac{\log 3}{\log 7}$ o $x = \dfrac{\log(1 + \sqrt{2})}{\log 7}$.

d) $x = 0$ o $x \approx 3{,}342325$. Con $t = (5/6)^x > 0$, la ecuación es $(t-1)(t^3+t^2+t-1) = 0$.

6.24 **a)** $x = -1$ o 0. **b)** $x = -1$ o 2. **c)** $x = -1$ o 0.

07 · Inecuaciones y dominios

7.01 **a)** $(2, +\infty)$ **b)** $[-11, +\infty)$ **c)** $(-\infty, 13/4]$ **d)** $(-\infty, 3)$

7.02 **a)** $(-\infty, 0]$ **b)** $(2, +\infty)$

7.03 **a)** $[1, 2]$ **b)** $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$ **c)** $(-\infty, 0) \cup (9, +\infty)$ **d)** $(-3, 3)$ **e)** $\emptyset$ **f)** $(-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$
g) $(-4, 1)$ **h)** $(-\infty, -5) \cup (6, +\infty)$ **i)** $\emptyset$ **j)** $\emptyset$

7.04 **a)** $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2] \cup [3, +\infty)$. **b)** $[-1, 0] \cup [1, 4]$.
c) $(-\infty, 1)$. Factorización: $(x-1)(x^2+3x+6)$, con segundo factor siempre positivo.
d) $(-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2}) \cup (1, \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \cup (3, +\infty)$.

7.05 Se reduce a $\frac{2(x+2)}{x-4} \geq 0$, con $x \neq 4$. Solución: $(-\infty, -2] \cup (4, +\infty)$.

7.06 **a)** Sí: $0 > -2$. **b)** Sí: $-7 \leq 7$. **c)** Sí: $2 > 0$.

7.07 **a)** $[-11, +\infty)$. **b)** $(-8, +\infty)$. **c)** $[-4, +\infty)$. **d)** $[4, +\infty)$. **e)** $(-\infty, \frac{3}{7})$. **f)** $[\frac{1}{3}, +\infty)$.

7.08 **a)** $(-\infty, 4]$. **b)** $(-\infty, \frac{19}{11}]$. **c)** $(-\infty, 3]$.

7.09 **a)** $(-\frac{24}{5}, +\infty)$. **b)** $(-\infty, \frac{57}{13}]$. **c)** $(-\infty, 2)$.

7.10 **a)** $(-2, 3)$. **b)** $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$. **c)** $\emptyset$. **d)** $\mathbb{R}$. **e)** $(-\infty, -3) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$. **f)** $[-\frac{9}{2}, -\frac{2}{3}]$.

7.11 **a)** $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$. **b)** $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

7.12 **a)** $(-\infty, -1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$. **b)** $(-\infty, -35) \cup (0, +\infty)$. **c)** $\mathbb{R}$.
d) $(-\infty, -\frac{\sqrt{39}}{3} - 1) \cup (-1 + \frac{\sqrt{39}}{3}, +\infty)$.

7.13 **a)** $\mathbb{R}$. **b)** $(-3, -\frac{1}{2})$. **c)** $\emptyset$. **d)** $(-\infty, -\frac{13}{2} - \frac{\sqrt{115}}{2}] \cup [-\frac{13}{2} + \frac{\sqrt{115}}{2}, +\infty)$.
e) $[-\frac{33}{8} - \frac{\sqrt{977}}{8}, -\frac{33}{8} + \frac{\sqrt{977}}{8}]$.

7.14 **a)** $(-3, 5)$. **b)** $(-3, \frac{3}{2})$. **c)** $(-\infty, \frac{2}{3}) \cup (1, +\infty)$. **d)** $(-\frac{5}{2}, -1)$.

7.15 **a)** $(-\infty, -1) \cup (-1, 1]$. **b)** $(-\sqrt{3}, \frac{3}{2}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. **c)** $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \cup (3, +\infty)$.

d) $(-\infty, -3)$.

7.16 **a)** $(-\infty, 5/3]$.

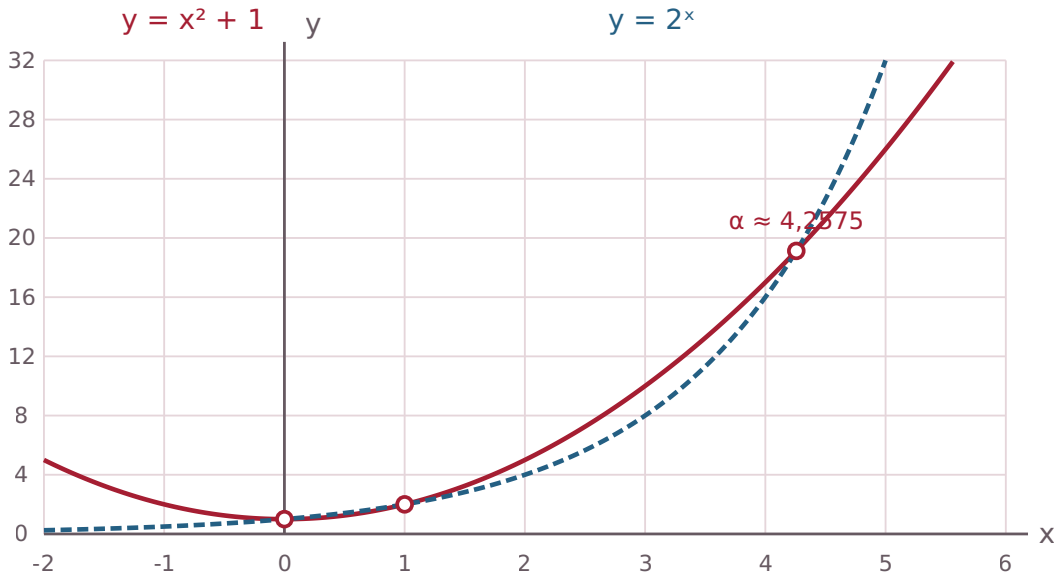
b) $[3, +\infty)$.

c) $[-4, 1]$.

d) $(-\infty, 2/5)$.

e) $(-3, 2)$.

f) $(-\infty, 0) \cup (1, \alpha)$, donde $\alpha \approx 4{,}257462$ es la tercera raíz de $x^2+1 = 2^x$. Los extremos se excluyen porque el argumento del logaritmo debe ser positivo.



08 · Problemas y razonamiento

8.01 **a)** C(2) = 16 clientes por hora. **b)** $\frac{40d}{d+3} \geq 32$ equivale a $d \geq 12$: a partir de 12 días.

c) $C(d) = 40 - \frac{120}{d+3}$. Se aproxima a 40 clientes por hora sin alcanzar ese valor para ningún d finito.

8.02 $x - 4 = \frac{x}{2} + \frac{x}{3}$. Su edad actual es 24 años.

8.03 $\frac{d}{50} + \frac{d}{20} \leq 180$. La distancia máxima de bajada es d = 18000/7 m ≈ 2571,43 m.

8.04 Si el menor es x, el mayor es 3x+8. Entonces 4x+8 = 60, de donde x = 13. Los números son 13 y 47; 47 = 3·13+8.

8.05 $\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 1 = \frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{7}$ da x = 20. Los números son 20 y 21; las sumas son 9 y 10. Si se invierte el orden de las sumas, no se obtiene un x entero.

8.06 Si compra x kg, ingresa 0,60(x−10) y gasta 0,40x. La ecuación 0,60(x−10)−0,40x = 42 da x = 240 kg.

8.07 Si A contiene x litros, B contiene 10−x. Igualando capacidades: $x + \frac{2}{3}(10 - x) = 10 - x + \frac{x}{2}$. A contiene 4 l, B contiene 6 l y la capacidad de cada cubo es 8 l.

8.08 Si x es el número de aciertos, x−0,50(20−x) = 15,50. Hizo 17 ejercicios bien y 3 mal.

8.09 $(x + 4)^3 = 8x^3$, con x > 0. Al extraer la raíz cúbica, x+4 = 2x, luego la arista original mide 4 cm.

8.10 3000+1,50x ≤ 7000, luego x ≤ 2666,666… Como x es entero, puede fabricar como máximo 2666 vasos.

8.11 Los lados son x y 4−x, con 0 < x < 4. El área es $A = x(4 - x) = 4 - (x - 2)^2$. Por tanto, 0 < A ≤ 4 m². El máximo se alcanza con un cuadrado de lado 2 m; el área puede acercarse a 0 sin alcanzarlo.

8.12 $\frac{24 + x}{5} \leq x \leq \frac{2(24 + x)}{5}$. Se obtiene 6 ≤ x ≤ 16. Sucede desde que el hijo cumple 6 años hasta que cumple 16, incluidos ambos extremos.

8.13 $3x - \frac{x}{2} > 3$ equivale a x > 6/5.

8.14 $x^2 - \frac{x}{2} < 1$. Solución: $(\frac{1 - \sqrt{17}}{4}, \frac{1 + \sqrt{17}}{4})$.

8.15 **a)** B es más barata que A cuando $x > 58$ kWh; a 58 kWh cuestan lo mismo.

b) C es más barata que A cuando $x > 730/9$ kWh $\approx 81{,}11$ kWh.

c) C es estrictamente más barata que las otras dos cuando $x > 110$ kWh. A 110 kWh empata con B.

8.16 $2x^4 - 3x^2 = 135$. Tomando $t = x^2$: $2t^2-3t-135 = 0$, de donde $t = 9$ o $t = -15/2$. Se descarta el valor negativo y se obtiene $x = 3$. La piscina mide 9 m × 3 m.

8.17 **a)** $\frac{l-2}{4-l}$. Si hay o ovejas y g gallinas, $l = (4o+2g)/(o+g)$, de donde $o/g = (l-2)/(4-l)$.

b) $x = 1/6$. Tomando logaritmos en base b, se obtiene $\log_\beta x = -\log_\beta 6$.

c) Dos soluciones: $x = 2$ y $x = -4/3$. **d)** -64. Las soluciones son -8 y 8.

e) 5. Si la edad actual del padre es t y la suma de las edades de sus tres hijos es t, hace n años: $t-n = 2(t-3n)$, luego $t = 5n$.

8.18 Si la escalera avanza k peldaños mientras Juan camina uno, avanza 3k mientras Luis camina uno. Así, $75+75k = 50+150k$; $k = 1/3$. El número de peldaños visibles es 100.

8.19 **a)** Como $x^2 = y^4+2009 > y^4$, se tiene $|x| > y^2$. Tomamos $a = |x|-y^2 > 0$ y $b = |x|+y^2 > 0$. Entonces $ab = 2009 = 7^2\cdot 41$.

b) Las parejas positivas con $a \le b$ son (1, 2009), (7, 287) y (41, 49). Los valores de $y^2 = (b-a)/2$ son 1004, 140 y 4. Solo 4 es un cuadrado perfecto.

c) Por tanto, $|x| = (41+49)/2 = 45$ e $y = \pm 2$. Los cuatro pares son (45, 2), (45, −2), (−45, 2) y (−45, −2).

8.20 Respuesta abierta. La portabilidad permite comunicarse desde distintos lugares y acceder a servicios de datos cuando hay cobertura. La respuesta debe justificar las ventajas mencionadas.

8.21 N es el número de llamadas. M es la suma de los minutos que exceden el primero en todas las llamadas. N+M es la duración total facturada, en minutos. El coste incluye 0,0968 € por minuto y 0,1815 € de establecimiento por llamada.

8.22 $0{,}0968(N + M) + 0{,}1815N \le 42$, con N entero no negativo y $M \ge 0$. Se supone que cada llamada dura al menos un minuto.

8.23 **a)** Plan B: $14{,}52 + 0{,}1815\cdot 30 + 0{,}0726\cdot\max(T - 60{,}0) \le 40$. T es el total de minutos. Resulta $T \le 335{,}964\ldots$; la media máxima es 11,1988… min/día.

b) Plan E: $29{,}50 + 0{,}1815\cdot 30 + 0{,}2124\cdot\max(T - 300{,}0) \le 40$. Resulta $T \le 323{,}799\ldots$; la media máxima es 10,7933… min/día. Si cada día habla el mismo número entero de minutos, puede hacer como máximo 11 min/día con B y 10 min/día con E.

8.24 Respuesta abierta. Se debe comprobar la vigencia de las condiciones, usar el mismo consumo en las tres ofertas y distinguir cuotas, minutos incluidos, costes adicionales y posibles límites. La conclusión debe apoyarse en los costes calculados, no solo en el precio anunciado.