DOSSIER DE EJERCICIOS

1.º BACHILLERATO

Derivadas y aplicaciones

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

01 Tasa de variación media

02 Derivada en un punto

03 Reglas de derivación

04 Recta tangente

05 Crecimiento y extremos

06 Representación de funciones

07 Problemas de aplicación

08 Repaso integrado

134 actividades · 8 apartados

Índice · Ejercicios · Solucionario final

CONTENIDOS

Índice

Actividades organizadas por conceptos para practicar, repasar y comprobar las respuestas. Cada ejercicio tiene un código que lo identifica también en el solucionario.

01	Tasa de variación media	**3**
02	Derivada en un punto	**7**
03	Reglas de derivación	**11**
04	Recta tangente	**20**
05	Crecimiento y extremos	**25**
06	Representación de funciones	**30**
07	Problemas de aplicación	**34**
08	Repaso integrado	**36**
S	Solucionario	**39**

Cómo trabajar. Resuelve los ejercicios en el espacio disponible o en tu cuaderno. Comprueba los procedimientos y resultados al terminar cada bloque.

APARTADO 01

Tasa de variación media

11 actividades

001 ACTIVIDAD

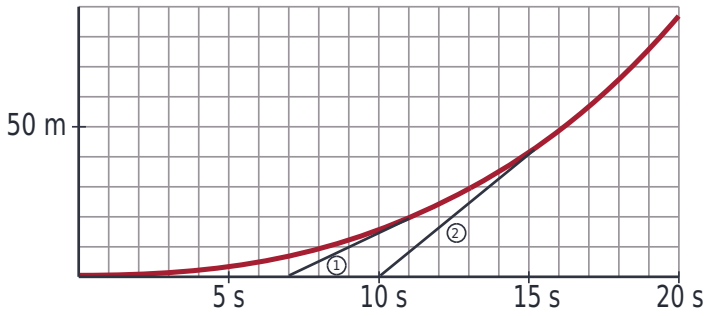
En la gráfica siguiente, la línea roja representa el movimiento de un autobús que arranca de la parada y va, poco a poco, ganando velocidad.

① y ② corresponden a pasajeros que llegan tarde y corren para tomar el autobús en marcha.

a) Al viajero ② lo acercan en bicicleta. Describe su movimiento y halla la velocidad a la que corre.

b) ¿Cuál es la velocidad aproximada del autobús en el momento que lo alcanza el pasajero ②?

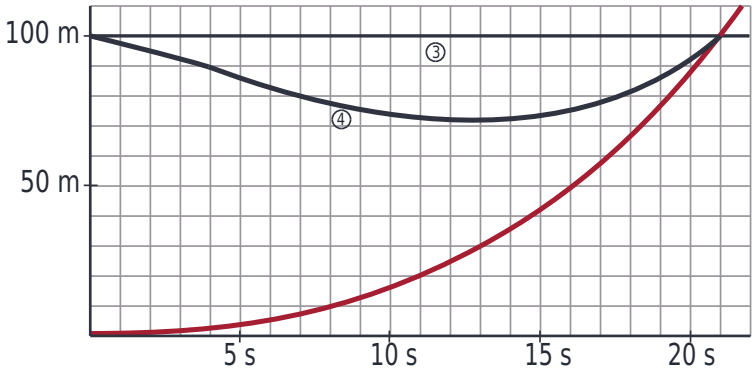
¿Entra este pasajero suavemente en el autobús?



002 ACTIVIDAD

Los viajeros ③ y ④, en el momento de la salida del autobús, estaban a 100 m de la parada. El ③ decide esperarlo y entrar en él cuando pase por allí.

El ④ tiene un extraño comportamiento. ¿Extraño?



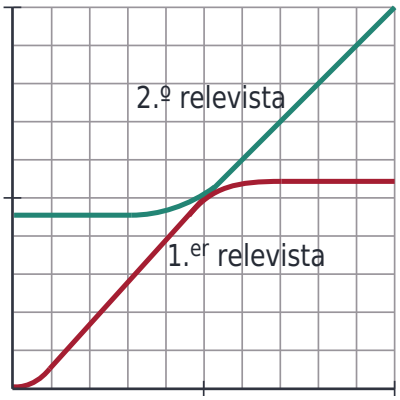
a) Describe el movimiento del pasajero ④.

b) Explica por qué el comportamiento del pasajero ④ es mucho más sensato que el del ③, quien tendrá muy difícil la entrada en el autobús.

003 ACTIVIDAD

La gráfica refleja el comportamiento de dos atletas del mismo equipo durante una carrera de relevos.

a) ¿Por qué en las carreras de relevos 4 × 100 m cada relevista empieza a correr antes de que llegue su compañero?
b) ¿Qué pasaría si esperara quieto la llegada del otro?
c) ¿Es razonable que las gráficas de sus movimientos sean tangentes? ¿Cómo son sus velocidades en el momento de la entrega del testigo?



004 ACTIVIDAD

Halla la T.V.M. de la función $y = x^2 - 8x + 12$ en los siguientes intervalos:

[1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [1, 6], [1, 7], [1, 8]

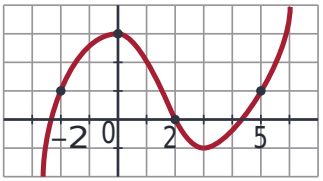
005 ACTIVIDAD

Halla la tasa de variación media de $y = x^2 - 8x + 12$ en el intervalo $[1, 1 + h]$. Comprueba, dando a h los valores adecuados, que obtienes los resultados de la actividad **004**.

006 ACTIVIDAD

Calcula la tasa de variación media de esta función en los intervalos:

a) [–2, 0] b) [0, 2] c) [2, 5]



007 ACTIVIDAD

Halla la tasa de variación media de estas funciones en el intervalo [1, 3] e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo:

a) $f(x) = 1/x$

b) $f(x) = (2 - x)^3$

c) $f(x) = x^2 - x + 1$

d) $f(x) = 2^x$

008 ACTIVIDAD

Compara la T.V.M. de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ en los intervalos $[2, 3]$ y $[3, 4]$, y di cuál de las dos crece más en cada intervalo.

009 ACTIVIDAD

Dada la función $f(x) = x^2 - 1$, halla la tasa de variación media en el intervalo $[2, 2 + h]$.

010 ACTIVIDAD

Comprueba que la T.V.M. de la función $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en el intervalo $[1, 1 + h]$ es igual a $-h + 3$. Calcula la T.V.M. de esa función en los intervalos $[1, 2]$, $[1; 1{,}5]$, utilizando la expresión anterior.

011 ACTIVIDAD

Calcula la T.V.M. de $f(x) = 3x - 2$ en los intervalos $[-1, 2]$, $[1, 3]$ y $[-3, 4]$. Justifica por qué obtienes el mismo resultado.

APARTADO 02

Derivada en un punto

13 actividades

012 ACTIVIDAD

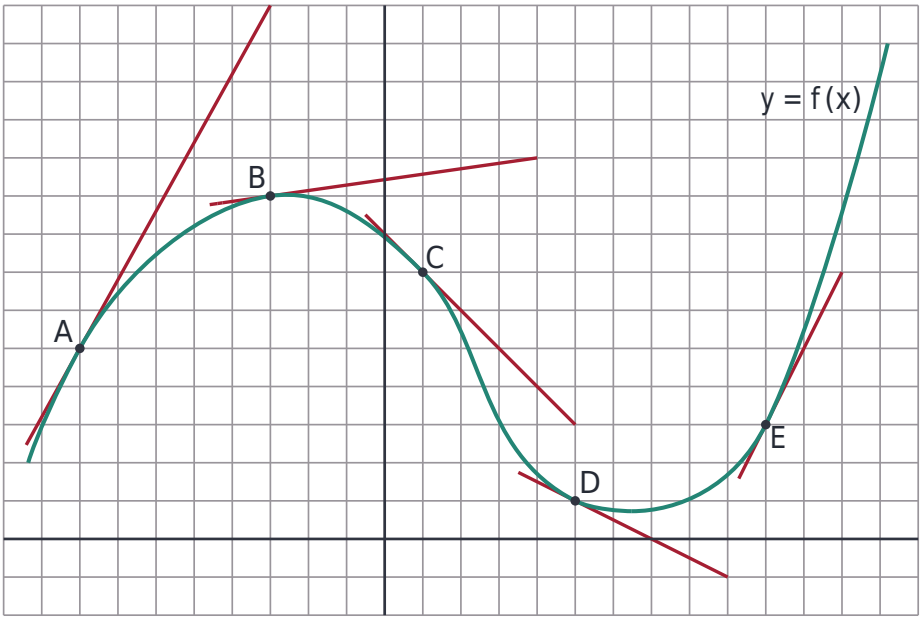
En la gráfica, en verde, de la función adjunta, se han señalado cinco puntos, A, B, C, D y E.

En cada uno de ellos está trazada la recta tangente, cuya pendiente se puede calcular.

Expresa los resultados utilizando la expresión f' (a) = ...

Por ejemplo, para el punto B:

$$f'(-3) = \ldots$$



013 ACTIVIDAD

Halla, aplicando la definición, el valor de la derivada de $y = 5x - x^2$ en los puntos de abscisas 0, 1, 2, 4 y 5.

Hazlo también, aproximadamente, con calculadora, tomando h = 0,0001.

014 ACTIVIDAD

Halla la derivada de $f(x) = 5x - x^2$. Utiliza la expresión obtenida para calcular la derivada en distintos puntos.

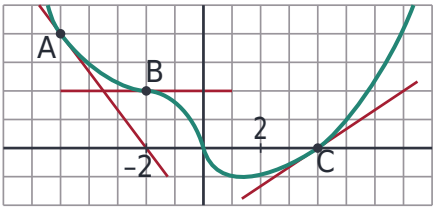
015 ACTIVIDAD

Halla la derivada de $y = x^2 - 5x + 6$ y, a partir de ella, halla $f'(-2)$, $f'(0)$ y $f'(3)$. ¿Qué significan los resultados?

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

016 ACTIVIDAD

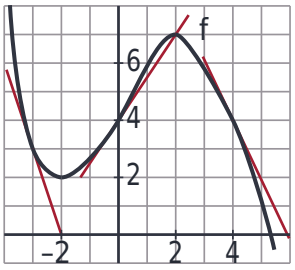
En esta función se han trazado las tangentes en los puntos A, B y C. Halla sus pendientes y di el valor de $f'(-5)$; $f'(0)$ y $f'(4)$.



017 ACTIVIDAD

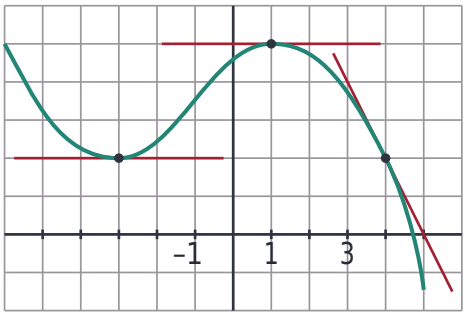
a) Halla f' en los puntos de abscisas –3, 0 y 4.

b)En = 1, ¿la derivada es positiva o negativa?



018 ACTIVIDAD

a) ¿En qué puntos de esta función la derivada vale 0?



b)¿Cuánto vale $f'(4)$?

c) Di para qué valores de x la derivada es negativa.

019 ACTIVIDAD

Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(-2)$ y $f'(3)$, siendo:

$$f(x) = \frac{2x - 3}{5}$$

020 ACTIVIDAD

Halla $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ para valores muy pequeños de h (por ejemplo, h = 0,01 o bien h = 0,001) y di después el valor de $f'(1)$ en cada caso:

a) $f(x) = 3x^2 - 1$

b) $f(x) = (2x + 1)^2$

c) $f(x) = x^2 + 5x$

d) $f(x) = \frac{2}{x}$

021 ACTIVIDAD

Halla la pendiente de la tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 1$ en el punto de abscisa $x = -2$, utilizando la definición de derivada.

022 ACTIVIDAD

Halla el valor del crecimiento de $f(x) = (x - 3)^2$ en los puntos $x = 1$ y $x = 3$, aplicando la definición de derivada.

023 ACTIVIDAD

Comprueba, utilizando la definición de derivada en cada caso:

a) $f(x) = 5x \rightarrow f'(x) = 5$

b) $f(x) = 7x^2 \rightarrow f'(x) = 14x$

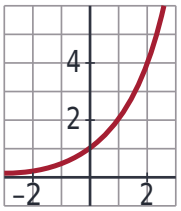
c) $f(x) = x^2 + x \rightarrow f'(x) = 2x + 1$

d) $f(x) = \frac{3}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{-3}{x^2}$

024 ACTIVIDAD

¿Existe algún punto en esta función en el que la derivada sea negativa?

Ordena de menor a mayor los valores de $f'(-2)$, $f'(2)$ y $f'(0)$.



Halla la función derivada de estas funciones y calcula su valor en los puntos que se indican:

APARTADO 03

Reglas de derivación

46 actividades

025 ACTIVIDAD

$f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

026 ACTIVIDAD

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

027 ACTIVIDAD

$f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{5x}$

028 ACTIVIDAD

$f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

029 ACTIVIDAD

$f(x) = \text{sen } x \cos x$

030 ACTIVIDAD

$f(x) = \text{tg } x$.

Expresa $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$ y deriva como cociente. Al simplificar, ten en cuenta que:

$$(\text{sen } x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

031 ACTIVIDAD

$f(x) = x\, e^x$

032 ACTIVIDAD

$f(x) = x \cdot 2^x$

033 ACTIVIDAD

$f(x) = (x^2 + 1) \cdot \log_2 x$

034 ACTIVIDAD

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

035 ACTIVIDAD

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 3}{x}$$

036 ACTIVIDAD

$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$

037 ACTIVIDAD

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x}{x^2 - 1}$$

038 ACTIVIDAD

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x}$$

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

039 ACTIVIDAD

$$f(x) = \text{sen}\,(x^2 - 5x + 7)$$

040 ACTIVIDAD

$f(x) = \sqrt[3]{(5x + 3)^2} = (5x + 3)^{2/3}$

041 ACTIVIDAD

$f(x) = \text{sen}\,(3x + 1) \cdot \cos\,(3x + 1)$

042 ACTIVIDAD

$f(x) = \dfrac{\log x^2}{x}$

043 ACTIVIDAD

$f(x) = \cos\,(3x - \pi)$

044 ACTIVIDAD

$f(x) = \sqrt{1 + 2x}$

045 ACTIVIDAD

$f(x) = x\, e^{2x + 1}$

046 ACTIVIDAD

$$f(x) = \frac{\text{sen}\,(x^2 + 1)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

047 ACTIVIDAD

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6;\ \ x = 1$$

048 ACTIVIDAD

$$f(x) = \frac{x}{3} + \sqrt{2}\,;\ \ x = -\frac{17}{3}$$

049 ACTIVIDAD

$$f(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2};\ \ x = 2$$

050 ACTIVIDAD

$$f(x) = \frac{1}{7x + 1};\ \ x = 0$$

051 ACTIVIDAD

$f(x) = \dfrac{2x}{x+3}$; $x = -1$

052 ACTIVIDAD

$f(x) = \ln(3x - 1)$; $x = 3$

053 ACTIVIDAD

$f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 2x$; $x = \pi$

054 ACTIVIDAD

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$; $x = 8$

055 ACTIVIDAD

$f(x) = x \cdot 2^{x+1}$; $x = -1$

056 ACTIVIDAD

$f(x) = (5x - 2)^3$; $x = \dfrac{1}{5}$

057 ACTIVIDAD

$f(x) = \dfrac{x+5}{x-5};\ x = 3$

058 ACTIVIDAD

$f(x) = x^2 + \log x;\ x = \dfrac{1}{2}$

059 ACTIVIDAD

$f(x) = e^{2x} \cdot \ln (x^2 + 1);\ x = 1$

Halla la función derivada de estas funciones:

060 ACTIVIDAD

a) $f(x) = \dfrac{x}{3} + \sqrt{2x}$

b) $f(x) = (x^2 - 3)^3$

061 ACTIVIDAD

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x^2}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

062 ACTIVIDAD

a) $f(x) = \sqrt[3]{(x+6)^2}$

b) $f(x) = (1 + e^x)^2$

063 ACTIVIDAD

a) $f(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{1 - x^2}}$

b) $f(x) = 7^{x+1}$

064 ACTIVIDAD

a) $f(x) = \dfrac{1}{3x} + \dfrac{x}{3}$

b) $f(x) = \ln 3x$

065 ACTIVIDAD

a) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1 - 5x}$

066 ACTIVIDAD

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

b) $f(x) = \ln \sqrt{x}$

067 ACTIVIDAD

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

b) $f(x) = x^3 \cdot e^{1-x}$

068 ACTIVIDAD

a) $f(x) = \ln \sqrt{e}$

b) $f(x) = \log \dfrac{x^2}{3 - x}$

069 ACTIVIDAD

a) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

b) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

070 ACTIVIDAD

Pon ejemplos de funciones f cuya derivada sea $f'(x) = 2x$. ¿Cuántas existen?

APARTADO 04

Recta tangente

21 actividades

071 ACTIVIDAD

Calcula la función derivada de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ y halla:

a) Las pendientes de las rectas tangentes en las abscisas –1, 1 y 3.

b) Las ecuaciones de dichas rectas tangentes.

c) Las abscisas de los posibles máximos y mínimos relativos.

d) ¿Es $f(x)$ creciente o decreciente en $x = 2$?

072 ACTIVIDAD

En la fórmula que sirve para hallar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

di el papel que desempeña cada una de las letras que intervienen. La x es la variable independiente, ¿de qué función?

073 ACTIVIDAD

Halla los puntos en los que la derivada es igual a 0 en las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 - 2x + 1$

b) $y = x^3 - 3x$

074 ACTIVIDAD

Obtén los puntos donde $f'(x) = 1$ en los siguientes casos:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+5}$

075 ACTIVIDAD

Halla los puntos en los que la derivada de cada una de las siguientes funciones es igual a 2:

a) $y = x^2 - 2x$

b) $y = \dfrac{x}{x+2}$

c) $y = 4\sqrt{x+3}$

d) $y = \ln(4x - 1)$

076 ACTIVIDAD

Halla los puntos en los que la derivada vale 0 en cada uno de los siguientes casos:

a) $y = 2x^2 - 8x + 5$

b) $y = -x^2 + 5x$

c) $y = x^4 - 4x^2$

d) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

077 ACTIVIDAD

Comprueba que las siguientes funciones no tienen ningún punto en el que la derivada sea igual a 0.

a) $y = \dfrac{7x - 3}{2}$

b) $y = 2x^3 + 6x$

c) $y = x^3 - x^2 + x$

d) $y = \dfrac{3x}{x-2}$

078 ACTIVIDAD

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 6$ en el punto de abscisa $x = 2$.

079 ACTIVIDAD

Escribe la ecuación de la recta tangente a $y = -x^2 + 2x + 5$ en el punto de abscisa $x = -1$.

080 ACTIVIDAD

Escribe la ecuación de la recta tangente a $y = x^2 + 4x + 1$ cuya pendiente sea igual a 2.

081 ACTIVIDAD

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x + 1}$ en $x = 0$.

082 ACTIVIDAD

Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.

083 ACTIVIDAD

Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 3x$ que sean paralelas a la recta $6x - y + 10 = 0$.

084 ACTIVIDAD

¿En qué puntos la recta tangente a $y = x^3 - 4x$ tiene la pendiente igual a 8?

085 ACTIVIDAD

Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \frac{2x}{x - 1}$ que son paralelas a la recta $2x + y = 0$.

086 ACTIVIDAD

¿En qué puntos de la función $y = 1/x$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante?

¿Existe algún punto de tangente horizontal en esa función?

087 ACTIVIDAD

Halla el valor de k para que la tangente a la gráfica de la función $y = x^2 + kx - 1$ en $x = 0$ sea paralela a la recta $y = 3x + 2$.

088 ACTIVIDAD

Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2, 1)$ y que pasa por el punto $B(5, -2)$.

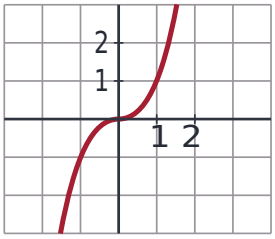
089 ACTIVIDAD

Halla el valor de x para el que las tangentes a las curvas $y = 3x^2 - 2x + 5$ e $y = x^2 + 6x$ sean paralelas y escribe las ecuaciones de esas tangentes.

090 ACTIVIDAD

Esta es la gráfica de la función $y = x^3$.

¿Por qué podemos asegurar que el eje de abscisas es la tangente de esa curva en $(0, 0)$?



091 ACTIVIDAD

La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $4x - 3y + 1 = 0$. ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? ¿Y el de $f(2)$?

APARTADO 05

Crecimiento y extremos

18 actividades

092 ACTIVIDAD

Representa estas funciones:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ b) $y = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$ c) $y = x^4 + 4x^3$

093 ACTIVIDAD

Obtén los puntos singulares de las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

c) $y = x^4 - 4x^3$

d) $y = x^3 - 12x$

094 ACTIVIDAD

Halla los puntos singulares de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

b) $y = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$

095 ACTIVIDAD

Comprueba que las siguientes funciones no tienen puntos singulares:

a) $y = x^3 + 3x$ b) $y = \frac{1}{x}$ c) $y = \sqrt{x}$ d) $y = \ln x$

096 ACTIVIDAD

Observa los resultados de las actividades **047 a 059**. Indica si cada función es creciente o decreciente en el punto indicado, atendiendo al signo de su derivada.

097 ACTIVIDAD

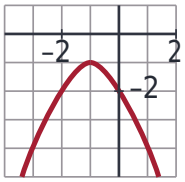
Obtén los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de cada una de las siguientes funciones:

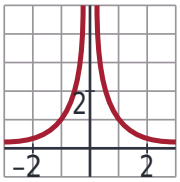
a) $y = \frac{3x + 1}{2}$ b) $y = 5 - 2x$ c) $y = x^2 - 3x + 2$

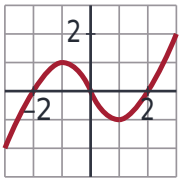
d) $y = 2x - x^2$ e) $y = x^3$ f) $y = x^3 - 3x$

098 ACTIVIDAD

Indica en cada una de estas funciones los valores de x en los que f' es positiva y en los que f' es negativa.







099 ACTIVIDAD

Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, obtén su función derivada y estudia su signo.

¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f? ¿Tiene f máximo o mínimo?

100 ACTIVIDAD

Halla los puntos de tangente horizontal de la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$.

101 ACTIVIDAD

Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones y di si tienen máximo o mínimo:

a) $y = -3x^2 + 6x$

b) $y = 2x^2 - 8x + 7$

c) $y = \dfrac{2x}{x - 3}$

d) $y = \dfrac{x - 1}{2x + 3}$

102 ACTIVIDAD

Halla el vértice de la parábola $y = x^2 + 6x + 11$ teniendo en cuenta que en ese punto la tangente es horizontal.

103 ACTIVIDAD

Halla a, b y c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que la gráfica de f tenga tangente horizontal en $x = -4$ y en $x = 0$ y que pase por $(1, 1)$.

104 ACTIVIDAD

Calcula a y b de modo que la función $f(x) = 2x^3 + bx^2 + ax - 5$ tenga un máximo en $x = 1$ y un mínimo en $x = 2$.

105 ACTIVIDAD

Dibuja una función que tenga derivada nula en $x = 1$ y en $x = -1$, derivada negativa en el intervalo $[-1, 1]$ y positiva para cualquier otro valor de x.

106 ACTIVIDAD

Demuestra, utilizando la derivada, que la abscisa del vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ es $x = \frac{-b}{2a}$.

107 ACTIVIDAD

Si $f'(2) = 0$, ¿cuál de estas afirmaciones es correcta?

a) La función f tiene máximo o mínimo en $x = 2$.

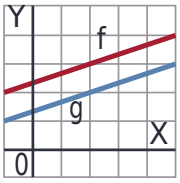
b) La recta tangente en $x = 2$ es horizontal.

c) La función pasa por el punto $(2, 0)$.

108 ACTIVIDAD

¿Qué relación existe entre f y g?

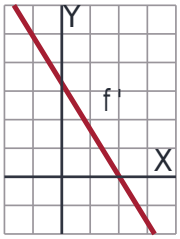
¿Y entre f' y g'?



109 ACTIVIDAD

a) ¿Tiene f algún punto de tangente horizontal?

b) Di para qué valores de x es f creciente y para cuáles es decreciente.



APARTADO 06

Representación de funciones

12 actividades

110 ACTIVIDAD

Representa las siguientes funciones racionales. Estudia dominio, asíntotas, cortes con los ejes y extremos.

a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$ b) $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$ c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

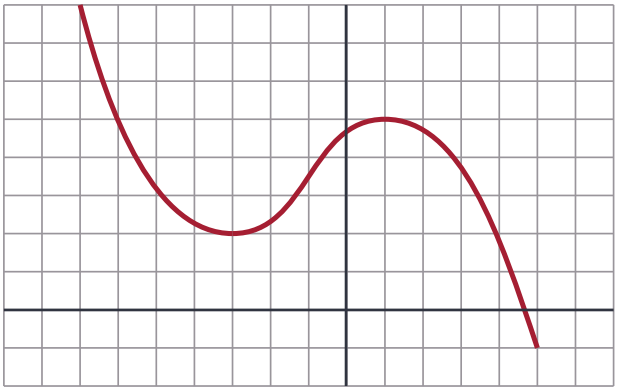
d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ e) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ f) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

111 ACTIVIDAD

Representa una función $y = f(x)$ de la que sabemos:

- Es continua.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- Tiene tangente horizontal en (–3, 2) y en (1, 5).

Indica si los puntos de tangente horizontal son máximos o mínimos.



112 ACTIVIDAD

De una función polinómica sabemos que:

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- Su derivada es igual a 0 en (–2, 2) y en (2, –1).
- Corta a los ejes en (0, 0) y en (4, 0).

Represéntala gráficamente.

113 ACTIVIDAD

Representa la función continua $y = f(x)$ de la que sabemos:

- En los puntos (–1, –2) y (1, 2) la tangente es horizontal.
- Sus ramas infinitas son así:

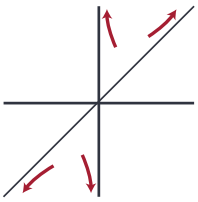


114 ACTIVIDAD

Comprueba que la función $y = (x - 1)^3$ pasa por los puntos (0, –1), (1, 0) y (2, 1). Su derivada se anula en el punto (1, 0). ¿Puede ser un máximo o un mínimo ese punto?

115 ACTIVIDAD

Comprueba que la función $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ tiene dos puntos de tangente horizontal, (–1, –2) y (1, 2); sus asíntotas son $x = 0$ e $y = x$ y la posición de la curva respecto de las asíntotas es la que se indica en la ilustración de la derecha. Represéntala.



116 ACTIVIDAD

Comprueba que la función $y = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$:

- Tiene derivada nula en (0, 0).
- La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.
- Posición de la curva respecto a la asíntota:

  Si $x \to -\infty$, $y < 2$. Si $x \to +\infty$, $y < 2$.

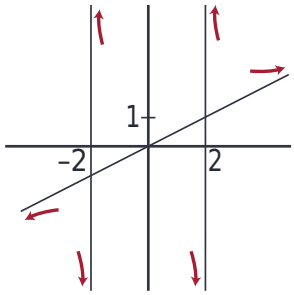
Represéntala.

117 ACTIVIDAD

Completa la gráfica de una función de la que sabemos que tiene tres puntos singulares:

$\left(-3, -\frac{5}{2}\right)$, (0, 0) y $\left(3, \frac{5}{2}\right)$

y que sus ramas infinitas son las representadas.



118 ACTIVIDAD

En cada una de las siguientes funciones, halla los puntos singulares y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos. Represéntalas:

a) $y = x^3 - 3x^2$

b) $y = x^3 - 3x + 2$

c) $y = x^4 + 4x^3$

d) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$

e) $y = 12x - x^3$

f) $y = -x^4 + x^2$

g) $y = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$

h) $y = x^4 - 8x^2 + 2$

119 ACTIVIDAD

Representa las siguientes funciones hallando los puntos singulares y estudiando sus ramas infinitas:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x$

b) $y = -x^4 + 2x^2$

c) $y = \frac{x}{x^2 + 5x + 4}$

d) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

e) $y = \frac{x}{(x + 5)^2}$

f) $y = \frac{2x^2}{x + 2}$

120 ACTIVIDAD

Comprueba que estas funciones no tienen puntos de tangente horizontal. Represéntalas estudiando sus ramas infinitas y los puntos de corte con los ejes:

a) $y = \frac{x - 3}{x + 2}$

b) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

c) $y = \frac{x^3}{3} + 4x$

d) $y = \frac{1}{(x - 2)^2}$

121 ACTIVIDAD

Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x}{x^2 - 16}$

b) $y = \frac{x}{1 - x^2}$

c) $y = \frac{x + 2}{x^2 - 6x + 5}$

d) $y = \frac{(x - 1)^2}{x + 2}$

e) $y = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

f) $y = \frac{x^2}{1 - x^2}$

g) $y = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$

h) $y = \frac{x^2}{(x - 2)^2}$

i) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

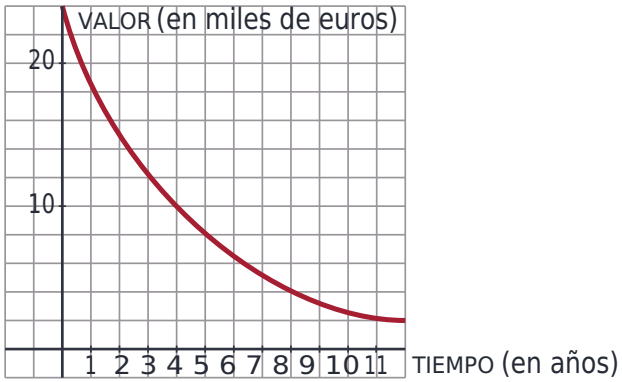
j) $y = \frac{x^2 - 5}{2x - 4}$

APARTADO 07

Problemas de aplicación

4 actividades

122 ACTIVIDAD



Los coches, una vez que se compran, empiezan a perder valor: un 20% cada año, aproximadamente. Esta gráfica muestra el valor de un coche desde que se compró hasta 12 años más tarde.

Calcula lo que se deprecia el coche en los dos primeros años, entre los años 4 y 6, y entre los años 8 y 10. ¿Es constante la depreciación?

123 ACTIVIDAD

La altura que alcanza una piedra lanzada hacia arriba viene dada por la función $f(t) = 20t - 5t^2$ (t en segundos, f en metros).

a) Calcula su velocidad media entre $t = 0$ y $t = 5$.

b)¿En qué instante la velocidad es igual a 0?

c) ¿En algún momento su velocidad de la piedra es 15 m/s? En caso afirmativo, ¿a qué altura?

124 ACTIVIDAD

El coste total (en dólares) de fabricación de q unidades de cierto artículo es $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$. El coste medio por unidad es: $M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$.

a) ¿Cuántas unidades se deben fabricar para que el coste medio por unidad sea mínimo?

b) Calcula $C(q)$ y $M(q)$ para el valor de q que has hallado en el apartado a).

125 ACTIVIDAD

$$60x$$

desde que comenzó a funcionar ($f(x)$ en miles de euros, x en años).

a) Represéntala gráficamente.

b) ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

c) ¿Perderá dinero la empresa en algún momento?

APARTADO 08

Repaso integrado

9 actividades

126 ACTIVIDAD

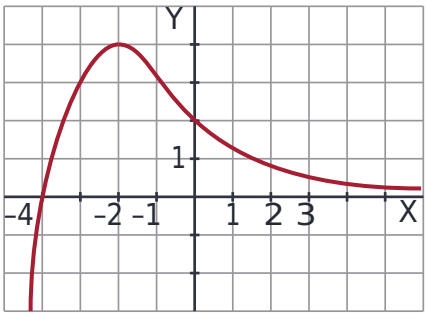
Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y responde.

a) ¿Cuál es la T.V.M. en los intervalos [0, 3] y [–4, –2]?

b)¿Tiene algún punto de tangente horizontal?

c) ¿Para qué valores de x es $f'(x) > 0$?

d)Sabemos que la tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante. ¿Cuánto vale $f'(0)$?



127 ACTIVIDAD

Dada $f(x) = x^2 - 3x$, prueba que $f'(-2) = -7$ aplicando la definición de derivada.

128 ACTIVIDAD

Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x} + \frac{2}{x}$

b) $y = \frac{x}{3} \cdot e^{-x}$

c) $y = \left(\frac{3x - 5}{2}\right)^3$

d) $y = \frac{x^2}{x - 2}$

129 ACTIVIDAD

Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y = \ln x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$.

130 ACTIVIDAD

Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de

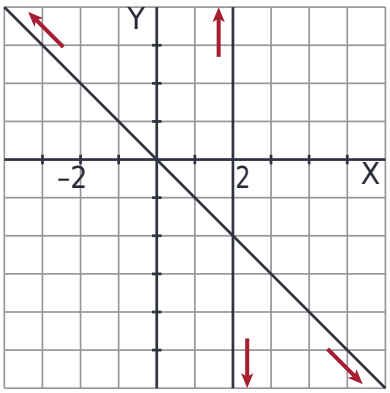
$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$$

131 ACTIVIDAD

Determina los puntos singulares de:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 4}{2 - x}$$

de la cual conocemos sus asíntotas y la posición de la curva con respecto a ellas. Represéntala.



132 ACTIVIDAD

Representa la función $y = x^3 - 12x + 16$.

133 ACTIVIDAD

Estudia y representa $y = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$.

134 ACTIVIDAD

La función $f(x) = x^2 + bx + c$ tiene un mínimo en $x = 2$ y pasa por $(2, 2)$. Calcula b y c.

COMPRUEBA TUS RESPUESTAS

Solucionario

Busca el código de cada actividad. En las preguntas abiertas se ofrece una respuesta orientativa.

01 · Tasa de variación media

001 SOLUCIÓN

a) El pasajero 2 llega a la parada 10 s después de que saliera el autobús, y lo alcanza 5 s después, 40 m más allá.

Corrió, por tanto, a $\frac{40}{5}$ = 8 m/s. Es decir: 8 · 3,6 = 28,8 km/h

b) En el instante 14 s está a 35 m de la parada. En el instante 16 s está a 50 m de la parada.

Velocidad media = $\frac{15\text{ m}}{2\text{ s}}$ = 7,5 m/s = 27 km/h

Las velocidades del pasajero 2 y del autobús son, aproximadamente, iguales en el momento en el que el pasajero accede al autobús; por tanto, accederá suavemente.

---

002 SOLUCIÓN

a) Intenta alcanzar aproximadamente la velocidad que lleva el autobús para acceder a él suavemente.

b) El pasajero 4 accede suavemente al autobús (con la misma velocidad, aproximadamente); sin embargo, el 3 no.

---

003 SOLUCIÓN

a) Para recibir el testigo en movimiento y evitar una pérdida de velocidad en el intercambio.

b) Tendría que acelerar desde el reposo, lo que provocaría una pérdida de tiempo.

c) Sí. En el momento del intercambio, ambos atletas tienen la misma posición y la misma velocidad; las gráficas son tangentes en ese punto.

---

004 SOLUCIÓN

$$\text{T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{0 - 5}{1} = -5$$

$$\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-3 - 5}{2} = -4$$

$$\text{T.V.M. } [1, 4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{-4 - 5}{3} = -3$$

$$\text{T.V.M. } [1, 5] = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

$$\text{T.V.M. } [1, 6] = \frac{f(6) - f(1)}{6 - 1} = \frac{0 - 5}{5} = -1$$

$$\text{T.V.M. } [1, 7] = \frac{f(7) - f(1)}{7 - 1} = \frac{5 - 5}{6} = 0$$

$$\text{T.V.M. } [1, 8] = \frac{f(8) - f(1)}{8 - 1} = \frac{12 - 5}{7} = 1$$

005 SOLUCIÓN

$$\text{T.V.M. } [1, 1 + h] = \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{(1 + h)^2 - 8(1 + h) + 12 - 5}{h} =$$

$$= \frac{h^2 - 6h}{h} = \frac{h(h - 6)}{h} = h - 6$$

Dando a h los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

006 SOLUCIÓN

$$\text{a) T.V.M. } [-2, 0] = \frac{f(0) - f(-2)}{0 + 2} = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

$$\text{b) T.V.M. } [0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{0 - 3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{c) T.V.M. } [2, 5] = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{1 - 0}{3} = \frac{1}{3}$$

007 SOLUCIÓN

$$\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

a) $\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{1/3 - 1}{2} = -\frac{1}{3} \rightarrow$ Decrece

b) $\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{-1 - 1}{2} = -1 \rightarrow$ Decrece

c) $\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{7 - 1}{2} = 3 \rightarrow$ Crece

d) $\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{8 - 2}{2} = 3 \rightarrow$ Crece

008 SOLUCIÓN

Para $f(x)$: T.V.M. $[2, 3] = 19$

T.V.M. $[3, 4] = 37$

Para $g(x)$: T.V.M. $[2, 3] = 18$

T.V.M. $[3, 4] = 54$

En $[2, 3]$ crece más $f(x)$.

En $[3, 4]$ crece más $g(x)$.

009 SOLUCIÓN

$$\text{T.V.M. } [2, 2 + h] = \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{4 + h^2 + 4h - 1 - 3}{h} = h + 4$$

010 SOLUCIÓN

$$\text{T.V.M. } [1, 1 + h] = \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{-(1 + h^2 + 2h) + 5 + 5h - 3 - 1}{h} = 3 - h$$

T.V.M. $[1, 2] = 2$

T.V.M. $[1; 1{,}5] = 2{,}5$

011 SOLUCIÓN

$$\text{T.V.M. } [-1, 2] = \frac{4 + 5}{3} = 3$$

$$\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{7 - 1}{2} = 3$$

$$\text{T.V.M. } [-3, 4] = \frac{10 + 11}{7} = 3$$

T.V.M. = 3 para todos, porque la función es una recta de pendiente 3.

02 · Derivada en un punto

012 SOLUCIÓN

$$f'(-8) = \frac{9}{5};\ f'(-3) = \frac{1}{7};\ f'(1) = -1;\ f'(5) = -\frac{1}{2};\ f'(10) = 2$$

013 SOLUCIÓN

Por la definición $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$:

$f'(0) = 5;\ f'(1) = 3;\ f'(2) = 1;\ f'(4) = -3;\ f'(5) = -5$

Con calculadora (numéricamente, de forma aproximada):

$$f'(0) \approx \frac{f(0{,}0001) - f(0)}{0{,}0001} = 4{,}9999$$

$$f'(1) \approx \frac{f(1{,}0001) - f(1)}{0{,}0001} = 2{,}9999$$

$$f'(2) \approx \frac{f(2{,}0001) - f(2)}{0{,}0001} = 0{,}9999$$

$$f'(4) \approx \frac{f(4{,}0001) - f(4)}{0{,}0001} = -3{,}0001$$

$$f'(5) \approx \frac{f(5{,}0001) - f(5)}{0{,}0001} = -5{,}0001$$

014 SOLUCIÓN

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[5(x+h) - (x+h)^2] - [5x - x^2]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5h - h^2 - 2xh}{h} = \lim_{h \to 0} (5 - h - 2x) = 5 - 2x$$

$f'(3) = -1;\ f'(0) = 5;\ f'(1) = 3;\ f'(2) = 1;\ f'(4) = -3;\ f'(5) = -5$

015 SOLUCIÓN

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{[(x+h)^2-5(x+h)+6]-[x^2-5x+6]}{h}=$$

$$=\frac{x^2+2xh+h^2-5x-5h+6-x^2+5x-6}{h}=$$

$$=\frac{2xh+h^2-5h}{h}=2x+h-5$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h-5)=2x-5$$

$f'(x)=2x-5$

$f'(-2)=2\cdot(-2)-5=-9$

$f'(0)=2\cdot 0-5=-5$

$f'(3)=2\cdot 3-5=1$

Significa que la tangente pasa de tener pendiente negativa a tenerla positiva.

016 SOLUCIÓN

$$m_A=\frac{0-4}{-2+5}=-\frac{4}{3}\rightarrow f'(-5)=-\frac{4}{3}$$

$$m_B=0\rightarrow f'(0)=0$$

$$m_C=\frac{2-0}{7-4}=\frac{2}{3}\rightarrow f'(4)=\frac{2}{3}$$

017 SOLUCIÓN

a) $f'(-3)=-3,\quad f'(0)=\frac{3}{2},\quad f'(4)=-2$

b) Positiva.

018 SOLUCIÓN

a) En (1, 5) y en (–3, 2).

b) $m=\frac{2-0}{4-5}=-2\rightarrow f'(4)=-2$

c) $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

019 SOLUCIÓN

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{\frac{2(-2+h)-3}{5} + \frac{7}{5}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-4+2h-3+7}{5h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{\frac{2(3+h)-3}{5} - \frac{3}{5}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6+2h-3-3}{5h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

020 SOLUCIÓN

a) $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{3(h+1)^2 - 1 - 2}{h} = \frac{3h^2 + 6h}{h} = 3h + 6$

Si $h = 0{,}01 \rightarrow \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 6{,}03$

Si $h = 0{,}001 \rightarrow \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 6{,}003$

$f'(1) = 6$

b) $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(2(h+1)+1)^2 - 9}{h} = \frac{4h^2 + 12h}{h} = 4h + 12$

Si $h = 0{,}001 \rightarrow \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 12{,}004 \rightarrow \mathbf{f'(1) = 12}$

c) $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 + 5(1+h) - 6}{h} = \frac{h^2 + 7h}{h} = h + 7$

Si $h = 0{,}001 \rightarrow \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 7{,}001 \rightarrow \mathbf{f'(1) = 7}$

d) $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(2/h + 1) - 2}{h} = \frac{-2h}{h(h+1)} = \frac{-2}{h+1}$

Si $h = 0{,}001 \rightarrow \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -1{,}998 \rightarrow \mathbf{f'(1) = -2}$

021 SOLUCIÓN

$$m = f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{(-2+h)^2 - 5(-2+h) + 1 - 15}{h} = \frac{h^2 - 9h}{h} = h - 9$$

$$\lim_{h \to 0} h - 9 = -9$$

Por tanto, la pendiente es –9.

022 SOLUCIÓN

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h-3)^2 - 4}{h} = \lim_{h \to 0} (h - 4) = -4$$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h-3)^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0$$

023 SOLUCIÓN

$$a)\ f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(x+h) - 5x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5x + 5h - 5x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5h}{h} = 5$$

$$b)\ f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{7(x+h)^2 - 7x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{7(x^2 + h^2 + 2xh) - 7x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{7h^2 + 14xh}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(7h + 14x)}{h} = 14x$$

$$c)\ f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h) - (x^2 + x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh + x + h - x^2 - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2xh + h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h + 2x + 1)}{h} = 2x + 1$$

$$d)\ f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3}{x+h} - \frac{3}{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3x - 3(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3x - 3x - 3h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-3h}{x(x+h)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3h}{hx(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{x(x+h)} = \frac{-3}{x^2}$$

024 SOLUCIÓN

No, pues es creciente.

$f'(-2) < f'(0) < f'(2)$

03 · Reglas de derivación

025 SOLUCIÓN

$$f'(x) = 6x - 6$$

026 SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

027 SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{5}{3\sqrt[3]{5x}}$$

028 SOLUCIÓN

$$f(x) = x^{-3/2} \rightarrow f'(x) = -\frac{3}{2}\, x^{-5/2} = \frac{-3}{2\sqrt{x^5}} = \frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$$

029 SOLUCIÓN

$$f'(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

030 SOLUCIÓN

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$D\operatorname{tg} x = \frac{D(\operatorname{sen} x)\cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot D(\cos x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

031 SOLUCIÓN

$$f'(x) = e^x + x\, e^x = e^x(1 + x)$$

032 SOLUCIÓN

$$f'(x) = 2^x + x \cdot 2^x \cdot \ln 2 = 2^x(1 + x \ln 2)$$

033 SOLUCIÓN

$$f'(x) = 2x \log_2 x + (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2} = 2x \log_2 x + \frac{(x^2 + 1)}{x \ln 2}$$

034 SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)\,2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

035 SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x - 5)\,x - (x^3 + 3x^2 - 5x + 3)}{x^2} = \frac{2x^3 + 3x^2 - 3}{x^2} = 2x + 3 - \frac{3}{x^2}$$

036 SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{[1/(\ln 10)] - \log x}{x^2} = \frac{1 - \ln 10 \log x}{x^2 \ln 10}$$

037 SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1(x^2 - 1) - x(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} - \frac{-1 - x^2}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$= \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} + \frac{1 + x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

038 SOLUCIÓN

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{1/2} - x^{-1/2}$$

$$D\,f(x) = \frac{1}{2}\,x^{(1/2)\,-\,1} - \left(-\frac{1}{2}\right) x^{(-1/2)\,-\,1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

039 SOLUCIÓN

$$f'(x) = (2x - 5)\cos(x^2 - 5x + 7)$$

040 SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{2}{3}(5x + 3)^{-1/3} \cdot 5 = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x + 3}}$$

041 SOLUCIÓN

$$f'(x) = 3[\cos^2(3x + 1) - \text{sen}^2(3x + 1)]$$

042 SOLUCIÓN

$$f(x) = \frac{2 \log x}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{2(1 - \ln 10 \log x)}{x^2 \ln 10}$$

043 SOLUCIÓN

$$f'(x) = -3 \text{ sen}(3x - \pi)$$

044 SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2x}}$$

045 SOLUCIÓN

$$f'(x) = e^{2x + 1} + x\, e^{2x + 1} \cdot 2 = e^{2x + 1}(1 + 2x)$$

046 SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{1 - x^2}\cos(x^2 + 1) + [x \text{ sen}(x^2 + 1)]/\sqrt{1 - x^2}}{1 - x^2} =$$

$$= \frac{2x(1 - x^2)\cos(x^2 + 1) + x \text{ sen}(x^2 + 1)}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$$

047 SOLUCIÓN

$$f'(x) = 6x^2 + 6x; \quad f'(1) = 12$$

048 SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{1}{3}; \quad f'\left(-\frac{17}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

049 SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}; \quad f'(2) = 6 + 6 - \frac{1}{2} = \frac{23}{2}$$

050 SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{-7}{(7x+1)^2}; \quad f'(0) = -7$$

051 SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2} \rightarrow f'(-1) = \frac{3}{2}$$

052 SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{3}{3x-1} \rightarrow f'(3) = \frac{3}{8}$$

053 SOLUCIÓN

$$f'(x) = 2\cos x - 2\operatorname{sen} 2x \rightarrow f'(\pi) = 2$$

054 SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{(x-4)^3}} \rightarrow f'(8) = \frac{-1}{16}$$

055 SOLUCIÓN

$$f'(x) = 2^{x+1} \ln(2)\, x + 2^{x+1} \rightarrow f'(-1) = -\ln 2 + 1$$

056 SOLUCIÓN

$$f'(x) = 15(5x - 2)^2 \rightarrow f'\left(\frac{1}{5}\right) = 15$$

057 SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{-10}{(x-5)^2} \rightarrow f'(3) = \frac{-5}{2}$$

058 SOLUCIÓN

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x \ln 10} \rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{2}{\ln 10}$$

059 SOLUCIÓN

$$f'(x) = 2e^{2x}\left[\ln(x^2+1) + \frac{x}{x^2+1}\right] \rightarrow f'(1) = 2e^2\left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right)$$

060 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2x}}$

b) $f'(x) = 6x(x^2 - 3)^2$

061 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = 1$ (si $x \neq 0$)

b) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

062 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+6}}$

b) $f'(x) = 2e^x(1 + e^x)$

063 SOLUCIÓN

a) $f(x) = -3\,(1 - x^2)^{-1/2}$; $f'(x) = \frac{3}{2}(1 - x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) = \frac{-3x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$

b) $f'(x) = 7^{x+1} \cdot \ln 7$

064 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = \frac{-1}{3x^2} + \frac{1}{3}$

b) $f'(x) = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$

065 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = \frac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$

b) $f'(x) = \frac{e^{2x}\,(7 - 10x)}{(1 - 5x)^2}$

066 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = \frac{3x^2(x - 1)^2 - x^3 \cdot 2\,(x - 1)}{(x - 1)^4} = \frac{3x^2(x - 1) - 2x^3}{(x - 1)^3} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x - 1)^3} =$

$= \frac{x^3 - 3x^2}{(x - 1)^3}$

b) $f(x) = \ln x^{1/2} = \frac{1}{2} \ln x \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2x}$

067 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = \frac{3x^2\,(x^2 - 4) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2\,(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$

b) $f'(x) = 3x^2 \cdot e^{1 - x} - x^3 \cdot e^{1 - x} = e^{1 - x}\,(3x^2 - x^3) = x^2 \cdot e^{1 - x}\,(3 - x)$

068 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = 0$

b) $f(x) = \log x^2 - \log (3 - x) = 2 \log x - \log (3 - x)$

$f'(x) = \frac{2}{x \ln 10} + \frac{1}{(3 - x) \ln 10}$

069 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = \dfrac{(3x^2 + 2)(x^2 + 1) - 2x(x^3 + 2x)}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

070 SOLUCIÓN

Existen infinitas.

$f(x) = x^2 + k$, donde k es cualquier número.

04 · Recta tangente

071 SOLUCIÓN

$f'(x) = 3x^2 - 8x$

a) $f'(-1) = 11$, $f'(1) = -5$, $f'(3) = 3$

b) $y = 11(x + 1) - 4$; $y = -5(x - 1) - 2$; $y = 3(x - 3) - 8$

c) $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 8x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 8/3$

d) $f'(2) = -4 < 0 \rightarrow$ decreciente

---

072 SOLUCIÓN

f es el nombre de la función; a es la abscisa, el punto de la curva en el cual se traza la tangente; $f(a)$ es la ordenada de ese punto, y $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente, pues f' es el nombre de la función derivada.

Las variables x e y son la abscisa y la ordenada de un punto genérico (un punto cualquiera) de la recta tangente.

x es, pues, la variable independiente de la función lineal descrita por la recta tangente a f en el punto de abscisa a.

---

073 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$. Punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

b) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 1$. Puntos $(-1, 2)$ y $(1, -2)$

---

074 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = 2x - 3$; $2x - 3 = 1 \rightarrow x = 2$; $f(2) = 0 \rightarrow P(2, 0)$

b) $f'(x) = \dfrac{x + 5 - x - 1}{(x + 5)^2} = \dfrac{4}{(x + 5)^2}$

$$\frac{4}{(x + 5)^2} = 1 \rightarrow (x + 5)^2 = 4 \begin{cases} x = -3;\ f(-3) = -1 \rightarrow P(-3, -1) \\ x = -7;\ f(-7) = 3 \rightarrow Q(-7, 3) \end{cases}$$

---

075 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = 2x - 2 \rightarrow 2x - 2 = 2 \rightarrow x = 2$; $f(2) = 0 \rightarrow P(2, 0)$

b) $f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2} \rightarrow \frac{2}{(x+2)^2} = 2 \rightarrow$

$\rightarrow (x+2)^2 = 1 \begin{cases} x = -1;\ f(-1) = -1 \rightarrow P(-1, -1) \\ x = -3;\ f(-3) = 3 \rightarrow Q(-3, 3) \end{cases}$

c) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+3}} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{x+3}} = 2 \rightarrow \sqrt{x+3} = 1 \rightarrow x = -2;$

$f(-2) = 4 \rightarrow P(-2, 4)$

d) $f'(x) = \frac{4}{4x-1} \rightarrow \frac{4}{4x-1} = 2 \rightarrow x = \frac{3}{4};\ f\left(\frac{3}{4}\right) = \ln 2 \rightarrow P\left(\frac{3}{4}, \ln 2\right)$

---

076 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = 4x - 8 \rightarrow 4x - 8 = 0 \rightarrow x = 2;\ f(2) = -3 \rightarrow P(2, -3)$

b) $f'(x) = -2x + 5 \rightarrow -2x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2};\ f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} \rightarrow P\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$

c) $f'(x) = 4x^3 - 8x \rightarrow 4x^3 - 8x = 0 \begin{cases} x = 0;\ f(0) = 0 \rightarrow P(0, 0) \\ x = \sqrt{2};\ f(\sqrt{2}) = -4 \rightarrow Q(\sqrt{2}, -4) \\ x = -\sqrt{2};\ f(-\sqrt{2}) = -4 \rightarrow R(-\sqrt{2}, -4) \end{cases}$

d) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \rightarrow \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0;\ f(0) = 1 \rightarrow P(0, 1)$

---

077 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = \frac{7}{2} \rightarrow \frac{7}{2} \neq 0$ para cualquier x.

b) $f'(x) = 6x^2 + 6 \rightarrow 6x^2 + 6 = 0$ no tiene solución.

c) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \rightarrow 3x^2 - 2x + 1 = 0;\ x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{6}$ no tiene solución.

d) $f'(x) = \frac{-6}{(x-2)^2} \rightarrow \frac{-6}{(x-2)^2} = 0$ no tiene solución.

---

078 SOLUCIÓN

$f'(x) = 2x - 5; \quad m = f'(2) = -1,\ f(2) = 0$

La recta es $y = -(x - 2) = 2 - x$

---

079 SOLUCIÓN

$f'(x) = -2x + 2$; $m = f'(-1) = 4$, $f(-1) = 2$

La recta es $y = 4(x + 1) + 2 = 4x + 6$

080 SOLUCIÓN

$f'(x) = 2x + 4 = 2 \rightarrow x = -1$; $f(-1) = -2$

La recta es $y = 2(x + 1) - 2 = 2x$

081 SOLUCIÓN

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$; $m = f'(0) = \dfrac{1}{2}$, $f(0) = 1$

La recta es $y = \dfrac{1}{2}x + 1$

082 SOLUCIÓN

Puntos de corte con el eje de abscisas: $4 - x^2 = 0 \rightarrow x = 2$, $x = -2$

Puntos (2, 0) y (–2, 0)

$f'(x) = -2x$, $f'(2) = -4$, $f'(-2) = 4$

Las rectas son:

- En $x = -2$, $y = 4(x + 2) = 4x + 8$
- En $x = 2$, $y = -4(x - 2) = -4x + 8$

083 SOLUCIÓN

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 6 \rightarrow x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$. Puntos: $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$

Rectas: $y = 6(x + \sqrt{3})$, $y = 6(x - \sqrt{3})$

084 SOLUCIÓN

$f'(x) = 3x^2 - 4 = 8 \rightarrow x = -2$, $x = 2$

Puntos (–2, 0) y (2, 0).

085 SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = -2 \rightarrow (x-1)^2 = 1 \rightarrow x = 0,\ x = 2$$

En $(0, 0)$, $y = -2x$

En $(2, 4)$, $y = -2(x-2) + 4 = -2x + 8$

086 SOLUCIÓN

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -1 \rightarrow x = -1,\ x = 1$. Puntos $(-1, -1)$ y $(1, 1)$.

No existe ningún punto de tangente horizontal, pues $f'(x) = \frac{1}{x^2} = 0$ no tiene solución.

087 SOLUCIÓN

$$f'(x) = 2x + k \rightarrow f'(0) = k \rightarrow k = 3$$

088 SOLUCIÓN

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 1 \rightarrow 4a + 2b + c = 1 \\ f'(2) = 2 \rightarrow 4a + b = 2 \\ f(5) = -2 \rightarrow 25a + 5b + c = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -7 \end{array}$$

La función es $f(x) = -x^2 + 6x - 7$.

089 SOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \rightarrow f'(x) = 6x - 2 \\ g(x) = x^2 + 6x \rightarrow g'(x) = 2x + 6 \end{array}\right\} 6x - 2 = 2x + 6 \rightarrow x = 2$$

Para $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ la tangente en $x = 2$ es:

$$y = 10(x-2) + 13 \rightarrow y = 10x - 7$$

Para $g(x) = x^2 + 6x$ la tangente en $x = 2$ es:

$$y = 10(x-2) + 16 \rightarrow y = 10x - 4$$

090 SOLUCIÓN

Ecuación de la tangente en (0, 0):

$f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow y = 0 + 0(x - 9) \rightarrow y = 0$ es el eje de abscisas.

091 SOLUCIÓN

La recta tangente es $y = \frac{4x + 1}{3}$; su pendiente es $\frac{4}{3} = f'(2)$

$f(2) = 3$

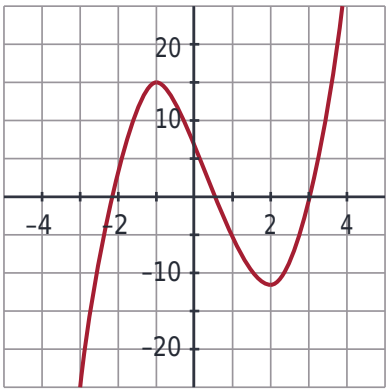
05 · Crecimiento y extremos

092 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$

Máximo en (–1, 15).

Mínimo en (2, –12).



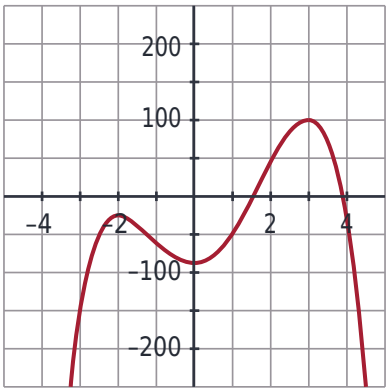
b) $f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 72x = -12x(x^2 - x - 6) = 0$

$x = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$

Máximo en (–2, –26) y en (3, 99).

Mínimo en (0, –90).



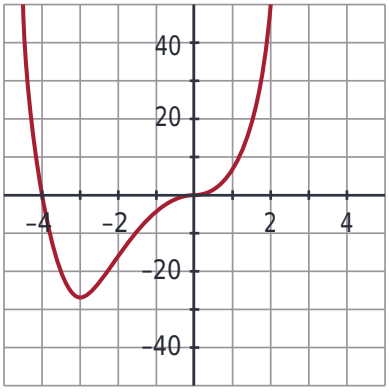
c) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

Mínimo en (–3, –27).

Punto de inflexión en (0, 0).

$f(x) = 0 \rightarrow x^3(x + 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$

Puntos de corte con los ejes: (0, 0) y (–4, 0)



093 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = 6x - 2 \rightarrow 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3};\ f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{14}{3} \rightarrow P\left(\frac{1}{3}, \frac{14}{3}\right)$

b) $f'(x) = 6x^2 - 6x \rightarrow 6x^2 - 6x = 0 \begin{cases} x = 0;\ f(0) = 1 \rightarrow P(0, 1) \\ x = 1;\ f(1) = 0 \rightarrow Q(1, 0) \end{cases}$

c) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \rightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0 \begin{cases} x = 0;\ f(0) = 0 \rightarrow P(0, 0) \\ x = 3;\ f(3) = -27 \rightarrow Q(3, -27) \end{cases}$

d) $f'(x) = 3x^2 - 12 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \begin{cases} x = 2;\ f(2) = -16 \rightarrow P(2, -16) \\ x = -2;\ f(-2) = 16 \rightarrow Q(-2, 16) \end{cases}$

094 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$\frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x = 1;\ f(1) = 2 \rightarrow P(1, 2) \\ x = -1;\ f(-1) = -2 \rightarrow Q(-1, -2) \end{cases}$

b) $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0;\ f(0) = 0 \rightarrow P(0, 0)$

095 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = 3x^2 + 3 \rightarrow 3x^2 + 3 = 0$ no tiene solución.

b) $f'(x) = \frac{-1}{x^2} \rightarrow \frac{-1}{x^2} = 0$ no tiene solución.

c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ no tiene solución.

d) $f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x} = 0$ no tiene solución.

096 SOLUCIÓN

15) Creciente. 16) Creciente. 17) Creciente. 18) Decreciente.
19) Creciente. 20) Creciente. 21) Creciente. 22) Decreciente.
23) Creciente. 24) Creciente. 25) Decreciente. 26) Creciente.
27) Creciente.

097 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = \frac{3}{2} \rightarrow$ Creciente en $(-\infty, +\infty)$.

b) $f'(x) = -2 \rightarrow$ Decreciente en $(-\infty, +\infty)$

c) $f'(x) = 2x - 3 \rightarrow$ Crece en $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$. Decrece en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$.

d) $f'(x) = 2 - 2x \rightarrow$ Crece en $(-\infty, 1)$. Decrece en $(1, +\infty)$.

e) $f'(x) = 3x^2 \rightarrow$ Creciente en $(-\infty, +\infty)$.

f) $f'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow$ Crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Decrece en $(-1, 1)$.

098 SOLUCIÓN

a) $f' > 0$ si $x < -1$

$f' < 0$ si $x > -1$

b) $f' > 0$ si $x < 0$

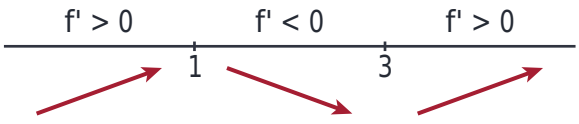
$f' < 0$ si $x > 0$

c) $f' > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f' < 0$ si $x \in (-1, 1)$

099 SOLUCIÓN

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$



Crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

Decrece en $(1, 3)$.

Máximo en $x = 1$. Mínimo en $x = 3$.

100 SOLUCIÓN

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 3$.

Puntos $(-1, 4)$ y $(3, -28)$.

101 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = -6x + 6 \rightarrow$ En $(-\infty, 1)$ crece y en $(1, +\infty)$ decrece.

Tiene un máximo en $(1, 3)$.

b) $f'(x) = 4x - 8 \rightarrow$ Creciente en $(2, +\infty)$; decreciente en $(-\infty, 2)$.

Tiene un mínimo en $(2, -1)$.

c) $f'(x) = \dfrac{-6}{(x-3)^2} \rightarrow$ Decreciente en todo su dominio: $\mathbb{R} - \{3\}$

d) $f'(x) = \dfrac{5}{(2x+3)^2} \rightarrow$ Creciente en todo su dominio: $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$

102 SOLUCIÓN

$f'(x) = 2x + 6 = 0 \rightarrow x = -3$

Punto $(-3, 2)$.

103 SOLUCIÓN

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-4) = 0 \rightarrow 48 - 8a + b = 0 \\ f'(0) = 0 \rightarrow b = 0 \\ f(1) = 1 \rightarrow 1 + a + b + c = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 6 \\ b = 0 \\ c = -6 \end{array}$$

La función es $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$.

104 SOLUCIÓN

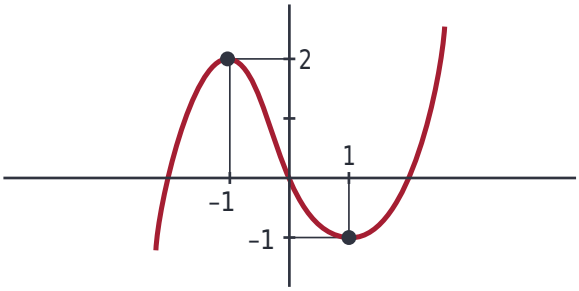
$f'(x) = 6x^2 + 2bx + a$

$f'(1) = 0 \rightarrow 6 + 2b + a = 0$

$f'(2) = 0 \rightarrow 24 + 4b + a = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a + 2b = -6 \\ a + 4b = -24 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 12 \\ b = -9 \end{array}$$

105 SOLUCIÓN



106 SOLUCIÓN

$$f'(x) = 2ax + b = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

107 SOLUCIÓN

La correcta es la b).

108 SOLUCIÓN

$$\begin{cases} f = g + 1 \\ f' = g' \end{cases}$$ Son rectas paralelas (de igual pendiente).

109 SOLUCIÓN

a) Sí: en $x = 2$, porque $f'(2) = 0$.

b) f es creciente para $x < 2$, donde $f'(x) > 0$, y decreciente para $x > 2$, donde $f'(x) < 0$. En $x = 2$ hay un máximo relativo.

06 · Representación de funciones

110 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = \dfrac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x + 11)}{(x + 1)^2} =$

$= \dfrac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x - 11}{(x + 1)^2} =$

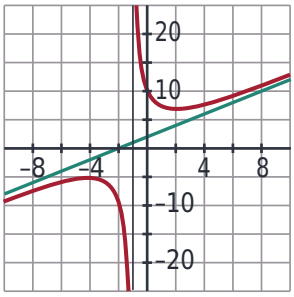
$= \dfrac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2} = 0 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -4$

Máximo en (–4, –5).

Mínimo en (2, 7).

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$



b) $f'(x) = \dfrac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x)}{(x + 1)^2} =$

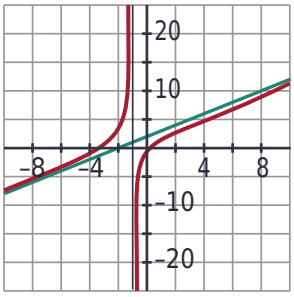
$= \dfrac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x}{(x + 1)^2} =$

$= \dfrac{x^2 + 2x + 3}{(x + 1)^2} \neq 0$

Puntos de corte con los ejes: (0, 0) y (–3, 0)

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$

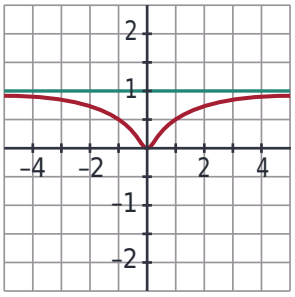


c) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} =$

$= \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} \rightarrow x = 0$

Mínimo en (0, 0).

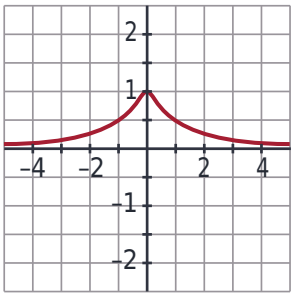
Asíntota horizontal: $y = 1$



d) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \rightarrow x = 0$

Máximo en (0, 1).

Asíntota horizontal: $y = 0$



e) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-2x) - (x^2+2)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \dfrac{2x^3 - 4x^2 - 2x^3 + 2x^2 - 4x + 4}{(x^2-2x)^2} =$

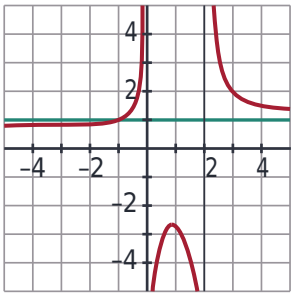
$= \dfrac{-2x^2 - 4x + 4}{(x^2-2x)^2} = 0 \rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x_1 = 0{,}73 \\ x_2 = -2{,}73 \end{cases}$

Máximo en (0,73; –2,73).

Mínimo en (–2,73; 0,73).

Asíntotas verticales: $x = 0$, $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 1$



f) • Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$

• Asíntota vertical:

$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 1}{x^2} = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 1}{x^2} = -\infty$

$x = 0$ es asíntota vertical

- Asíntota horizontal:

$y = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$; $y = 1$ es asíntota horizontal

Cuando $x \to -\infty$, $y < 1$; y cuando $x \to +\infty$, $y < 1$.

Por tanto, la curva está por debajo de la asíntota.

- Puntos singulares:

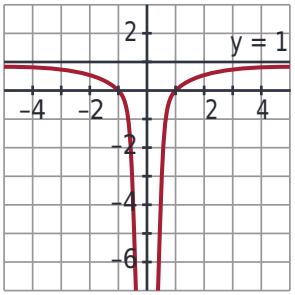
$f'(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$

$f'(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene puntos singulares

Observamos que $f'(x) < 0$ si $x < 0$; y que $f'(x) > 0$ si $x > 0$. Luego la función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y es creciente en $(0, +\infty)$.

- Corta al eje x en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

- Gráfica:

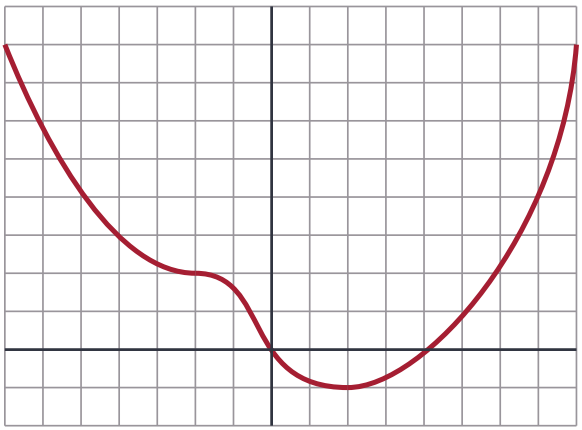


111 SOLUCIÓN

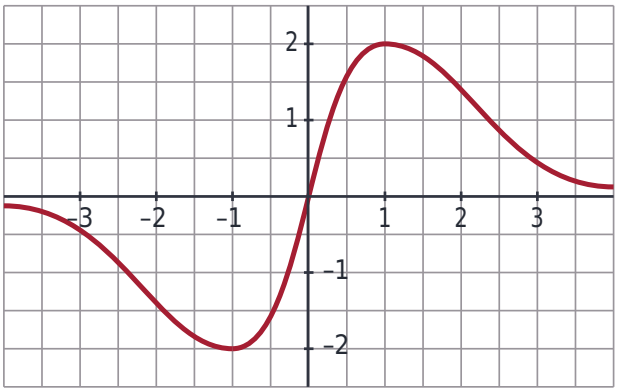
(–3, 2) es un mínimo.

(1, 5) es un máximo.

112 SOLUCIÓN



113 SOLUCIÓN



114 SOLUCIÓN

$f'(x) = 3(x-1)^2$: $f(0) = -1 \rightarrow$ pasa por $(0, -1)$

$f(1) = 0 \rightarrow$ pasa por $(1, 0)$

$f(2) = 1 \rightarrow$ pasa por $(2, 1)$

$f'(1) = 0$

El punto $(1, 0)$ no es ni máximo ni mínimo, porque la derivada no cambia de signo.

115 SOLUCIÓN

$f(x) = x + \frac{1}{x}$

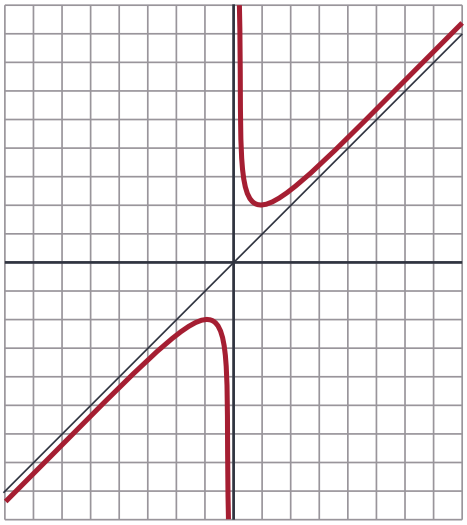
$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 1$

Puntos $(-1, -2)$ y $(1, 2)$.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

Asíntota vertical en $x = 0$.

Asíntota oblicua en $y = x$.

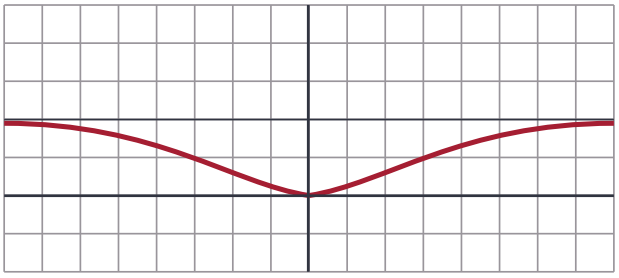


116 SOLUCIÓN

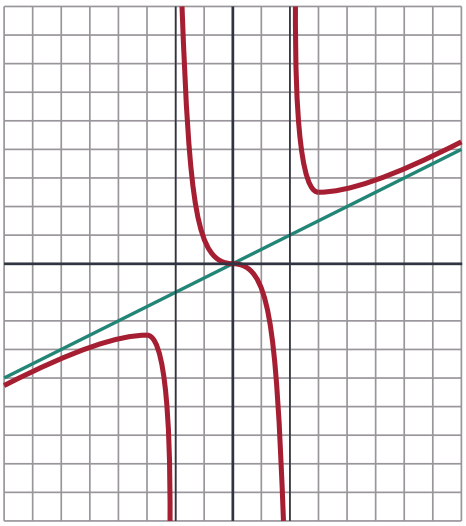
- $f'(x) = \frac{4x(x^2 + 1) - 2x(2x^2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$

  $f'(0) = 0;\ f(0) = 0$

- $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$



117 SOLUCIÓN



118 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

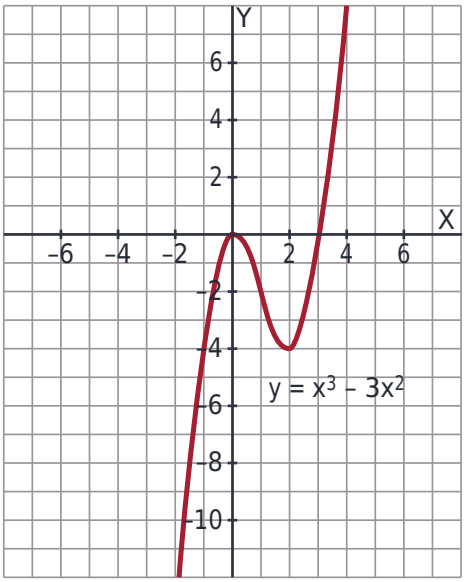
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$

$\begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = 2 \rightarrow f(2) = -4 \rightarrow (2, -4) \end{cases}$

$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty$

(0, 0) máximo y (2, –4) mínimo.



b) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

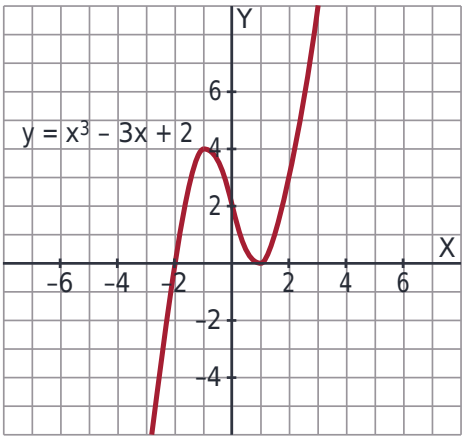
$f(1) = 0 \rightarrow (1, 0)$

$f(-1) = 4 \rightarrow (-1, 4)$

$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x + 2) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x + 2) = +\infty$

(–1, 4) máximo y (1, 0) mínimo.



c) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

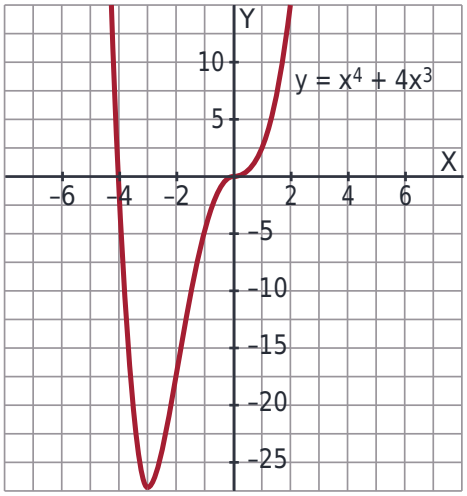
$\Leftrightarrow$ $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

$x = -3 \rightarrow f(-3) = -27 \rightarrow (-3, -27)$

$\lim_{x \to -\infty} (x^4 + 4x^3) =$

$= \lim_{x \to +\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$

(–3, –27) mínimo.



d) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

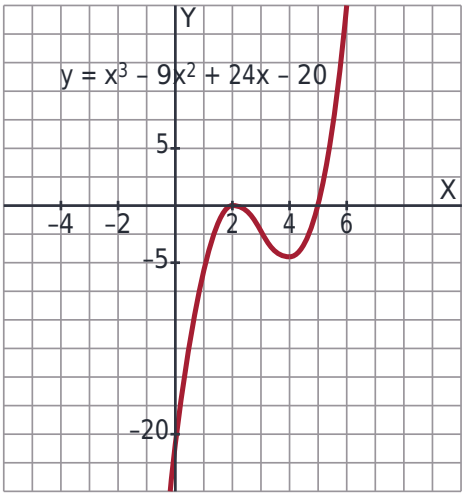
$f(4) = -4 \rightarrow (4, -4)$

$f(2) = 0 \rightarrow (2, 0)$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 9x^2 + 24x - 20) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 9x^2 + 24x - 20) = +\infty$$

(2, 0) máximo y (4, –4) mínimo.



e) $f'(x) = 12 - 3x^2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

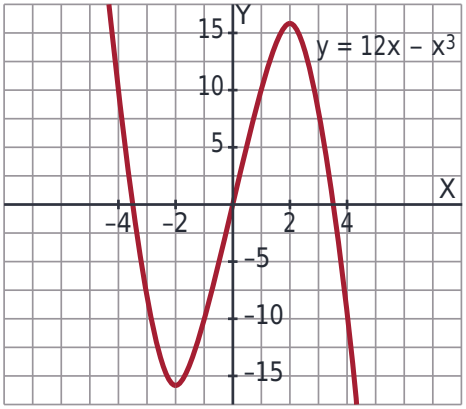
$f(2) = 16 \rightarrow (2, 16)$

$f(-2) = -16 \rightarrow (-2, -16)$

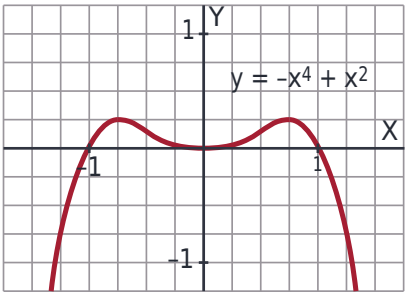
$$\lim_{x \to -\infty} (12x - x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (12x - x^3) = -\infty$$

(2, 16) máximo y (–2, –16) mínimo.



f) $f'(x) = -4x^3 + 2x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4} \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right) \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4} \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

$\lim_{x \to -\infty} (-x^4 + x^2) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} (-x^4 + x^2) = -\infty$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right)$ son máximos y (0, 0), mínimo.

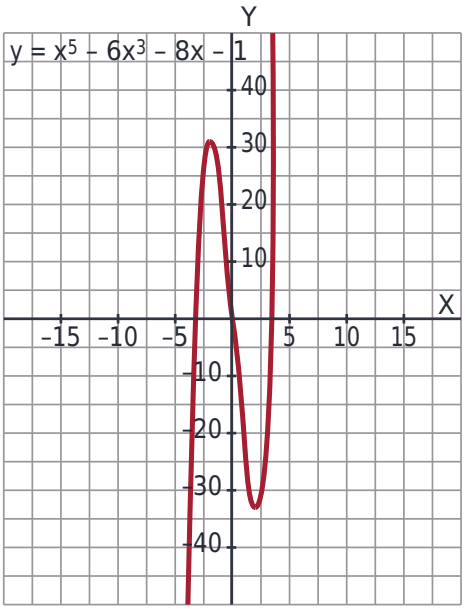
g) $f'(x) = 5x^4 - 18x^2 - 8$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \rightarrow f(2) = -33 \rightarrow (2, -33) \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = 31 \rightarrow (-2, 31) \end{cases}$$

$\lim_{x \to -\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = +\infty$

(–2, 31) máximo y (2, –33) mínimo.



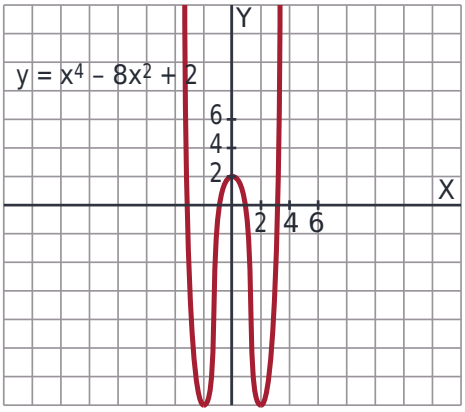
h) $f'(x) = 4x^3 - 16x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow (0, 2) \\ x = 2 \rightarrow f(2) = -14 \rightarrow (2, -14) \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = -14 \rightarrow (-2, -14) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = -\infty$$

(0, 2) máximo, y (2, –14) y (–2, –14) mínimos.



119 SOLUCIÓN

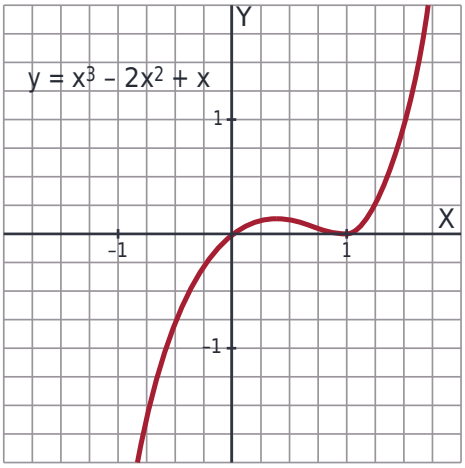
a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3},\ x = 1$

Puntos de tangente horizontal:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right), (1, 0)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 2x^2 + x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 + x) = -\infty$$



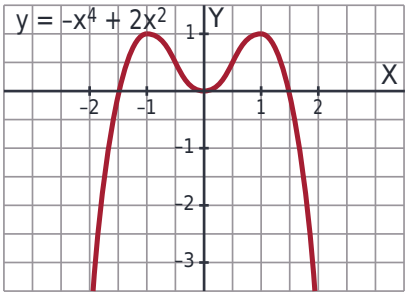
b) $f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = -1$

Puntos de tangente horizontal:

(–1, 1), (0, 0) y (1, 1)

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^4 + 2x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^4 + 2x^2) = -\infty$$



c) $f'(x) = \frac{x^2 + 5x + 4 - x(2x + 5)}{(x^2 + 5x + 4)^2} = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 5x + 4)^2} = 0 \rightarrow x = 2,\ x = -2$

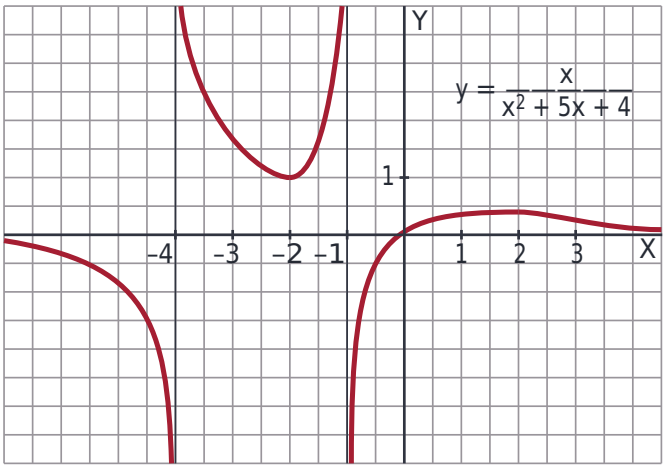
Puntos de tangente horizontal: $(-2, 1), \left(2, \frac{1}{9}\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + 5x + 4} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 + 5x + 4} = 0$$

Asíntotas verticales:

$x = -4,\ x = -1$



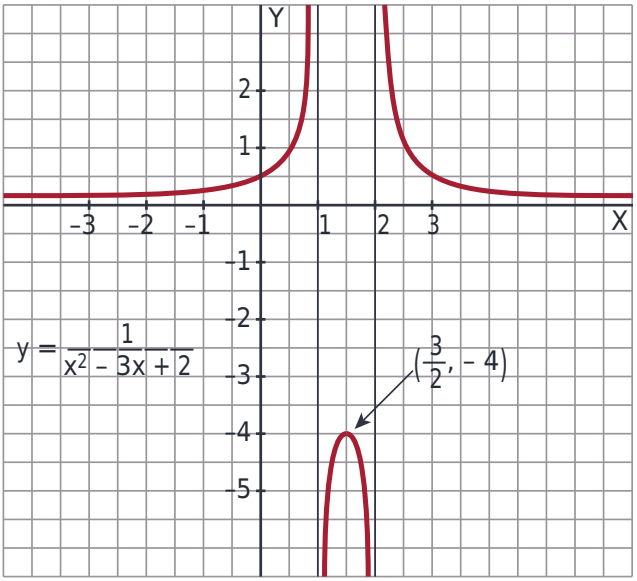
d) $f'(x) = \dfrac{-(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} = 0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Puntos de tangente horizontal: $\left(\dfrac{3}{2}, -4\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2-3x+2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2-3x+2} = 0$$

Asíntotas verticales: $x = 1,\ x = 2$



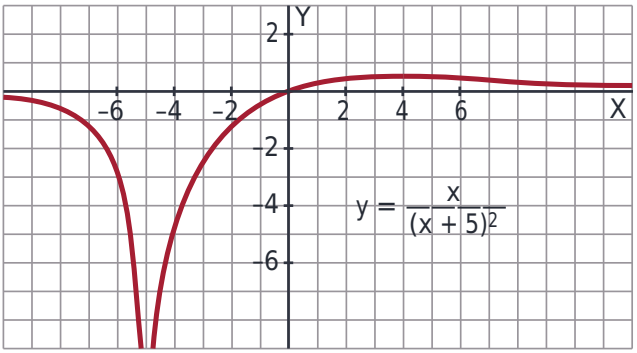
e) $f'(x) = \dfrac{(x+5)^2 - x \cdot 2(x+5)}{(x+5)^4} = \dfrac{5-x}{(x+5)^3} = 0 \rightarrow x = 5$

Puntos de tangente horizontal: $\left(5, \dfrac{1}{20}\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(x+5)^2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{(x+5)^2} = 0$$

Asíntota vertical: $x = -5$



f) $f'(x) = \dfrac{4x(x+2) - 2x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2 + 8x}{(x+2)^2} = \dfrac{2x(x+4)}{(x+2)^2} = 0 \rightarrow x = 0,\ x = -4$

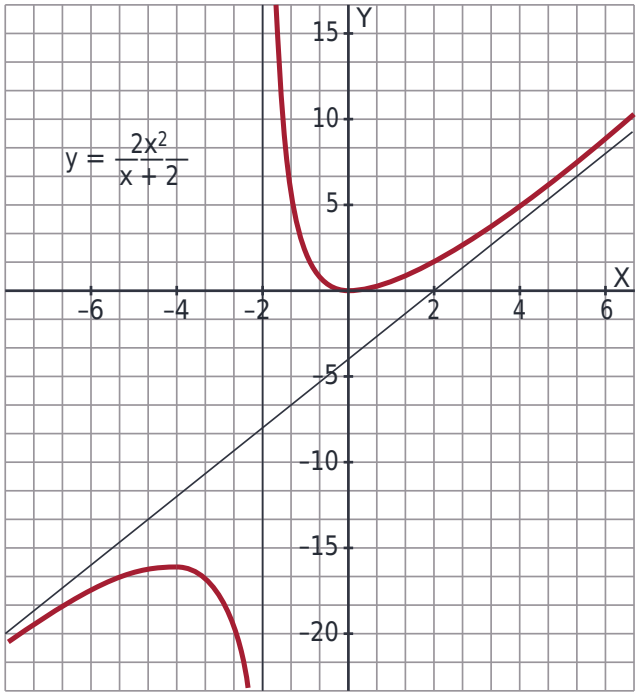
Puntos de tangente horizontal:

$(-4, -16), (0, 0)$

$\dfrac{2x^2}{x+2} = 2x - 4 + \dfrac{8}{x+2}$

($y = 2x - 4$ asíntota oblicua)

Asíntota vertical: $x = -2$



120 SOLUCIÓN

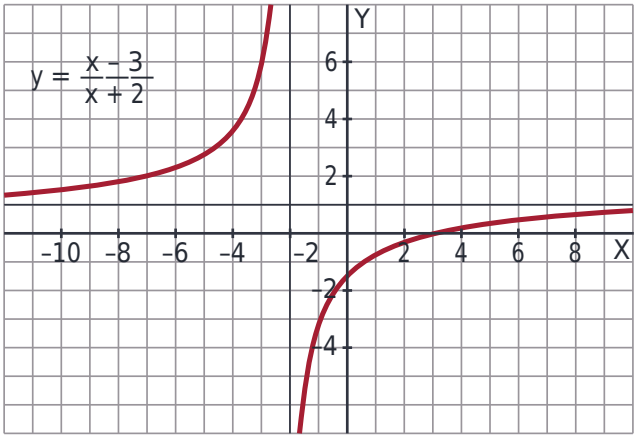
a) $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2} \neq 0$

Los puntos de corte son: $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$, $(3, 0)$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-3}{x+2} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-3}{x+2} = 1$$

Asíntota vertical: $x = -2$



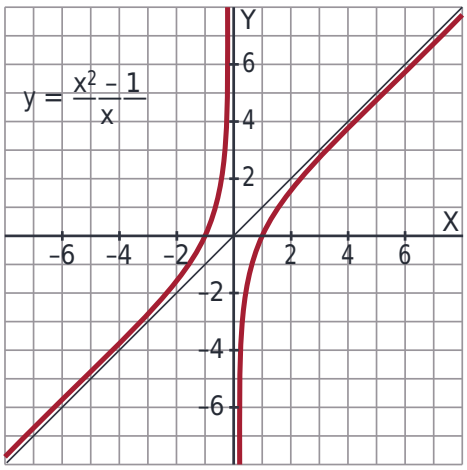
b) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2} \neq 0$

Los puntos de corte son: (1, 0), (–1, 0)

$\dfrac{x^2 - 1}{x} = x - \dfrac{1}{x}$

(y = x asíntota oblicua)

Asíntota vertical: x = 0

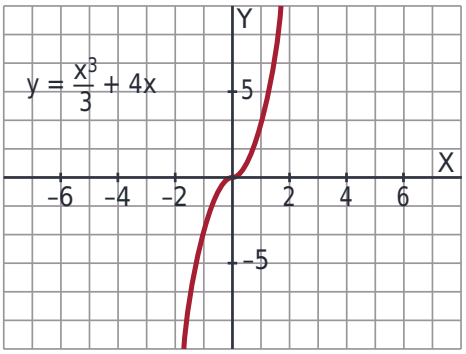


c) $f'(x) = x^2 + 4 \neq 0$

El punto de corte es: (0, 0)

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{3} + 4x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{3} + 4x = +\infty$

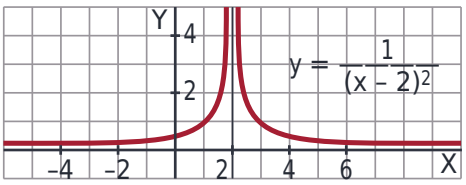


d) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x - 2)^3} \neq 0$

El punto de corte es: $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$

Asíntota vertical: x = 2

Asíntota horizontal: y = 0



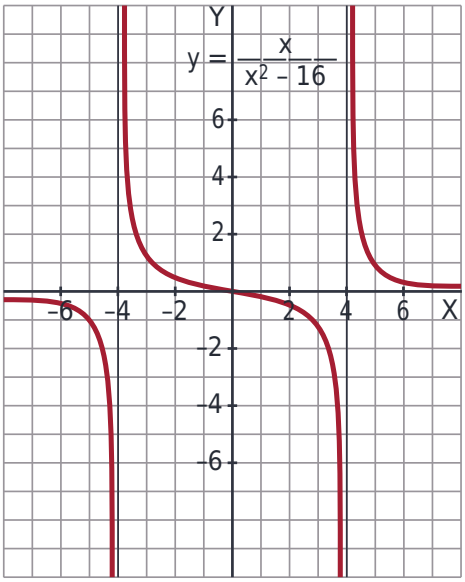
121 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2}$

Asíntotas verticales: $x = -4$, $x = 4$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.

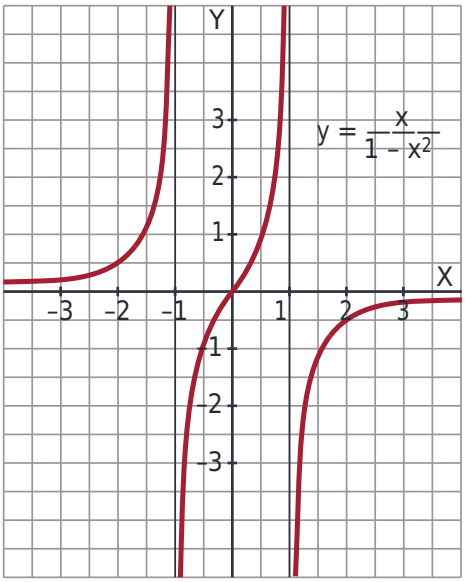


b) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.



c) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 4x + 17}{(x^2 - 6x + 5)^2}$

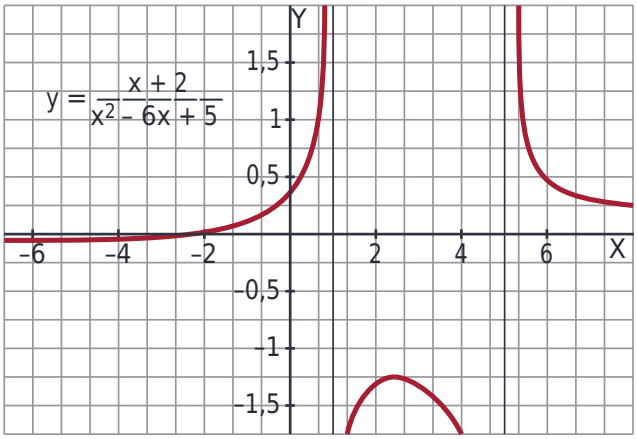
Asíntotas verticales: $x = 5$, $x = 1$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

(–6,58; –0,052), (2,58; –1,197)



d) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{(x + 2)^2}$

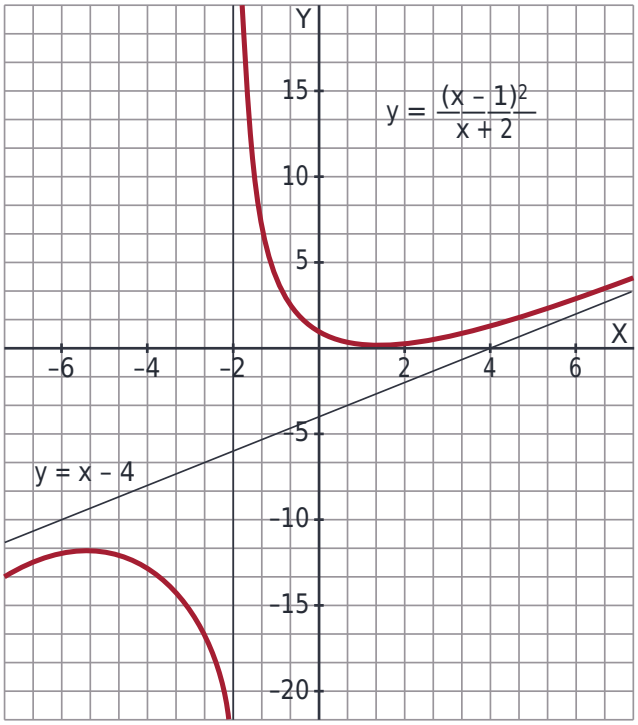
Asíntotas verticales: $x = -2$

Asíntotas oblicuas: $y = x - 4$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$(1, 0), (-5, 12)$



e) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}$

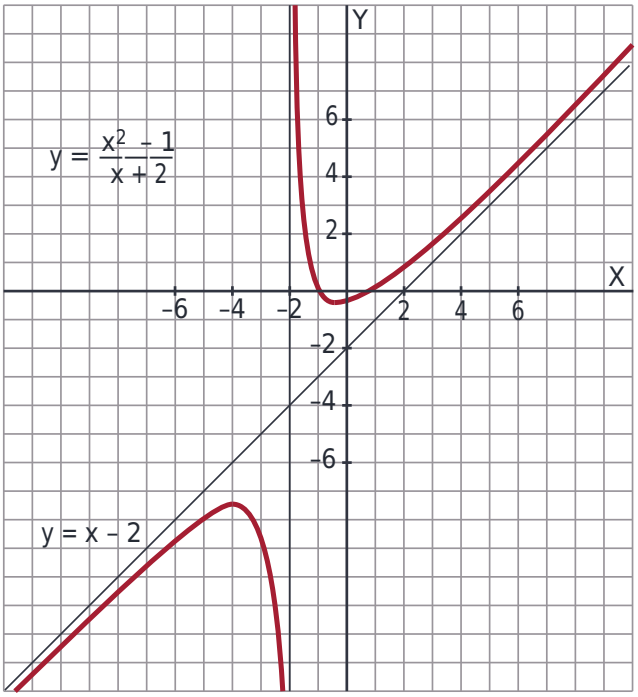
Asíntotas verticales: $x = -2$

Asíntotas oblicuas: $y = x - 2$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

$(-0{,}26; -0{,}54), (-3{,}73; -7{,}46)$



f) $y' = \dfrac{2x}{(1 - x^2)^2}$

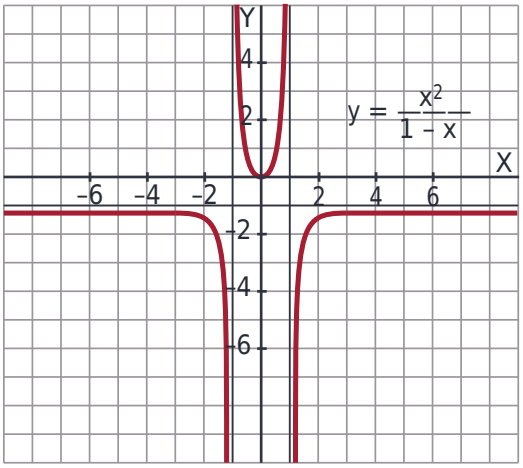
Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$

Asíntotas horizontales: $y = -1$

No hay asíntotas oblicuas.

Su punto de tangente horizontal es:

$(0, 0)$



g) $f'(x) = \dfrac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$

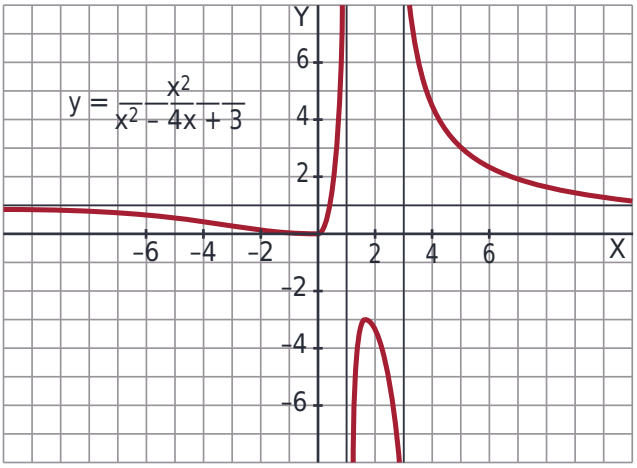
Asíntotas verticales: $x = 3$, $x = 1$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$(0, 0)$, $\left(\dfrac{3}{2}, -3\right)$



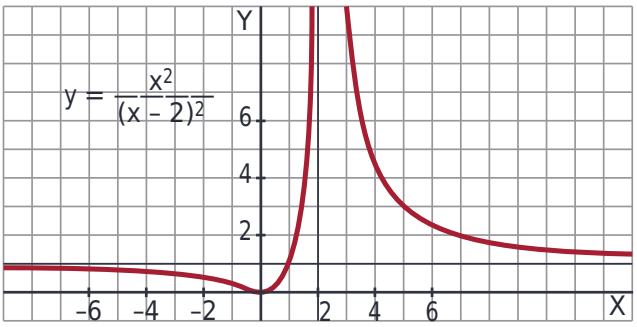
h) $f'(x) = -\dfrac{4x}{(x - 2)^3}$

Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

Su punto de tangente horizontal es: $(0, 0)$



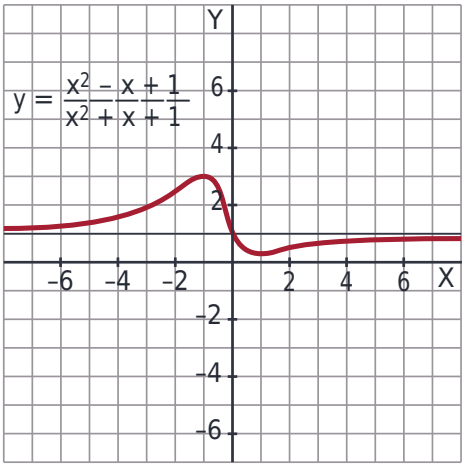
i) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas verticales ni oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$(1, \dfrac{1}{3})$, $(-1, 3)$

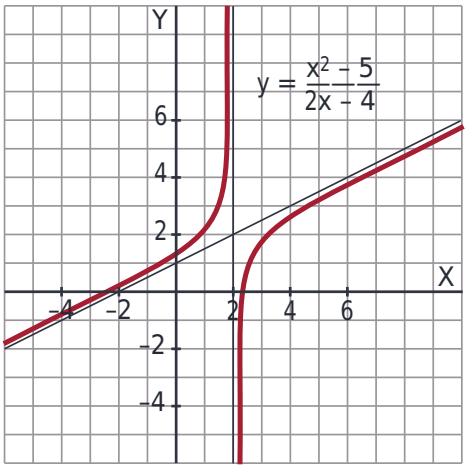


j) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8x + 10}{(2x - 4)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas oblicuas: $y = \dfrac{x}{2} + 1$

No hay asíntotas horizontales ni puntos de tangente horizontal.



07 · Problemas de aplicación

122 SOLUCIÓN

Depreciación: $[0, 2] \rightarrow 9\,000$ €

$[4, 6] \rightarrow 3\,500$ €

$[8, 10] \rightarrow 1\,500$ €

La depreciación no es constante.

---

123 SOLUCIÓN

a) T.V.M. $[0, 5] = \dfrac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \dfrac{-25 - 0}{5} = -5$ m/s

b) $f'(t) = 20 - 10t \rightarrow f'(t) = 0;\ 20 - 10t = 0 \rightarrow t = 2$

A los 2 segundos.

c) $f'(t) = 15 \rightarrow 20 - 10t = 15 \rightarrow t = 0{,}5$ s

A los 0,5 segundos la velocidad es 15 m/s.

La altura en ese instante es:

$f(0{,}5) = 8{,}75$ m.

---

124 SOLUCIÓN

a) $M(q) = \dfrac{3q^2 + 5q + 75}{q}$

$M'(q) = \dfrac{(6q + 5)q - (3q^2 + 5q + 75)}{q^2} = \dfrac{6q^2 + 5q - 3q^2 - 5q - 75}{q^2} =$

$= \dfrac{3q^2 - 75}{q^2} = 0 \rightarrow q^2 = 25 \rightarrow q = 5$ unidades

Se deben fabricar 5 unidades.

b) $C(5) = 175;\ M(5) = 35$

---

125 SOLUCIÓN

La función $f(x) = \dfrac{}{x^2 + 9}$ indica los beneficios obtenidos por una empresa

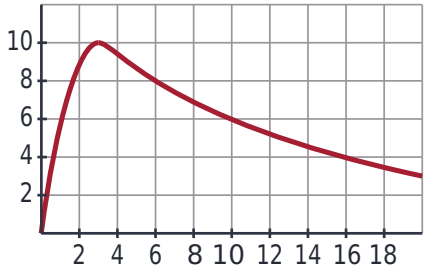
a) $f'(x) = \dfrac{60(x^2 + 9) - 60x \cdot 2x}{(x^2 + 9)^2} = \dfrac{60x^2 + 540 - 120x^2}{(x^2 + 9)^2} = \dfrac{-60x^2 + 540}{(x^2 + 9)^2} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 3$ ($x = -3$ no está en el dominio)

Máximo en (3, 10).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \rightarrow$ asíntota horizontal: $y = 0$

La gráfica sería:



b) Beneficio máximo en $x = 3 \rightarrow$ A los 3 años.

El beneficio sería $f(3) = 10$ miles de euros.

c) No perderá dinero pues $f(x) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x > 0$.

08 · Repaso integrado

126 SOLUCIÓN

a) T.V.M. $[0, 3] = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{1/2 - 2}{3} = -\dfrac{1}{2}$

T.V.M. $[-4, -2] = \dfrac{f(-2) - f(-4)}{-2 - (-4)} = \dfrac{4 - 0}{-2 + 4} = 2$

b) Sí, $P(-2, 4)$.

c) Si $x < -2$, $f'(x) > 0$.

d) La recta $y = -x$ (bisectriz del 2.º cuadrante) tiene pendiente igual a -1. Por tanto, $f'(0) = -1$.

---

127 SOLUCIÓN

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h}$$

$f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) = 4 + 6 = 10$

$f(-2 + h) = (-2 + h)^2 - 3(-2 + h) = 4 - 4h + h^2 + 6 - 3h = h^2 - 7h + 10$

$f(-2 + h) - f(-2) = h^2 - 7h$

$$\frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = \frac{h^2 - 7h}{h} = h - 7$$

$$\lim_{h \to 0} h - 7 = -7$$

Por tanto, $f'(-2) = -7$.

---

128 SOLUCIÓN

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{3}e^{-x} + \dfrac{x}{3}(-1)e^{-x} = e^{-x}\left(\dfrac{1-x}{3}\right)$

c) $f'(x) = 3\left(\dfrac{3x-5}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}\left(\dfrac{3x-5}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{8}(3x-5)^2$

d) $f'(x) = \dfrac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \dfrac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 4}$

129 SOLUCIÓN

Punto de tangencia: $x = 1,\ y = \ln 1^2 = 0 \rightarrow \mathbf{P}(1, 0)$

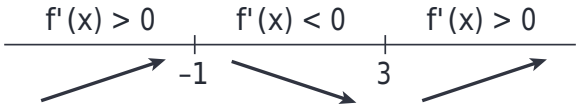
Pendiente de la recta tangente: $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x} \rightarrow \mathbf{f'}(1) = 2$

Ecuación: $y = 0 + 2(x - 1) \rightarrow \mathbf{y} = 2x - 2$

130 SOLUCIÓN

$f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x \rightarrow \mathbf{f'}(x) = x^2 - 2x - 3$

Buscamos los valores de x para los que $f'(x) > 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$



Intervalos de crecimiento de f: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

Intervalo de decrecimiento de f: $(-1, 3)$

La función tiene un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 3$.

131 SOLUCIÓN

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{2 - x}$$

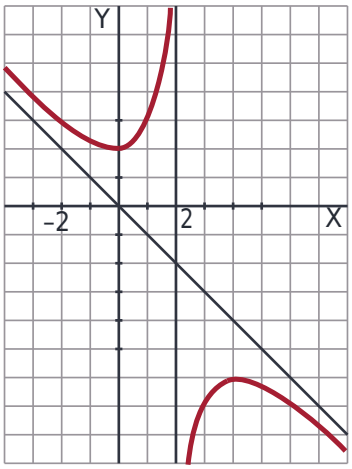
$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(2 - x) - (x^2 - 2x + 4)(-1)}{(2 - x)^2} =$$

$$= \frac{(4x - 2x^2 - 4 + 2x) + (x^2 - 2x - 4)}{(2 - x)^2} = \frac{-x^2 + 4x}{(2 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{-x^2 + 4x}{(2 - x)^2} = 0 \rightarrow -x^2 + 4x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$f(0) = \frac{0 - 0 + 4}{2 - 0} = 2; \; f(4) = \frac{4^2 - 2 \cdot 4 + 4}{2 - 4} = -6$$

Los puntos singulares son (0, 2) y (4, –6). El primero es un mínimo y el segundo, un máximo.



132 SOLUCIÓN

$y = x^3 - 12x + 16$ es una función polinómica, por ello es continua en $\mathbb{R}$.

• Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 12x + 16) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 12x + 16) = -\infty$$

• Puntos singulares:

$f'(x) = 3x^2 - 12$

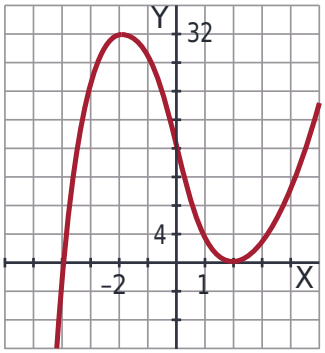
$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array} \right.$

$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 16 = 0 \rightarrow (2, 0)$

$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 16 = 32 \rightarrow (-2, 32)$

Los puntos singulares son (2, 0) y (–2, 32).

Esta es su gráfica:



133 SOLUCIÓN

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$$

• El dominio de esta función es $\mathbb{R}$.

• Asíntotas:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Cuando $x \to +\infty$, $f(x) > 0$ → la curva está por encima de la asíntota.

Cuando $x \to -\infty$, $f(x) < 0$ → la curva está por debajo de la asíntota.

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0$

La función corta a los ejes en el punto (0, 0).

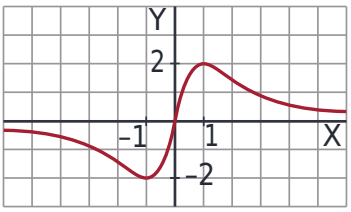
• Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{4(x^2 + 1) - 4x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^2 + 4 - 8x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -4x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{array} \right.$$

Así, observando la asíntota y el corte con el eje X, (1, 2) es un máximo relativo, y (–1, –2), un mínimo relativo.

La gráfica es:



134 SOLUCIÓN

$f(x) = x^2 + bx + c$

$f'(x) = 2x + b$

- $x = 2$ es un mínimo:

$$f'(2) = 0 \rightarrow 2 \cdot 2 + b = 0 \rightarrow b = -4$$

- Pasa por (2, 2):

$$f(2) = 2 \rightarrow 2^2 - 4 \cdot 2 + c = 2 \rightarrow c = 6$$

Así, la función es $y = x^2 - 4x + 6$.