1.º BACHILLERATO

DERIVADAS

Practica, razona y comprueba tus respuestas.

01 Tasas de variación y definición

Cambio medio, cambio instantáneo y lectura gráfica.

02 Reglas de derivación

Sumas, productos, cocientes y funciones elementales.

03 Composición y regla de la cadena

Funciones compuestas, implícitas y logarítmicas.

04 Tangentes y normales

Pendientes, puntos de contacto y geometría.

05 Derivabilidad y razonamiento

Continuidad, propiedades y demostraciones.

06 Derivadas de orden superior

Segundas derivadas, terceras y orden n.

07 Parámetros y condiciones

Funciones que cumplen condiciones dadas.

08 Aplicaciones y retos

Movimiento, costes y problemas de elección.

TU RUTA DE TRABAJO

Índice

Actividades organizadas por contenidos, con espacio para trabajar y soluciones al final.

01	Tasas de variación y definición	3
02	Reglas de derivación	11
03	Composición y regla de la cadena	20
04	Tangentes y normales	29
05	Derivabilidad y razonamiento	41
06	Derivadas de orden superior	42
07	Parámetros y condiciones	44
08	Aplicaciones y retos	47
•	Solucionario	49

Cómo usar el dossier

El código **1.12** identifica la actividad 12 del bloque 1. Busca ese mismo código en el solucionario. Puedes seguir el orden completo o seleccionar un contenido para repasarlo.

Antes de empezar

Los ángulos se expresan en radianes. log es decimal y ln, natural. Conserva las restricciones del dominio al simplificar. Una derivada ordinaria requiere un entorno del punto; en extremos se especifica la derivada unilateral. Para potencias variables se trabaja en intervalos de base positiva.

BLOQUE 01

Tasas de variación y definición

Cambio medio, cambio instantáneo y lectura gráfica. · 17 actividades

1.01 Halla la tasa de variación media de $f(x) = x^2 - x + 3$ en cada intervalo.

a) [2, 3]

b) [2, 4]

c) [2, 5]

d) [2, 6]

e) [3, 5]

f) [3, 6]

1.02 Halla la tasa de variación media de $f(x) = x^2 - x + 3$ en los intervalos, con $h > 0$.

a) [2, 2 + h]

b) [3, 3 + h]

1.03 Usa la definición de derivada para calcular f′(2) y f′(−1).

a) $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$

b) $f(x) = 2x^2 + x$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

1.04 Calcula la derivada de $f(x) = x^3 + 4$ en los puntos indicados.

a) $x = 1$

b) $x = -4$

c) $x = 2$

d) $x = -3$

1.05 Usa la definición para hallar la función derivada.

a) $f(x) = 4x^3$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

1.06 Halla las tasas de variación media de $f(x) = 2x^2 - x + 1$.

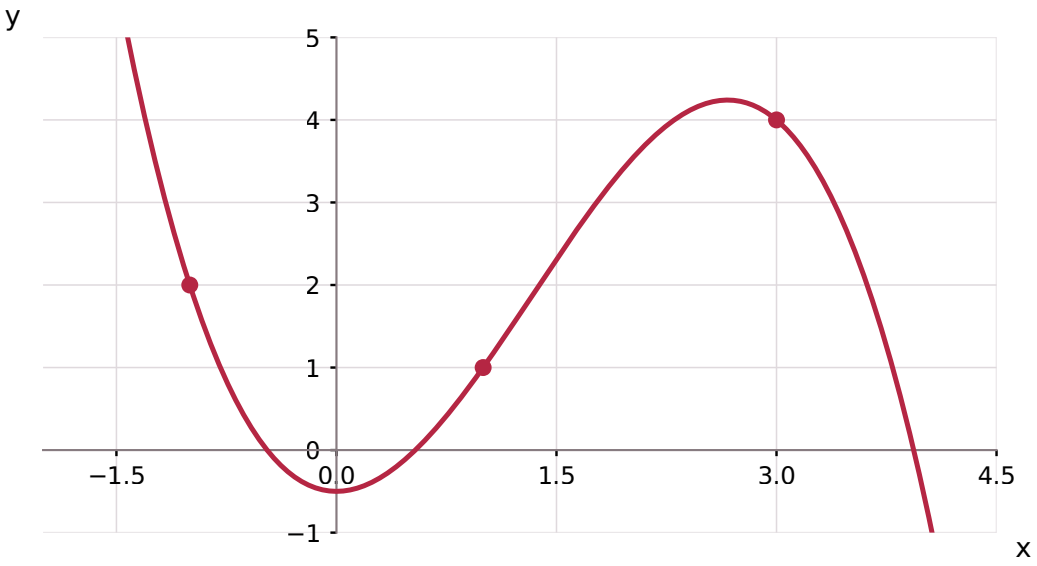
a) $[-3, -1]$

b) $[-5, 2]$

c) $[0, 3]$

d) $[1, 4]$

1.07 Determina las tasas de variación media a partir de la gráfica.



a) $[-1, 1]$

b) $[1, 3]$

c) $[-1, 3]$

1.08 Determina las tasas de variación media.

a) f(x) = x en [−1, 1].

b) f(x) = $\frac{3}{4}x^2 - 5$ en [3, 4].

c) f(x) = sen x en [π/2, π].

1.09 Halla la tasa de variación media de $f(x) = 2x^2 - x$ en [2, 2 + h], con h > 0. Úsala en los intervalos indicados.

a) [2, 3]

b) [2, 5]

c) [2, 8]

d) [2, 10]

1.10 Halla la tasa de variación media de f(x) = 1/x en [1, 1 + h], con h > 0. Úsala en los intervalos indicados.

a) [1, 2]

b) [1, 3]

c) [1, 5]

d) [1, 10]

1.11 Encuentra dos polinomios de segundo grado que pasen por (0, 4) y (3, 10). Comprueba que tienen la misma tasa de variación media en [0, 3].

1.12 ¿Por qué la tasa de variación media de $f(x) = 2x - 3$ en cualquier intervalo no degenerado es 2?

1.13 Aplica la definición para hallar la derivada en cada punto.

a) $f(x) = 3x - 1$; $x = 2$.

b) $f(x) = x^2 + x$; $x = 3$.

c) $f(x) = \dfrac{4x + 3}{2}$; $x = -1$.

d) $f(x) = \dfrac{6}{x}$; $x = 1$.

e) $f(x) = (x - 1)^2$; $x = -2$.

f) $f(x) = x^3 + 5$; $x = 0$.

1.14 A partir de la definición, calcula las funciones derivadas.

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{4}$

c) $f(x) = x^3$

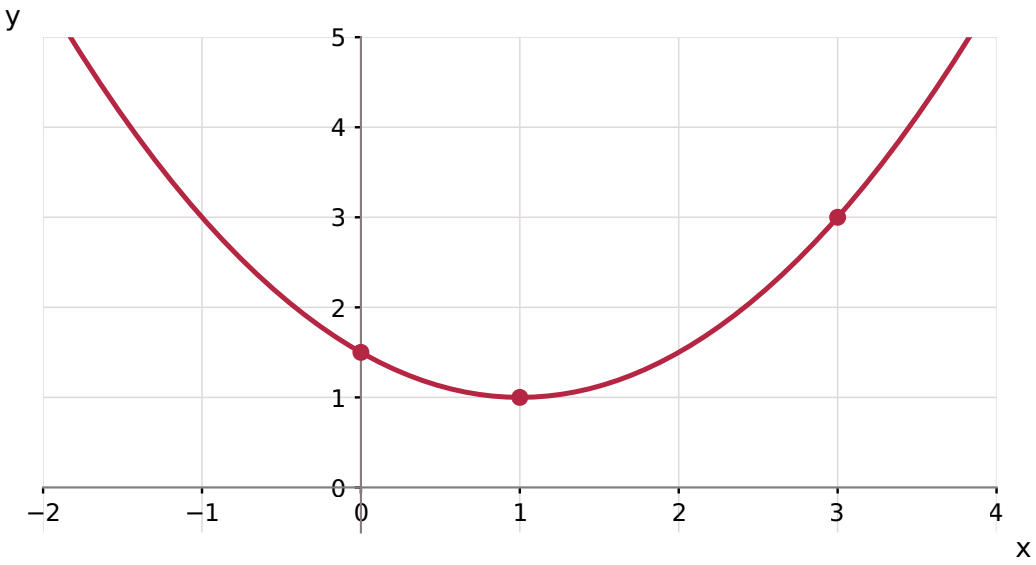
d) $f(x) = 2x^2 - 3x$

e) $f(x) = \dfrac{12}{x}$

f) $f(x) = (3x^2 + 2)^2$

1.15 Halla la tasa de variación media de $f(x) = 2x^2 - 2x + 3$ en $[1, 1 + h]$. Úsala para $[1, 3]$, $[1, 5]$ y $[1, 8]$. Calcula su límite cuando $h \to 0$ y compáralo con $f'(1)$.

1.16 La gráfica es una parábola que pasa por (0, 3/2), (1, 1) y (3, 3). Determina la derivada en los puntos indicados.



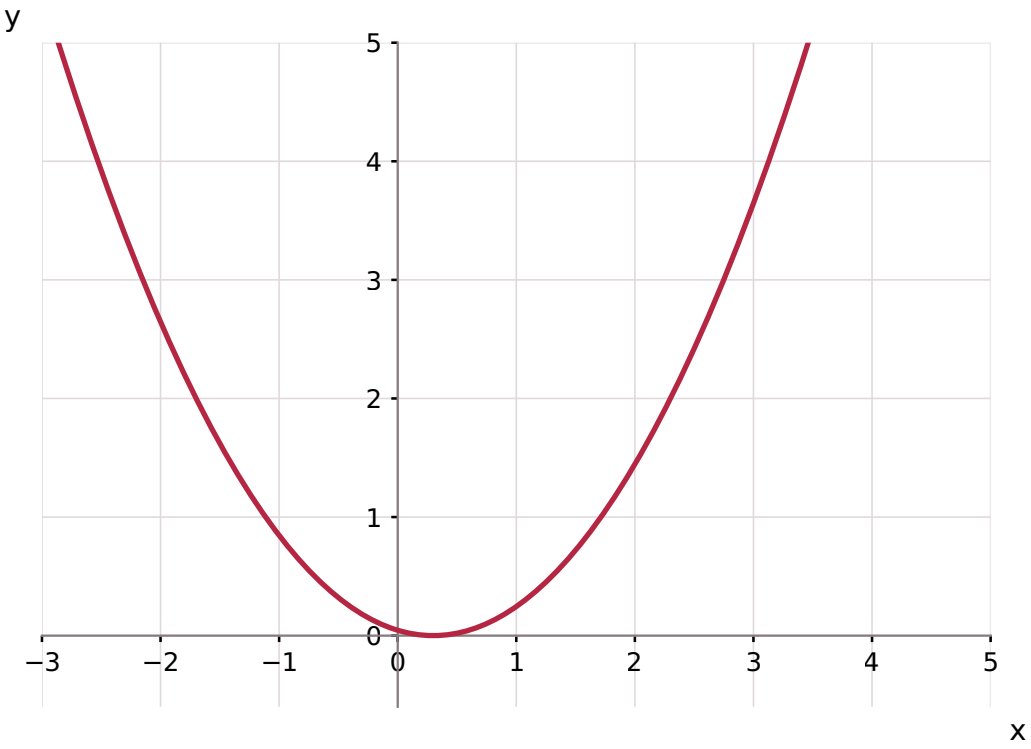
a) $x = -1$

b) $x = 0$

c) $x = 1$

d) $x = 3$

1.17 Justifica gráficamente que la derivada en x = 3 está comprendida entre 2 y 3.



BLOQUE 02

Reglas de derivación

Sumas, productos, cocientes y funciones elementales. · 25 actividades

2.01 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = 6$

b) $f(x) = x^4$

c) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$

2.02 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = \sqrt[7]{x^4}$

b) $f(x) = x^8$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$

2.03 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = 3^x$

c) $f(x) = 4^x$

2.04 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = \log_2 x$

b) $f(x) = \log_3 x$

c) $f(x) = \log_4 x$

2.05 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{x} + x$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x^3}$

d) $f(x) = 3^x - \text{arctg } x$

2.06 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 9$

b) $f(x) = 2\text{sen } x - 3\cos x$

c) $f(x) = 7\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[4]{x^3}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{2x} - 5x$

2.07 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

b) $f(x) = x \cdot e^x$

c) $f(x) = x \cdot \text{sen } x$

d) $f(x) = x \cdot \ln x$

e) $f(x) = \text{sen } x \cdot \cos x$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

g) $f(x) = (x^2 + 2x) \cdot \text{sen } x$

h) $f(x) = (e^x - x) \cdot \ln x$

2.08 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = 3x^2 \cdot \log_2 x$

b) $f(x) = e^x \cdot \operatorname{sen} x$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \cos x$

d) $f(x) = \cos x \cdot \operatorname{tg} x$

e) $f(x) = 4x \cdot \operatorname{sen} x + x^3 \cdot \cos x$

f) $f(x) = \ln x \cdot \frac{1}{x^4} + x^2 \cdot e^x$

g) $f(x) = (\operatorname{sen} x - \cos x) \cdot \operatorname{tg} x$

h) $f(x) = 4x\sqrt{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

2.09 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = \frac{x + 2}{x}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x + 4}$

c) $f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{x + 1}$

2.10 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3}$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\cos x}$

c) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + 2x}{x - 3}$

2.11 Calcula la derivada en el punto indicado.

a) $f(x) = (x + 2)^2 - 1$; $x = 2$.

b) $f(x) = 5 - 2x$; $x = 0$.

c) $f(x) = \dfrac{7}{x - 4}$; $x = 1$.

d) $f(x) = \sqrt{2 - 3x}$; $x = -1$.

e) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x + 1}}$; $x = 8$.

2.12 Para $f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 7x + 5$, halla la función derivada y sus valores en $x = -2$, 0 y 1.

2.13 Para $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + x - 6$, calcula:

a) $f'(x)$.

b) $f'(3)$, $f'(-2)$ y $f'(0)$.

c) $f'(4 - 8)$ y $f'(4) - f'(8)$. ¿Son iguales?

2.14 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = -3x^3 + 5x^2 - x + 5$

b) $f(x) = -2(x^4 - 9x^2) + x$

c) $f(x) = x(2 + x^2) + 3$

d) $f(x) = x^6 - 10x^2 - x^{-3}$

2.15 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = 5x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 12x - 1$

b) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x}{x + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 8x - 9}{2}$

2.16 Aplica la regla del producto a $f(x) = (5x^2 - 3x)(x^4 - 2x + 5)$. Halla $f'(x)$, $f'(-3)$, $f'(0)$ y $f'(2)$.

2.17 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = (3x^2 - 1)4x$

b) $f(x) = (-3x^2 + x - 1)\dfrac{2x - 3}{3}$

c) $f(x) = 2x(5x - 3)(x^2 - 3x + 1)$

2.18 Aplica la regla del cociente a $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 - 5x}$. Halla $f'(x)$, $f'(-1)$, $f'(1)$ y $f'(2)$.

2.19 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = \dfrac{7x^3 - 2x + 4}{x - 2}$

b) $f(x) = \dfrac{6x^4}{7x^2 - x + 3}$

c) $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3 - x}{2x^2 - x}$

2.20 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1} + \dfrac{x + 1}{x - 1}$

2.21 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^7}$

b) $f(x) = \sqrt{x^3} - 3\sqrt[5]{x}$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x}(1 - \sqrt{x})$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$

2.22 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{5x + 2} - \sqrt{x}$

b) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x - 1} \cdot \dfrac{x + 5}{x - 2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 1}{2x^2 - x} + \dfrac{\sqrt{x + 5}}{x}$

2.23 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = \ln x + e^x$

b) $f(x) = x^2 \log x - 1$

c) $f(x) = (x^2 + 3)\log_2 x$

d) $f(x) = \dfrac{\ln x + 4}{e^x}$

e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{e^x} + 4$

f) $f(x) = 5e^x - 3^x$

2.24 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = \text{sen } x \cos x$

b) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$

c) $f(x) = \sec x \operatorname{cosec} x$

d) $f(x) = x \operatorname{tg} x$

e) $f(x) = x \arccos x$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$

2.25 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = 2x + \text{arcsen } x + \arccos x$

b) $f(x) = (1 + x^2)\operatorname{arctg} x$

c) $f(x) = \ln x \cdot \operatorname{tg} x$

d) $f(x) = e^x \text{ sen } x$

e) $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 - x}$

BLOQUE 03

Composición y regla de la cadena

Funciones compuestas, implícitas y logarítmicas. · 22 actividades

3.01 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

b) $f(x) = (\arcsen\ x)^3$

c) $f(x) = \ln(4x)$

3.02 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = (\cos x)^2$

b) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{x-5}\right)$

c) $f(x) = e^{x^2 + 7x - 4}$

3.03 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = (4x^2 + 5x - 2)^3$

b) $f(x) = \sqrt[5]{\operatorname{sen} x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^3 x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 7x - 12}}$

3.04 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = 5^{3x^2 - 2x + 1}$

b) $f(x) = 7^{\cos(x^2)}$

3.05 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = \ln(\sqrt{2x})$

b) $f(x) = \ln(\dfrac{1}{x^2})$

3.06 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = \operatorname{tg}(2x - 5)$

b) $f(x) = \cos \sqrt{x}$

3.07 Calcula las derivadas mediante derivación logarítmica. Trabaja en los intervalos donde la base es positiva.

a) $f(x) = (x + 1)^x$

b) $f(x) = (x^2 + 1)^{x^3}$

3.08 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = \operatorname{arcsen}(x^3 + x)$

b) $f(x) = \operatorname{arctg}(\frac{1}{x})$

3.09 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = e^{\operatorname{sen}(x^2)}$

b) $f(x) = \sqrt{\ln(\sqrt[3]{x})}$

3.10 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1}} + (\frac{1}{x})^2$

3.11 Escribe cada función como g(h(x)) y halla su derivada.

a) $f(x) = \ln(2x^2)$

b) $f(x) = \log_3(x^2 - 1)$

c) $f(x) = 10^{x+3}$

d) $f(x) = e^{3x}$

e) $f(x) = \cos(3x - 1)$

f) $f(x) = \text{sen}(x^2 - 3)$

3.12 Escribe cada función como g(h(x)) y halla su derivada.

a) $f(x) = \log_3(2x + 1)$

b) $f(x) = (3x^2 - 3x + 1)^4$

c) $f(x) = \text{sen}\sqrt{x}$

d) $f(x) = \text{arctg}(e^x)$

e) $f(x) = 2^{3x-4}$

f) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 1}$

g) $f(x) = \cos(\ln x)$

h) $f(x) = 3^{\cos x}$

3.13 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = \ln\left(\frac{x^3}{2x + 1}\right)$

b) $f(x) = e^x \ln x$

c) $f(x) = e^{\frac{3x^2 - 1}{x}}$

d) $f(x) = \frac{e^{4x + 1}}{1 + x^4}$

e) $f(x) = \log_2\left(\frac{2x^2}{x - 7}\right)$

f) $f(x) = 3^{\ln(x^4 + 2)}$

g) $f(x) = \frac{\ln(x^3)}{e^{-x^2 - x}}$

h) $f(x) = \ln\left(\frac{e^{3x} + e^x}{e^{1/x}}\right)$

3.14 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = \text{sen}(3x^2)$

b) $f(x) = \cos(x^2 + 1)$

c) $f(x) = \text{tg}(x^2 - 3x)$

d) $f(x) = \text{sen}\ \sqrt{x^2 + 3x}$

e) $f(x) = \cos\left(\frac{x - 1}{x}\right)$

f) $f(x) = \text{tg}\ \sqrt{x - 1}$

g) $f(x) = -\text{sen}\left(\frac{x}{-x^4 + x - 1}\right)$

h) $f(x) = \text{tg}\left(\frac{2}{\sqrt{1 - x}}\right)$

3.15 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = (2x + 1)^3 \cdot 3^x$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 3}{x^3}}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{\sqrt{x^3}}$

d) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{e^x}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3}}{x^3}$

f) $f(x) = x^2 - \dfrac{3}{\sqrt{x^3}}$

3.16 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = (3x^4 - 2x + 1)^5$

b) $f(x) = \left(\dfrac{x}{1 - x^3}\right)^5$

c) $f(x) = (\sqrt[3]{x^3 - 1})^5$

d) $f(x) = (1 + 2e^x)^4$

e) $f(x) = [\ln((x^2 - 1)^3)]^4$

f) $f(x) = (1 - 3e^x)^6$

g) $f(x) = \text{sen}^2(x^2)$

h) $f(x) = \cos^3(x^2 - 7x + 1)$

i) $f(x) = \text{tg}^2(x^3 - 8)$

j) $f(x) = \left(\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) + \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^3$

3.17 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = \ln(\text{tg } x)$

b) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

c) $f(x) = \log_2(x^2)$

d) $f(x) = \text{sen}(\cos x)$

e) $f(x) = \text{arctg}(x^2)$

f) $f(x) = \text{tg}(\ln x)$

g) $f(x) = \cos \sqrt{x}$

h) $f(x) = (\log_2 x)^2$

i) $f(x) = \cos(\text{sen } x)$

j) $f(x) = (\text{arctg } x)^2$

3.18 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = e^{(\sqrt{x}+1)^2}$

b) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{e^{2x}}\right)$

c) $f(x) = \sqrt{2e^x + \log_2(3x)}$

d) $f(x) = [\ln(\ln x)]^2$

e) $f(x) = 3\text{sen}(x^2) + 2\text{sen}^2 x$

f) $f(x) = \sec((x^3+1)^2)$

g) $f(x) = -\cos(\text{sen}(\text{tg}(x^2)))$

h) $f(x) = \ln\left(\frac{\text{sen}(x^2)}{\cos(2x)}\right)$

i) $f(x) = e^{2x}\cos(x^2)$

j) $f(x) = \sqrt[3]{\cos^2(x^3)}$

3.19 Aplica la regla de la cadena. Puedes introducir funciones auxiliares para ordenar el cálculo. En la potencia variable, trabaja con base positiva.

a) $f(x) = \left(\frac{2x^4}{5} - \frac{3x^3}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + \frac{2}{3}\right)^5$

b) $f(x) = \sqrt{\text{sen}^3 x - \cos^2(3x-1) + \text{tg}\left(\frac{-3}{x^2+2}\right)}$

c) $f(x) = \text{tg}^4\left(\frac{\sqrt{4x^2+10x-1}}{x-16}\right)$

d) $f(x) = \ln\left(\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x - \cos^2 x} + \text{tg}^2 x\right)$

e) $f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{-3x^2+10x-1}}{\sqrt{x^4-4}}\right)^{x^2+4}$

3.20 Calcula las derivadas. Indica dónde es válida cada expresión.

a) $f(x) = \operatorname{arcsen}(x^2)$

b) $f(x) = \arccos((2x - 1)^2)$

c) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$

d) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2x}{x - 1}\right)$

e) $f(x) = \arccos(e^{2x})$

f) $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$

3.21 Deriva usando logaritmos cuando convenga. Para las potencias variables, trabaja en los intervalos donde la base es positiva.

a) $f(x) = (x^2 + 1)^{3x}$

b) $f(x) = x^{3x^2 - 7x - 1}$

c) $f(x) = (3x^2 + 1)^{\ln x}$

d) $f(x) = (\operatorname{sen}(x^2))^x$

e) $f(x) = (\cos(2x))^{3x}$

f) $f(x) = (\sqrt[5]{-x^3 - 15})^{x^2}$

g) $f(x) = (-x^{10} + 3x^5 - 1)^{\operatorname{sen} x}$

h) $f(x) = e^{-5x^3 + 4x - 1}$

3.22 Deriva implícitamente, suponiendo que y es una función derivable de x.

a) $y^3 - 2xy^2 = 3x^3 y$

b) $3xy + y^3 = 2x$

BLOQUE 04

Tangentes y normales

Pendientes, puntos de contacto y geometría. · 41 actividades

4.01 Halla las rectas tangentes a $f(x) = x - x^2$ en los puntos de abscisa $x = 2$ y $x = -3$.

4.02 Halla la pendiente de la tangente a $f(x) = x^2 + 4x + 3$ en los puntos de corte con los ejes.

4.03 Halla la tangente a $f(x) = \operatorname{sen}(2x) - \cos x$ en $x = \pi/3$.

4.04 Halla los puntos de $f(x) = x^3 - 3x$ donde la tangente sea horizontal.

4.05 Halla las rectas tangentes a la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ en los puntos de abscisa $x = 12/5$.

4.06 Halla la pendiente de la tangente en el punto indicado.

a) $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$; $x = -2$.

b) $f(x) = x^3 - x^2 + x$; $x = 3$.

c) $f(x) = 4x^2 - x - 5$; $x = 0$.

4.07 Halla las pendientes de las tangentes a $f(x) = x^2 - 4$ en sus cortes con los ejes.

4.08 Halla los puntos donde la tangente sea horizontal.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$

c) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 1$

4.09 Halla la ecuación de la recta tangente en el punto indicado.

a) $f(x) = 3x^2 - 1$; $x = 1$.

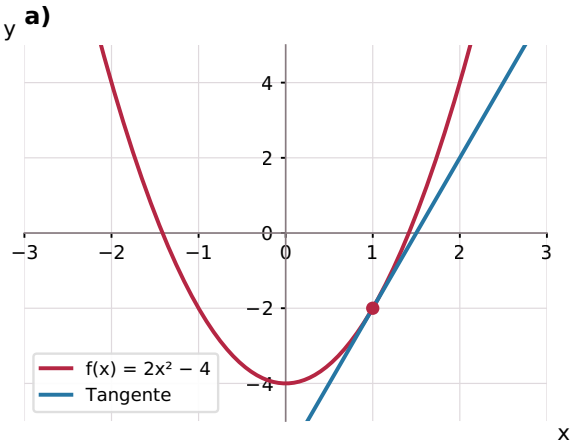
b) $f(x) = x^3$; $x = 2$.

c) $f(x) = x^2 - 2x$; $x = 1$.

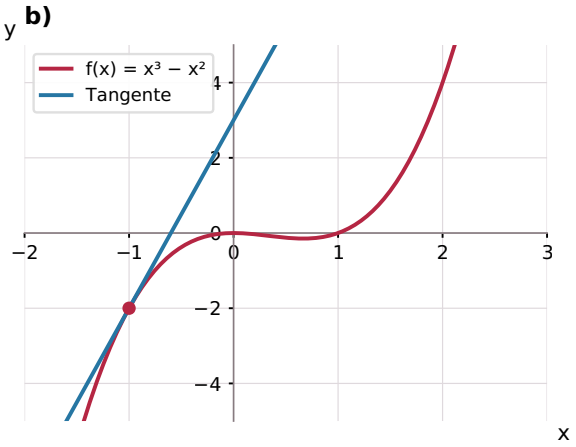
d) $f(x) = \frac{1}{x}$; $x = -1$.

4.10 Halla las ecuaciones de las tangentes representadas.

a)



b)



4.11 Halla las tangentes a $f(x) = x^2 + 2x - 5$.

a) En $x = 2$.

b) En $x = -1$.

c) En los puntos de ordenada -2.

d) En el corte con el eje Y.

4.12 Halla las tangentes a $f(x) = x^3 + 3x^2$.

a) En los cortes con los ejes.

b) En $x = 1$.

c) En los puntos de ordenada 4.

4.13 Halla la tangente a $f(x) = 2 + \ln x$ en $x = 1$.

4.14 Halla las tangentes a $f(x) = x^3$ paralelas a $y = x + 1$.

4.15 Halla las tangentes paralelas a $3x - y + 6 = 0$.

a) $f(x) = x^2 + 4x - 2$

b) $f(x) = \dfrac{3x}{1 - x}$

c) $f(x) = x^3 - 4$

d) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x}$

4.16 Halla las tangentes a $f(x) = \dfrac{x}{x + 3}$ paralelas a $y - x = 6$.

4.17 Halla el vértice de cada parábola usando que allí la tangente es horizontal.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 6$

b) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

c) $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

d) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$

e) $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

f) $f(x) = (x - 1)(2x + 5)$

4.18 Halla el punto de corte de las tangentes en $x = 2$ y $x = 0$.

a) $f(x) = x^2 - x$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 2$

c) $f(x) = x^2 + 1$

d) $f(x) = \ln(x + 1)$

4.19 ¿En qué puntos de $f(x) = x^3 - x^2 + x$ tiene la tangente pendiente 2?

4.20 Para $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$, halla x e interpreta geométricamente.

a) $f'(x) = 1$

b) $f'(x) = 4$

c) $f'(x) = 0$

d) $f'(x) = 1/4$

4.21 Halla la recta normal en el punto indicado.

a) $f(x) = x^2 - 2x$; $x = 2$.

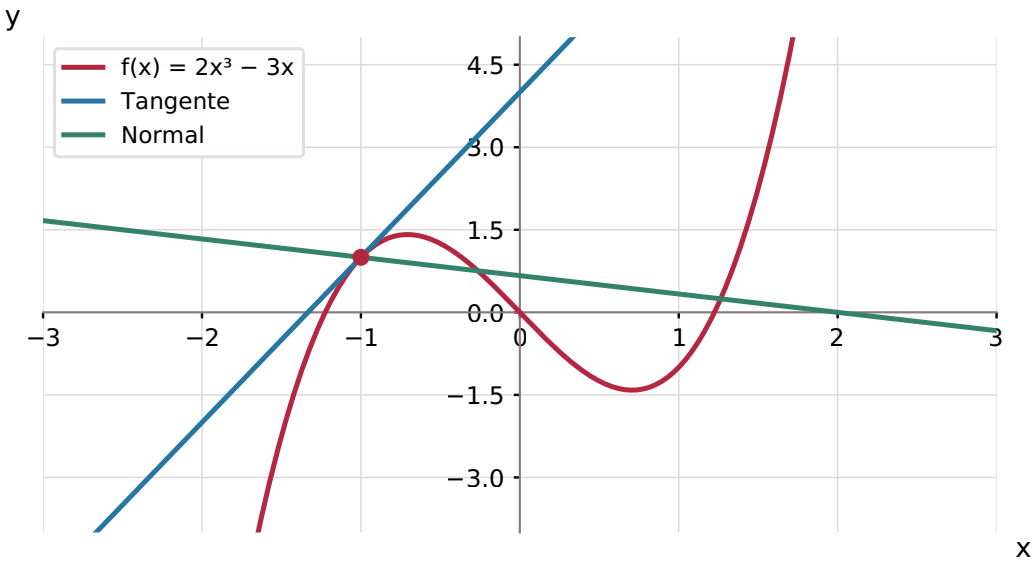
b) $f(x) = 2 - x^2$; $x = 3$.

c) $f(x) = x^3$; $x = 1$.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $x = -1$.

4.22 Halla la normal a $f(x) = x^2$ que sea paralela a $y = 2x - 1$.

4.23 Halla las ecuaciones de las dos rectas perpendiculares representadas, tangente y normal a $f(x) = 2x^3 - 3x$ en $(-1, 1)$.



4.24 Halla la tangente y la normal en el punto indicado.

a) $f(x) = 2^{3x-8}$; $x = 3$.

b) $f(x) = x^2 \ln(x + 3)$; $x = -2$.

c) $f(x) = (3x - 5)^6$; $x = 2$.

4.25 Halla la tangente y la normal en el punto indicado.

a) $f(x) = \sqrt{2x + 6}$; $x = 5$.

b) $f(x) = \text{sen}(2x + \pi)$; $x = 0$.

c) $f(x) = \text{tg}\left(\frac{\pi - x}{2}\right)$; $x = \pi$.

d) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$; $x = 0$.

4.26 Razona si existe algún punto con tangente horizontal.

a) $f(x) = \frac{x - 2}{x - 3}$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 3}$

c) $f(x) = \frac{3x}{x - 3}$

d) $f(x) = \frac{-x}{x^2 + 1}$

4.27 Determina si existen tangentes paralelas a $y - 2x + 3 = 0$.

a) $f(x) = x^3 - x + 7$

b) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

c) $f(x) = \ln(x^2)$

d) $f(x) = \frac{1}{x + 3}$

4.28 Halla los puntos donde la tangente sea paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x}{1 - x}$

c) $f(x) = x^3 - x^2$

d) $f(x) = x \ln x$

4.29 Halla los puntos donde la tangente sea paralela a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = x^3 + 2x^2$

c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$

d) $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2x}$

4.30 Halla los puntos de $f(x) = \ln x$ donde la tangente tenga la misma pendiente que cada recta.

a) $y - x = 2$

b) $4y = 3 - x$

c) $y + x - 1 = 0$

d) $2y - x = -4$

4.31 Considera $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$.

a) Halla las tangentes de pendiente $-1/2$.

b) ¿Es la recta $y + 2x + 2 = 0$ tangente a la curva? ¿En cuántos puntos?

4.32 Indica si las gráficas de cada pareja son tangentes en algún punto.

a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$; $g(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = e^x$; $g(x) = x$

c) $f(x) = \ln x$; $g(x) = x - 1$

d) $f(x) = \cos x$; $g(x) = x^2 + 1$

4.33 La tangente a f en $x = 2$ es $y = 5x - 7$. Halla $f(2)$ y $f'(2)$.

4.34 La recta $y = ax + b$ pasa por $(1, 6)$ y $(2, 8)$ y es tangente a g en $x = 0$. Halla $g(0)$ y $g'(0)$.

4.35 La derivada de una parábola es una recta que pasa por $(1, 1/2)$ y $(-1, -11/2)$. Halla la abscisa del vértice de la parábola.

4.36 La tangente y la normal a $f(x) = x^3 - 12x^2 + 42x - 40$ en $(3, 5)$ forman un cuadrilátero con los semiejes positivos. Halla su área.

4.37 Halla las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 20$ en los puntos de abscisa 4.

4.38 Considera $f(x) = x^2 - 4x + 6$.

a) Halla las tangentes paralelas a las bisectrices de los cuadrantes.

b) Halla su intersección y el corte de cada una con el eje X.

c) Halla el área del triángulo formado por esos tres puntos.

4.39 Considera $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$.

a) Halla los puntos con tangente horizontal.

b) Halla la recta que pasa por esos puntos.

c) Halla los puntos de la curva cuya tangente sea paralela a esa recta.

4.40 Considera $f(x) = \dfrac{2x - 9}{x - 3}$.

a) Halla los cortes con los ejes.

b) Halla la tangente en cada corte.

c) Halla el área de cada triángulo formado por una tangente y los ejes.

4.41 Sea $a > 0$. Demuestra que la tangente a $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ en un punto $P(x_0, y_0)$, con $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$, es $\dfrac{x}{\sqrt{x_0}} + \dfrac{y}{\sqrt{y_0}} = \sqrt{a}$. ¿Qué ocurre en los extremos?

BLOQUE 05

Derivabilidad y razonamiento

Continuidad, propiedades y demostraciones. · 6 actividades

5.01 Estudia si $f(x) = \begin{cases} kx + 2, x < -1 \\ x^3 - x + k, x \geq -1 \end{cases}$ es derivable en $x = -1$ según k.

5.02 Si f y g son inversas, de modo que $g(f(x)) = x$, ¿se verifica necesariamente $g'(f'(x)) = x$?

5.03 Sea $f(x) = \text{arctg}(\frac{\text{sen } x}{1 + \cos x})$. Estudia si f y f′ son constantes.

5.04 Demuestra que una raíz doble de un polinomio también es raíz de su derivada. Resuelve $12x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = 0$ sabiendo que tiene una raíz doble.

5.05 Demuestra que la tangente a una circunferencia en un punto es perpendicular al radio que llega a ese punto.

5.06 Demuestra que una función discontinua en un punto no puede ser derivable en ese punto.

BLOQUE 06

Derivadas de orden superior

Segundas derivadas, terceras y orden n. · 8 actividades

6.01 Halla las derivadas segunda y tercera.

a) $f(x) = x^3 + 4x^2$

b) $f(x) = x^2 - x + 5$

6.02 Halla las derivadas segunda y tercera de $f(x) = e^{2x} + \operatorname{sen} x$.

6.03 Calcula las seis primeras derivadas de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$.

6.04 Halla las tres primeras derivadas.

a) $f(x) = x^4 + 7x^3$

b) $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x}$

c) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$

d) $f(x) = e^{2x}$

6.05 Halla las derivadas primera, segunda y tercera.

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$

b) $f(x) = \sqrt{x - 2}$

c) $f(x) = \ln(2x)$

d) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x + \cos x}$

6.06 Halla los puntos donde se anula la derivada segunda.

a) $f(x) = -3x^3 + 4x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = \ln(x^2 + 2)$

6.07 Para $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 3}$, resuelve:

a) $f'(x) = 0$.

b) $f''(x) = 0$.

6.08 Halla la derivada de orden n de $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$.

BLOQUE 07

Parámetros y condiciones

Funciones que cumplen condiciones dadas. · 17 actividades

7.01 Halla m en $f(x) = \frac{3x + m}{mx^2}$ sabiendo que $f'(-1) = 5$.

7.02 Halla k en $f(x) = (k - 1)x^3 + x^2 - kx - 4$ para que las tangentes en $x = 1/3$ y $x = -1$ sean paralelas.

7.03 Halla a para que la tasa de variación media de $f(x) = 2x^2 + ax - 5$ en $[0, 2]$ sea 1.

7.04 Halla k para que $f(x) = \frac{kx - 5}{2x + 3}$ cumpla $f'(-1) = 19$.

7.05 Halla a y b para que $f(x) = ax^2 - 1$ y $g(x) = x^2 + 3x + b$ tengan la misma tangente en $x = 3$.

7.06 Halla los coeficientes o exponentes que hacen corresponder cada función y su derivada.

a) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 6$; $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$

b) $g(x) = a \ln x + bx$; $g'(x) = \frac{3}{x} - 5$

c) $h(x) = \frac{a^x}{x^b}$; $h'(x) = a^x\left(\frac{\ln 2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

d) $j(x) = \frac{x}{\sqrt[b]{x}}$; $j'(x) = \frac{2}{3\sqrt[b]{x}}$

7.07 Halla a, b y c en $f(x) = ax^2 + bx + c$, cuya gráfica pasa por $(0, -3)$ y $(2, 5)$ y tiene tangente horizontal en $x = -1$.

7.08 Halla la parábola que pasa por $(0, 9)$ y tiene como tangente en $(2, 9)$ la recta $y - 6x + 3 = 0$.

7.09 Halla a, b y c para que $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el origen, su tangente en $x = 1$ tenga pendiente 3 y $f''(-1) = 0$.

7.10 Halla a, b y c para que $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por $(3, 0)$ y sus tangentes en $x = 2$ y $x = 4$ sean horizontales.

7.11 Halla a, b y c en $f(x) = ax^4 + bx + c$, que pasa por $(1, -1)$, tiene tangente horizontal en $x = 1$ y tangente paralela a $y = 4x$ en $x = 0$.

7.12 Halla a, b y c para que $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por $(1, 6)$ y tenga tangentes horizontales en $x = 1$ y $x = 2$.

7.13 La recta $y = 9x - 14$ es tangente a $y = x^3 - 3x + k$. Halla el punto de tangencia y k. ¿Hay una única solución? Halla también las tangentes horizontales.

7.14 Obtén una función que pase por $(2, 5)$ y tenga derivada $f'(x) = 2x^2 + 6x - 3$.

7.15 Sean $f_1(x) = \sqrt{(5 - x)}$ y $f_2(x) = ax$. Halla a para que la tangente a f_1 sea:

a) Perpendicular a f_2 en $x = 1$.

b) Paralela a f_2 en $x = -4$.

7.16 Halla a para que $f(x) = x \ln x - ax$ tenga en $x = e$ una tangente paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

7.17 Obtén una función que pase por (2, 5) y cuya derivada sea $f'(x) = 2x^2 + 6x - 3$. Verifica el resultado derivando.

BLOQUE 08

Aplicaciones y retos

Movimiento, costes y problemas de elección. · 10 actividades

8.01 Una pelota se lanza hacia arriba a 49 m/s desde un edificio de 39 m. Su altura viene dada por $h(t) = 39 + 49t - 4{,}9t^2$, con t en segundos. Calcula la velocidad media en cada intervalo e interpreta el resultado y la validez física del modelo.

a) [0, 1]

b) [4, 6]

c) [11, 13]

8.02 El espacio recorrido por un objeto, en metros, se modeliza mediante $e(t) = 4t^2 + 2t + 1$, con t en segundos.

a) ¿Qué espacio indica el modelo a los 4 s y a los 7 s?

b) ¿Cuál es la velocidad media entre esos instantes?

8.03 La posición de un móvil es $e(t) = 2t^2/3 + t$, en metros, con t en segundos. Halla su velocidad instantánea a los 3 s.

8.04 Elige la respuesta correcta y justifica tu elección.

a) Máxima pendiente de f(x) = sen x. Opciones: 1; 2; 3; 4; π/2.

b) La tangente a $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ en (1, 0) corta de nuevo a la curva en: (0, 1); (−1, −4); (2, 1); (3, 10); (−2, −11).

c) Tangente a $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Opciones: $y = x + 1$; $y = 2x + 3$; $y = 3x - 8$; $y = -3x$; $y = 3x - 1$.

d) Derivada de orden n de f(x) = 1/x. Opciones: $\frac{n!}{x^{n+1}}$; $\frac{n!}{x^n}$; $\frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$; $-\frac{n!}{x^{n+1}}$; $\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}$.

8.05 En un modelo de producción, C(x) representa el coste total de fabricar x unidades. ¿Qué es el coste marginal?

8.06 ¿Qué se entiende por insumos en un proceso de producción?

8.07 Explica por qué el coste marginal puede expresarse como una derivada.

8.08 Para el modelo $C(x) = ax^3 + bx^2 + c$, con $x \geq 0$, ¿qué signo debe tener a si el término cúbico domina a largo plazo y el coste crece sin límite?

8.09 Un modelo de coste de fabricación es $C(x) = ax^3 + bx^2 + c$. Halla el coste marginal para parámetros reales a, b y c.

8.10 Clasifica la función de coste marginal $M(x) = 3ax^2 + 2bx$ según los parámetros reales a y b.

COMPRUEBA TUS RESULTADOS

Solucionario

Respuestas y justificaciones. Los códigos coinciden con los de las actividades.

01 · Tasas de variación y definición

1.01

a) 4.

b) 5.

c) 6.

d) 7.

e) 7.

f) 8. En general, TVM[a, b] = (f(b) − f(a))/(b − a) = a + b − 1.

1.02

a) h + 3: (f(2 + h) − f(2))/h = (h² + 3h)/h.

b) h + 5: (f(3 + h) − f(3))/h = (h² + 5h)/h.

1.03

a) El cociente incremental en a es −1/((a + h − 3)(a − 3)); al tender h a 0 da −1/(a − 3)². f′(2) = −1; f′(−1) = −1/16.

b) El cociente incremental es 4a + 2h + 1. Su límite es 4a + 1: f′(2) = 9 y f′(−1) = −3.

c) El cociente incremental es −(2a + h)/(a²(a + h)²). Su límite es −2/a³: f′(2) = −1/4 y f′(−1) = 2.

1.04

a) 3.

b) 48.

c) 12.

d) 27. Por definición, el cociente incremental es 3a² + 3ah + h² y su límite es 3a².

1.05

a) (f(x + h) − f(x))/h = 12x² + 12xh + 4h² → 12x², para todo x.

b) Racionalizando, el cociente incremental es 1/(√(x + h) + √x), cuyo límite es 1/(2√x), para x > 0. En 0 no hay derivada finita.

c) El cociente incremental es −1/((x + h + 3)(x + 3)); su límite es −1/(x + 3)², para x ≠ −3.

1.06

a) −9.

b) −7.

c) 5.

d) 9. En general, TVM[a, b] = 2(a + b) − 1.

1.07 **a)** $-1/2$: $(1-2)/(1-(-1))$.

b) $3/2$: $(4-1)/(3-1)$.

c) $1/2$: $(4-2)/(3-(-1))$.

1.08 **a)** 1: $(1-(-1))/2$.

b) $21/4$: $f(4) = 7$ y $f(3) = 7/4$.

c) $-2/\pi$: $(0-1)/(\pi - \pi/2)$.

1.09 **a)** La expresión general es $7 + 2h$. En $[2, 3]$, $h = 1$ y la tasa es 9.

b) En $[2, 5]$: $h = 3$; tasa 13.

c) En $[2, 8]$: $h = 6$; tasa 19.

d) En $[2, 10]$: $h = 8$; tasa 23.

1.10 **a)** La expresión general es $-1/(1+h)$. En $[1, 2]$: $-1/2$.

b) En $[1, 3]$: $-1/3$.

c) En $[1, 5]$: $-1/5$.

d) En $[1, 10]$: $-1/10$.

1.11 **a)** Ejemplos: $f(x) = x^2 - x + 4$ y $g(x) = 2x^2 - 4x + 4$.

b) Ambos tienen tasa $(10-4)/3 = 2$. Toda función que pase por esos dos puntos tendrá esa misma tasa en $[0, 3]$.

1.12 Para $a < b$, $(f(b) - f(a))/(b-a) = 2(b-a)/(b-a) = 2$. Es la pendiente constante de la recta.

1.13 **a)** 3: el cociente incremental es 3.

b) 7: el cociente incremental es $7 + h$.

c) 2: el cociente incremental es 2.

d) -6: el cociente incremental es $-6/(1+h)$.

e) -6: el cociente incremental es $-6 + h$.

f) 0: el cociente incremental es h^2. En cada caso se toma el límite cuando $h \to 0$.

1.14 **a)** El cociente incremental es 2; $f'(x) = 2$.

b) El cociente incremental es $1/2$; $f'(x) = 1/2$.

c) El cociente incremental es $3x^2 + 3xh + h^2$; $f'(x) = 3x^2$.

d) El cociente incremental es $4x + 2h - 3$; $f'(x) = 4x - 3$.

e) El cociente incremental es $-12/(x(x+h))$; $f'(x) = -12/x^2$, con $x \neq 0$.

f) El cociente incremental es $36x^3 + 54x^2h + 36xh^2 + 9h^3 + 24x + 12h$; $f'(x) = 36x^3 + 24x$.

1.15 **a)** La tasa es 2 + 2h. Para los intervalos indicados, h = 2, 4 y 7: tasas 6, 10 y 16.

b) Al tender h a 0, la tasa tiende a 2. Como $f'(x) = 4x - 2$, $f'(1) = 2$.

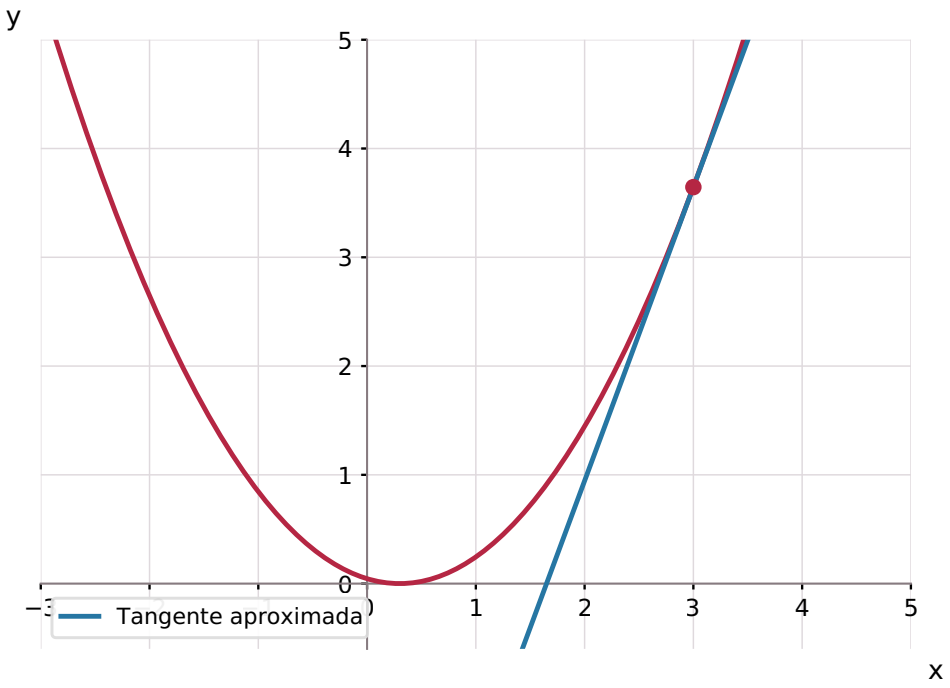
1.16 **a)** −2.

b) −1.

c) 0.

d) 2. La parábola tiene ecuación $f(x) = x^2/2 - x + 3/2$, luego $f'(x) = x - 1$.

1.17 Al trazar la tangente en x = 3, por cada unidad horizontal asciende entre 2 y 3 unidades. La pendiente estimada es aproximadamente 2,7.



02 · Reglas de derivación

2.01

a) $f'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

b) $f'(x) = 4x^3$, $x \in \mathbb{R}$

c) $f'(x) = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$, $x > 0$

d) $f'(x) = -\dfrac{5}{x^6}$, $x \neq 0$

2.02

a) $f'(x) = \dfrac{4}{7\sqrt[7]{x^3}}$, $x \neq 0$

b) $f'(x) = 8x^7$, $x \in \mathbb{R}$

c) $f'(x) = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$, $x \neq 0$

d) $f'(x) = -\dfrac{4}{x^5}$, $x \neq 0$

2.03

a) $f'(x) = 2^x \ln 2$, $x \in \mathbb{R}$

b) $f'(x) = 3^x \ln 3$, $x \in \mathbb{R}$

c) $f'(x) = 4^x \ln 4$, $x \in \mathbb{R}$

2.04

a) $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 2}$, $x > 0$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 3}$, $x > 0$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 4}$, $x > 0$

2.05

a) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

b) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$, $x > 0$

d) $f'(x) = 3^x \ln 3 - \dfrac{1}{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

2.06

a) $f'(x) = 6x^2 + 8x - 8$, $x \in \mathbb{R}$

b) $f'(x) = 2\cos x + 3\operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$

c) $f'(x) = \dfrac{7}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{9}{4\sqrt[4]{x}}$, $x > 0$

d) $f'(x) = -\dfrac{1}{2x^2} - 5$, $x \neq 0$

2.07

a) $f'(x) = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

b) $f'(x) = (1 + x)e^x$, $x \in \mathbb{R}$

c) $f'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x$, $x \in \mathbb{R}$

d) $f'(x) = \ln x + 1$, $x > 0$

e) $f'(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, $x \in \mathbb{R}$

f) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$

g) $f'(x) = (2x + 2)\operatorname{sen} x + (x^2 + 2x)\cos x$, $x \in \mathbb{R}$

h) $f'(x) = (e^x - 1)\ln x + \frac{e^x - x}{x}$, $x > 0$

2.08

a) $f'(x) = 6x \log_2 x + \frac{3x}{\ln 2}$, $x > 0$

b) $f'(x) = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$, $x \in \mathbb{R}$

c) $f'(x) = \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[3]{x}\operatorname{sen} x$, $x \neq 0$

d) $f'(x) = \cos x$, $\cos x \neq 0$

e) $f'(x) = (4 - x^3)\operatorname{sen} x + (4x + 3x^2)\cos x$, $x \in \mathbb{R}$

f) $f'(x) = \frac{1 - 4\ln x}{x^5} + x(x + 2)e^x$, $x > 0$

g) $f'(x) = (\cos x + \operatorname{sen} x)\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos^2 x}$, $\cos x \neq 0$

h) $f'(x) = 6\sqrt{x} + \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$, $x > 0$

2.09

a) $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$, $x \neq 0$

b) $f'(x) = \frac{4 - 3x}{2\sqrt{x}(3x + 4)^2}$, $x > 0$

c) $f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{(x + 1)^2}$, $x \neq -1$

2.10

a) $f'(x) = \frac{x \cos x - 3\operatorname{sen} x}{x^4}$, $x \neq 0$

b) $f'(x) = \frac{\cos x + 2x \operatorname{sen} x}{2\sqrt{x}\cos^2 x}$, $x > 0$ y $\cos x \neq 0$

c) $f'(x) = \frac{(x - 3)\cos x - 6 - \operatorname{sen} x}{(x - 3)^2}$, $x \neq 3$

2.11

a) 8.

b) -2.

c) $-7/9$.

d) $-3/(2\sqrt{5})$.

e) $-5/54$.

2.12

a) $f'(x) = 12x^3 - 4x - 7$.

b) $f'(-2) = -95$, $f'(0) = -7$, $f'(1) = 1$.

2.13

a) $f'(x) = 12x^3 - 15x^2 + 1$.

b) $f'(3) = 190$, $f'(-2) = -155$, $f'(0) = 1$.

c) $f'(4 - 8) = -1007$; $f'(4) - f'(8) = 529 - 5185 = -4656$. No son iguales.

2.14

a) $f'(x) = -9x^2 + 10x - 1$

b) $f'(x) = -8x^3 + 36x + 1$

c) $f'(x) = 3x^2 + 2$

d) $f'(x) = 6x^5 - 20x + \frac{3}{x^4}$, $x \neq 0$

2.15

a) $f'(x) = 20x^3 + 9x^2 - 14x + 12$

b) $f'(x) = \frac{3x^2 + 6x - 5}{(x + 1)^2}$, $x \neq -1$

c) $f'(x) = -3x + 4$

2.16

a) $f'(x) = (10x - 3)(x^4 - 2x + 5) + (5x^2 - 3x)(4x^3 - 2) = 30x^5 - 15x^4 - 30x^2 + 62x - 15$.

b) $f'(-3) = -8976$, $f'(0) = -15$, $f'(2) = 709$.

2.17

a) $f'(x) = 36x^2 - 4$

b) $f'(x) = \frac{-18x^2 + 22x - 5}{3}$

c) $f'(x) = 40x^3 - 108x^2 + 56x - 6$

2.18

a) $f'(x) = \frac{-3x^2 + 2x - 5}{(x^2 - 5x)^2}$, $x \neq 0, 5$.

b) $f'(-1) = -5/18$; $f'(1) = -3/8$; $f'(2) = -13/36$.

2.19

a) $f'(x) = \frac{14x^3 - 42x^2}{(x - 2)^2}$, $x \neq 2$

b) $f'(x) = \frac{84x^5 - 18x^4 + 72x^3}{(7x^2 - x + 3)^2}$, $x \in \mathbb{R}$

c) $f'(x) = -\frac{8x}{(x^2 - 1)^2}$, $x \neq \pm 1$

d) $f'(x) = \frac{x^2 - 12x + 3}{(2x^2 - x)^2}$, $x \neq 0, \frac{1}{2}$

2.20

$f'(x) = -\frac{8x}{(x^2 - 1)^2}$, $x \neq \pm 1$

2.21

a) $f'(x) = \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}$, $x \in \mathbb{R}$

b) $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{5\sqrt[5]{x^4}}$, $x > 0$

c) $f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} - \frac{7}{10\sqrt[10]{x^3}}$, $x > 0$

d) $f'(x) = \frac{3 - \sqrt[3]{x}}{6\sqrt{x}(1 - \sqrt[3]{x})^2}$, $x > 0$ y $x \neq 1$

2.22

a) $f'(x) = \dfrac{5x^2 + 4x - 8}{(5x + 2)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

b) $f'(x) = \dfrac{-5x^2 + 34x - 41}{(x^2 - 3x + 2)^2}$, $x \neq 1,2$

c) $f'(x) = \dfrac{5x^2 + 4x - 1}{(2x^2 - x)^2} - \dfrac{x + 10}{2x^2\sqrt{x + 5}}$, $x > -5$ y $x \neq 0, \dfrac{1}{2}$

2.23

a) $f'(x) = \dfrac{1}{x} + e^x$, $x > 0$

b) $f'(x) = 2x \log x + \dfrac{x}{\ln 10}$, $x > 0$

c) $f'(x) = 2x \log_2 x + \dfrac{x^2 + 3}{x \ln 2}$, $x > 0$

d) $f'(x) = \dfrac{1 - x \ln x - 4x}{xe^x}$, $x > 0$

e) $f'(x) = \dfrac{1 - x \ln x}{xe^x}$, $x > 0$

f) $f'(x) = 5e^x - 3^x \ln 3$, $x \in \mathbb{R}$

2.24

a) $f'(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

b) $f'(x) = \dfrac{-x \operatorname{sen} x - 2\cos x}{x^3}$, $x \neq 0$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$, $\operatorname{sen} x \cos x \neq 0$

d) $f'(x) = \operatorname{tg} x + \dfrac{x}{\cos^2 x}$, $\cos x \neq 0$

e) $f'(x) = \arccos x - \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$

f) $f'(x) = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$, $\operatorname{sen} x \cos x \neq 0$

2.25

a) $f'(x) = 2$, $-1 < x < 1$ En los extremos ± 1, la derivada unilateral también vale 2.

b) $f'(x) = 1 + 2x \operatorname{arctg} x$

c) $f'(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} + \dfrac{\ln x}{\cos^2 x}$, $x > 0$ y $\cos x \neq 0$

d) $f'(x) = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$

e) $f'(x) = \dfrac{(x - 2)\operatorname{sen} x + \cos x}{(2 - x)^2}$, $x \neq 2$

03 · Composición y regla de la cadena

3.01

a) $f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$, $x < -1$ o $x > 0$

b) $f'(x) = \frac{3(\text{arcsen } x)^2}{\sqrt{1 - x^2}}$, $-1 < x < 1$

c) $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$

3.02

a) $f'(x) = -2\cos x \text{ sen } x$, $x \in \mathbb{R}$

b) $f'(x) = -\frac{5}{(x - 5)^2 \cos^2(\frac{x}{x - 5})}$, $x \neq 5$ y $\cos(\frac{x}{x - 5}) \neq 0$

c) $f'(x) = (2x + 7)e^{x^2 + 7x - 4}$, $x \in \mathbb{R}$

3.03

a) $f'(x) = 3(4x^2 + 5x - 2)^2(8x + 5)$, $x \in \mathbb{R}$

b) $f'(x) = \frac{\cos x}{5\sqrt[5]{\text{sen}^4 x}}$, $\text{sen } x \neq 0$

c) $f'(x) = -\frac{3}{\text{tg}^4 x \cdot \cos^2 x}$, $\text{sen } x \neq 0$ y $\cos x \neq 0$

d) $f'(x) = \frac{7 - 2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 7x - 12)^4}}$, $x^2 - 7x - 12 \neq 0$

3.04

a) $f'(x) = (6x - 2)\ln 5 \cdot 5^{3x^2 - 2x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

b) $f'(x) = -2x \text{ sen}(x^2)\ln 7 \cdot 7^{\cos(x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$

3.05

a) $f'(x) = \frac{1}{2x}$, $x > 0$

b) $f'(x) = -\frac{2}{x}$, $x \neq 0$

3.06

a) $f'(x) = \frac{2}{\cos^2(2x - 5)}$, $\cos(2x - 5) \neq 0$

b) $f'(x) = -\frac{\text{sen } \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$ En $x = 0$ hay derivada por la derecha $-1/2$; no hay entorno real del dominio a la izquierda.

3.07

a) $f'(x) = (x + 1)^x(\ln(x + 1) + \frac{x}{x + 1})$, $x > -1$

b) $f'(x) = (x^2 + 1)^{x^3}(3x^2 \ln(x^2 + 1) + \frac{2x^4}{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$

3.08

a) $f'(x) = \frac{3x^2 + 1}{\sqrt{1 - (x^3 + x)^2}}$, $|x^3 + x| < 1$

b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}$, $x \neq 0$

3.09

a) $f'(x) = 2x \cos(x^2)e^{\text{sen}(x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$

b) $f'(x) = \frac{1}{6x\sqrt{\ln(\sqrt[3]{x})}}$, $x > 1$

3.10 $f'(x) = -\dfrac{1}{2(x+1)^2\sqrt{\dfrac{2x+3}{x+1}}} - \dfrac{2}{x^3}$, $x < -\dfrac{3}{2}$ o $x > -1$, excluidos 0 y 1

3.11

a) $g(u) = \ln u$; $h = 2x^2$. $f' = 2/x$, $x \neq 0$.

b) $g(u) = \log_3 u$; $h = x^2 - 1$. $f' = 2x/((x^2 - 1)\ln 3)$, $|x| > 1$.

c) $g(u) = 10^u$; $h = x + 3$. $f' = 10^{x+3}\ln 10$.

d) $g(u) = e^u$; $h = 3x$. $f' = 3e^{3x}$.

e) $g(u) = \cos u$; $h = 3x - 1$. $f' = -3\operatorname{sen}(3x - 1)$.

f) $g(u) = \operatorname{sen} u$; $h = x^2 - 3$. $f' = 2x\cos(x^2 - 3)$.

3.12

a) $g(u) = \log_3 u$; $h = 2x + 1$. $f' = 2/((2x + 1)\ln 3)$, $x > -1/2$.

b) $g(u) = u^4$; $h = 3x^2 - 3x + 1$. $f' = 4(3x^2 - 3x + 1)^3(6x - 3)$.

c) $g(u) = \operatorname{sen} u$; $h = \sqrt{x}$. $f' = \cos\sqrt{x}/(2\sqrt{x})$, $x > 0$.

d) $g(u) = \operatorname{arctg} u$; $h = e^x$. $f' = e^x/(1 + e^{2x})$.

e) $g(u) = 2^u$; $h = 3x - 4$. $f' = 3\ln 2 \cdot 2^{3x-4}$.

f) $g(u) =$ raíz cuarta de u; $h = x^2 - 1$. $f' = \dfrac{x}{2\sqrt[4]{(x^2-1)^3}}$, $|x| > 1$.

g) $g(u) = \cos u$; $h = \ln x$. $f' = -\operatorname{sen}(\ln x)/x$, $x > 0$.

h) $g(u) = 3^u$; $h = \cos x$. $f' = -3^{\cos x}\ln 3 \cdot \operatorname{sen} x$.

3.13

a) $f'(x) = \dfrac{4x + 3}{x(2x + 1)}$, $x < -\dfrac{1}{2}$ o $x > 0$

b) $f'(x) = e^x \ln x + \dfrac{e^x}{x}$, $x > 0$

c) $f'(x) = e^{\frac{3x^2-1}{x}}(3 + \dfrac{1}{x^2})$, $x \neq 0$

d) $f'(x) = \dfrac{4e^{4x+1}(1 + x^4 - x^3)}{(1 + x^4)^2}$

e) $f'(x) = \dfrac{x - 14}{x(x - 7)\ln 2}$, $x > 7$

f) $f'(x) = \dfrac{4x^3 \ln 3 \cdot 3^{\ln(x^4+2)}}{x^4 + 2}$

g) $f'(x) = e^{x^2+x}(\dfrac{3}{x} + (2x + 1)\ln(x^3))$, $x > 0$

h) $f'(x) = \dfrac{3e^{3x} + e^x}{e^{3x} + e^x} + \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$

3.14

a) $f'(x) = 6x\cos(3x^2)$

b) $f'(x) = -2x\,\text{sen}(x^2+1)$

c) $f'(x) = \dfrac{2x-3}{\cos^2(x^2-3x)}$, $\cos(x^2-3x) \neq 0$

d) $f'(x) = \dfrac{(2x+3)\cos\sqrt{x^2+3x}}{2\sqrt{x^2+3x}}$, $x < -3$ o $x > 0$

e) $f'(x) = -\dfrac{\text{sen}(\frac{x-1}{x})}{x^2}$, $x \neq 0$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}\cos^2\sqrt{x-1}}$, $x > 1$ y $\cos\sqrt{x-1} \neq 0$

g) $f'(x) = -\dfrac{(3x^4-1)\cos(\frac{x}{-x^4+x-1})}{(-x^4+x-1)^2}$

h) $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{3/2}\cos^2(\frac{2}{\sqrt{1-x}})}$, $x < 1$ y $\cos(\frac{2}{\sqrt{1-x}}) \neq 0$

3.15

a) $f'(x) = 3^x(2x+1)^2(6+(2x+1)\ln 3)$

b) $f'(x) = \dfrac{9-x^2}{2x^4\sqrt{\frac{x^2-3}{x^3}}}$, $-\sqrt{3} < x < 0$ o $x > \sqrt{3}$

c) $f'(x) = \dfrac{x^2+9}{2x^{5/2}}$, $x > 0$

d) $f'(x) = (5-2x)e^{-x}$

e) $f'(x) = \dfrac{9-2x^2}{x^4\sqrt{x^2-3}}$, $|x| > \sqrt{3}$

f) $f'(x) = 2x + \dfrac{9}{2x^{5/2}}$, $x > 0$

3.16

a) $f'(x) = 5(3x^4-2x+1)^4(12x^3-2)$

b) $f'(x) = \dfrac{5x^4(1+2x^3)}{(1-x^3)^6}$, $x \neq 1$

c) $f'(x) = 5x^2(\sqrt[3]{x^3-1})^2$, $x \in \mathbb{R}$

d) $f'(x) = 8e^x(1+2e^x)^3$

e) $f'(x) = \dfrac{24x[\ln((x^2-1)^3)]^3}{x^2-1}$, $|x| > 1$

f) $f'(x) = -18e^x(1-3e^x)^5$

g) $f'(x) = 4x\,\text{sen}(x^2)\cos(x^2)$

h) $f'(x) = -3(2x-7)\cos^2(x^2-7x+1)\text{sen}(x^2-7x+1)$

i) $f'(x) = \dfrac{6x^2\,\text{tg}(x^3-8)}{\cos^2(x^3-8)}$, $\cos(x^3-8) \neq 0$

j) $f'(x) = \dfrac{3}{x^2}(\text{sen}(\frac{1}{x}) + \cos(\frac{1}{x}))^2(\text{sen}(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}))$, $x \neq 0$

3.17

a) $f'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}$, $\operatorname{tg} x > 0$

b) $f'(x) = -\dfrac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}}$, $\cos x > 0$

c) $f'(x) = \dfrac{2}{x \ln 2}$, $x \neq 0$

d) $f'(x) = -\operatorname{sen} x \cos(\cos x)$

e) $f'(x) = \dfrac{2x}{1 + x^4}$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{x \cos^2(\ln x)}$, $x > 0$ y $\cos(\ln x) \neq 0$

g) $f'(x) = -\dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$ En 0, la derivada por la derecha es $-1/2$.

h) $f'(x) = \dfrac{2\log_2 x}{x \ln 2}$, $x > 0$

i) $f'(x) = -\cos x \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$

j) $f'(x) = \dfrac{2\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}$

3.18

a) $f'(x) = e^{(\sqrt{x}+1)^2}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$

b) $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1} - 2$, $|x| > 1$

c) $f'(x) = \dfrac{2e^x + \frac{1}{x \ln 2}}{2\sqrt{2e^x + \log_2(3x)}}$, $x > 0$ y radicando > 0

d) $f'(x) = \dfrac{2\ln(\ln x)}{x \ln x}$, $x > 1$

e) $f'(x) = 6x \cos(x^2) + 4\operatorname{sen} x \cos x$

f) $f'(x) = \dfrac{6x^2(x^3+1)\operatorname{sen}((x^3+1)^2)}{\cos^2((x^3+1)^2)}$, $\cos((x^3+1)^2) \neq 0$

g) $f'(x) = \dfrac{2x \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x^2)))\cos(\operatorname{tg}(x^2))}{\cos^2(x^2)}$, $\cos(x^2) \neq 0$

h) $f'(x) = 2x \operatorname{cotg}(x^2) + 2\operatorname{tg}(2x)$, $\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{\cos(2x)} > 0$

i) $f'(x) = 2e^{2x}(\cos(x^2) - x \operatorname{sen}(x^2))$

j) $f'(x) = -\dfrac{2x^2 \operatorname{sen}(x^3)}{\sqrt[3]{\cos(x^3)}}$, $\cos(x^3) \neq 0$

3.19

a) Sea $u = 2x^4/5 - 3x^3/2 - x^2/3 + x/2 + 2/3$. $f' = 5u^4(8x^3/5 - 9x^2/2 - 2x/3 + 1/2)$.

b) Sea $u = \operatorname{sen}^3 x - \cos^2(3x - 1) + \operatorname{tg}(-3/(x^2 + 2))$. $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, con $u' = 3\operatorname{sen}^2 x \cos x + 6\cos(3x - 1)\operatorname{sen}(3x - 1) + \dfrac{6x}{(x^2+2)^2 \cos^2(\frac{-3}{x^2+2})}$. Válida donde $u > 0$.

c) Sean $q = 4x^2 + 10x - 1$ y $u = \sqrt{q}/(x - 16)$. $f' = \dfrac{4\operatorname{tg}^3 u}{\cos^2 u} \cdot \dfrac{\frac{(4x+5)(x-16)}{\sqrt{q}} - \sqrt{q}}{(x-16)^2}$. Se exige $q > 0$, $x \neq 16$ y $\cos u \neq 0$.

d) Sea $u = 1/(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x) + \operatorname{tg}^2 x$. $f' = \dfrac{1}{u}\left(-\dfrac{2\operatorname{sen}(2x)}{(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)^2} + \dfrac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\right)$. Válida con denominadores no nulos y $u > 0$.

e) Sean $q = -3x^2 + 10x - 1$, $r = x^4 - 4$ y $v =$ raíz cúbica de q dividida por $\sqrt{r}$. $f' = v^{x^2+4}[2x \ln v + (x^2 + 4)(\dfrac{-6x + 10}{3q} - \dfrac{2x^3}{r})]$. Se usa $q > 0$ y $r > 0$.

3.20

a) $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$, $|x| < 1$

b) $f'(x) = -\dfrac{4(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^4}}$, $0 < x < 1$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$, $x > 0$

d) $f'(x) = -\dfrac{2}{(x-1)^2\sqrt{1-\frac{4x^2}{(x-1)^2}}}$, $-1 < x < \dfrac{1}{3}$

e) $f'(x) = -\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}$, $x < 0$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}$, $x > 0$

3.21

a) $f' = (x^2+1)^{3x}[3\ln(x^2+1) + \dfrac{6x^2}{x^2+1}]$

b) $f' = x^{3x^2-7x-1}[(6x-7)\ln x + \dfrac{3x^2-7x-1}{x}]$, $x > 0$.

c) $f' = (3x^2+1)^{\ln x}[\dfrac{\ln(3x^2+1)}{x} + \dfrac{6x\ln x}{3x^2+1}]$, $x > 0$.

d) $f' = (\text{sen}(x^2))^x[\ln(\text{sen}(x^2)) + 2x^2\,\text{cotg}(x^2)]$, $\text{sen}(x^2) > 0$.

e) $f' = (\cos(2x))^{3x}[3\ln(\cos(2x)) - 6x\,\text{tg}(2x)]$, $\cos(2x) > 0$.

f) Sea $q = -x^3 - 15$. $f' = (\sqrt[5]{q})^{x^2}[\dfrac{2x}{5}\ln q - \dfrac{3x^4}{5q}]$, $q > 0$.

g) Sea $q = -x^{10} + 3x^5 - 1$. $f' = q^{\text{sen } x}[\cos x \ln q + \dfrac{(-10x^9 + 15x^4)\text{sen } x}{q}]$, $q > 0$.

h) $f' = (-15x^2+4)e^{-5x^3+4x-1}$

3.22

a) Al derivar: $3y^2y' - 2y^2 - 4xyy' = 9x^2y + 3x^3y'$. $y' = \dfrac{9x^2y + 2y^2}{3y^2 - 4xy - 3x^3}$, cuando el denominador no es cero.

b) Al derivar: $3y + 3xy' + 3y^2y' = 2$. $y' = \dfrac{2-3y}{3x+3y^2}$, cuando el denominador no es cero.

04 · Tangentes y normales

4.01 **a)** $f'(x) = 1 - 2x$. En $(2, -2)$, pendiente -3: $y + 2 = -3(x - 2)$, luego $y = -3x + 4$.

b) En $(-3, -12)$, pendiente 7: $y + 12 = 7(x + 3)$, luego $y = 7x + 9$.

4.02 **a)** Cortes con el eje X: $(-1, 0)$ y $(-3, 0)$. Como $f'(x) = 2x + 4$, las pendientes son 2 y -2.

b) Corte con el eje Y: $(0, 3)$, con pendiente $f'(0) = 4$.

4.03 $y - \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = (\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)(x - \frac{\pi}{3})$. Se usa $f(\pi/3) = (\sqrt{3} - 1)/2$ y $f'(\pi/3) = \sqrt{3}/2 - 1$.

4.04 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ implica $x = \pm 1$. Puntos: $(-1, 2)$ y $(1, -2)$.

4.05 **a)** Hay dos puntos: $(12/5, 6/5)$ y $(12/5, -6/5)$. La derivación implícita da $y' = -4x/(9y)$.

b) En el punto superior: pendiente $-8/9$ y recta $y = -8x/9 + 10/3$. En el inferior: pendiente $8/9$ y recta $y = 8x/9 - 10/3$.

4.06 **a)** -8, pues $f'(x) = 6x + 4$.

b) 22, pues $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

c) -1, pues $f'(x) = 8x - 1$.

4.07 $f'(x) = 2x$. En $(2, 0)$, pendiente 4; en $(-2, 0)$, pendiente -4; en $(0, -4)$, pendiente 0.

4.08 **a)** $f'(x) = 3x(x + 2)$. Puntos: $(0, 0)$ y $(-2, 4)$.

b) $f'(x) = 3(x + 1)^2$. Punto: $(-1, -1)$.

c) $f'(x) = 3(x + 1)(x + 3)$. Puntos: $(-1, -5)$ y $(-3, -1)$.

4.09 **a)** $y = 6x - 4$.

b) $y = 12x - 16$.

c) $y = -1$.

d) $y = -x - 2$.

4.10 **a)** Para $f(x) = 2x^2 - 4$ en $(1, -2)$: pendiente 4, $y = 4x - 6$.

b) Para $f(x) = x^3 - x^2$ en $(-1, -2)$: pendiente 5, $y = 5x + 3$.

4.11 **a)** $y = 6x - 9$.

b) $y = -6$.

c) En $(1, -2)$: $y = 4x - 6$. En $(-3, -2)$: $y = -4x - 14$.

d) $y = 2x - 5$.

4.12 **a)** En (0, 0), $y = 0$. En $(-3, 0)$, $y = 9x + 27$.

b) $y = 9x - 5$.

c) En (1, 4), $y = 9x - 5$. En $(-2, 4)$, $y = 4$.

4.13 $f(1) = 2$ y $f'(1) = 1$. Recta: $y = x + 1$.

4.14 **a)** La pendiente debe ser 1: $3x^2 = 1$, $x = \pm 1/\sqrt{3}$.

b) $y = x - \frac{2}{3\sqrt{3}}$ y $y = x + \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

4.15 **a)** En $x = -1/2$: $y = 3x - 9/4$.

b) En $x = 0$ y $x = 2$: $y = 3x$ e $y = 3x - 12$.

c) En $x = 1$ y $x = -1$: $y = 3x - 6$ e $y = 3x - 2$.

d) No existe: $f'(x) = 3 - 1/x^2$ nunca vale 3.

4.16 **a)** $f'(x) = 3/(x + 3)^2 = 1$, luego $x = -3 \pm \sqrt{3}$.

b) Las rectas son $y = x + 4 - 2\sqrt{3}$ e $y = x + 4 + 2\sqrt{3}$.

4.17 **a)** (2, 2).

b) (1, 0).

c) (1, 2).

d) $(-1, -5)$.

e) (1, 2).

f) $(-3/4, -49/8)$. Se resuelve $f'(x) = 0$ y se sustituye en f.

4.18 **a)** Tangentes $y = 3x - 4$ e $y = -x$; corte $(1, -1)$.

b) Tangentes $y = -2$ e $y = -4x + 2$; corte $(1, -2)$.

c) Tangentes $y = 4x - 3$ e $y = 1$; corte (1, 1).

d) Tangentes $y = x/3 - 2/3 + \ln 3$ e $y = x$. Corte $(-1 + 3 \ln 3/2, -1 + 3 \ln 3/2)$.

4.19 $3x^2 - 2x + 1 = 2$ implica $x = 1$ o $x = -1/3$. Puntos (1, 1) y $(-1/3, -13/27)$.

4.20 **a)** $x = 0$ y -4; tangentes de pendiente 1.

b) $x = -1$ y -3; tangentes de pendiente 4.

c) No hay solución: no hay tangentes horizontales.

d) $x = 2$ y -6; tangentes de pendiente 1/4. Se utiliza $f'(x) = 4/(x + 2)^2$.

4.21 **a)** $y = -x/2 + 1$.

b) $y = x/6 - 15/2$.

c) $y = -x/3 + 4/3$.

d) $y = x$. En todos los casos, la pendiente normal es $-1/f'(a)$.

4.22 La pendiente tangente debe ser $-1/2$: $2x = -1/2$, $x = -1/4$. La normal por $(-1/4, 1/16)$ es $y = 2x + 9/16$.

4.23 $f'(-1) = 3$. Tangente $y = 3x + 4$; normal $y = -x/3 + 2/3$.

4.24 **a)** En $(3, 2)$, pendiente $6 \ln 2$. Tangente $y - 2 = 6 \ln 2(x - 3)$; normal $y - 2 = -(x - 3)/(6 \ln 2)$.

b) En $(-2, 0)$, pendiente 4. Tangente $y = 4x + 8$; normal $y = -x/4 - 1/2$.

c) En $(2, 1)$, pendiente 18. Tangente $y = 18x - 35$; normal $y = -x/18 + 10/9$.

4.25 **a)** Tangente $y = x/4 + 11/4$; normal $y = -4x + 24$.

b) Tangente $y = -2x$; normal $y = x/2$.

c) Tangente $y = -x/2 + \pi/2$; normal $y = 2x - 2\pi$.

d) Tangente $y = 0$; normal vertical $x = 0$.

4.26 **a)** No: $f' = -1/(x - 3)^2$ nunca es cero.

b) Sí: $f' = (x^2 - 6x + 2)/(x - 3)^2$ se anula en $x = 3 \pm \sqrt{7}$. Los puntos son $(3 \pm \sqrt{7}, 6 \pm 2\sqrt{7})$, tomando signos correspondientes.

c) No: $f' = -9/(x - 3)^2$ nunca es cero.

d) Sí: $f' = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)^2$. Puntos $(-1, 1/2)$ y $(1, -1/2)$.

4.27 **a)** Sí, en $x = \pm 1$: se resuelve $3x^2 - 1 = 2$.

b) Sí, en $x = -1$: $2x + 4 = 2$.

c) Sí, en $x = 1$: $2/x = 2$.

d) No: $f' = -1/(x + 3)^2$ es negativa y no puede valer 2.

4.28 **a)** Pendiente 1: $2x - 3 = 1$. Punto $(2, -1)$.

b) $1/(1 - x)^2 = 1$. Puntos $(0, 0)$ y $(2, -2)$.

c) $3x^2 - 2x = 1$. Puntos $(1, 0)$ y $(-1/3, -4/27)$.

d) $\ln x + 1 = 1$. Punto $(1, 0)$.

4.29 **a)** Pendiente -1: $-1/x^2 = -1$. Puntos $(1, 1)$ y $(-1, -1)$.

b) $3x^2 + 4x = -1$. Puntos $(-1, 1)$ y $(-1/3, 5/27)$.

c) $6x^2 - 6x = -1$. Con $a = (3 \pm \sqrt{3})/6$, los puntos son $(a, 31/6 - 4a/3)$.

d) No existe: $f' = 2/(1 - 2x)^2$ es positiva y no puede ser -1.

4.30 **a)** Pendiente 1: $x = 1$, punto $(1, 0)$.

b) No existe: la pendiente pedida es $-1/4$, pero $f'(x) = 1/x > 0$ en su dominio.

c) No existe: la pendiente pedida es -1, pero f' es positiva.

d) Pendiente 1/2: $x = 2$, punto $(2, \ln 2)$.

4.31 **a)** $f' = -2/(x + 3)^2$. La pendiente $-1/2$ se obtiene en $x = -1$ y -5. Tangentes: $y = -x/2 + 1/2$ e $y = -x/2 - 7/2$.

b) Sí, únicamente en $(-2, 2)$. La pendiente -2 ocurre en $x = -2$ y -4, pero $(-4, -2)$ no pertenece a $y = -2x - 2$. Por tanto, solo $x = -2$ cumple también la ecuación de la recta.

4.32 **a)** Sí, en $(0, 2)$: coinciden sus valores y sus derivadas, ambas 3.

b) No. Igualar derivadas exige $x = 0$, pero $f(0) = 1 \neq 0 = g(0)$.

c) Sí, en $(1, 0)$, con pendiente 1.

d) Sí, en $(0, 1)$, con pendiente 0.

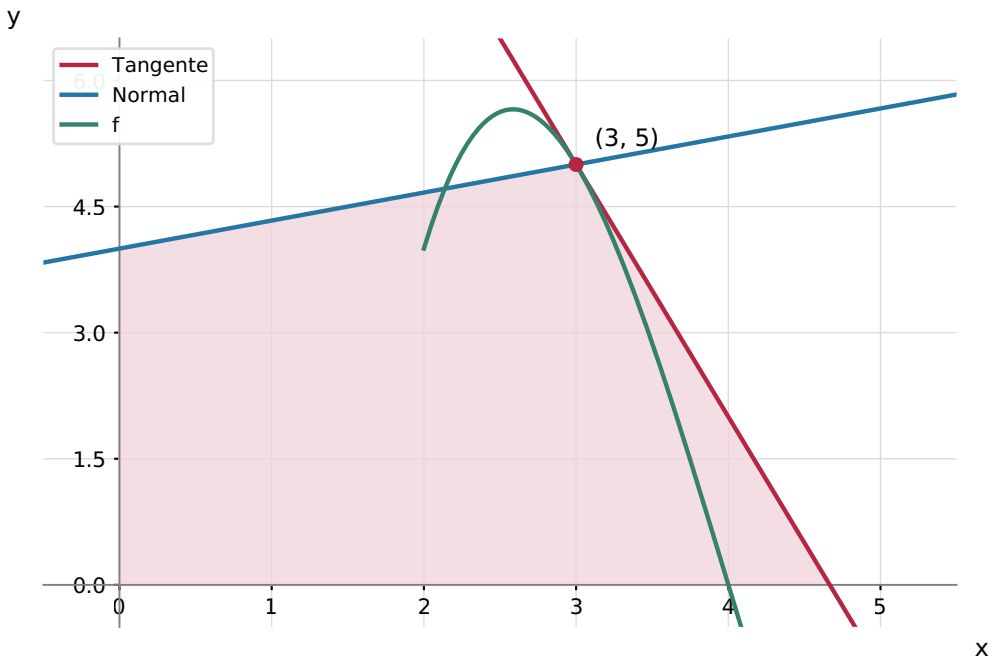
4.33 $f(2) = 5 \cdot 2 - 7 = 3$; $f'(2) = 5$, la pendiente de la recta.

4.34 $a = (8 - 6)/(2 - 1) = 2$, $b = 4$. Por tanto, $g(0) = 4$ y $g'(0) = 2$.

4.35 La recta derivada tiene pendiente 3 y ordenada $-5/2$: $f'(x) = 3x - 5/2$. En el vértice $f' = 0$, luego $x = 5/6$.

4.36 **a)** $f'(3) = -3$. Tangente $y = -3x + 14$; normal $y = x/3 + 4$.

b) Vértices: $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(3, 5)$ y $(14/3, 0)$. El área es $(3 \cdot 4 + (14/3) \cdot 5)/2 = 53/3$ unidades cuadradas.



4.37 **a)** Hay dos puntos: (4, 2) y (4, −2). La derivada implícita es $y' = -x/y$.

b) En (4, 2): $y = -2x + 10$. En (4, −2): $y = 2x - 10$.

4.38 **a)** Las pendientes ±1 se obtienen en $x = 5/2$ y $3/2$. Tangentes: $y = x - 1/4$ e $y = -x + 15/4$.

b) Intersección entre tangentes: (2, 7/4). Cortes con el eje X: (1/4, 0) y (15/4, 0).

c) Base 7/2 y altura 7/4: área = $(7/2)(7/4)/2 = 49/16$ unidades cuadradas.

4.39 **a)** $f' = 3x(x + 2)$. Puntos (0, 4) y (−2, 8).

b) La recta por esos puntos es $y = -2x + 4$.

c) Se resuelve $f'(x) = -2$: $a = -1 \pm \sqrt{3}/3$. Los puntos son $(a, 10/3 - 8a/3)$, con los signos correspondientes.

4.40 **a)** Cortes: (9/2, 0) y (0, 3).

b) Como $f' = 3/(x - 3)^2$, las tangentes son $y = 4x/3 - 6$ e $y = x/3 + 3$.

c) La primera tiene interceptos 9/2 y −6: área 27/2. La segunda tiene interceptos −9 y 3: área 27/2. Unidades cuadradas.

4.41 **a)** La derivación implícita da $y' = -\sqrt{y}/\sqrt{x}$. En P, $y - y_0 = -(\sqrt{y_0}/\sqrt{x_0})(x - x_0)$.

b) Dividiendo por $\sqrt{y_0}$ y reordenando: $x/\sqrt{x_0} + y/\sqrt{y_0} = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} = \sqrt{a}$.

c) En (0, a) la tangente es vertical, $x = 0$; en (a, 0) es horizontal, $y = 0$. La expresión con denominadores no se utiliza en esos extremos.

05 · Derivabilidad y razonamiento

5.01 **a)** La continuidad exige $-k + 2 = k$, luego $k = 1$. Para $k \neq 1$ no es derivable.

b) Con $k = 1$, la derivada izquierda vale 1 y la derecha $3(-1)^2 - 1 = 2$. Tampoco es derivable. No hay ningún valor de k.

5.02 **a)** No. Por ejemplo, $f(x) = 2x$ y $g(x) = x/2$ son inversas, pero $g'(f'(x)) = 1/2$, que no es x para todos los valores.

b) La identidad correcta obtenida por la regla de la cadena es $g'(f(x))\cdot f'(x) = 1$ en los puntos donde ambas derivadas existen.

5.03 **a)** En su dominio, $x \neq (2k + 1)\pi$, k entero, la regla de la cadena da $f'(x) = 1/2$. Por tanto, f' es constante.

b) f no es constante: en cada intervalo entre los puntos excluidos es afín de pendiente 1/2. No se puede identificar globalmente con $x/2$ por los saltos de la rama principal del arcotangente.

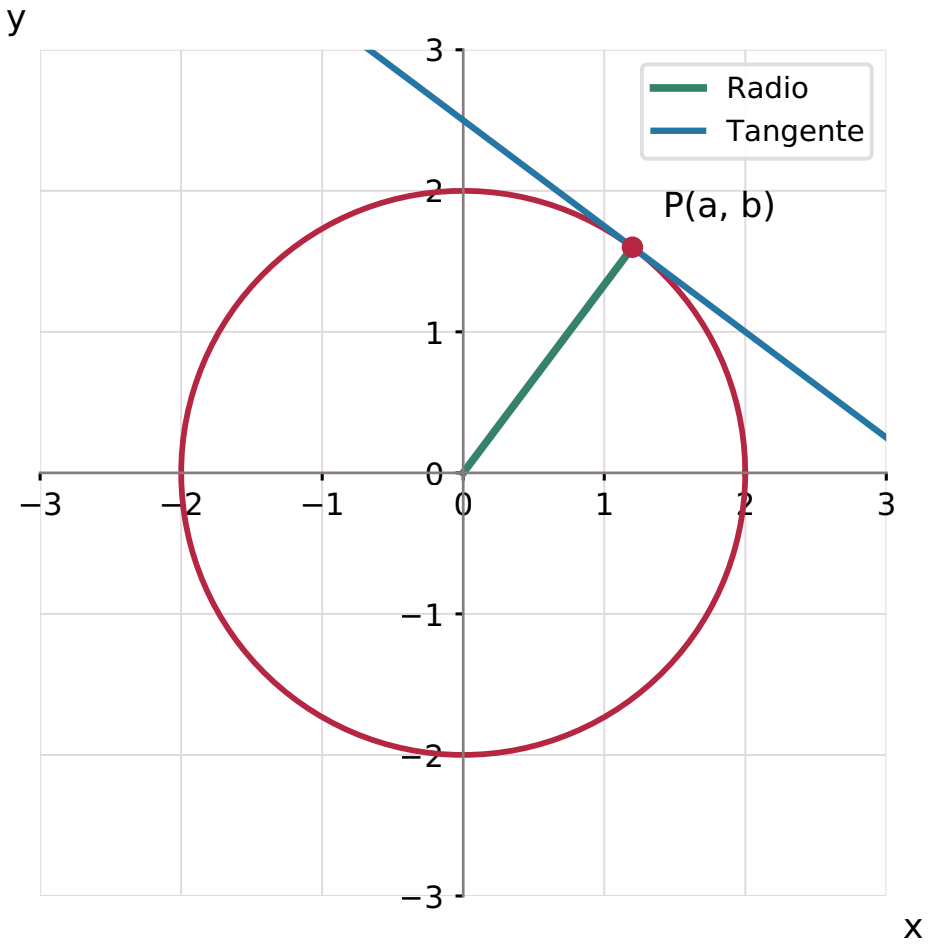
5.04 **a)** Si $P(x) = (x - a)^2 Q(x)$, entonces $P'(x) = 2(x - a)Q(x) + (x - a)^2 Q'(x)$, de modo que $P'(a) = 0$.

b) Aquí $P'(x) = 36x^2 - 32x + 7$ tiene raíces 1/2 y 7/18. Solo 1/2 anula también P.

c) La factorización es $P(x) = (2x - 1)^2(3x - 1)$. Soluciones: $x = 1/2$, doble, y $x = 1/3$.

5.05 **a)** Trasladando el centro al origen, la circunferencia es $x^2 + y^2 = r^2$. En P = (a, b), su tangente tiene ecuación $ax + by = r^2$.

b) El vector (a, b) es normal a esa recta y, a la vez, director del radio OP. Por tanto, tangente y radio son perpendiculares. Este argumento incluye los puntos situados sobre los ejes.



5.06 **a)** Si f fuese derivable en a, para $h \neq 0$ tendríamos $f(a + h) - f(a) = [(f(a + h) - f(a))/h]\cdot h$.

b) Cuando $h \to 0$, el primer factor tiende al número finito $f'(a)$ y el segundo a 0. Así $f(a + h) \to f(a)$: f sería continua. Por contraposición, la discontinuidad impide la derivabilidad.

06 · Derivadas de orden superior

6.01 **a)** $f'(x) = 3x^2 + 8x$; $f''(x) = 6x + 8$; $f'''(x) = 6$.

b) $f'(x) = 2x - 1$; $f''(x) = 2$; $f'''(x) = 0$.

6.02 $f'(x) = 2e^{2x} + \cos x$; $f''(x) = 4e^{2x} - \operatorname{sen} x$; $f'''(x) = 8e^{2x} - \cos x$.

6.03 **a)** Para f, en orden: cos x, −sen x, −cos x, sen x, cos x, −sen x.

b) Para g: −sen x, −cos x, sen x, cos x, −sen x, −cos x. El ciclo tiene periodo cuatro.

6.04 **a)** $f' = 4x^3 + 21x^2$; $f'' = 12x^2 + 42x$; $f''' = 24x + 42$.

b) Sea $q = x^3 - 4x$. $f' = \dfrac{3x^2 - 4}{2\sqrt{q}}$; $f'' = \dfrac{3x^4 - 24x^2 - 16}{4q^{3/2}}$; $f''' = -\dfrac{3(x^6 - 20x^4 - 80x^2 + 64)}{8q^{5/2}}$. Válidas si $-2 < x < 0$ o $x > 2$.

c) $f' = 2x\cos(x^2)$; $f'' = 2\cos(x^2) - 4x^2\operatorname{sen}(x^2)$; $f''' = -12x\operatorname{sen}(x^2) - 8x^3\cos(x^2)$.

d) $f' = 2e^{2x}$; $f'' = 4e^{2x}$; $f''' = 8e^{2x}$.

6.05 **a)** $f' = 3x^2 + 4x + 1$; $f'' = 6x + 4$; $f''' = 6$.

b) $f' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$; $f'' = -\dfrac{1}{4(x-2)^{3/2}}$; $f''' = \dfrac{3}{8(x-2)^{5/2}}$, para $x > 2$.

c) $f' = 1/x$; $f'' = -1/x^2$; $f''' = 2/x^3$, para $x > 0$.

d) Sean $u = \operatorname{sen} x + \cos x$ y $v = \cos x - \operatorname{sen} x$. $f' = ve^u$; $f'' = (v^2 - u)e^u$; $f''' = (v^3 - 3uv - v)e^u$.

6.06 **a)** $f'' = -18x + 8$, luego $x = 4/9$.

b) $f'' = (4 - 2x^2)/(x^2 + 2)^2$, luego $x = \pm\sqrt{2}$.

6.07 **a)** $f' = x(x + 6)/(x + 3)^2$; soluciones $x = 0$ y -6.

b) $f'' = 18/(x + 3)^3$; no se anula en ningún punto de su dominio.

6.08 $f^{(n)}(x) = \dfrac{2(-1)^n\, n!}{(x-1)^{n+1}}$, para $x \neq 1$ y $n \geq 1$. Cada derivación multiplica por el exponente y reduce este en una unidad.

07 · Parámetros y condiciones

7.01 Con $m \neq 0$, $f'(x) = -3/(mx^2) - 2/x^3$. En -1: $-3/m + 2 = 5$, luego $m = -1$.

7.02 $f'(x) = 3(k-1)x^2 + 2x - k$. Al igualar $f'(1/3)$ y $f'(-1)$, resulta $k = 2$. Ambas pendientes valen -1.

7.03 $TVM = (f(2) - f(0))/2 = (8 + 2a)/2 = 4 + a$. Por tanto, $a = -3$.

7.04 $f'(x) = (3k + 10)/(2x + 3)^2$. Entonces $3k + 10 = 19$: $k = 3$.

7.05 **a)** Se necesitan $f(3) = g(3)$ y $f'(3) = g'(3)$: $9a - 1 = 18 + b$ y $6a = 9$.

b) $a = 3/2$, $b = -11/2$. La tangente común es $y = 9x - 29/2$.

7.06 **a)** $a = 2$, $b = -3$.

b) $a = 3$, $b = -5$.

c) $a = 2$, $b = 1$.

d) $b = 3$.

7.07 $c = -3$; $4a + 2b + c = 5$; $-2a + b = 0$. De aquí: $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$.

7.08 Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$. $c = 9$; $4a + 2b = 0$; $4a + b = 6$. Luego $a = 3$, $b = -6$: $f(x) = 3x^2 - 6x + 9$.

7.09 $c = 0$; $3 + 2a + b = 3$; $-6 + 2a = 0$. Resultado: $a = 3$, $b = -6$, $c = 0$.

7.10 $27 + 9a + 3b + c = 0$; $12 + 4a + b = 0$; $48 + 8a + b = 0$. Resultado: $a = -9$, $b = 24$, $c = -18$.

7.11 $a + b + c = -1$; $4a + b = 0$; $b = 4$. Resultado: $a = -1$, $b = 4$, $c = -4$.

7.12 $2 + a + b + c = 6$; $6 + 2a + b = 0$; $24 + 4a + b = 0$. Resultado: $a = -9$, $b = 12$, $c = 1$.

7.13 **a)** La pendiente exige $3a^2 - 3 = 9$: $a = \pm 2$. Además, $a^3 - 3a + k = 9a - 14$.

b) Si $a = 2$: $k = 2$, punto $(2, 4)$. Si $a = -2$: $k = -30$, punto $(-2, -32)$. Hay dos soluciones.

c) Las tangentes horizontales están en $x = \pm 1$. Para $k = 2$: puntos $(1, 0)$, $(-1, 4)$, rectas $y = 0$ e $y = 4$. Para $k = -30$: puntos $(1, -32)$, $(-1, -28)$, rectas $y = -32$ e $y = -28$.

7.14 **a)** Una primitiva es $f(x) = 2x^3/3 + 3x^2 - 3x + C$. Al imponer $f(2) = 5$, $C = -19/3$.

b) Resultado: $f(x) = 2x^3/3 + 3x^2 - 3x - 19/3$.

7.15 **a)** $f_1'(1) = -1/4$. La perpendicularidad exige $(-1/4)a = -1$: $a = 4$.

b) $f_1'(-4) = -1/6$. Para ser paralelas: $a = -1/6$.

7.16 $f'(x) = \ln x + 1 - a$. Se exige $f'(e) = 1$: $2 - a = 1$, luego $a = 1$.

7.17 $f(x) = 2x^3/3 + 3x^2 - 3x - 19/3$. Su derivada es $2x^2 + 6x - 3$ y $f(2) = 5$.

08 · Aplicaciones y retos

8.01 **a)** En [0, 1]: 44,1 m/s; la altura aumenta.

b) En [4, 6]: 0 m/s; las alturas inicial y final coinciden. La pelota sube hasta t = 5 s y después baja.

c) En [11, 13], el polinomio da −68,6 m/s. Sin embargo, la pelota alcanza el suelo hacia t = 10,7410 s; este intervalo queda fuera del movimiento aéreo descrito. El valor es una extrapolación algebraica, no una velocidad física tras el impacto.

8.02 **a)** e(4) = 73 m; e(7) = 211 m.

b) Velocidad media: (211 − 73)/(7 − 4) = 46 m/s.

8.03 v(t) = e′(t) = 4t/3 + 1. Por tanto, v(3) = 5 m/s.

8.04 **a)** 1. La derivada cos x tiene máximo 1.

b) (0, 1). La tangente es y = −x + 1; al intersectarla con la curva se obtiene $x(x-1)^2 = 0$.

c) y = 3x − 8. En x = 3, f(3) = 1 y f′(3) = 3. Las otras opciones no satisfacen simultáneamente el contacto y la pendiente.

d) $\frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$. Se demuestra derivando sucesivamente o por inducción.

8.05 Es la derivada C′(x): la tasa instantánea de variación del coste respecto a la cantidad producida. Aproxima el coste de una unidad adicional cuando esa aproximación resulta adecuada.

8.06 Son los recursos necesarios para producir un bien: materias primas, energía, trabajo y otros elementos utilizados en el proceso.

8.07 La variación media del coste por unidad adicional es (C(x + h) − C(x))/h. Al hacer h → 0, si el límite existe, se obtiene C′(x), el coste marginal.

8.08 a debe ser positivo. Si a < 0, el término dominante haría que el coste tendiese a −∞; si a = 0, ya no habría término cúbico dominante.

8.09 $C'(x) = 3ax^2 + 2bx$. El coste fijo c desaparece al derivar.

8.10 **a)** Si a ≠ 0, es cuadrática: su gráfica es una parábola abierta hacia arriba si a > 0 y hacia abajo si a < 0.

b) Si a = 0 y b ≠ 0, es lineal; si a = b = 0, es la función constante cero. En el modelo económico se considera x ≥ 0.