1.º BACHILLERATO

LUGARES GEOMÉTRICOS Y CÓNICAS

Practica, razona y comprueba tus respuestas.

01 Lugares geométricos y clasificación

Definiciones, distancias y tipos de curvas.

02 Circunferencia: ecuaciones y elementos

Centros, radios y condiciones geométricas.

03 Circunferencia: posiciones y tangencias

Intersecciones, tangentes y posiciones relativas.

04 Elipse

Ejes, focos, excentricidad y ecuaciones.

05 Hipérbola

Ramas, asíntotas y ecuaciones reducidas.

06 Parábola

Foco, directriz, vértice y representaciones.

07 Síntesis y demostraciones

Intersecciones, lugares y propiedades.

08 Aplicaciones de las cónicas

Puentes, órbitas y antenas parabólicas.

TU RUTA DE TRABAJO

Índice

Actividades organizadas por contenidos, con espacio para trabajar y soluciones al final.

01	Lugares geométricos y clasificación	3
02	Circunferencia: ecuaciones y elementos	7
03	Circunferencia: posiciones y tangencias	12
04	Elipse	16
05	Hipérbola	21
06	Parábola	25
07	Síntesis y demostraciones	29
08	Aplicaciones de las cónicas	33
•	Solucionario	36

Cómo usar el dossier
El código **1.12** identifica la actividad 12 del bloque 1. Busca ese mismo código en el solucionario. Puedes seguir el orden completo o seleccionar un contenido para repasarlo.

Antes de empezar
Las coordenadas se escriben (x, y). En elipses e hipérbolas, a es el semieje mayor o real, b el otro semieje y c la distancia del centro a un foco. En las parábolas se indica la distancia del vértice al foco. Las figuras sirven de apoyo; utiliza los datos del enunciado.

BLOQUE 01

Lugares geométricos y clasificación

Definiciones, distancias y tipos de curvas. · 24 actividades

1.01 Si se corta un cilindro circular recto con un plano, ¿qué cónicas no degeneradas pueden obtenerse?

1.02 Razona por qué una parábola obtenida como sección cónica no tiene dos ramas.

1.03 Dibuja el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas distintas.

a) Las rectas se cortan.

b) Las rectas son paralelas.

1.04 Determina el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de coordenadas es 10. ¿Qué ocurre si su producto es 10?

1.05 Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de $y = 5x - 2$ y del eje Y.

1.06 Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de $3y = x + 1$ y del eje X.

1.07 Identifica cada cónica y expresa su ecuación en forma reducida.

a) $x^2 + y^2 + 11 = 4y - 8x$

b) $\frac{x^2}{16} + 9y^2 = 1$

c) $x^2 - 2x - 10y = 19$

d) $x^2 - 4y = 0$

e) $\frac{x^2}{225} = 1 + \frac{y^2}{81}$

f) $x^2 + y^2 + 6y = 7$

1.08 Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de A y B.

a) A(−6, 0), B(−1, 0).

b) A(−2, −1), B(4, 1).

c) A(3, −5), B(7, 1).

d) A(0, −2), B(0, 7).

1.09 Calcula la mediatriz del segmento de extremos A(5, −2) y B(4, 3).

1.10 Halla el lugar geométrico de los puntos P cuya distancia a A(−3, 0) es el doble de su distancia a B(1, 0). Identifica la figura.

1.11 Calcula el lugar geométrico de los puntos que distan 4 unidades de r: $4x - 2y + 5 = 0$.

1.12 Halla el lugar geométrico de los puntos que distan 2 unidades de $x - 3y + 1 = 0$.

1.13 Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de cada pareja de rectas.

a) $3x - 4y - 26 = 0$; $12x + 5y + 1 = 0$.

b) $-2x + 7y + 9 = 0$; $4x - 14y + 11 = 0$.

c) $2x - 3y + 3 = 0$; $3x - 2 = 0$.

d) $2y - 5 = 0$; $2x - 3y + 5 = 0$.

1.14 Determina las bisectrices de $3x - 2y - 1 = 0$ y $4x + 2y - 6 = 0$.

1.15 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al eje X coincide con su distancia a A(3, 2).

1.16 Halla el lugar geométrico de P para que el triángulo ABP sea rectángulo en P, con A(−3, 1) y B(4, 3). Identifica la figura.

1.17 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a A(2, −3) coincide con el cuadrado de su distancia al origen.

1.18 Halla el lugar geométrico de los puntos Q tales que el punto medio de PQ pertenece a $2x + 4y - 5 = 0$, siendo P(2, 6).

1.19 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de las distancias a A(3, 1) y B(5, 1) es 8.

1.20 Halla el lugar geométrico de P tal que $PA^2 - PB^2 = 4$, con A(−1, 0) y B(3, 2). Identifica la figura.

1.21 Halla el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por (4, 1) y (−2, 5).

1.22 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al cuadrado a (1, −2), menos la distancia al cuadrado a (0, 3), es 5.

1.23 Dados A(2, 1) y B(6, 4), halla el lugar geométrico de P para que el área de ABP sea 10.

1.24 Describe el lugar geométrico $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$.

BLOQUE 02

Circunferencia: ecuaciones y elementos

Centros, radios y condiciones geométricas. · 24 actividades

2.01 Determina la circunferencia de centro C(−3, 1) que pasa por el origen.

2.02 Comprueba si $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 11 = 0$ representa una circunferencia real.

2.03 Halla la ecuación general de la circunferencia que pasa por P(1, 4), Q(1, 0) y R(3, 2).

2.04 Calcula el centro y el radio de la circunferencia que pasa por P(−4, 4), Q(−5, 1) y R(−1, 3).

2.05 Halla la circunferencia que pasa por A(1, −2) y B(−3, 0) y cuyo centro está en $y = 5 - 2x$.

2.06 Calcula el centro y el radio de la circunferencia que pasa por A(1, 1) y B(2, 4) y cuyo centro está en $3x + y - 11 = 0$.

2.07 Escribe la ecuación de cada circunferencia a partir de su centro y radio.

a) C(0, 0), r = 3/5.

b) C(0, 7), r = 14.

c) C(5, 0), r = 7.

d) C(7, −1), r = 5.

e) C(2, −1), $r = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

f) C(6, 8), $r = \sqrt{2}$.

g) C(12, 4), r = 1/2.

h) C(−4, −3), r = 8.

2.08 Obtén la ecuación de la circunferencia que cumple cada condición.

a) Centro (−2, −5), pasa por (6, 1).

b) Centro (7, 2), pasa por (0, 0).

c) Tangente al eje Y, centro (4, −2).

d) Tangente al eje X, centro (0, −3).

e) Los extremos de un diámetro son (5, −4) y (−5, 1).

f) (7, −6) y (1, 3) son diametralmente opuestos.

2.09 Halla la circunferencia con centro (−1, 6) que pasa por (3, −3). ¿Pertenece a ella (−2, −8)?

2.10 Halla todas las circunferencias que cumplen cada condición.

a) Pasa por $(-3, 7)$ y $(11, 3)$; radio 2.

b) Pasa por $(5, 4)$ y $(-2, 3)$; radio 5.

2.11 Estudia si cada ecuación representa una circunferencia real. En caso afirmativo, calcula centro y radio.

a) $x^2 + y^2 - 9x + 6y + 41 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 3 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 10x + 12y + 33 = 0$

d) $x^2 + y^2 - x + 12y + 41 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 10 = 0$

f) $x^2 + y^2 + 8x + 10y + 41 = 0$

2.12 Halla la circunferencia que pasa por A, B y C en cada apartado.

a) A(2, 8), B(2, −5), C(0, 0).

b) A(4, 0), B(−1, −2), C(1, 4).

c) A(0, 2), B(1, 7), C(−3, −4).

2.13 Halla la circunferencia de centro $(1, -3)$ tangente a $3x + y - 2 = 0$.

2.14 Halla la circunferencia de centro $(3, -4)$ tangente a $3x + 4y - 18 = 0$.

2.15 Halla la circunferencia de centro $(4, -2)$ tangente a $x - 3y = -5$.

2.16 Halla la circunferencia tangente a $x + y + 5 = 0$ en $(-3, -2)$ y cuyo centro está en el eje Y.

2.17 Halla la circunferencia que pasa por A(3, 9) y B(8, 4) y cuyo centro está en $2x - 5y + 14 = 0$.

2.18 Halla la circunferencia tangente a $2x - 5y + 1 = 0$ en $(2, 1)$ y cuyo centro está en $x + y = 0$.

2.19 Halla la circunferencia tangente a $x + y + 4 = 0$ en $(-3, -1)$ y cuyo centro está en $3x - 4y + 2 = 0$.

2.20 Halla la circunferencia tangente a $3x - 2y + 4 = 0$ en $(2, 5)$ y cuyo centro está en el eje X.

2.21 Halla la circunferencia tangente a $4x + 3y - 4 = 0$ en $(4, -4)$ y cuyo centro está en $x - y - 7 = 0$.

2.22 Calcula el área del círculo delimitado por $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 14 = 0$.

2.23 Halla el área de la corona circular delimitada por $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ y $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$.

2.24 Halla la circunferencia que pasa por A(1, −2), B(5, −3) y cuyo centro pertenece a $x - y + 2 = 0$.

BLOQUE 03

Circunferencia: posiciones y tangencias

Intersecciones, tangentes y posiciones relativas. · 19 actividades

3.01 Estudia la posición relativa de $x^2 + y^2 - 9 = 0$ y $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

3.02 Escribe una circunferencia tangente interior a $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

3.03 Estudia la posición relativa de $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ y los ejes de coordenadas.

3.04 Encuentra tres rectas no paralelas que sean, respectivamente, secante, tangente y exterior a $x^2 + (y - 3)^2 = 36$.

3.05 Estudia la posición de A(0, 2) y B(4, 1) respecto de $x^2 + (y - m)^2 = 16$ según m.

3.06 Estudia la posición de A(0, −2) y B(−5, 1) respecto de $(x - m)^2 + (y - 1)^2 = 9$ según m.

3.07 Halla el punto de la circunferencia de centro C(2, 8) y radio 5 más próximo a cada punto dado.

a) P(7, 18).

b) Q(−1, 6).

c) R(5, 4).

3.08 Halla las rectas tangente y normal a $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$ en (2, 2).

3.09 Obtén las rectas que pasan por P(5, −3) y son tangentes a $x^2 + y^2 = 1$.

3.10 Halla todas las tangentes a la circunferencia de centro (5, −2) y radio 3 paralelas a $2x + y - 11 = 0$.

3.11 Halla las intersecciones de $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 28 = 0$ con cada recta.

a) $x + 9y - 16 = 0$.

b) $x + y + 2 = 0$.

c) $4x - 5y - 23 = 0$.

3.12 Estudia, según m, la posición de $y = mx + 2$ respecto de $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

3.13 Estudia la posición de $y = mx + 2$ respecto de $x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$ según m.

3.14 Calcula k para que la recta y la circunferencia sean tangentes.

a) r: $3x + 2y + k = 0$; C: $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 6 = 0$.

b) r: $4x + 2y + k = 0$; C: $x^2 + y^2 + 6x + 10y - 1 = 0$.

3.15 Calcula C para que $x^2 + y^2 + 10x + 2y + C = 0$ sea tangente a $2x + 3y = 0$.

3.16 Estudia la posición relativa de cada pareja de circunferencias.

a) $x^2 + y^2 - 8x + 5y - 7 = 0$; $x^2 + y^2 - 8x + 5y - 15 = 0$.

b) $x^2 + y^2 - 7x - 11y - 3 = 0$; $x^2 + y^2 - 7x - 10y + 2 = 0$.

c) $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 11 = 0$; $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$.

d) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$; $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 32 = 0$.

e) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0$; $x^2 + y^2 - 12x - 10y + 45 = 0$.

f) $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 18 = 0$; $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 22 = 0$.

3.17 Halla las intersecciones de las circunferencias de cada pareja.

a) $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13 = 0$; $x^2 + y^2 - 8x + 11 = 0$.

b) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 8 = 0$; $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 24 = 0$.

3.18 Estudia la posición de $P(-3, 2)$ respecto de $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = k$ según k.

3.19 Calcula la longitud de la cuerda que determina $x + 2y - 5 = 0$ en $x^2 + y^2 = 25$.

BLOQUE 04

Elipse

Ejes, focos, excentricidad y ecuaciones. · 22 actividades

4.01 La distancia entre los focos de una elipse es 6 cm y su eje mayor mide 10 cm. Calcula el eje menor.

4.02 Un punto de una elipse dista 6 y 7 cm de los focos. El eje menor mide 6,6 cm. Halla el eje mayor y la distancia entre focos.

4.03 Halla la ecuación de la elipse con focos (5, 0), (−5, 0) y vértices mayores (8, 0), (−8, 0).

4.04 Halla la ecuación de la elipse cuyos vértices son (−4, 0), (0, −2), (4, 0) y (0, 2).

4.05 Calcula la excentricidad de cada elipse.

a) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{121} = 1$

b) $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{9} = 1$

4.06 Una elipse tiene excentricidad 0,6 y vértices mayores (6, 0) y (−6, 0). Halla los otros dos vértices.

4.07 Halla una ecuación reducida de una elipse de excentricidad 0,8 y distancia focal 8. Toma el centro en el origen y el eje mayor sobre X.

4.08 Halla la elipse de ejes paralelos a los coordenados, centro C(4, 1) y vértices A′(1, 1) y B′(4, −1).

4.09 Halla los cuatro vértices, los focos y la excentricidad de cada elipse.

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

c) $25x^2 + 16y^2 = 1600$

d) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

4.10 Encuentra los cuatro vértices, los focos y la excentricidad de las elipses.

a) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{54} = 6$

b) $\frac{x^2}{5} + 5y^2 = 245$

c) $9x^2 + 25y^2 = 900$

d) $x^2 + 2y^2 = 16$

4.11 Halla las ecuaciones de estas elipses, tomando el centro en el origen y el eje mayor sobre X.

a) Distancia focal 4 y semieje menor 3.

b) Semidistancia focal 3 y eje mayor 10.

c) Pasa por (8, 3) y tiene excentricidad $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) Pasa por (−4, 1) y su eje menor mide 6.

4.12 Halla las ecuaciones de las elipses. En los apartados sin orientación indicada, toma el centro en el origen y el eje mayor sobre X.

a) Excentricidad 0,6 y eje mayor 20.

b) Focos (6, 0), (−6, 0) y excentricidad 1/3.

c) Pasa por (3, 2) y su eje mayor mide 10.

d) Focos (4, 0), (−4, 0) y vértices mayores (5, 0), (−5, 0).

4.13 Halla las ecuaciones de estos lugares geométricos.

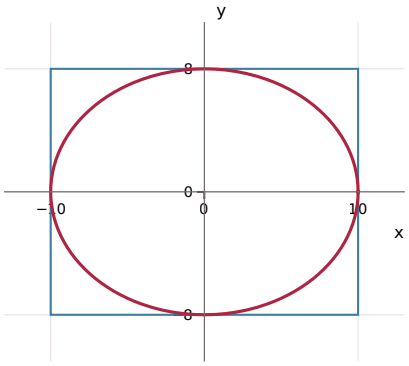
a) Puntos cuya suma de distancias a P(−4, 0) y Q(4, 0) es 10.

b) Puntos cuya suma de distancias a P(−5, 0) y Q(5, 0) es 21.

4.14 Halla la elipse con centro en el origen y focos sobre X que pasa por $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ y $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

4.15 Determina una ecuación reducida de una elipse cuya distancia focal es 8 y cuyo rectángulo de ejes tiene área $48\sqrt{5}$. Toma el eje mayor sobre X.

4.16 Una elipse es tangente a los lados del rectángulo $y = 8$, $y = -8$, $x = 10$ y $x = -10$. Halla su ecuación y cinco puntos, con sus ejes paralelos a los lados.



4.17 Estudia la posición relativa de $x^2 + 2y^2 = 3$ y $x + 2y - 1 = 0$.

4.18 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a $(0, -12)$ y $(0, 12)$ es 26.

4.19 Expresa en forma reducida la elipse $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$. Halla sus focos y su excentricidad.

4.20 Expresa en forma reducida $x^2 + 400y^2 = 6x - 800y - 309$ y calcula sus focos y excentricidad.

4.21 Calcula la longitud de la cuerda que determina $2x - y - 1 = 0$ en $9x^2 + 7y^2 - 63 = 0$.

4.22 Halla todas las tangentes a $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ que pasan por P(0, 8).

BLOQUE 05

Hipérbola

Ramas, asíntotas y ecuaciones reducidas. · 16 actividades

5.01 Una hipérbola centrada en el origen tiene eje real sobre X. Sus vértices distan 8 cm y los extremos del semieje conjugado son B(0, 3) y B′(0, −3). Halla los focos.

5.02 En una hipérbola centrada en el origen y de eje real X, la distancia focal es 25 y la distancia entre vértices es 16. Halla los extremos B y B′ del eje conjugado.

5.03 Halla la ecuación de la hipérbola con focos (−2, 0), (2, 0) y vértices (−1, 0), (1, 0).

5.04 Halla la hipérbola con focos (5, 0) y (−5, 0) que pasa por $(6, \frac{3\sqrt{5}}{2})$.

5.05 Determina los focos y los vértices de $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{225} = 1$.

5.06 Calcula la excentricidad de cada hipérbola.

a) $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{49} = 1$

b) $\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{36} = 1$

5.07 Halla la hipérbola de ejes paralelos a los coordenados, centro C(−1, 2), foco F(3, 2) y excentricidad 1,5.

5.08 ¿Existe una hipérbola de ejes paralelos a los coordenados, centro C(4, 0), foco F(1, −3) y excentricidad 2? Razona la respuesta.

5.09 Determina los focos, los vértices reales, las asíntotas y la excentricidad de cada hipérbola.

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$

c) $16y^2 - 25x^2 = 1600$

d) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

e) $9x^2 - 25y^2 = 900$

f) $x^2 - 2y^2 = 16$

5.10 Halla las hipérbolas centradas en el origen y de eje real X que cumplen estas condiciones.

a) La distancia entre focos es 12 y pasa por P(8, 14).

b) La distancia focal es 34 y la distancia entre un foco y el vértice más próximo es 2.

c) Pasa por $(4,\sqrt{8})$ y $(2\sqrt{3},2)$.

5.11 Halla las ecuaciones de estas hipérbolas centradas en el origen.

a) Asíntotas $y = 2x$ e $y = -2x$; un foco es $(3\sqrt{5},0)$.

b) Focos $(-5, 0)$, $(5, 0)$ y distancia entre vértices 8.

c) Asíntotas $y = x/3$ e $y = -x/3$; pasa por $(3\sqrt{29},5)$.

d) Un foco es $(6, 0)$ y la excentricidad es 1,2.

5.12 Determina centro, focos, vértices reales, asíntotas y excentricidad de cada hipérbola.

a) $\frac{(x+5)^2}{10} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1$

b) $\frac{(y+3)^2}{25} - \frac{x^2}{7} = 1$

c) $\frac{y^2}{11} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1$

d) $\frac{(x-4)^2}{14} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

5.13 Halla una hipérbola que cumpla los datos de cada apartado. Razona si la orientación queda determinada.

a) Centro C(1, 0), excentricidad 4/3 y pasa por P(4, 3).

b) Centro C(2, 3), un vértice $(-3, 3)$ y un foco $(9, 3)$.

c) Centro C$(-5, 2)$, un vértice $(0, 2)$ y excentricidad 2.

5.14 Halla la hipérbola centrada en el origen y de eje real X cuya distancia entre focos es 18 y que pasa por P(15, 4).

5.15 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a $(0, -12)$ menos su distancia a $(0, 12)$ es 10.

5.16 Sean $A(-5, -1)$ y $A'(-5, -11)$. Halla el lugar geométrico de P que cumple $PA - PA' = 8$.

BLOQUE 06

Parábola

Foco, directriz, vértice y representaciones. · 16 actividades

6.01 Halla la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco F(0, 2).

6.02 Halla la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco F(2, 0).

6.03 Halla la parábola con vértice V(−2, 1) y directriz y = −1.

6.04 Halla la parábola con vértice V(3, 5) y directriz y = 1.

6.05 Halla la parábola con vértice en el origen, eje coincidente con X y que pasa por (3, −6).

6.06 Encuentra el foco y la directriz de cada parábola y represéntala.

a) $y^2 = 10x$

b) $y^2 = 7x$

c) $x^2 = 6y$

d) $x^2 = y$

e) $y^2 = -10x$

f) $x^2 = -6y$

6.07 Obtén la ecuación de la parábola en cada caso.

a) Foco (5, 0), directriz $x = -5$.

b) Foco (0, 2), directriz $y = -2$.

6.08 Halla las parábolas con vértice en el origen que cumplen:

a) Pasa por $(-3, 8)$ y su directriz es horizontal.

b) Pasa por $(5, -4)$ y su directriz es vertical.

6.09 Halla la parábola con vértice $V(-1, 3)$, eje paralelo a Y y que pasa por $(2, -2)$.

6.10 Obtén el vértice, el foco y la directriz de cada parábola.

a) $y^2 = 2(x - 3)$

b) $(y - 1)^2 = 4(x - 4)$

c) $x^2 = 6(y - 2)$

d) $(x - 3)^2 = 8(y + 1)$

e) $x^2 = -4(y + 1)$

f) $(y + 3)^2 = -8(x - 1)$

6.11 Calcula el vértice, el foco y la directriz de estas parábolas.

a) $(x - 5)^2 = 14(y - 3)$

b) $(y + 6)^2 = 24(x - 1)$

c) $(y + 4)^2 = -8(x - 6)$

d) $(x + 4)^2 = -4(y + 7)$

e) $(y - 2)^2 = -18x$

f) $x^2 = -9(y + 1)$

6.12 Halla la ecuación de la parábola en cada caso.

a) Vértice $(-5, 8)$, foco $(-5, 2)$.

b) Vértice $(3, 7)$, foco $(0, 7)$.

c) Foco $(3, 5)$, directriz $x = 10$.

d) Vértice $(2, 3)$, directriz $x = -3$.

6.13 Obtén la parábola de eje paralelo a Y que pasa por $A(2, -4)$, $B(-2, 4)$ y $C(-3, 2)$.

6.14 Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de $P(3, 1)$ y de $3x - 4y + 5 = 0$.

6.15 Emplea la definición de parábola para hallar la ecuación de la que tiene foco $F(-1, 0)$ y directriz $3x + 4y = 0$.

6.16 Halla el vértice, el foco y la directriz de cada parábola.

a) $y = x^2 + 2x + 1$

b) $4y = -x^2 + 8x - 6$

c) $y = 4x^2 - 8x + 12$

d) $y = 6x^2 + 9x - 10$

BLOQUE 07

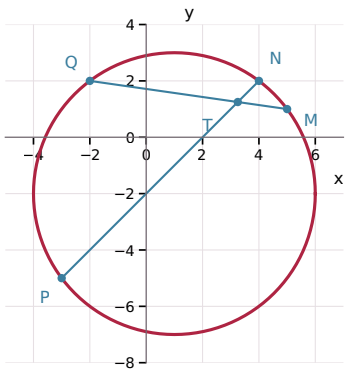
Síntesis y demostraciones

Intersecciones, lugares y propiedades. · 15 actividades

7.01 Los lados de un triángulo están sobre $2x + y + 2 = 0$, $2x - y - 10 = 0$ y $x + 2y - 5 = 0$. Halla su circunferencia inscrita.

7.02 Halla la circunferencia circunscrita al triángulo A(1, 0), B(−3, 1), C(5, 2) y las coordenadas del circuncentro.

7.03 Comprueba que M(5, 1), N(4, 2), P(−3, −5) y Q(−2, 2) están sobre una circunferencia y halla su ecuación. Calcula T, intersección de MQ y NP, y verifica TM·TQ = TN·TP.



7.04 Halla todas las circunferencias tangentes a ambos ejes que pasan por (−1, −3).

7.05 Dadas r: $3x + 4y - 10 = 0$, s: $5x - 12y + 2 = 0$ y C: $x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0$:

a) Comprueba que r y s son tangentes.

b) Halla su intersección P, el centro y los puntos de tangencia.

c) La recta PC corta la circunferencia en Q y Q′. Demuestra que $PQ \cdot PQ' = PA^2$, donde A es cualquiera de los puntos de tangencia.

7.06 ¿Existe una circunferencia de centro (4, 4) tangente a $3x + 4y + 7 = 0$ y $12x - 5y + 7 = 0$? ¿Y de centro (10, 2)? Escribe su ecuación si existe.

7.07 Halla las intersecciones de las cónicas de cada apartado.

a) $2x^2 - 3y^2 = 6$ y $6x^2 + y^2 = 58$.

b) $y^2 = 9x$ y $x^2 = y/3$.

7.08 Una hipérbola con a = b es equilátera. Si su centro es el origen y su eje focal es horizontal, halla su ecuación, focos y asíntotas en función de $a > 0$.

7.09 Una hipérbola tiene focos $(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ y $(-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ y la diferencia absoluta de distancias a ellos es $8\sqrt{2}$. Comprueba que es equilátera, que contiene (8, 2) y halla su ecuación.

7.10 Las bisectrices de los cuadrantes cortan $y = x^2 - 3x$ en tres puntos distintos. Halla el área del triángulo que forman.

7.11 Clasifica cada cónica, halla sus elementos y realiza una representación aproximada.

a) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$

b) $x^2 - 4y^2 + 16y - 32 = 0$

c) $16x^2 + 9y^2 - 32x + 54y - 47 = 0$

d) $x^2 + 6x - 4y + 17 = 0$

e) $x^2 - y^2 + 3x + 5y + 3 = 0$

7.12 Elige la respuesta correcta y justifica.

a) Dos circunferencias tangentes a los semiejes positivos son tangentes exteriores a la de centro (3, 0) y radio 1. ¿Cuánto suman sus radios? Opciones: 9, 17/2, 8, 15/2, 7.

b) Las circunferencias $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0$ y $x^2 + 2x + y^2 + 2y = 18$ se cortan en puntos de una recta. ¿Cuál? Opciones: $x + y = 3$; $2x - y = 6$; $3x - 4y = 2$; $x + y = \sqrt{3}$; $3x + 2y = 9$.

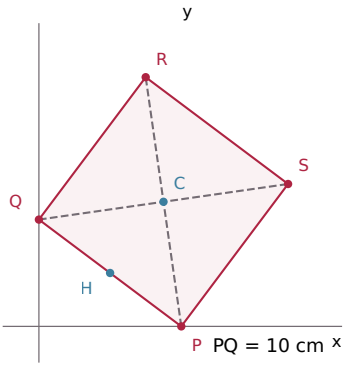
c) ¿Cuál es el camino más corto desde A(2, 5), pasando por el eje X, hasta un punto de $(x + 6)^2 + (y - 10)^2 = 16$? Opciones: 12, 13, $4\sqrt{10}$, $6\sqrt{5}$, $4 + \sqrt{89}$.

d) ¿Para cuántos enteros k no se cortan $x^2 + y^2 = k^2$ y $xy = k$? Opciones: 0, 1, 2, 4, 8.

7.13 Q pertenece a una circunferencia de centro O y radio $r > 0$. P tiene su misma abscisa y su ordenada es k veces la de Q. Halla el lugar geométrico de P.

7.14 Una señal incide sobre una parábola en dirección perpendicular a su directriz y se refleja según la ley de reflexión en la tangente. Demuestra que el rayo reflejado pasa por el foco.

7.15 Un cuadrado de lado 10 cm se desliza manteniendo los extremos de uno de sus lados sobre los ejes: P en X y Q en Y. Determina los lugares geométricos indicados. En c), usa la posición del primer cuadrante de la figura.



a) El punto medio del lado PQ.

b) El centro del cuadrado.

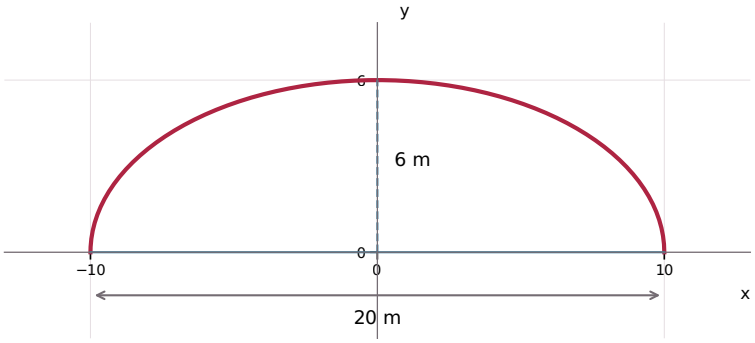
c) Los vértices del lado apoyado en los ejes y los del lado opuesto.

BLOQUE 08

Aplicaciones de las cónicas

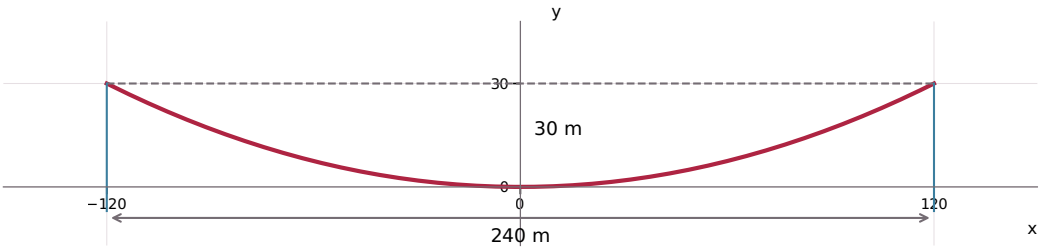
Puentes, órbitas y antenas parabólicas. · 11 actividades

8.01 El arco de un puente tiene forma de media elipse, con luz de 20 m y altura máxima de 6 m. Halla la ecuación de la elipse.

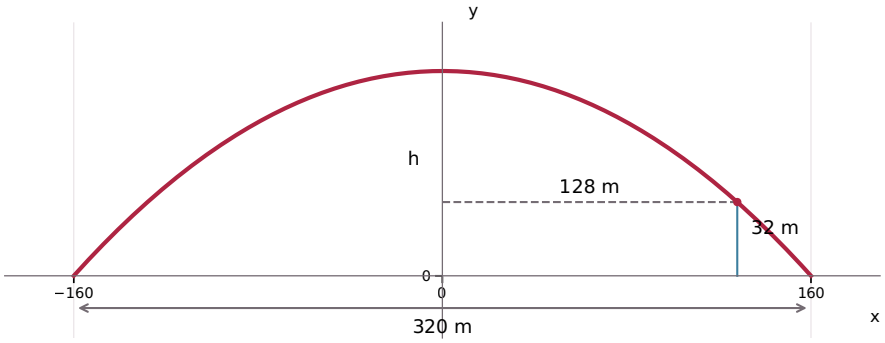


8.02 En un modelo de órbita elíptica, el Sol ocupa un foco, el eje mayor mide 241 428 000 km y la excentricidad es 0,016. Calcula la máxima distancia Tierra-Sol y una ecuación de la elipse. Usa los datos del modelo.

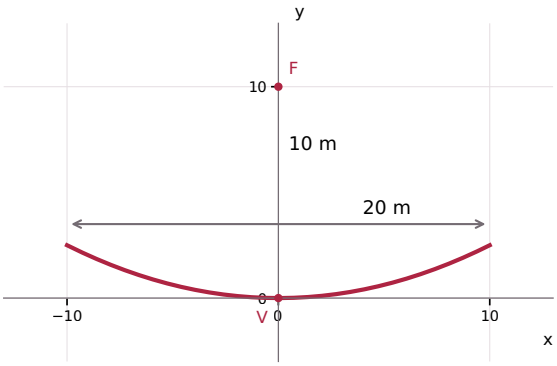
8.03 Un cable sujeto a dos soportes a igual altura, separados 240 m, cuelga 30 m en el centro. Si su forma se modeliza mediante una parábola, halla su ecuación con origen en el punto más bajo.



8.04 Un arco parabólico salva una distancia de 320 m. A 128 m del centro, su altura sobre la base de los apoyos es 32 m. ¿Cuál es la altura del arco en el centro?



8.05 Una antena parabólica tiene una abertura de 20 m de diámetro y el foco está a 10 m por encima del vértice. Halla la ecuación de su sección parabólica.



8.06 ¿Qué es una antena parabólica y para qué se utiliza?

8.07 Explica cómo se forma un paraboloide de revolución. ¿Es una figura plana?

8.08 Explica qué propiedad permite a las antenas parabólicas recibir y emitir señales dirigidas.

8.09 Enumera ventajas y limitaciones del uso de antenas parabólicas para acceder a Internet por satélite.

8.10 Una antena parabólica tiene 1 m de diámetro en su abertura. El receptor, situado en el foco, está a 25 cm del vértice. ¿Cuál es su profundidad?

8.11 Dibuja la parábola que genera por revolución la antena de la actividad anterior.

COMPRUEBA TUS RESULTADOS

Solucionario

Respuestas y justificaciones. Los códigos coinciden con los de las actividades.

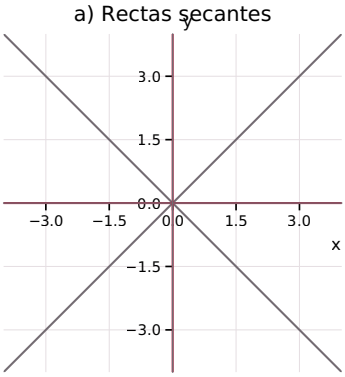
01 · Lugares geométricos y clasificación

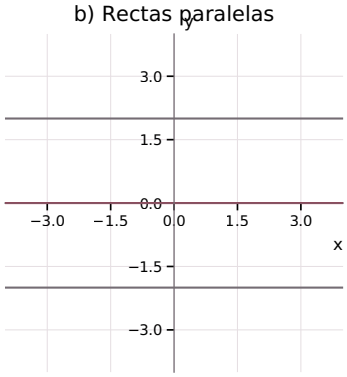
1.01 Una circunferencia si el plano es perpendicular al eje; una elipse si es oblicuo y no paralelo al eje. Un plano paralelo al eje puede producir dos rectas, una recta tangente o ninguna intersección: son casos degenerados, no parábolas ni hipérbolas.

1.02 El plano que produce una parábola es paralelo a una generatriz y corta una sola hoja del cono doble. La sección es una única curva continua; para obtener las dos ramas de una hipérbola, el plano debe cortar ambas hojas.

1.03 **a)** Las dos bisectrices de los ángulos formados por las rectas.

b) La recta paralela a ambas situada a mitad de distancia.





1.04 Suma: $x + y = 10$, una recta. Producto: $xy = 10$, una hipérbola equilátera con asíntotas en los ejes.

1.05 $\dfrac{|5x - y - 2|}{\sqrt{26}} = |x|$. Las dos bisectrices son $(5 - \sqrt{26})x - y - 2 = 0$ y $(5 + \sqrt{26})x - y - 2 = 0$.

1.06 $\dfrac{|x - 3y + 1|}{\sqrt{10}} = |y|$. Las bisectrices son $x - (3 + \sqrt{10})y + 1 = 0$ y $x - (3 - \sqrt{10})y + 1 = 0$.

1.07 **a)** Circunferencia: $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$; centro $(-4, 2)$, radio 3.

b) Elipse: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1/9} = 1$; semiejes 4 y 1/3.

c) Parábola: $(x - 1)^2 = 10(y + 2)$; vértice $(1, -2)$, eje vertical.

d) Parábola: $x^2 = 4y$; vértice $(0, 0)$, eje vertical.

e) Hipérbola: $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{81} = 1$; semiejes 15 y 9.

f) Circunferencia: $x^2 + (y + 3)^2 = 16$; centro $(0, -3)$, radio 4.

1.08 **a)** $x = -\frac{7}{2}$

b) $3x + y - 3 = 0$.

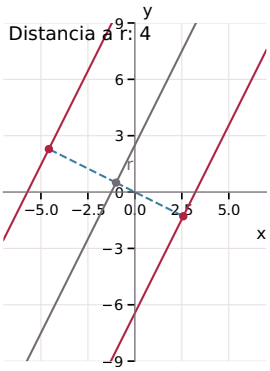
c) $2x + 3y - 4 = 0$.

d) $y = 5/2$. En todos los casos se obtiene la mediatriz de AB.

1.09 El punto medio es $(9/2, 1/2)$ y el vector $AB = (-1, 5)$ es normal a la mediatriz. Ecuación: $x - 5y - 2 = 0$.

1.10 $(x + 3)^2 + y^2 = 4[(x - 1)^2 + y^2]$. Resulta $3x^2 + 3y^2 - 14x - 5 = 0$, o $(x - \frac{7}{3})^2 + y^2 = \frac{64}{9}$. Es una circunferencia de centro $(7/3, 0)$ y radio $8/3$.

1.11 Son las dos paralelas $4x - 2y + 5 = \pm 8\sqrt{5}$.



1.12 Las dos paralelas $x - 3y + 1 = \pm 2\sqrt{10}$.

1.13 **a)** Las dos bisectrices: $3x + 11y + 49 = 0$ y $11x - 3y - 37 = 0$.

b) La paralela intermedia: $8x - 28y - 7 = 0$.

c) Las dos bisectrices: $\frac{2x - 3y + 3}{\sqrt{13}} = \pm\frac{3x - 2}{3}$.

d) Las dos bisectrices: $\frac{2y - 5}{2} = \pm\frac{2x - 3y + 5}{\sqrt{13}}$.

1.14 $\frac{3x-2y-1}{\sqrt{13}} = \pm\frac{2x+y-3}{\sqrt{5}}$. Cada elección de signo define una de las dos bisectrices.

1.15 $y^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2$; por tanto, $(x-3)^2 = 4(y-1)$. Es una parábola con foco A, directriz $y = 0$ y vértice $(3, 1)$.

1.16 $PA \cdot PB = 0$ da $x^2 + y^2 - x - 4y - 9 = 0$. Es la circunferencia de diámetro AB, centro $(1/2, 2)$ y radio $\sqrt{53}/2$. Se excluyen $P = A$ y $P = B$ porque no forman un triángulo.

1.17 La condición es $\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} = x^2 + y^2$. Al elevar al cuadrado: $(x^2 + y^2)^2 - x^2 - y^2 + 4x - 6y - 13 = 0$. Es una curva de cuarto grado, no una cónica. La ecuación es equivalente porque $x^2 + y^2$ es no negativo.

1.18 Para $Q(x, y)$, el punto medio es $((x + 2)/2, (y + 6)/2)$. Al sustituir se obtiene $x + 2y + 9 = 0$: una recta paralela a la dada.

1.19 $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (x-5)^2 + (y-1)^2 = 8$. Resulta $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 3$: circunferencia de centro $(4, 1)$ y radio $\sqrt{3}$.

1.20 $(x+1)^2 + y^2 - (x-3)^2 - (y-2)^2 = 4$. Simplificando: $2x + y - 4 = 0$, una recta perpendicular a AB.

1.21 Es la mediatriz del segmento: $3x - 2y + 3 = 0$.

1.22 $(x-1)^2 + (y+2)^2 - x^2 - (y-3)^2 = 5$; resulta $2x - 10y + 9 = 0$.

1.23 AB mide 5, así que la altura debe ser 4. La recta AB es $3x - 4y - 2 = 0$; el lugar son las paralelas $3x - 4y - 22 = 0$ y $3x - 4y + 18 = 0$.

1.24 $(x-2)^2 - (y-3)^2 = 0$. Es la unión de las rectas perpendiculares $x - y + 1 = 0$ y $x + y - 5 = 0$: una cónica degenerada.

02 · Circunferencia: ecuaciones y elementos

2.01 $r^2 = 10$. Ecuación: $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$, equivalente a $x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$.

2.02 Al completar cuadrados: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = -1$. No hay puntos reales y no es una circunferencia real.

2.03 Sustituyendo en $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, se obtiene $A = -2$, $B = -4$ y $C = 1$. Ecuación: $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

2.04 La ecuación es $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 8 = 0$, o $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$. Centro $C(-3, 2)$ y radio $\sqrt{5}$.

2.05 La mediatriz de AB es $2x - y = -1$. Su intersección con $2x + y = 5$ es $C(1, 3)$. Radio 5; $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

2.06 La mediatriz de AB es $x + 3y = 9$. Se corta con $3x + y = 11$ en $C(3, 2)$; radio $\sqrt{5}$. Ecuación: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

2.07

a) $x^2 + y^2 = \frac{9}{25}$

b) $x^2 + (y - 7)^2 = 196$

c) $(x - 5)^2 + y^2 = 49$

d) $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 25$

e) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \frac{2}{9}$

f) $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 2$

g) $(x - 12)^2 + (y - 4)^2 = \frac{1}{4}$

h) $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 64$

2.08

a) $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 100$.

b) $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 53$.

c) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 16$.

d) $x^2 + (y + 3)^2 = 9$.

e) $x^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{125}{4}$

f) $(x - 4)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{117}{4}$

2.09 Radio $\sqrt{97}$; $(x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 97$. El punto $(-2, -8)$ da $197 \neq 97$, por lo que no pertenece.

2.10

a) No existe: la distancia entre los puntos es $\sqrt{212} > 4$, mayor que el diámetro.

b) Hay dos: $(x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 25$ y $(x - 2)^2 + y^2 = 25$.

2.11 **a)** No: $(x - 9/2)^2 + (y + 3)^2 = -47/4$.

b) Sí: $C(-4, 5)$, $r = \sqrt{38}$.

c) Sí: $C(-5, -6)$, $r = 2\sqrt{7}$.

d) No: $(x - 1/2)^2 + (y + 6)^2 = -19/4$.

e) Solo representa el punto $(-1, -3)$: radio cero, caso degenerado.

f) Solo representa el punto $(-4, -5)$: radio cero, caso degenerado.

2.12 **a)** $x^2 + y^2 - 22x - 3y = 0$.

b) $13x^2 + 13y^2 - 21x - 19y - 124 = 0$.

c) $3x^2 + 3y^2 + 127x - 53y + 94 = 0$.

2.13 $r = 2/\sqrt{10}$; $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = \frac{2}{5}$.

2.14 El radio es $|9 - 16 - 18|/5 = 5$. Ecuación: $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$.

2.15 $r = 15/\sqrt{10}$; $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = \frac{45}{2}$.

2.16 El centro está en la normal $y = x + 1$. Al cortar el eje Y se obtiene $C(0, 1)$. Ecuación: $x^2 + (y - 1)^2 = 18$.

2.17 La mediatriz es $x - y + 1 = 0$. El centro es $(3, 4)$ y el radio 5: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

2.18 El centro es $(2, 1) + t(2, -5)$. De $x + y = 0$ resulta $t = 1$; $C(4, -4)$. Ecuación: $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 29$.

2.19 La normal $y = x + 2$ corta la recta de centros en $C(-6, -4)$. Ecuación: $(x + 6)^2 + (y + 4)^2 = 18$.

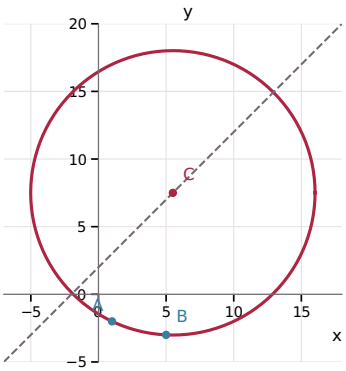
2.20 $C = (2, 5) + t(3, -2)$; al imponer $y = 0$, $t = 5/2$. Centro $(19/2, 0)$; $(x - \frac{19}{2})^2 + y^2 = \frac{325}{4}$.

2.21 $C = (4, -4) + t(4, 3)$. Resulta $t = -1$, $C(0, -7)$. Radio 5; $x^2 + (y + 7)^2 = 25$.

2.22 Centro $(3/2, -5/2)$, $r^2 = 45/2$. Área $= \frac{45\pi}{2}$.

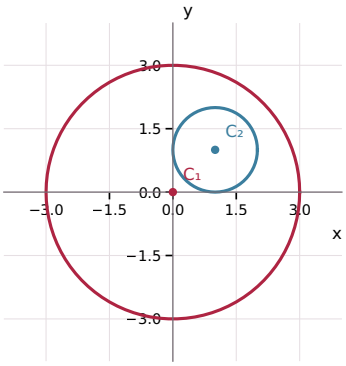
2.23 Centro común $(2, -3)$, radios 1 y 2. Área $= \pi(4 - 1) = 3\pi$.

2.24 La mediatriz es $8x - 2y - 29 = 0$. Centro $(11/2, 15/2)$; $(x - \frac{11}{2})^2 + (y - \frac{15}{2})^2 = \frac{221}{2}$.



03 · Circunferencia: posiciones y tangencias

3.01 Centros (0, 0) y (1, 1); radios 3 y 1. La distancia entre centros es $\sqrt{2} < 3 - 1$. Una está estrictamente dentro de la otra, sin puntos comunes.



3.02 Por ejemplo, $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$. La distancia entre centros es 1, igual a la diferencia de radios $2 - 1$.

3.03 El centro es $(3, -2)$ y el radio 3. El eje X es secante: sus intersecciones son $(3 \pm \sqrt{5}, 0)$. El eje Y es tangente en $(0, -2)$.

3.04 Por ejemplo: $y = x$ es secante (distancia del centro a la recta $3/\sqrt{2} < 6$); $y = -3$ es tangente; $x = 7$ es exterior (distancia $7 > 6$).

3.05 **a)** El centro es $(0, m)$ y el radio 4. A es interior si $-2 < m < 6$, pertenece si $m = -2$ o $m = 6$ y es exterior en el resto de casos.

b) Para B, la distancia al cuadrado es $16 + (1 - m)^2$. Pertenece solo si $m = 1$; para cualquier otro valor es exterior. Nunca es interior.

3.06 **a)** A pertenece si $m = 0$ y es exterior si $m \neq 0$; nunca es interior.

b) B es interior si $-8 < m < -2$, pertenece si $m = -8$ o $m = -2$ y es exterior si $m < -8$ o $m > -2$.

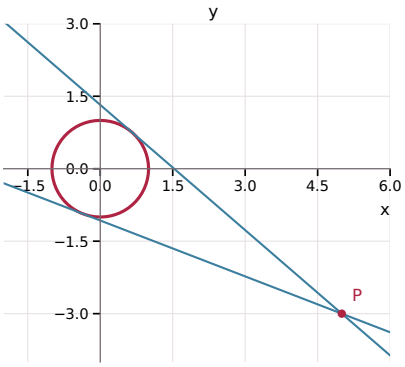
3.07 **a)** $(2 + \sqrt{5}, 8 + 2\sqrt{5})$

b) $\left(2 - \frac{15}{\sqrt{13}}, 8 - \frac{10}{\sqrt{13}}\right)$. Se toma la intersección del rayo CQ con la circunferencia.

c) R(5, 4) ya pertenece y es el punto buscado.

3.08 Centro $(-2, -1)$. Normal: $3x - 4y + 2 = 0$. Tangente, perpendicular al radio: $4x + 3y - 14 = 0$.

3.09 $y + 3 = \frac{-15 \pm \sqrt{33}}{24}(x - 5)$. La distancia del origen a la recta debe ser 1; resulta $24m^2 + 30m + 8 = 0$.



3.10 $2x + y - 8 \pm 3\sqrt{5} = 0$. La distancia del centro a cada recta debe ser 3.

3.11

a) (7, 1) y (−2, 2).

b) (6, −8) y (−3, 1).

c) (7, 1) y (−3, −7).

3.12 La distancia del centro a la recta es $\frac{3|m|}{\sqrt{1 + m^2}}$. Secante si $|m| < \frac{2}{\sqrt{5}}$, tangente si $|m| = \frac{2}{\sqrt{5}}$ y exterior si $|m| > \frac{2}{\sqrt{5}}$.

3.13 Centro (−2, 3), radio 5. Todas las rectas pasan por (0, 2), interior porque dista $\sqrt{5} < 5$ del centro. Son secantes para todo m real.

3.14

a) $k = -1 \pm \sqrt{403}$. Centro (3, −4), radio $\sqrt{31}$.

b) $k = 22 \pm 10\sqrt{7}$. Centro (−3, −5), radio $\sqrt{35}$.

3.15 Centro (−5, −1), $r^2 = 26 - C$. La distancia a la recta es $\sqrt{13}$; $26 - C = 13$ y $C = 13$.

3.16

a) Concéntricas distintas: centro (4, −5/2), radios $\sqrt{117}/2$ y $\sqrt{149}/2$.

b) Interiores sin contacto: centros (7/2, 11/2), (7/2, 5); $d = 1/2 < (\sqrt{182} - \sqrt{141})/2$.

c) Exteriores: centros (−4, −2), (3, 4); $d = \sqrt{85} > \sqrt{31} + 2$.

d) Interiores sin contacto: centros (−2, −1), (1, 4); $d = \sqrt{34} < 7 - 1$.

e) Exteriores: centros (−2, 1), (6, 5); $d = 4\sqrt{5} > 2\sqrt{5} + 4$.

f) Tangentes exteriores: centros (−4, 2), (1, −3); $d = 5\sqrt{2} = \sqrt{2} + 4\sqrt{2}$.

3.17

a) Restando, $x - 3y + 1 = 0$. Intersecciones: (2, 1) y (5, 2).

b) Restando, $x + 3y - 8 = 0$. Intersecciones: (−1, 3) y (−4, 4).

3.18 La distancia al centro al cuadrado es 41. Para $k > 0$: exterior si $k < 41$, pertenece si $k = 41$ e interior si $k > 41$. Si $k = 0$, el lugar se reduce al centro $(1, -3)$, que no es P; si $k < 0$, no hay puntos reales.

3.19 Los extremos son $(5, 0)$ y $(-3, 4)$. Longitud $\sqrt{(8^2 + 4^2)} = 4\sqrt{5}$.

04 · Elipse

4.01 $c = 3$, $a = 5$ y $b^2 = a^2 - c^2 = 16$. El eje menor mide $2b = 8$ cm.

4.02 El eje mayor es $2a = 6 + 7 = 13$ cm. Como $b = 3{,}3$, se obtiene $c = \sqrt{(6{,}5^2 - 3{,}3^2)} = 5{,}6$. La distancia focal es $2c = 11{,}2$ cm.

4.03 $a = 8$, $c = 5$ y $b^2 = 39$; $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$.

4.04 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

4.05 **a)** $e = \frac{\sqrt{23}}{12} \approx 0{,}400$.

b) $e = \frac{2\sqrt{6}}{5} \approx 0{,}980$.

4.06 $a = 6$ y $c = ae = 3{,}6$. Como $b = \sqrt{(36 - 12{,}96)} = 4{,}8$, los otros vértices son $(0, 4{,}8)$ y $(0, -4{,}8)$.

4.07 $c = 4$, $a = c/e = 5$ y $b^2 = 9$. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

4.08 Sus semiejes son 3 y 2; $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$.

4.09

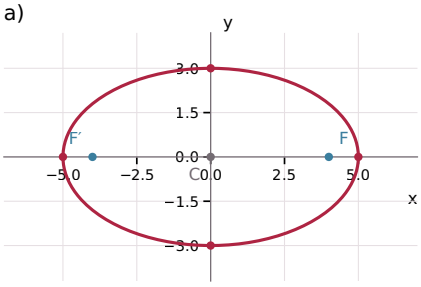
a) Vértices (±5, 0), (0, ±3); focos (±4, 0); e = 4/5.

b) Vértices (±4, 0), (0, ±5); focos (0, ±3); e = 3/5.

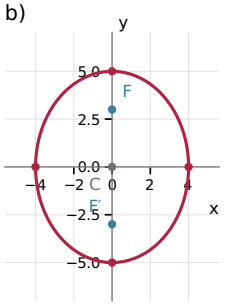
c) Forma reducida: $x^2/64 + y^2/100 = 1$. Vértices (±8, 0), (0, ±10); focos (0, ±6); e = 3/5.

d) Vértices (±5, 0), (0, ±4); focos (±3, 0); e = 3/5.

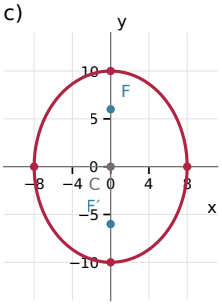
a)



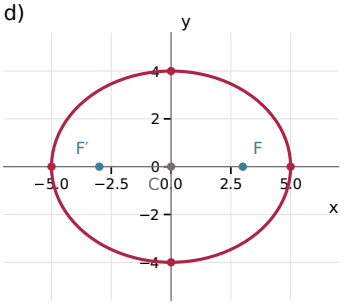
b)



c)



d)



4.10

a) Forma reducida: $x^2/36 + y^2/324 = 1$. Vértices (±6, 0), (0, ±18); focos $(0,\pm 12\sqrt{2})$; e = $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

b) Vértices (±35, 0), (0, ±7); focos $(\pm 14\sqrt{6}, 0)$; e = $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

c) Vértices (±10, 0), (0, ±6); focos (±8, 0); e = 4/5.

d) Vértices (±4, 0), $(0,\pm 2\sqrt{2})$; focos $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$; e = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.11

a) c = 2, b = 3 y $a^2 = 13$; $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b) c = 3, a = 5 y $b^2 = 16$; $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

c) $b^2 = a^2/4$. Al sustituir (8, 3), $a^2 = 100$; $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$.

d) b = 3 y $16/a^2 + 1/9 = 1$; $a^2 = 18$. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$.

4.12

a) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

b) $\frac{x^2}{324} + \frac{y^2}{288} = 1$

c) $x^2 + 4y^2 = 25$

d) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

4.13

a) Elipse con a = 5 y c = 4: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b) Elipse con a = 21/2 y c = 5: $\frac{4x^2}{441} + \frac{4y^2}{341} = 1$.

4.14

Sustituyendo en $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, resulta $a^2 = 4b^2$; finalmente $a^2 = 4$ y $b^2 = 1$. Ecuación: $x^2/4 + y^2 = 1$.

4.15

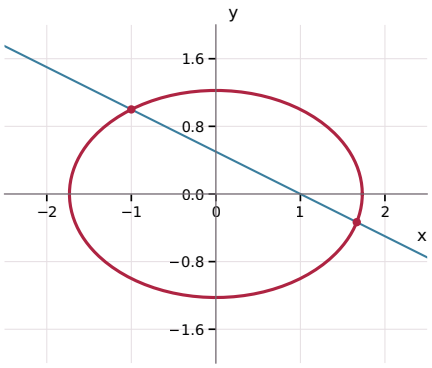
c = 4, $a^2 - b^2 = 16$ y $4ab = 48\sqrt{5}$. De $a^4 - 16a^2 - 720 = 0$ se obtiene $a^2 = 36$, $b^2 = 20$. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$.

4.16

Centro (0, 0), semiejes 10 y 8: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$. Cinco puntos son (10, 0), (−10, 0), (0, 8), (0, −8) y $(5, 4\sqrt{3})$.

4.17

Sustituyendo $x = 1 - 2y$ resulta $3y^2 - 2y - 1 = 0$. Son secantes en (−1, 1) y (5/3, −1/3).



4.18

Elipse con eje mayor vertical: a = 13, c = 12 y b = 5. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$.

4.19

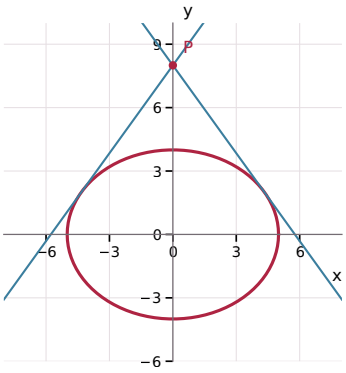
$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$. Centro (1, −2), semiejes 3 y 2; focos $(1 \pm \sqrt{5}, -2)$ y $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

4.20

$\frac{(x-3)^2}{100} + \frac{(y+1)^2}{1/4} = 1$. Centro (3, −1), semiejes 10 y 1/2. Focos $(3 \pm \frac{\sqrt{399}}{2}, -1)$; $e = \frac{\sqrt{399}}{20}$.

4.21 Al sustituir $y = 2x - 1$: $37x^2 - 28x - 56 = 0$. Extremos $\left(\frac{14 \pm 18\sqrt{7}}{37}, \frac{-9 \pm 36\sqrt{7}}{37}\right)$, con signos iguales. Longitud $\frac{36\sqrt{35}}{37}$.

4.22 Para $y = mx + 8$, el discriminante nulo da $1600m^2 - 3072 = 0$. Las rectas son $y = 8 \pm \frac{4\sqrt{3}}{5}x$.



05 · Hipérbola

5.01 $a = 4$, $b = 3$ y $c = \sqrt{(a^2 + b^2)} = 5$. Los focos son $(5, 0)$ y $(-5, 0)$.

5.02 $c = 25/2$ y $a = 8$; $b^2 = 625/4 - 64 = 369/4$. $B = (0, \frac{3\sqrt{41}}{2})$, $B' = (0, -\frac{3\sqrt{41}}{2})$. El valor de b es aproximadamente 9,605.

5.03 $a = 1$, $c = 2$ y $b^2 = 3$; $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

5.04 $a^2 + b^2 = 25$ y al sustituir el punto se obtiene $4a^4 - 289a^2 + 3600 = 0$. Las raíces para a^2 son 16 y 225/4; esta última daría $b^2 < 0$. Por tanto, $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

5.05 $a = 8$, $b = 15$, $c = 17$. Focos $(\pm 17, 0)$; vértices reales $(\pm 8, 0)$. Los puntos auxiliares $(0, \pm 15)$ son extremos del eje conjugado y no pertenecen a la hipérbola.

5.06

a) $\frac{25}{24} \approx 1{,}042$.

b) $\frac{\sqrt{157}}{11} \approx 1{,}139$.

5.07 $c = 4$, $a = 8/3$ y $b^2 = 80/9$. $\frac{9(x+1)^2}{64} - \frac{9(y-2)^2}{80} = 1$.

5.08 No. En una hipérbola con ejes paralelos a X e Y, el foco debe compartir la abscisa o la ordenada del centro. $F - C = (-3, -3)$ no es horizontal ni vertical. Los datos no son compatibles con la orientación exigida.

5.09

a) Focos $(\pm\sqrt{34},0)$; vértices $(\pm5, 0)$; $y = \pm\frac{3}{5}x$; $e = \frac{\sqrt{34}}{5}$.

b) Focos $(0,\pm\sqrt{41})$; vértices $(0, \pm5)$; $y = \pm\frac{5}{4}x$; $e = \frac{\sqrt{41}}{5}$.

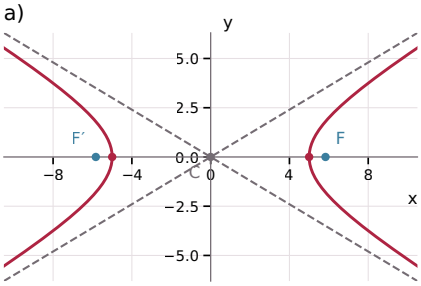
c) Focos $(0,\pm2\sqrt{41})$; vértices $(0, \pm10)$; $y = \pm\frac{5}{4}x$; $e = \frac{\sqrt{41}}{5}$.

d) Focos $(\pm\sqrt{41},0)$; vértices $(\pm5, 0)$; $y = \pm\frac{4}{5}x$; $e = \frac{\sqrt{41}}{5}$.

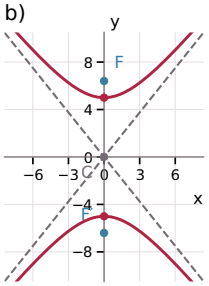
e) Focos $(\pm2\sqrt{34},0)$; vértices $(\pm10, 0)$; $y = \pm\frac{3}{5}x$; $e = \frac{\sqrt{34}}{5}$.

f) Focos $(\pm2\sqrt{6},0)$; vértices $(\pm4, 0)$; $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$; $e = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

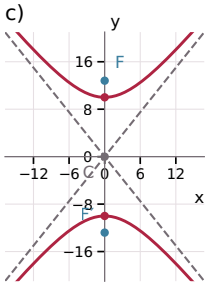
a)



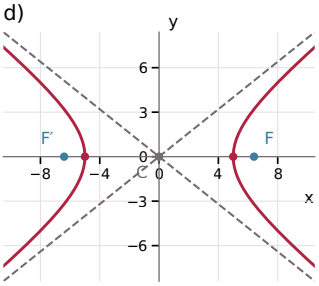
b)



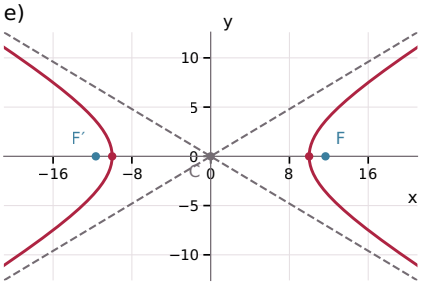
c)



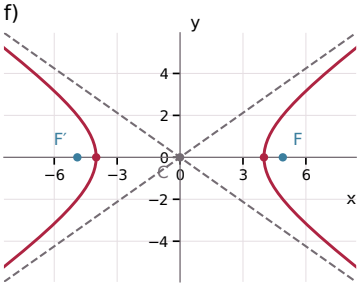
d)



e)



f)



5.10

a) $c = 6$. Al sustituir P y $b^2 = 36 - a^2$ resulta $a^4 - 296a^2 + 2304 = 0$. La raíz admisible es $a^2 = 8$ y $b^2 = 28$: $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{28} = 1$.

b) $c = 17$, $c - a = 2$; $a = 15$ y $b^2 = 64$. $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = 1$.

c) Resolviendo las dos condiciones se obtiene $a^2 = b^2 = 8$: $x^2 - y^2 = 8$.

5.11

a) b/a = 2 y c = $3\sqrt{5}$; a = 3, b = 6. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$.

b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

c) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$.

d) a = c/e = 5 y $b^2 = 11$; $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$.

5.12

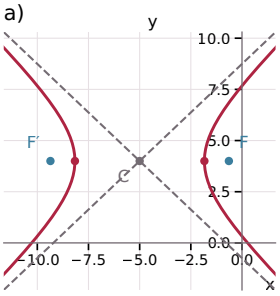
a) Centro (−5, 4); focos $(-5 \pm \sqrt{19}, 4)$; vértices $(-5 \pm \sqrt{10}, 4)$; asíntotas $y - 4 = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}(x + 5)$; e $= \sqrt{\frac{19}{10}}$.

b) Centro (0, −3); focos $(0, -3 \pm 4\sqrt{2})$; vértices (0, 2), (0, −8); asíntotas $y + 3 = \pm\frac{5}{\sqrt{7}}x$; e $= \frac{4\sqrt{2}}{5}$.

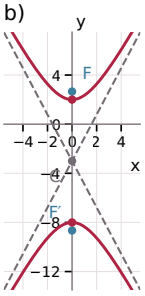
c) Centro (−4, 0); focos $(-4, \pm 2\sqrt{5})$; vértices $(-4, \pm\sqrt{11})$; asíntotas $y = \pm\frac{\sqrt{11}}{3}(x + 4)$; e $= \sqrt{\frac{20}{11}}$.

d) Centro (4, −1); focos $(4 \pm \sqrt{23}, -1)$; vértices $(4 \pm \sqrt{14}, -1)$; asíntotas $y + 1 = \pm\frac{3}{\sqrt{14}}(x - 4)$; e $= \sqrt{\frac{23}{14}}$.

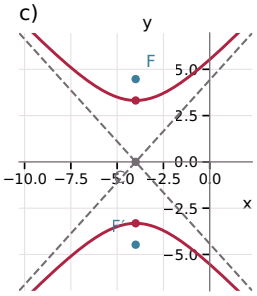
a)



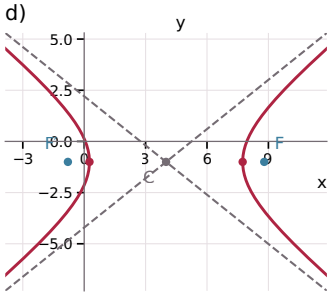
b)



c)



d)



5.13 **a)** Con ejes paralelos a los coordenados no existe: $b^2 = 7a^2/9$ y el punto exigiría $a^2 = -18/7$, tanto en orientación horizontal como vertical. Sin esa restricción sí existen hipérbolas giradas; por ejemplo, $\frac{(x-1+y)^2}{36} - \frac{(y-x+1)^2}{28} = 1$. Tiene $a^2 = 18$, $b^2 = 14$ y pasa por (4, 3).

b) El eje real es horizontal: $a = 5$, $c = 7$, $b^2 = 24$. $\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y-3)^2}{24} = 1$.

c) El eje real es horizontal: $a = 5$, $c = 10$, $b^2 = 75$. $\frac{(x+5)^2}{25} - \frac{(y-2)^2}{75} = 1$.

5.14 $c = 9$ y $b^2 = 81 - a^2$. La condición del punto da $a^4 - 322a^2 + 18225 = 0$. La raíz admisible es $a^2 = 161 - 4\sqrt{481}$ y $b^2 = 4\sqrt{481} - 80$. Ecuación: $\frac{x^2}{161 - 4\sqrt{481}} - \frac{y^2}{4\sqrt{481} - 80} = 1$.

5.15 $a = 5$, $c = 12$ y $b^2 = 119$. Es la rama superior de $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{119} = 1$, con $y \geq 5$. Si se tomara el valor absoluto de la diferencia, se obtendrían ambas ramas.

5.16 Centro $(-5, -6)$, $c = 5$, $a = 4$ y $b = 3$. Ecuación: $\frac{(y+6)^2}{16} - \frac{(x+5)^2}{9} = 1$, restringida a $y \leq -10$, pues P debe estar más cerca de A′.

06 · Parábola

6.01 $x^2 = 8y$. La directriz es $y = -2$.

6.02 $y^2 = 8x$. La directriz es $x = -2$.

6.03 La distancia del vértice a la directriz es 2 y el foco es $(-2, 3)$. $(x + 2)^2 = 8(y - 1)$, o $x^2 + 4x - 8y + 12 = 0$.

6.04 El foco es $(3, 9)$; $(x - 3)^2 = 16(y - 5)$, equivalente a $x^2 - 6x - 16y + 89 = 0$.

6.05 Si $y^2 = kx$, entonces $36 = 3k$. Ecuación: $y^2 = 12x$.

6.06

a) F(5/2, 0); directriz x = −5/2.

b) F(7/4, 0); directriz x = −7/4.

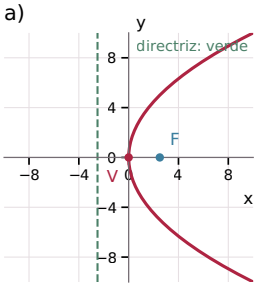
c) F(0, 3/2); directriz y = −3/2.

d) F(0, 1/4); directriz y = −1/4.

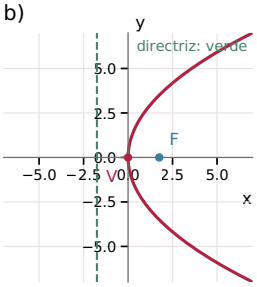
e) F(−5/2, 0); directriz x = 5/2.

f) F(0, −3/2); directriz y = 3/2.

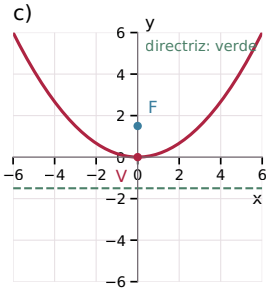
a)



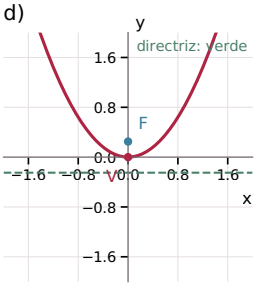
b)



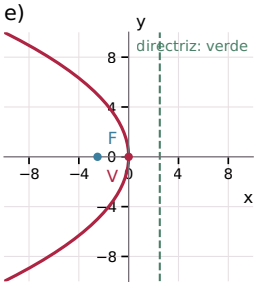
c)



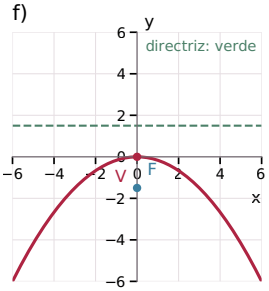
d)



e)



f)



6.07

a) $y^2 = 20x$.

b) $x^2 = 8y$.

6.08

a) $x^2 = \frac{9}{8}y$

b) $y^2 = \frac{16}{5}x$

6.09 $(x + 1)^2 = k(y - 3)$; al sustituir, $9 = -5k$. $(x + 1)^2 = -\frac{9}{5}(y - 3)$, equivalente a $5x^2 + 10x + 9y - 22 = 0$.

6.10

a) V(3, 0), F(7/2, 0), directriz $x = 5/2$.

b) V(4, 1), F(5, 1), directriz $x = 3$.

c) V(0, 2), F(0, 7/2), directriz $y = 1/2$.

d) V(3, −1), F(3, 1), directriz $y = -3$.

e) V(0, −1), F(0, −2), directriz $y = 0$.

f) V(1, −3), F(−1, −3), directriz $x = 3$.

6.11

a) V(5, 3), F(5, 13/2), directriz $y = -1/2$.

b) V(1, −6), F(7, −6), directriz $x = -5$.

c) V(6, −4), F(4, −4), directriz $x = 8$.

d) V(−4, −7), F(−4, −8), directriz $y = -6$.

e) V(0, 2), F(−9/2, 2), directriz $x = 9/2$.

f) V(0, −1), F(0, −13/4), directriz $y = 5/4$.

6.12

a) $(x + 5)^2 = -24(y - 8)$.

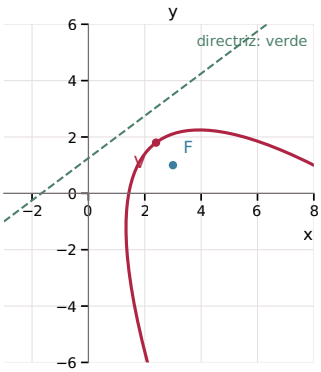
b) $(y - 7)^2 = -12(x - 3)$.

c) V(13/2, 5); $(y - 5)^2 = -14(x - 13/2)$, equivalente a $y^2 - 10y + 14x - 66 = 0$.

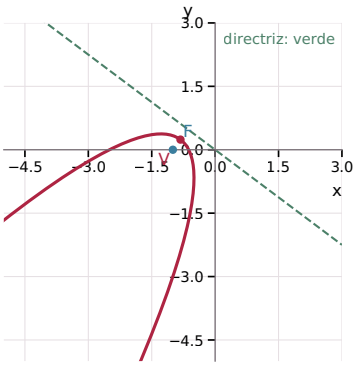
d) $(y - 3)^2 = 20(x - 2)$.

6.13 Sustituyendo los puntos en $y = ax^2 + bx + c$, se obtiene $y = -\frac{4}{5}x^2 - 2x + \frac{16}{5}$. Su forma de vértice es $(x + \frac{5}{4})^2 = -\frac{5}{4}(y - \frac{89}{20})$.

6.14 Es una parábola con foco P y directriz la recta dada. $25[(x - 3)^2 + (y - 1)^2] = (3x - 4y + 5)^2$. Desarrollando: $16x^2 + 9y^2 + 24xy - 180x - 10y + 225 = 0$.



6.15 La igualdad de distancias es $25[(x+1)^2+y^2]=(3x+4y)^2$. Resulta $16x^2+9y^2-24xy+50x+25=0$.



6.16

a) $y=(x+1)^2$. V(−1, 0), F(−1, 1/4), directriz $y=-1/4$.

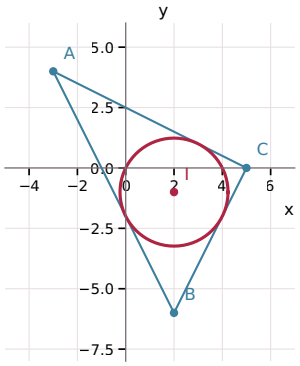
b) $(x-4)^2=-4(y-5/2)$. V(4, 5/2), F(4, 3/2), directriz $y=7/2$.

c) $(x-1)^2=(y-8)/4$. V(1, 8), F(1, 129/16), directriz $y=127/16$.

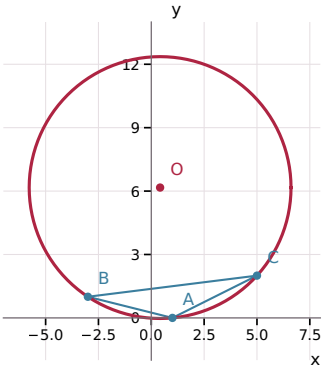
d) V(−3/4, −107/8), F(−3/4, −40/3), directriz $y=-161/12$. Se usa que el desplazamiento del vértice al foco es $1/(4a)$ para $y=ax^2+bx+c$.

07 · Síntesis y demostraciones

7.01 Vértices (−3, 4), (2, −6) y (5, 0). Las bisectrices interiores x + y − 1 = 0 y x − 3y − 5 = 0 dan I(2, −1). Su distancia a cada lado es √5; $(x-2)^2+(y+1)^2=5$.



7.02 $6x^2+6y^2-5x-74y-1=0$. Circuncentro (5/12, 37/6); $(x-\frac{5}{12})^2+(y-\frac{37}{6})^2=\frac{5525}{144}$.

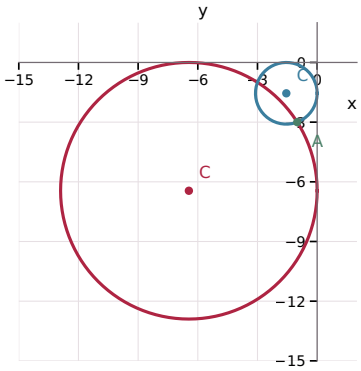


7.03 **a)** Los cuatro verifican $(x-1)^2+(y+2)^2=25$.

b) MQ: x + 7y − 12 = 0; NP: x − y − 2 = 0. T(13/4, 5/4).

c) TM = 5√2/4, TQ = 15√2/4, TN = 3√2/4 y TP = 25√2/4. Ambos productos son 75/8.

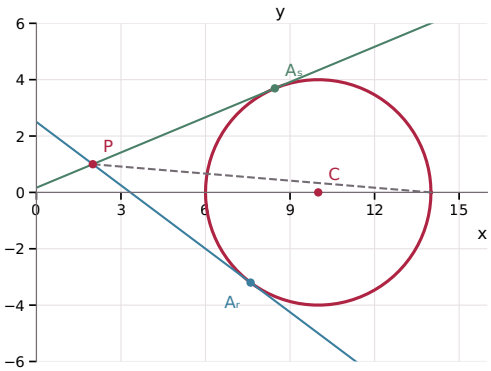
7.04 El centro debe ser $(-r, -r)$, con $r > 0$. La condición $(r-1)^2 + (r-3)^2 = r^2$ da $r = 4 \pm \sqrt{6}$. Ecuaciones: $(x + 4 \pm \sqrt{6})^2 + (y + 4 \pm \sqrt{6})^2 = (4 \pm \sqrt{6})^2$, con signos iguales.



7.05 **a)** Centro C(10, 0), radio 4. Las distancias a r y s son $|30 - 10|/5 = 4$ y $|50 + 2|/13 = 4$: ambas son tangentes.

b) P(2, 1). Tangencia con r: $A_r(38/5, -16/5)$; con s: $A_s(110/13, 48/13)$.

c) $PQ \cdot PQ' = (d - r)(d + r) = d^2 - r^2 = 65 - 16 = 49$. Por Pitágoras, $PA^2 = d^2 - r^2 = 49$.



7.06 **a)** Con centro (4, 4), no: las distancias son 7 y 35/13.

b) Con centro (10, 2), sí: ambas distancias son 9. $(x-10)^2 + (y-2)^2 = 81$.

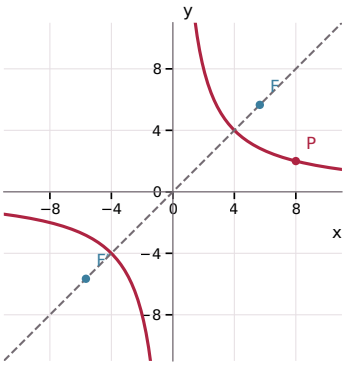
7.07 **a)** (3, 2), (−3, 2), (3, −2) y (−3, −2).

b) De $y = 3x^2$ e $y^2 = 9x$ resulta $x^4 = x$. Las intersecciones reales son (0, 0) y (1, 3).

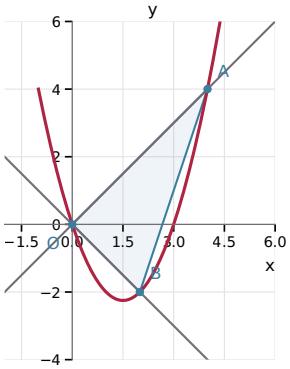
7.08 Ecuación: $x^2 - y^2 = a^2$. Como $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$, los focos son $(\pm a\sqrt{2}, 0)$. Asíntotas $y = x$ e $y = -x$.

7.09 **a)** La distancia focal es 16: c = 8, a = 4√2 y $b^2 = c^2 - a^2 = 32 = a^2$. Es equilátera.

b) En coordenadas giradas $u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, $v = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$, la ecuación es $u^2 - v^2 = 32$. Al desarrollar: $xy = 16$. El punto (8, 2) la verifica.



7.10 y = x da (0, 0), (4, 4); y = −x da (0, 0), (2, −2). Los lados desde el origen son perpendiculares y miden 4√2 y 2√2. Área = 8 unidades cuadradas.



7.11 **a)** Circunferencia: $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$. Centro $(-1, -3)$, radio 3.

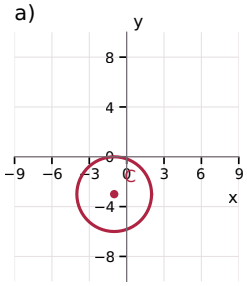
b) Hipérbola: $\frac{x^2}{16} - \frac{(y - 2)^2}{4} = 1$. Centro $(0, 2)$, vértices $(\pm 4, 2)$, focos $(\pm 2\sqrt{5}, 2)$, asíntotas $y - 2 = \pm x/2$; $e = \sqrt{5}/2$.

c) Elipse: $\frac{(x - 1)^2}{9} + \frac{(y + 3)^2}{16} = 1$. Centro $(1, -3)$, vértices $(-2, -3)$, $(4, -3)$, $(1, 1)$, $(1, -7)$; focos $(1, -3 \pm \sqrt{7})$; $e = \sqrt{7}/4$.

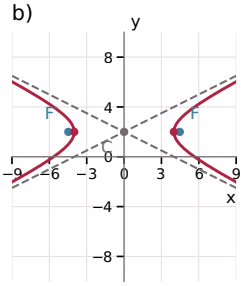
d) Parábola: $(x + 3)^2 = 4(y - 2)$. $V(-3, 2)$, $F(-3, 3)$, directriz $y = 1$.

e) Hipérbola: $\frac{(y - 5/2)^2}{7} - \frac{(x + 3/2)^2}{7} = 1$. Centro $(-3/2, 5/2)$; vértices $(-3/2, 5/2 \pm \sqrt{7})$; focos $(-3/2, 5/2 \pm \sqrt{14})$; asíntotas $y - 5/2 = \pm(x + 3/2)$; $e = \sqrt{2}$.

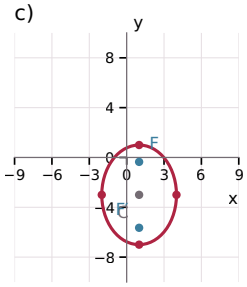
a)



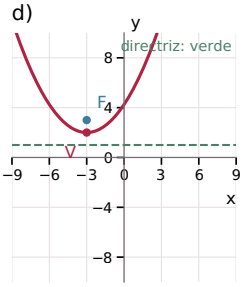
b)



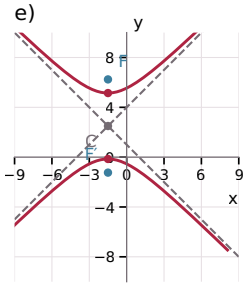
c)



d)



e)



7.12

a) 8. Los centros son (r, r) y la tangencia exterior a la circunferencia dada exige $r^2 + (r - 3)^2 = (r + 1)^2$. Resulta $r = 4 \pm \sqrt{2}$; la suma es 8.

b) $3x + 2y = 9$. Se obtiene restando las dos ecuaciones.

c) 13. Refleja A(2, 5) en el eje X: A′(2, −5). La distancia de A′ al centro (−6, 10) es 17; el camino mínimo mide 17 − 4 = 13. La recta adecuada cruza el eje X, por lo que el mínimo se alcanza.

d) 2 valores: $k = -1$ y $k = 1$. Para $k \neq 0$, hay intersección si $k^4 - 4k^2 \geq 0$, es decir, $|k| \geq 2$. Para $k = 0$ también hay intersección en el origen.

7.13

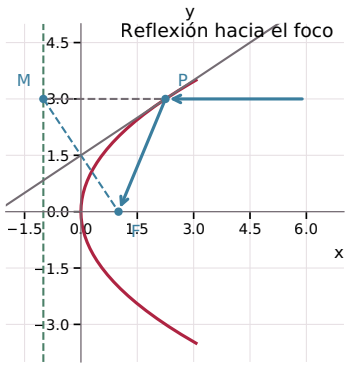
a) De $x^2 + {y_Q}^2 = r^2$ e $y = k \cdot y_Q$, si $k \neq 0$: $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{k^2 r^2} = 1$. Es una elipse de semiejes r y $|k|r$; si $|k| = 1$, es una circunferencia.

b) Si $k = 0$, se obtiene el segmento $y = 0$, $-r \leq x \leq r$. Si la condición se escribe como cociente y/y_Q, deben excluirse los casos $y_Q = 0$ y, por tanto, los extremos $(\pm r, 0)$.

7.14

a) Sea P el punto de incidencia y M su proyección sobre la directriz. Por definición, PM = PF. El triángulo MPF es isósceles y la mediatriz de MF pasa por P y biseca el ángulo entre PM y PF.

b) Esa mediatriz es la tangente en P: cualquier otro punto Q de la parábola cumple QF = distancia(Q, directriz) ≤ QM, de modo que la parábola queda en un mismo semiplano. La tangente forma ángulos iguales con la dirección incidente y con PF; la ley de reflexión dirige el rayo hacia F.



7.15

a) Si P(p, 0), Q(0, q), entonces $p^2 + q^2 = 100$. Su punto medio H(p/2, q/2) describe $x^2 + y^2 = 25$; en la posición del primer cuadrante se recorre solo el cuarto de circunferencia.

b) Para el cuadrado de la figura, C((p + q)/2, (p + q)/2), con $p, q \geq 0$. Describe el segmento $y = x$, $5 \leq x \leq 5\sqrt{2}$. Si se permite todo el plano y ambas orientaciones del cuadrado, el lugar completo son los segmentos de $y = x$ e $y = -x$ con $|x| \leq 5\sqrt{2}$.

c) En el primer cuadrante: P(p, 0), Q(0, q), R(q, p + q), S(p + q, p), con $p^2 + q^2 = 100$ y $p, q \geq 0$. P y Q recorren los segmentos de sus ejes entre 0 y 10. R recorre $x^2 + (y - x)^2 = 100$, $0 \leq x \leq 10$, $y \geq x$; S recorre $y^2 + (x - y)^2 = 100$, $0 \leq y \leq 10$, $x \geq y$.

08 · Aplicaciones de las cónicas

8.01 Tomando el origen en el punto medio de la base: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$. El arco corresponde a $y \geq 0$.

8.02 **a)** $a = 120\,714\,000$ km y $c = ae = 1\,931\,424$ km. La distancia máxima es $a + c = 122\,645\,424$ km.

b) Con centro en el origen y eje mayor X: $\frac{x^2}{14571869796000000} + \frac{y^2}{14568139397332224} = 1$, con x e y en kilómetros.

8.03 El vértice es (0, 0) y los extremos (±120, 30). Si $y = ax^2$, $30 = a \cdot 120^2$ y $a = 1/480$. Ecuación: $x^2 = 480y$.

8.04 Tomando la base como $y = 0$, la parábola es $y = h(1 - x^2/160^2)$. En $x = 128$: $32 = h(1 - 128^2/160^2) = 9h/25$. Por tanto, $h = 800/9 \approx 88{,}89$ m.

8.05 Con vértice en (0, 0) y eje Y, el foco es (0, 10). La parábola es $x^2 = 40y$. Su profundidad en el borde $x = \pm 10$ es 2,5 m.

8.06 Es un reflector con forma de paraboloide de revolución que concentra señales en su foco, donde se sitúa el elemento receptor. Se utiliza, por ejemplo, en comunicaciones y recepción de televisión por satélite.

8.07 Se genera al girar una parábola alrededor de su eje de simetría. Es una superficie tridimensional, no una figura plana.

8.08 Los rayos paralelos al eje se reflejan hacia el foco. Recíprocamente, una fuente situada en el foco produce, tras la reflexión, un haz paralelo al eje.

8.09 Pueden proporcionar conexión en lugares sin infraestructura terrestre cercana. Requieren orientación adecuada y una trayectoria despejada hacia el satélite; la lluvia intensa puede debilitar la señal. La latencia depende, entre otros factores, de la distancia y de la órbita de los satélites.

8.10 Trabajando en centímetros, el foco es (0, 25) y $x^2 = 100y$. En el borde $x = 50$: $y = 2500/100 = 25$ cm.

8.11 Con el vértice en el origen, la sección es $y = x^2/100$, con $-50 \leq x \leq 50$, en centímetros. El foco está en $(0, 25)$ y los extremos del reflector son $(-50, 25)$ y $(50, 25)$.

