1.º BACHILLERATO

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Practica, razona y comprueba tus respuestas.

01 Crecimiento y monotonía

Signo de la derivada y cambios de tendencia.

02 Máximos y mínimos

Extremos relativos, absolutos y puntos críticos.

03 Curvatura e inflexiones

Segunda derivada y forma de las curvas.

04 Asíntotas

Límites, posición y comportamiento lejano.

05 Representación de funciones

Polinomios, cocientes, exponenciales y logaritmos.

06 Problemas de optimización

Áreas, costes, distancias y volúmenes.

07 Parámetros y condiciones

Funciones que cumplen propiedades dadas.

08 Aplicaciones y razonamiento

Modelos de cambio, interpretación y retos.

TU RUTA DE TRABAJO

Índice

Actividades organizadas por contenidos, con espacio para trabajar y soluciones al final.

01 Crecimiento y monotonía **3**

02 Máximos y mínimos **9**

03 Curvatura e inflexiones **16**

04 Asíntotas **18**

05 Representación de funciones **19**

06 Problemas de optimización **29**

07 Parámetros y condiciones **32**

08 Aplicaciones y razonamiento **34**

• Solucionario **39**

Cómo usar el dossier
El código **1.12** identifica la actividad 12 del bloque 1. Busca ese mismo código en el solucionario. Puedes seguir el orden completo o seleccionar un contenido para repasarlo.

Antes de empezar
Conserva el dominio al simplificar y separa los intervalos en las discontinuidades. Curvatura hacia arriba significa $f'' > 0$; hacia abajo, $f'' < 0$. Un punto con $f' = 0$ no siempre es un extremo. Los ángulos se expresan en radianes; log es decimal y ln, natural.

BLOQUE 01

Crecimiento y monotonía

Signo de la derivada y cambios de tendencia. · 17 actividades

1.01 Dibuja una función creciente en $(-\infty, -2]$ y $[4, \infty)$, y decreciente entre -2 y 4.

1.02 Dibuja $f(x) = x^2$. Usa sus traslaciones para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) $f(x) = (x - 1)^2$

b) $f(x) = (x + 2)^2$

c) $f(x) = x^2 + 1$

d) $f(x) = x^2 - 3$

1.03 Estudia el crecimiento y el decrecimiento.

a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$

b) $f(x) = -x^2 + 6x + 2$

1.04 Estudia el crecimiento de $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x < -2 \\ 1 + \frac{1}{x^2}, & x \geq -2,\ x \neq 0 \end{cases}$.

1.05 Representa la derivada de $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$.

1.06 Decide si cada función crece o decrece cerca del punto indicado.

a) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - x + 1$; $x = 1$.

b) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x}$; $x = -2$.

c) $f(x) = 2^x + 3\ln x - 8$; $x = 4$.

d) $f(x) = 2x + 3\sqrt{x}$; $x = 9$.

1.07 Decide si cada función crece, decrece o es constante cerca del punto.

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$; $x = \pi$.

b) $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x$; $x = 0$.

c) $f(x) = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{x^2 - 1}$; $x = \pi/2$.

d) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$; $x = 0$.

1.08 Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) $f(x) = x^4 - 4x$

b) $f(x) = 9x^4 - 2x^3 - 6x^2$

c) $f(x) = \frac{3x^4}{4} - x^3 - 3x^2 + 6$

d) $f(x) = x^4 - 2x^2$

1.09 Estudia el crecimiento.

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = x^4$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

1.10 Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) $f(x) = 3\text{sen}(2x)$

b) $f(x) = 2^{x+1}$

c) $f(x) = e^{2x-1}$

d) $f(x) = (\frac{1}{4})^x + 5$

1.11 Estudia el dominio y el crecimiento.

a) $f(x) = \ln x$

b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

c) $f(x) = \log_2(x^3 + 1)$

d) $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$

e) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$

f) $f(x) = \ln\left(\frac{x - 1}{x^2 - 1}\right)$

1.12 Estudia el crecimiento por intervalos y revisa las uniones.

a) $f(x) = \begin{cases} x - 3, x \leq 1 \\ 3 - 2x, x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, x < 0 \\ 3x^2 + 5x - 2, x \geq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^3, x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2} + 3, x > 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 9, x \leq 2 \\ 8 - 3x, x > 2 \end{cases}$

1.13 Estudia el crecimiento respetando el dominio.

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

b) $f(x) = \frac{x + 2}{x + 3}$

c) $f(x) = \frac{2x}{x + 1}$

d) $f(x) = \frac{x + 2}{x - 2}$

1.14 ¿Es $f(x) = x^3$ siempre creciente? ¿Qué sucede en el origen?

1.15 Decide si crece o decrece cerca de los puntos indicados.

a) $f(x) = |3x + 2|$; $x = 1, -4$.

b) $f(x) = |-x + 3|$; $x = 0, 5$.

c) $f(x) = |-(x - 3)|$; $x = -1, 2$.

d) $f(x) = |\frac{3x}{2} + 1|$; $x = -2, 0$.

1.16 Decide si crece o decrece cerca de los puntos indicados.

a) $f(x) = |x^2 - 3|$; $x = -3, -1, 4$.

b) $f(x) = |-x^2 + 3x|$; $x = -2, 2, 6$.

c) $f(x) = |\frac{x + 7}{4}|$; $x = -10, -5, 1$.

1.17 Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) $f(x) = |x^2 - x - 5|$

b) $f(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$

c) $f(x) = \left|\frac{x}{x^2 + 1}\right|$

d) $f(x) = -\sqrt{|x|}$

e) $f(x) = |\ln x|$

f) $f(x) = \ln(|x| + 1)$

BLOQUE 02

Máximos y mínimos

Extremos relativos, absolutos y puntos críticos. · 17 actividades

2.01 Dibuja una función con dos máximos, un mínimo y cinco puntos de corte distintos con los ejes.

2.02 Halla los máximos y mínimos relativos.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 1$

2.03 Halla los extremos usando la segunda derivada.

a) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$

c) $f(x) = x^2 + 9x$

d) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 4x$

2.04 Estudia el crecimiento y los extremos de $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

2.05 Estudia el crecimiento y los extremos.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$

b) $f(x) = -x^2 + 4$

c) $f(x) = 2x^2 - 8x$

d) $f(x) = -3x - x^2$

e) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

f) $f(x) = 3x^2 - 2x$

2.06 Estudia el crecimiento y los extremos relativos.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

c) $f(x) = x^3 - 3x$

d) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 8$

e) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 12$

2.07 Halla los extremos con la segunda derivada. Si el criterio no decide, analiza el signo de f′.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{2 - x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 4}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

f) $f(x) = \dfrac{8x}{x^2 + 1}$

2.08 Halla los extremos relativos con f″ y, si hace falta, el signo de f′.

a) $f(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = \dfrac{5 - 2x}{4}$

c) $f(x) = 2x^3 - 6x$

d) $f(x) = 2x^2 - 12x + 5$

e) $f(x) = 2x^4 - 4x^2$

f) $f(x) = x^4 - 2x^3$

2.09 Usa derivadas para hallar el vértice de $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$.

2.10 Halla el vértice mediante derivadas e indica si es máximo o mínimo.

a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

b) $f(x) = -2x^2 + 6x + 9$

c) $f(x) = x^2 + 2x - 5$

d) $f(x) = -x^2 + 4x$

e) $f(x) = 3x^2 + x + 9$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{2}$

2.11 Estudia el dominio, el crecimiento y los extremos de $f(x) = \sqrt{2x^3 - \frac{13}{2}x^2 - 5x}$.

2.12 Halla los puntos de tangente horizontal.

a) $f(x) = 3x^2 - 15x + 13$

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 8$

c) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 12$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 2}$

2.13 Halla los puntos de tangente horizontal y decide si son máximos o mínimos.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{2 - x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 4}$

2.14 Deduce toda la información posible sobre el punto $x = a$.

a) $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$.

b) $f(a) = 0$ y $f'(a) = 0$.

c) $f'(a) = 0$, $f(a) = 3$ y $f(x) \leq 3$ siempre.

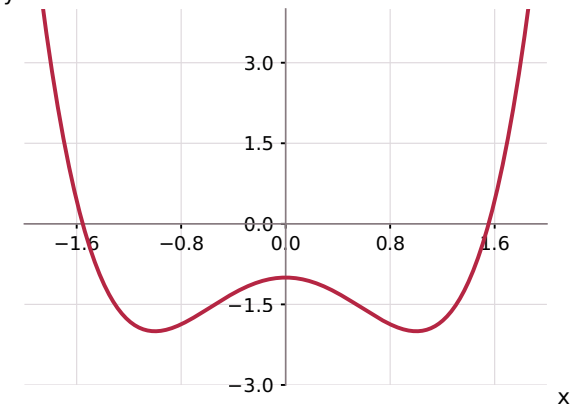
d) $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 4$.

e) $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 0$.

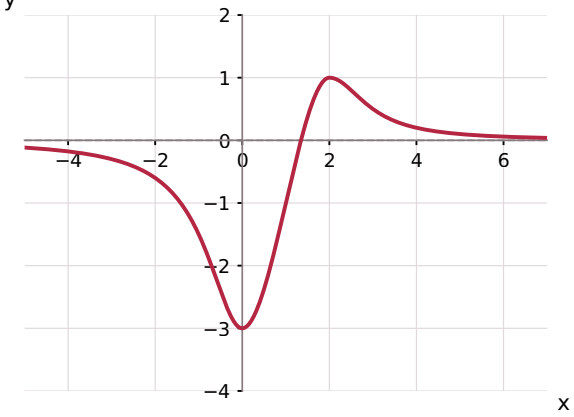
f) $f'(a) = 0$, $f'(x) > 0$ a la izquierda y $f'(x) < 0$ a la derecha.

2.15 Lee las gráficas. Indica crecimiento, decrecimiento y extremos, con sus valores.

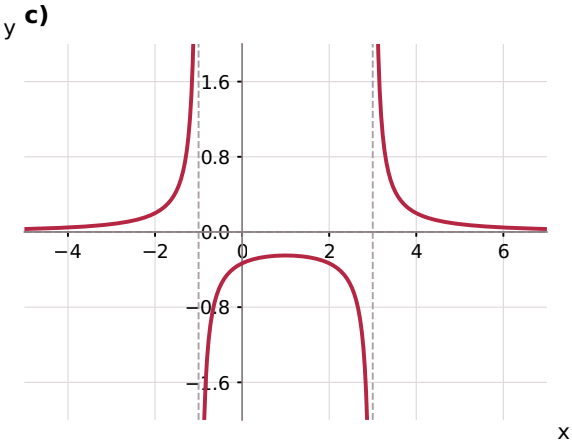
a)



b)



c)



2.16 Para $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$, calcula los valores indicados y deduce la información sobre la gráfica.

a) $f'(-1)$, $f'(-1{,}5)$, $f'(-0{,}5)$, $f(-1)$.

b) $f'(0{,}5)$, $f(0{,}5)$, $f'(0{,}25)$, $f(1)$.

c) $f(2)$, $f'(2)$, $f'(1{,}5)$, $f'(2{,}5)$.

2.17 Halla los máximos y mínimos relativos.

a) $f(x) = (x - 1)^2(x + 3)^2$

b) $f(x) = (x - 2)^2(x - 1)^2$

c) $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)^2$

BLOQUE 03

Curvatura e inflexiones

Segunda derivada y forma de las curvas. · 4 actividades

3.01 Estudia la curvatura indicando el signo de f″ y los intervalos hacia arriba o hacia abajo.

a) $f(x) = 7x^3 - x^2 - x + 2$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

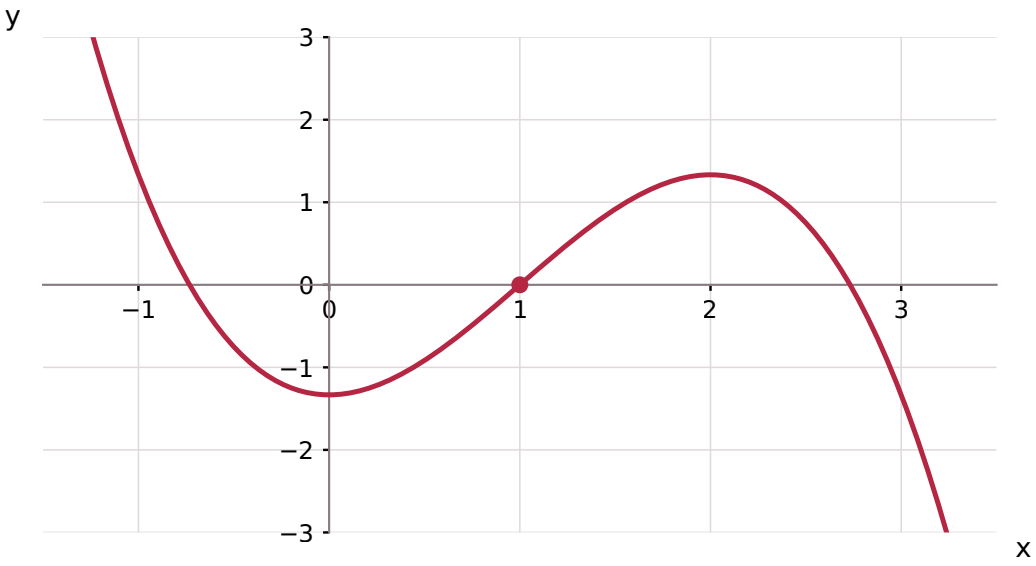
3.02 Estudia la curvatura y comprueba el resultado gráficamente.

a) $f(x) = -x^2 - x + 4$

b) $f(x) = -x - 5x^2$

3.03 Estudia la curvatura de $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x < -2 \\ 1 + \dfrac{1}{x^2}, & x \geq -2,\ x \neq 0 \end{cases}$.

3.04 Estudia la curvatura de la gráfica en $x = -1$, $x = 1$ y $x = 2$.



BLOQUE 04

Asíntotas

Límites, posición y comportamiento lejano. · 6 actividades

4.01 Halla todas las asíntotas.

a) $f(x) = \dfrac{3x}{x - 2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

4.02 Halla las asíntotas oblicuas.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$

b) $f(x) = x + \dfrac{x}{2 - x}$

4.03 Halla las asíntotas horizontales de $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{x^2 - 1}$ y la posición de las ramas.

4.04 Halla las asíntotas horizontales de $f(x) = \dfrac{x^3}{2x^3 + 3x^2 + 2}$ y la posición de las ramas.

4.05 Halla las asíntotas verticales de $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4}$ y los límites laterales.

4.06 Halla las asíntotas verticales de $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x^2 - x - 6}$ y los límites laterales.

BLOQUE 05

Representación de funciones

Polinomios, cocientes, exponenciales y logaritmos. · 38 actividades

5.01 Dibuja una función siempre creciente que no tenga asíntotas.

5.02 Dibuja una función decreciente en cada intervalo de su dominio, con una asíntota vertical y otra horizontal.

5.03 Dibuja una función siempre positiva que tenga un máximo en (4, 6).

5.04 Dibuja una función con dominio $[-5, 5]$, que pase por el origen y tenga límite $+\infty$ al aproximarse a -5 por la derecha y límite $-\infty$ al aproximarse a 5 por la izquierda.

5.05 Representa una función con dominio $\mathbb{R}$ salvo 3, cortes con ambos ejes en (0, 0), asíntotas $x = 3$ e $y = 1$, decreciente en cada intervalo del dominio, con curvatura hacia abajo a la izquierda de 3 y hacia arriba a la derecha, y sin puntos de inflexión.

5.06 ¿Existe una función definida en $\mathbb{R}$, creciente, que corte el eje X en $(-2, 0)$, el eje Y en $(0, 1)$, tenga asíntotas horizontales $y = 3$ e $y = -2$, curvatura hacia arriba en $(-\infty, 1)$, hacia abajo en $(1, \infty)$ y un punto de inflexión en $(-1, 0)$?

5.07 Dibuja una función definida en $\mathbb{R}$ que pase por $(-2, -1)$ y $(2, 3)$, crezca hasta $x = 0$, decrezca después y tenga máximo en $(0, 6)$.

5.08 Dibuja una función con dominio $\mathbb{R}$, cortes (0, 4) y (6, 0), límite $+\infty$ cuando $x \to -\infty$ y límite $-\infty$ cuando $x \to +\infty$.

5.09 Representa gráficamente.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

5.10 Representa gráficamente.

a) $f(x) = x^3 - 4x$

b) $f(x) = x^3 - 6x$

5.11 Representa $f(x) = \dfrac{x + 4}{2x - 3}$.

5.12 Representa $f(x) = x - \dfrac{x + 4}{x - 3}$.

5.13 Representa una función de dominio $\mathbb{R}$, sin asíntotas, creciente en $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$, decreciente en $(0, 2)$ y con tangente horizontal en $x = 0$ y $x = 2$.

5.14 Representa una función de dominio $\mathbb{R}$, siempre creciente y sin asíntotas, que corte el eje Y en $(0, -8)$ y tenga tangente horizontal y $f''(2) = 0$ en $(2, 0)$.

5.15 Representa una función de dominio $\mathbb{R}$ con asíntota horizontal $y = 3$, único corte con los ejes en su mínimo $(0, 0)$, decreciente para $x < 0$ y creciente para $x > 0$.

5.16 Representa una función de dominio $\mathbb{R}$ salvo -3, con asíntotas $x = -3$ e $y = -1$, creciente en cada intervalo del dominio y con cortes $(-6, 0)$ y $(0, -4)$.

5.17 Representa una función de dominio $\mathbb{R}$ con cortes $(-2, 0)$, $(-1, 0)$ y $(0, 0)$, creciente entre $-3/2$ y $-1/2$ y decreciente en el resto. Debe tener mínimo $(-3/2, -1/2)$ y máximo $(-1/2, 1/2)$.

5.18 Representa una función de dominio $\mathbb{R}$ salvo -3 y 3, con asíntotas verticales en esos puntos y $f'(x) < 0$ en todo su dominio.

5.19 Representa una función de dominio $\mathbb{R}$ salvo 0, con asíntotas $x = 0$ e $y = x$, f' positiva en $(-\infty, -2)$ y $(0, \infty)$, negativa en $(-2, 0)$, y $f'(-2) = 0$.

5.20 Sea $f(x) = 4x^3 + 15x^2 - 18x + 10$.

a) Determina los máximos y mínimos.

b) Calcula los límites en $-\infty$ y $+\infty$.

c) Esboza su gráfica.

5.21 Estudia y representa $f(x) = x^3 + 6x^2 - 36x + 29$.

a) Dominio y asíntotas.

b) Puntos de corte con los ejes.

c) Crecimiento y decrecimiento.

d) Máximos, mínimos y gráfica.

5.22 Representa las funciones estudiando crecimiento, decrecimiento, extremos y curvatura.

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x - 1$

b) $f(x) = x^3 - x$

c) $f(x) = x^3 - x^2$

d) $f(x) = x^3 - 2x^2$

e) $f(x) = x^3 - 3x^2$

5.23 Representa las funciones estudiando crecimiento, decrecimiento, extremos y curvatura.

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

5.24 Estudia y representa las funciones polinómicas.

a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 10$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$

c) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 48x^2 + 144x + 212$

5.25 Estudia y representa $f(x) = \frac{3x - 2}{x + 4}$.

a) Dominio y asíntotas.

b) Crecimiento, decrecimiento y extremos.

c) Curvatura y representación.

5.26 Halla los extremos y las asíntotas de $f(x) = \frac{x}{x-4}$. Estudia la posición respecto a ellas y esboza la gráfica.

5.27 Calcula las asíntotas y representa gráficamente.

a) $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$

b) $f(x) = \frac{6x}{x-4}$

c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

5.28 Sea $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$.

a) Encuentra los máximos y mínimos.

b) Determina las asíntotas y la posición respecto a ellas.

c) Esboza la gráfica.

5.29 Estudia la posición respecto a las asíntotas y representa las funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x - 3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - 3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

5.30 Estudia y representa las funciones racionales.

a) $f(x) = \dfrac{5x + 1}{x - 2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{2 - x}$

d) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 6}$

5.31 Representa las funciones racionales analizando dominio, cortes, asíntotas, monotonía y extremos.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x + 5}{x^2 - 3x - 4}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 2}{x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + x - 6}$

f) $f(x) = \dfrac{x - 3}{(x + 1)(x - 1)}$

5.32 Estudia y representa las funciones, conservando las exclusiones del dominio aunque simplifiques factores.

a) $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$

5.33 Estudia y representa las funciones exponenciales.

a) $f(x) = 1 + e^{x + 3}$

b) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{2}$

c) $f(x) = 3e^{1 - x}$

d) $f(x) = \dfrac{3 - e^x}{2}$

5.34 Estudia y representa las funciones exponenciales.

a) $f(x) = \frac{2}{5}\cdot 2^{x+2}$

b) $f(x) = 3\cdot(\frac{1}{2})^{x+1}$

c) $f(x) = 4 + (\frac{1}{3})^{x-1}$

d) $f(x) = (\frac{1}{4})^{2-x}$

5.35 Estudia y representa las funciones logarítmicas.

a) $f(x) = \log_3(2x)$

b) $f(x) = \log_2(x+1)$

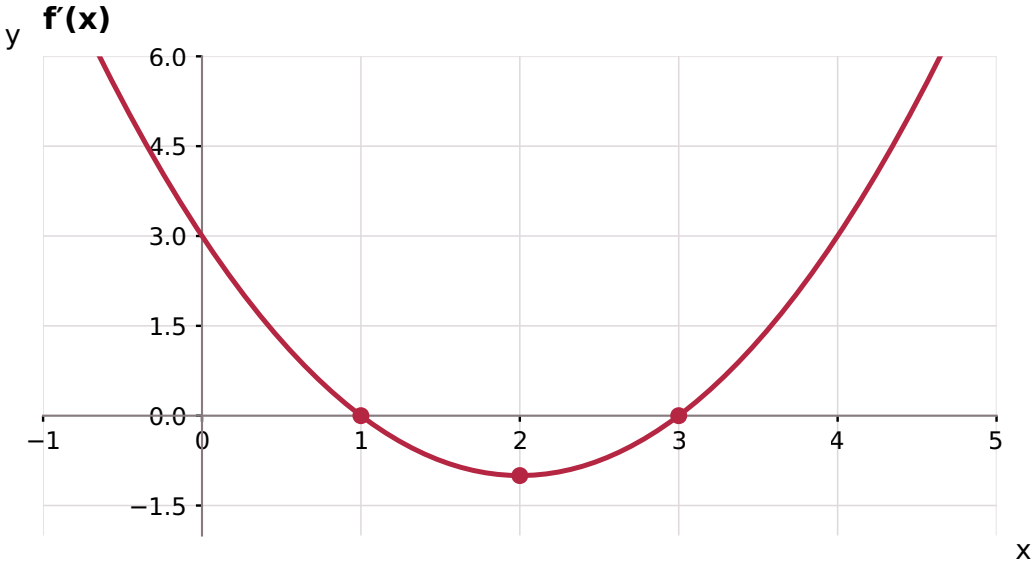
c) $f(x) = \log_{1/3} x$

d) $f(x) = \log_5(x-1)$

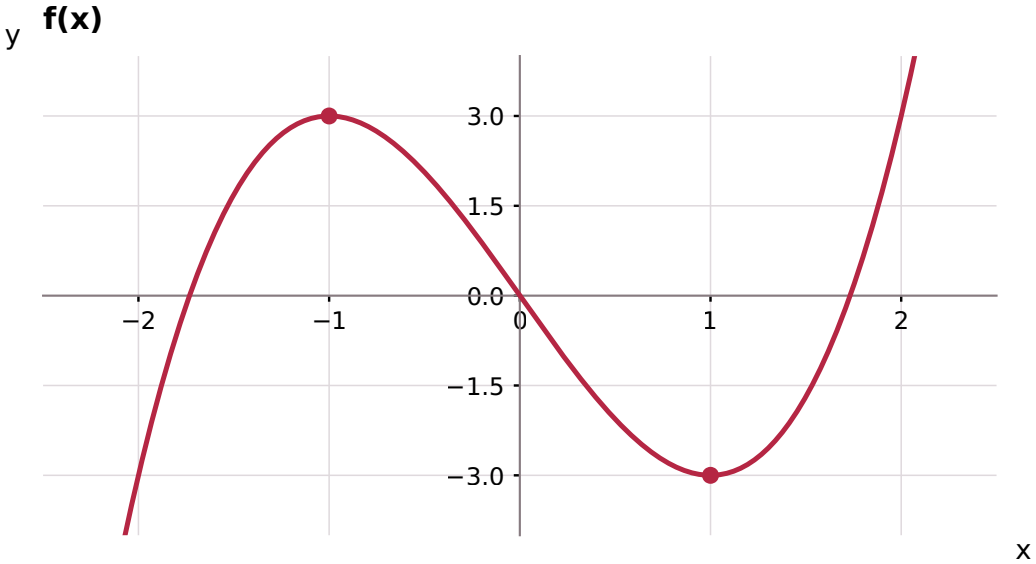
e) $f(x) = \ln(\frac{1}{x})$

f) $f(x) = \ln(\frac{1}{x^2+1})$

5.36 La gráfica dada corresponde a f′(x). Representa aproximadamente f(x).



5.37 La gráfica dada corresponde a f(x). Representa aproximadamente f′(x).



5.38 Representa la familia $f(x) = \frac{2ax^2}{x^2 - a^2}$, con $a > 0$.

BLOQUE 06

Problemas de optimización

Áreas, costes, distancias y volúmenes. · 13 actividades

6.01 El gasto de una empresa para producir x unidades es $g(x) = 100 + 5x + x^2$ euros. Cada unidad se vende por 30 €. Halla el beneficio y la producción que lo maximiza.

6.02 Descompón 20 en dos sumandos cuya suma de cuadrados sea mínima.

6.03 Halla el número positivo que minimiza la suma del número y el cuádruple de su inverso.

6.04 Entre los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 10, ¿cuál tiene mayor área?

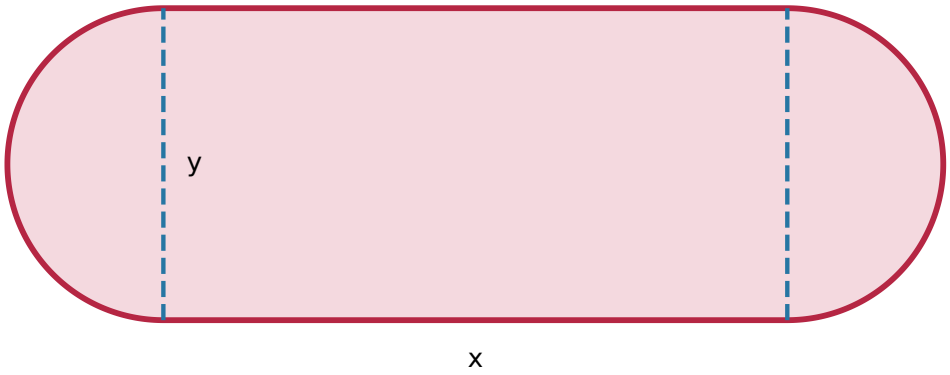
6.05 Entre los triángulos rectángulos de hipotenusa 10, encuentra el de mayor área.

6.06 Una valla publicitaria rectangular tiene 12 m^2. El metro lineal de marco horizontal cuesta 1,50 € y el vertical 2 €.

a) Determina las dimensiones que minimizan el coste.

b) ¿Cuánto cuesta el marco?

6.07 Con 200 m de tela metálica se valla un recinto formado por un rectángulo de longitud x y anchura y, cerrado por dos semicírculos de diámetro y. Halla las dimensiones de área máxima.



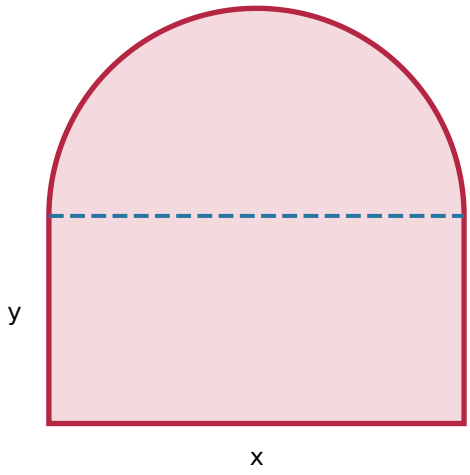
6.08 Un anuncio ocupa 18 cm² de texto en una hoja rectangular impresa por una cara. Los márgenes superior e inferior miden 2 cm y los laterales 1 cm. Halla las dimensiones de la hoja de menor área.

6.09 Se dispone de 500 m de valla para encerrar la mayor área rectangular posible.

a) Halla las dimensiones si se cierran los cuatro lados.

b) Halla las dimensiones si un lado limita con un río y no necesita valla.

6.10 Un recinto consta de un rectángulo de base x y altura y, coronado por un semicírculo de diámetro x. Su perímetro exterior mide 5 m. Halla x e y para maximizar el área.



6.11 Halla los puntos de la curva $y^2 = 2x$ cuya distancia al punto (6, 0) sea mínima.

6.12 Entre las rectas que pasan por (2, 3), encuentra la que forma con las partes positivas de los ejes el triángulo de menor área.

6.13 Calcula la altura y el volumen del cilindro circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio 3 cm.

BLOQUE 07

Parámetros y condiciones

Funciones que cumplen propiedades dadas. · 11 actividades

7.01 Halla a para que $f(x) = x^2 + ax + a$ tenga un mínimo en $x = 2$.

7.02 ¿Cómo son las funciones cuya derivada es una recta de pendiente 3?

7.03 Halla la parábola con vértice $(3, -8)$ y corte con el eje Y en $(0, 1)$.

7.04 Halla a, b y c para que $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga vértice $(-1, -8)$ y corte el eje Y en $(0, -5)$.

7.05 Halla a y b para que $f(x) = x^3 + ax + b$ tenga un mínimo en $(1, 5)$.

7.06 Halla a, b y c para que $f(x) = ax^3 + bx^2 + x + c$ pase por $(-1, 9)$ y tenga tangente horizontal en $x = 0$ y $x = -2$.

7.07 Halla a, b y c para que $f(x) = ax^3 + bx + c$ pase por $(2, 6)$ y tenga un mínimo en $(1, 2)$.

7.08 Halla los coeficientes de una cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con ceros -4 y -3 y tangentes horizontales en -4 y $-10/3$. Clasifica los extremos.

7.09 Halla a y b para que $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenga un máximo en un corte con el eje X, un mínimo en su corte con el eje Y y cumpla $a + b = -1$.

7.10 Halla a, b, c y d para que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo en el vértice de $g(x) = x^2 + 12x + 202$ y un mínimo en el vértice de $h(x) = -2x^2 + 8x - 98$.

7.11 Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. En $x = 3$ tiene una inflexión y su tangente es $x - 4y + 1 = 0$. Calcula a, b y c y representa la función.

BLOQUE 08

Aplicaciones y razonamiento

Modelos de cambio, interpretación y retos. · 18 actividades

8.01 Relaciona cada característica con todas las funciones que la cumplen: máximo relativo (0, −1); dos asíntotas verticales; tangente horizontal en $x = \pm 1$; máximo relativo (1, 4); siempre creciente.

a) $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x}{10}$

b) $g(x) = x^4 - 2x^2 - 1$

c) $h(x) = -x^3 + 3x + 2$

d) $i(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 3}$

e) $j(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2}$

f) $k(x) = -x^2 - 2x - 1$

8.02 Entre las 8 y las 17 horas, el gasto eléctrico de una empresa sigue $E(t) = 0{,}01t^3 - 0{,}36t^2 + 4{,}05t - 10$, con $8 < t < 17$.

a) Calcula el gasto a las 10 y a las 16 horas.

b) ¿Cuándo es máximo y cuándo mínimo?

c) ¿En qué intervalos aumenta?

8.03 Los beneficios de dos empresas, con $x \geq 0$ años, son $f_A(x) = \dfrac{75x}{x^2 + 100}$ y $f_B(x) = \dfrac{100x + 4}{x^2 + 150}$.

a) ¿Durante cuánto tiempo obtienen ganancias?

b) ¿Cuáles son sus beneficios máximos y cuándo se producen?

c) ¿Qué empresa comienza antes el descenso?

d) ¿Tienen pérdidas en algún momento?

8.04 Un banco propone un incremento de capital $f(x) = 0{,}0001x^4 - 0{,}04x^2$, donde x se mide en miles de euros. Con un límite de inversión de 50 000 €, estudia a partir de qué cantidad el incremento es positivo.

8.05 La temperatura de una noche de invierno es $T(t) = \frac{t^2 - 5t - 6}{2}$ °C, con $0 \leq t \leq 8$ horas desde medianoche.

a) ¿Qué temperatura había a la 1 h y a las 5 h?

b) ¿Cuándo había 0 °C y −3 °C?

c) ¿Cuándo descendía y ascendía?

d) ¿Cuándo era negativa y positiva?

e) Halla las temperaturas máxima y mínima.

f) Representa la variación.

8.06 Las ventas diarias de un dispositivo durante sus primeros 60 días se modelan por $f(d) = 100 + 15d - d^2/4$, con $1 \leq d \leq 60$.

a) ¿Cuándo aumentan y disminuyen las ventas?

b) ¿Cuántas unidades estima el modelo para el primer día?

c) ¿Qué otro día hubo las mismas ventas que el primero?

d) ¿Qué día se vendió más y cuántas unidades?

e) ¿Qué días se vendieron 300 unidades?

8.07 Durante una exposición fotográfica de dos semanas, la asistencia diaria es $N(t) = -t^3 + 24t^2 - 11t + 570$, con $1 \le t \le 14$.

a) ¿Cuántos visitantes hubo en la inauguración?

b) ¿Y en la clausura?

c) ¿Qué días hubo asistencia máxima y mínima?

d) ¿Cuáles fueron esos valores?

8.08 El gasto de mantenimiento de una máquina, en miles de euros tras x meses, es $G(x) = \begin{cases} -\frac{2x}{15} + 3, & 0 \le x \le 15 \\ \frac{6x - 60}{x + 15}, & x > 15 \end{cases}$.

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) ¿Qué sucede a medida que pasa el tiempo?

c) ¿Alcanza máximos o mínimos?

d) Estudia qué puede concluirse sobre la rentabilidad de la inversión.

8.09 Determina cuál crece más rápidamente en $x = 1$ y represéntalo mediante sus tangentes: $f(x) = x - 4 - \frac{2x}{x + 2}$ y $g(x) = x + 2 - \frac{x}{x - 3}$.

8.10 Tras administrar un medicamento, la población bacteriana se modela por $N(t) = 20t^3 - 510t^2 + 3\,600t + 2\,000$, con t en horas.

a) ¿Cuántas bacterias había al administrar el medicamento y al cabo de 10 h?

b) ¿A las 10 h están aumentando o disminuyendo?

c) ¿Cuándo es máxima la acción del producto? Distingue rapidez de disminución y población mínima.

d) ¿Cuándo comienza a disminuir la población?

e) ¿Cuándo empieza a perderse el efecto reductor?

8.11 Elige la respuesta correcta en cada apartado. Si ninguna opción sirve, justifícalo.

a) Mínimo de $(x - 5)^3(x - 1)$: -27; -8; $-75/8$; -3; 0.

b) Si m y n son enteros, $1 \leq m < n$, ¿cuántas soluciones positivas tiene $x^n - x^m - 1 = 0$? Ninguna; n; una; $n - m$; cualquier número.

c) Un cuadrilátero inscrito en una circunferencia tiene dos lados de 6 y 8 cm que forman ángulo recto. Área máxima: 48; 48,5; 49; 50; 52 cm².

d) Mínimo de $\sqrt{8x - x^2} - \sqrt{14x - x^2 - 48}$: $\sqrt{7} - 1$; 3; $2\sqrt{3}$; 4; $\sqrt{55} - \sqrt{5}$.

8.12 Las pérdidas o ganancias de una empresa, en centenas de miles de euros, tras $t \geq 0$ años, siguen $f(t) = \dfrac{2t - 4}{t + 2}$.

a) ¿Cuándo deja de tener pérdidas?

b) ¿Es creciente la ganancia?

c) ¿Existe un límite para las ganancias?

8.13 La función f(t) es monótona creciente para $-8 < t < 8$. Si $g(x) = f(2x - x^2)$, ¿en qué intervalo se puede asegurar que g es creciente?

8.14 Explica con tus palabras el concepto de sobreaceleración o jerk.

8.15 Propón ejemplos en los que se manifieste la sobreaceleración.

8.16 Si s(t) es la posición, $v(t) = s'(t)$ la velocidad y $a(t) = v'(t)$ la aceleración, expresa la sobreaceleración en función de s(t).

8.17 Si la sobreaceleración es cero en un intervalo, ¿qué puede decirse de la aceleración? Considera todas las posibilidades.

8.18 La posición de un móvil viene dada por $s(t) = -3t^2 - 2t + 62$.

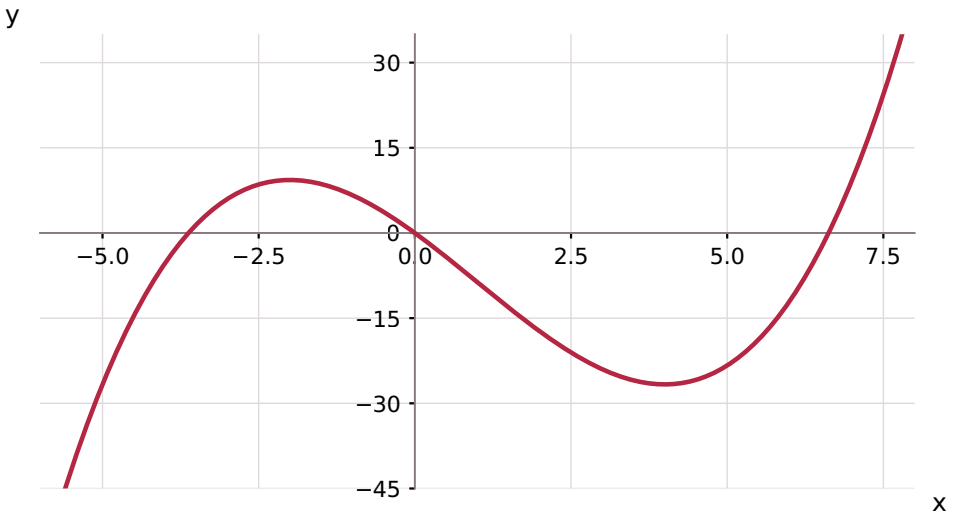
a) Calcula la velocidad.

b) Calcula la aceleración.

c) Calcula la sobreaceleración.

Solucionario · 01 · Crecimiento y monotonía

1.01 Ejemplo: $f(x) = x^3/3 - x^2 - 8x$. Su derivada $(x + 2)(x - 4)$ es positiva fuera de $[-2, 4]$ y negativa dentro.



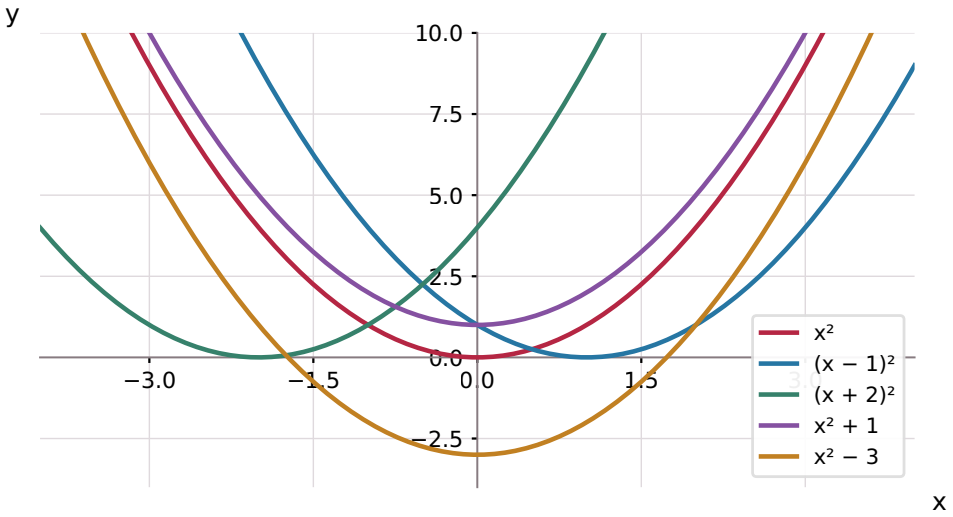
1.02

a) Decrece en $(-\infty, 1)$; crece en $(1, \infty)$.

b) Decrece en $(-\infty, -2)$; crece en $(-2, \infty)$.

c) Decrece en $(-\infty, 0)$; crece en $(0, \infty)$.

d) Decrece en $(-\infty, 0)$; crece en $(0, \infty)$, como la función base x^2.



1.03

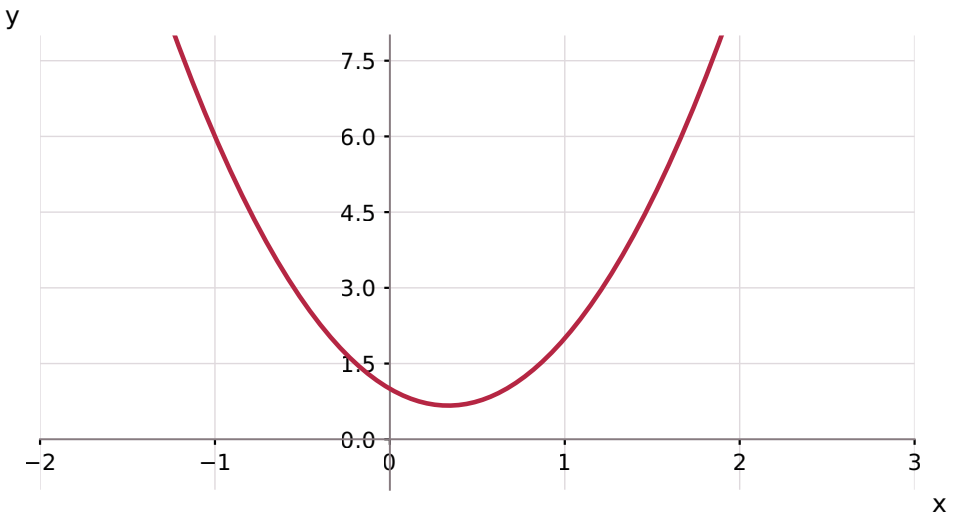
a) $f' = 4x + 4$. Decrece en $(-\infty, -1)$; crece en $(-1, \infty)$.

b) $f' = -2x + 6$. Crece en $(-\infty, 3)$; decrece en $(3, \infty)$.

1.04 **a)** Dominio $\mathbb{R}$ salvo 0. Decrece en $(-\infty, -2)$ y $(0, \infty)$; crece en $[-2, 0)$.

b) Las derivadas son $2x + 2$ y $-2/x^3$ en sus respectivos tramos. En -2 hay discontinuidad: límite izquierdo 0 y valor 5/4.

1.05 $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Parábola con vértice (1/3, 2/3), corte Y en 1 y sin ceros reales.



1.06 **a)** $f'(1) = -1$: decrece.

b) $f'(-2) = 7/4$: crece.

c) $f'(4) = 16 \ln 2 + 3/4 > 0$: crece.

d) $f'(9) = 5/2$: crece.

1.07 **a)** $f'(\pi) = -1$: decrece.

b) $f'(0) = 2$: crece.

c) $f'(\pi/2) = -2\pi/((\pi/2)^2 - 1)^2 < 0$: decrece.

d) $f(x) = 1$: constante.

1.08 **a)** Decrece en $(-\infty, 1)$; crece en $(1, \infty)$.

b) Decrece en $(-\infty, -1/2)$ y $(0, 2/3)$; crece en $(-1/2, 0)$ y $(2/3, \infty)$.

c) Decrece en $(-\infty, -1)$ y $(0, 2)$; crece en $(-1, 0)$ y $(2, \infty)$.

d) Decrece en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$; crece en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$.

1.09 **a)** Estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, aunque $f'(0) = 0$.

b) Decrece en $(-\infty, 0)$; crece en $(0, \infty)$.

c) Crece en todo su dominio $[0, \infty)$; la derivada ordinaria es positiva para $x > 0$.

1.10 **a)** Crece en $(-\pi/4 + k\pi, \pi/4 + k\pi)$; decrece en $(\pi/4 + k\pi, 3\pi/4 + k\pi)$, k entero.

b) Crece en $\mathbb{R}$, pues $f' = 2^{x+1}\ln 2 > 0$.

c) Crece en $\mathbb{R}$, pues $f' = 2e^{2x-1} > 0$.

d) Decrece en $\mathbb{R}$, pues $f' = -\ln 4 \cdot (1/4)\hat{}x < 0$.

1.11 **a)** Dominio $(0, \infty)$, creciente.

b) Dominio $\mathbb{R}$. Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, \infty)$.

c) Dominio $(-1, \infty)$, estrictamente creciente. $f' = 3x^2/((x^3 + 1)\ln 2)$, positiva salvo en 0.

d) Dominio $(0, \infty)$, decreciente.

e) Dominio $\mathbb{R}$. Crece en $(-\infty, 0)$, decrece en $(0, \infty)$.

f) Dominio $(-1, 1) \cup (1, \infty)$. Se simplifica a $-\ln(x + 1)$, conservando $x \neq 1$. Decrece en cada intervalo.

1.12 **a)** Crece en $(-\infty, 1]$; decrece en $(1, \infty)$. En 1: valor -2, límite derecho 1.

b) Crece en $(-\infty, 0)$ y $[0, \infty)$, pero no globalmente: en 0 hay salto descendente de 4 a -2.

c) Crece en todo $\mathbb{R}$. El salto ascendente en 0, de 0 a límite derecho 3, es compatible con ello.

d) Decrece en $(-\infty, -1)$, crece en $(-1, 2]$ y decrece en $(2, \infty)$. En 2: valor -1, límite derecho 2.

1.13 **a)** Decrece en $(-\infty, 0)$; crece en $(0, \infty)$.

b) Crece en $(-\infty, -3)$ y $(-3, \infty)$, pues $f' = 1/(x + 3)^2$.

c) Crece en $(-\infty, -1)$ y $(-1, \infty)$, pues $f' = 2/(x + 1)^2$.

d) Decrece en $(-\infty, 2)$ y $(2, \infty)$, pues $f' = -4/(x - 2)^2$.

1.14 Sí, es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. Aunque $f'(0) = 0$, la monotonía no se interrumpe. El origen es una inflexión de tangente horizontal, no un extremo.

1.15 **a)** Crece en 1; decrece en -4.

b) Decrece en 0; crece en 5.

c) Decrece en -1 y en 2.

d) Decrece en -2; crece en 0.

1.16 **a)** Decrece en -3; crece en -1 y en 4.

b) Decrece en -2 y en 2; crece en 6.

c) Decrece en -10; crece en -5 y en 1.

1.17 **a)** Sean $a = (1 - \sqrt{21})/2$ y $b = (1 + \sqrt{21})/2$. Decrece en $(-\infty, a)$ y $(1/2, b)$; crece en $(a, 1/2)$ y (b, ∞).

b) Dominio $\mathbb{R}$ salvo 0. Crece en $(-\infty, 0)$; decrece en $(0, \infty)$.

c) Crece en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$; decrece en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$.

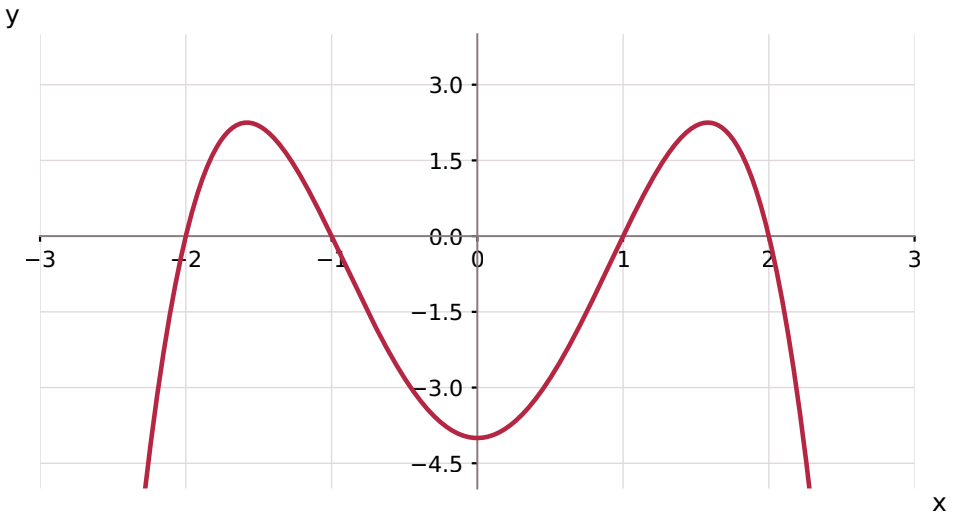
d) Crece en $(-\infty, 0)$; decrece en $(0, \infty)$.

e) Dominio $(0, \infty)$. Decrece en $(0, 1)$; crece en $(1, \infty)$.

f) Decrece en $(-\infty, 0)$; crece en $(0, \infty)$.

02 · Máximos y mínimos

2.01 Ejemplo: $f(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$. Corta el eje X en -2, -1, 1 y 2, y el eje Y en $(0, -4)$. Máximos $(\pm\sqrt{(5/2)}, 9/4)$; mínimo $(0, -4)$.



2.02

a) $f' = 3x(x - 2)$. Máximo $(0, 0)$; mínimo $(2, -4)$.

b) $f' = 6(x - 3)(x + 2)$. Máximo $(-2, 45)$; mínimo $(3, -80)$.

2.03

a) $f'' = 12x^2 - 8$. Máximo $(0, 2)$; mínimos $(\pm\sqrt{2}, -2)$.

b) $f'' = 6x - 6$. Máximo $(0, 7)$; mínimo $(2, 3)$.

c) $f'' = 2$. Mínimo $(-9/2, -81/4)$.

d) $f' = 6x^2 + 18x - 4$, $f'' = 12x + 18$. Con $a = (-9 - \sqrt{105})/6$ hay máximo $(a, f(a))$; con $b = (-9 + \sqrt{105})/6$ hay mínimo $(b, f(b))$.

2.04

a) Dominio $\mathbb{R}$ salvo -1. $f' = x(x + 2)/(x + 1)^2$. Crece en $(-\infty, -2)$ y $(0, \infty)$; decrece en $(-2, -1)$ y $(-1, 0)$.

b) Máximo relativo $(-2, -4)$; mínimo relativo $(0, 0)$.

2.05

a) Decrece hasta 2 y crece después; mínimo $(2, -3)$.

b) Crece hasta 0 y decrece después; máximo $(0, 4)$.

c) Decrece hasta 2 y crece después; mínimo $(2, -8)$.

d) Crece hasta $-3/2$ y decrece después; máximo $(-3/2, 9/4)$.

e) Decrece hasta 3 y crece después; mínimo $(3, -4)$.

f) Decrece hasta 1/3 y crece después; mínimo $(1/3, -1/3)$.

2.06

a) Crece en $(-\infty, 1)$ y $(3, \infty)$, decrece en $(1, 3)$. Máximo $(1, 5)$, mínimo $(3, 1)$.

b) Crece en $(-\infty, -1)$ y $(3, \infty)$, decrece en $(-1, 3)$. Máximo $(-1, 6)$, mínimo $(3, -26)$.

c) Crece en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$, decrece en $(-1, 1)$. Máximo $(-1, 2)$, mínimo $(1, -2)$.

d) Crece en $(-\infty, -3)$ y $(2, \infty)$, decrece en $(-3, 2)$. Máximo $(-3, 89)$, mínimo $(2, -36)$.

e) $f' = 6(x^2 + x + 1) > 0$: crece en $\mathbb{R}$ y no tiene extremos.

2.07

a) Máximo $(0, -3)$; mínimo $(2, 1)$.

b) Mínimo $(0, 0)$; máximo $(4, -8)$.

c) Máximo $(-3, -6)$; mínimo $(3, 6)$.

d) No tiene extremos. $f' = x^2(x^2 + 12)/(x^2 + 4)^2$ no cambia de signo en 0.

e) Máximo $(-2, -2)$; mínimo $(0, 2)$.

f) Mínimo $(-1, -4)$; máximo $(1, 4)$.

2.08

a) Sin extremos: pendiente constante 3.

b) Sin extremos: pendiente constante $-1/2$.

c) Máximo $(-1, 4)$; mínimo $(1, -4)$.

d) Mínimo $(3, -13)$.

e) Máximo $(0, 0)$; mínimos $(\pm 1, -2)$.

f) Mínimo $(3/2, -27/16)$. En 0, f' no cambia de signo: no es extremo.

2.09

$f' = 2ax + b$ se anula en $x = -b/(2a)$. Sustituyendo, $y = c - b^2/(4a)$. Vértice $(-b/(2a), c - b^2/(4a))$; mínimo si $a > 0$, máximo si $a < 0$.

2.10

a) Mínimo $(1, 2)$.

b) Máximo $(3/2, 27/2)$.

c) Mínimo $(-1, -6)$.

d) Máximo $(2, 4)$.

e) Mínimo $(-1/6, 107/12)$.

f) Mínimo $(-2, -1/2)$.

2.11

a) Sean $\alpha = (13 - \sqrt{329})/8$ y $\beta = (13 + \sqrt{329})/8$. Dominio $[\alpha, 0] \cup [\beta, \infty)$.

b) En el interior del dominio, $f' = (6x^2 - 13x - 5)/(2\sqrt{(2x^3 - 13x^2/2 - 5x)})$. Crece en $(\alpha, -1/3)$ y (β, ∞); decrece en $(-1/3, 0)$.

c) Máximo relativo en $(-1/3, \sqrt{(47/54)})$. Los extremos del dominio α, 0 y β tienen valor 0 y son mínimos absolutos. No hay máximo absoluto.

2.12 **a)** (5/2, −23/4).

b) (−3, 89) y (2, −36).

c) Ninguno: $f' = 6(x^2 + x + 1) > 0$.

d) (−2, −2) y (0, 2).

e) Ninguno: $f' = -4/(x - 2)^2$ nunca se anula.

2.13 **a)** Máximo (0, −3); mínimo (2, 1).

b) Mínimo (0, 0); máximo (4, −8).

c) Máximo (−3, −6); mínimo (3, 6).

d) (0, 0) tiene tangente horizontal, pero no es extremo: la derivada no cambia de signo.

2.14 **a)** Máximo local estricto por el criterio de f''.

b) Punto estacionario situado en el eje X. No basta para decidir si es extremo.

c) Máximo absoluto de valor 3.

d) Mínimo local estricto.

e) No basta para clasificarlo: x^4, $-x^4$ y x^3 en 0 muestran las distintas posibilidades.

f) Máximo local, pues f' pasa de positiva a negativa.

2.15 **a)** Decrece en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$; crece en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$. Máximo (0, −1); mínimos (±1, −2).

b) Decrece en $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$; crece en $(0, 2)$. Mínimo (0, −3); máximo (2, 1).

c) Crece en $(-\infty, -1)$ y $(-1, 1)$; decrece en $(1, 3)$ y $(3, \infty)$. Máximo relativo (1, −1/4); no hay mínimos.

2.16 **a)** $f'(-1) = 0$; $f'(-1{,}5) = -14$; $f'(-0{,}5) = 5$; $f(-1) = 0$. La derivada factoriza como $2(x + 1)(x - 2)(2x - 1)$: (−1, 0) es un mínimo.

b) $f'(0{,}5) = 0$; $f(0{,}5) = 81/16$; $f'(0{,}25) = 35/16$; $f(1) = 4$. En (0,5; 81/16) hay un máximo, pues f' cambia de positiva a negativa.

c) $f(2) = 0$; $f'(2) = 0$; $f'(1{,}5) = -5$; $f'(2{,}5) = 14$. (2, 0) es un mínimo.

2.17 **a)** Máximo (−1, 16); mínimos (−3, 0) y (1, 0).

b) Máximo (3/2, 1/16); mínimos (1, 0) y (2, 0).

c) Máximo (−1/2, 81/16); mínimos (−2, 0) y (1, 0).

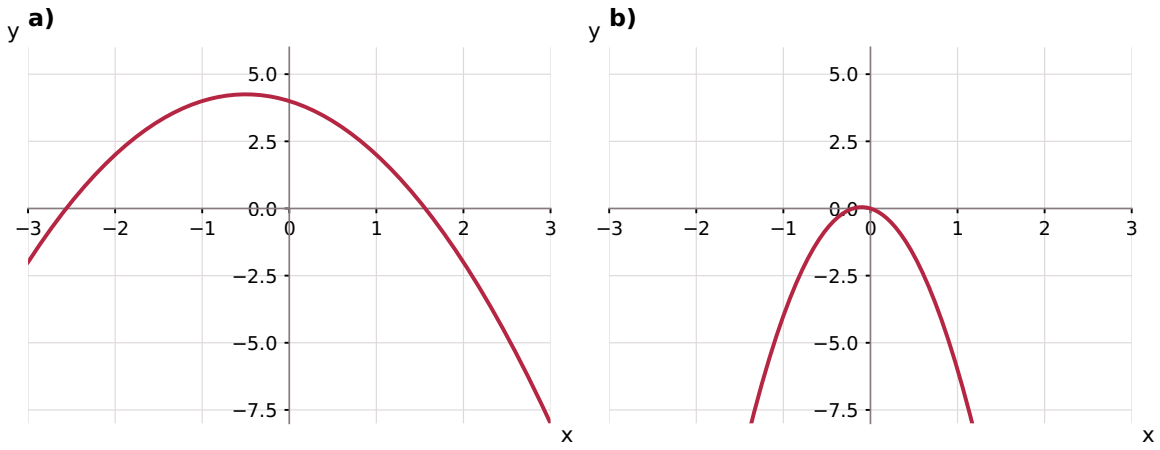
03 · Curvatura e inflexiones

3.01 **a)** $f'' = 42x - 2$. Hacia abajo en $(-\infty, 1/21)$; hacia arriba en $(1/21, \infty)$.

b) $f'' = 2(1 - 3x^2)/(x^2 + 1)^3$. Hacia arriba si $|x| < 1/\sqrt{3}$; hacia abajo si $|x| > 1/\sqrt{3}$.

3.02 **a)** $f'' = -2$: curvatura hacia abajo en $\mathbb{R}$.

b) $f'' = -10$: curvatura hacia abajo en $\mathbb{R}$.



3.03 **a)** $f'' = 2$ si $x < -2$; $f'' = 6/x^4$ si $x > -2$, $x \neq 0$. Curvatura hacia arriba en $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ y $(0, \infty)$.

b) En -2 hay discontinuidad y en 0 no está definida. No se unen esos intervalos ni hay allí puntos de inflexión.

3.04 En -1, curvatura hacia arriba; en 1, punto de inflexión; en 2, curvatura hacia abajo.

04 · Asíntotas

4.01 **a)** Vertical $x = 2$; horizontal $y = 3$; sin oblicua.

b) Verticales $x = \pm 1$; horizontal $y = 1$; sin oblicua.

4.02 **a)** $f(x) = x - 1 + 1/(x + 1)$: asíntota $y = x - 1$.

b) $f(x) = x - 1 - 2/(x - 2)$: asíntota $y = x - 1$.

4.03 $y = -1$. $f(x) + 1 = 1/(x^2 - 1) > 0$ para $|x| > 1$: ambas ramas infinitas están por encima.

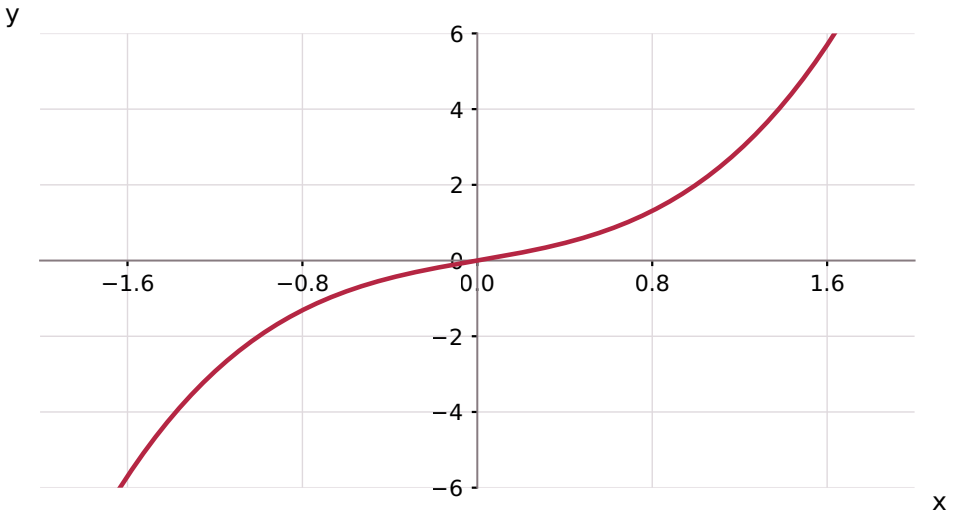
4.04 $y = 1/2$. La diferencia es $-(3x^2 + 2)/(2(2x^3 + 3x^2 + 2))$. Para x muy positivo es negativa, por debajo; para x muy negativo es positiva, por encima.

4.05 Asíntotas $x = -2$ y $x = 2$. En ambas: límite izquierdo $-\infty$ y derecho $+\infty$.

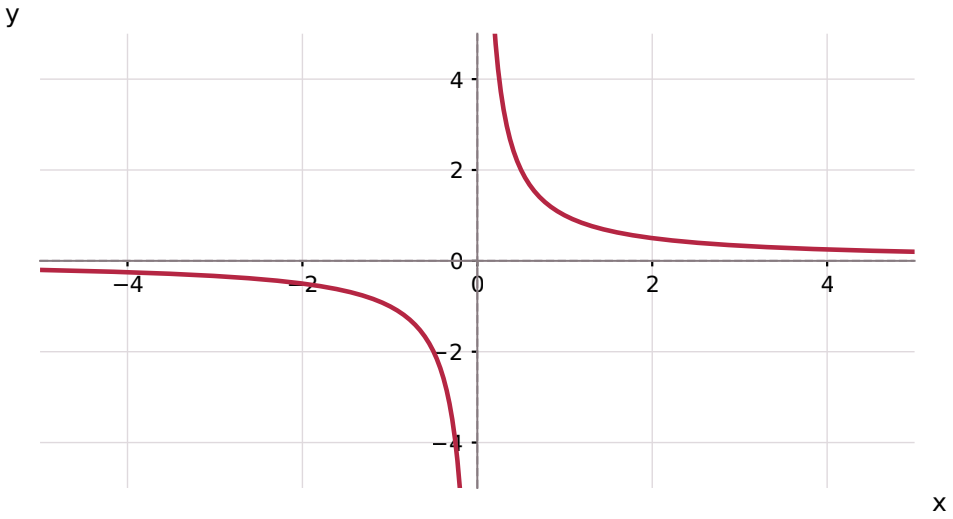
4.06 Asíntotas $x = -2$ y $x = 3$. En ambas: límite izquierdo $-\infty$ y derecho $+\infty$.

05 · Representación de funciones

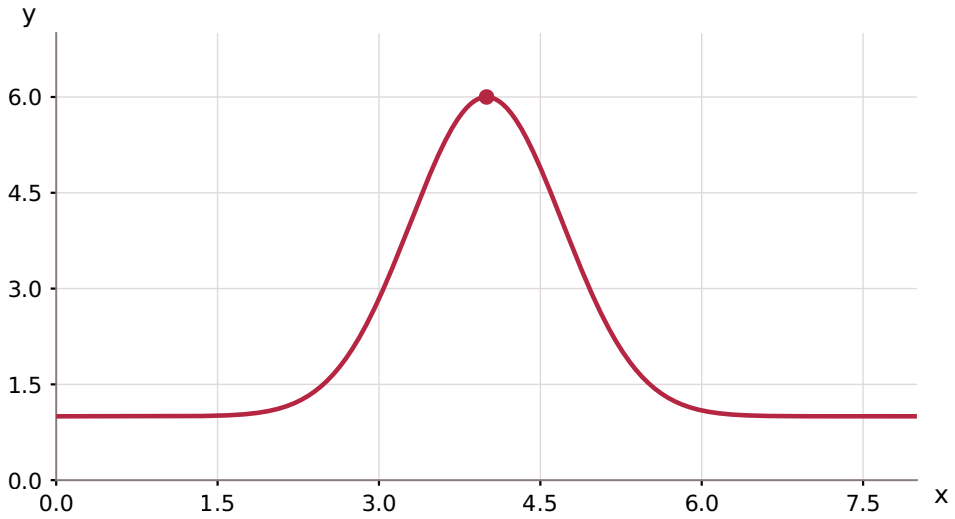
5.01 Ejemplo: $f(x) = x^3 + x$, con $f' = 3x^2 + 1 > 0$. No tiene asíntotas verticales, horizontales ni oblicuas.



5.02 Ejemplo: $f(x) = 1/x$. Decrece en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Asíntotas $x = 0$ e $y = 0$. No hay monotonía global entre puntos situados a ambos lados de la discontinuidad.

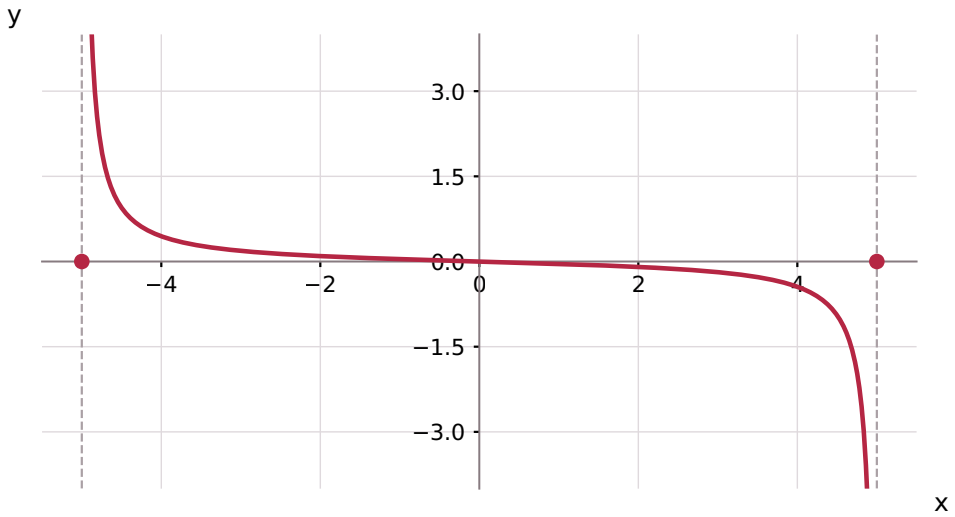


5.03 Ejemplo: $f(x) = 1 + 5e^{-(x-4)^2}$. Es positiva y alcanza su máximo absoluto 6 en $x = 4$.

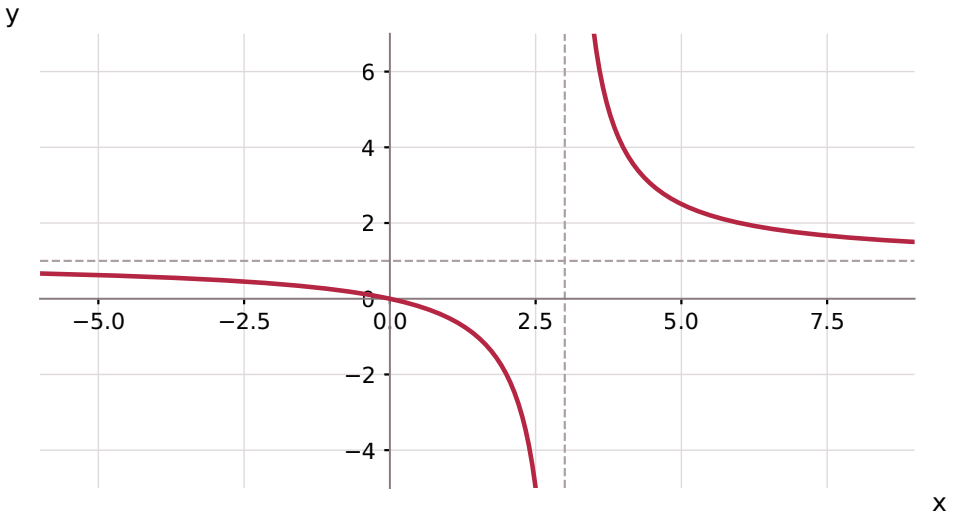


5.04 **a)** En $-5 < x < 5$, toma $f(x) = -x/(25 - x^2)$. Define además $f(-5) = f(5) = 0$ para conservar el dominio cerrado.

b) Los valores aislados de los extremos no cambian los límites laterales. La función no es continua en ellos.

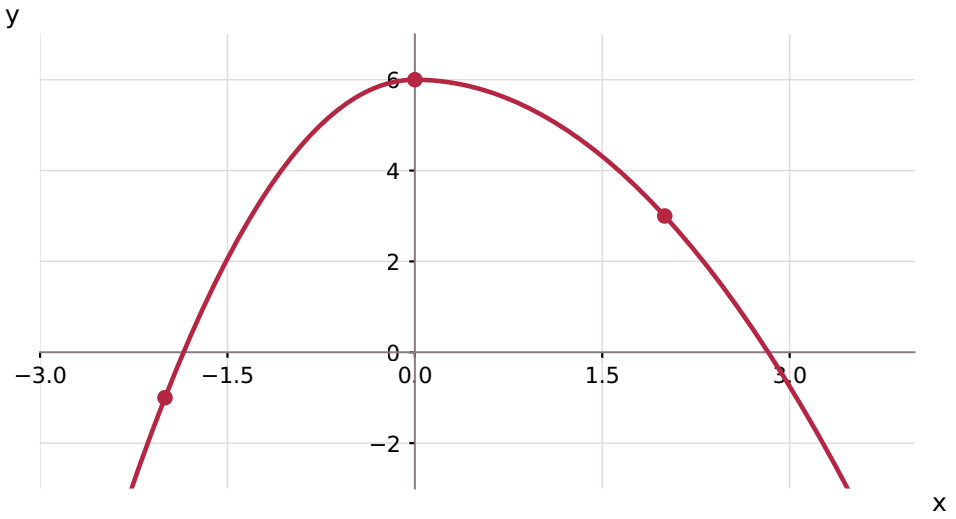


5.05 Ejemplo: $f(x) = x/(x-3)$. $f' = -3/(x-3)^2 < 0$; $f'' = 6/(x-3)^3$. No hay inflexión en 3 porque allí no está definida.

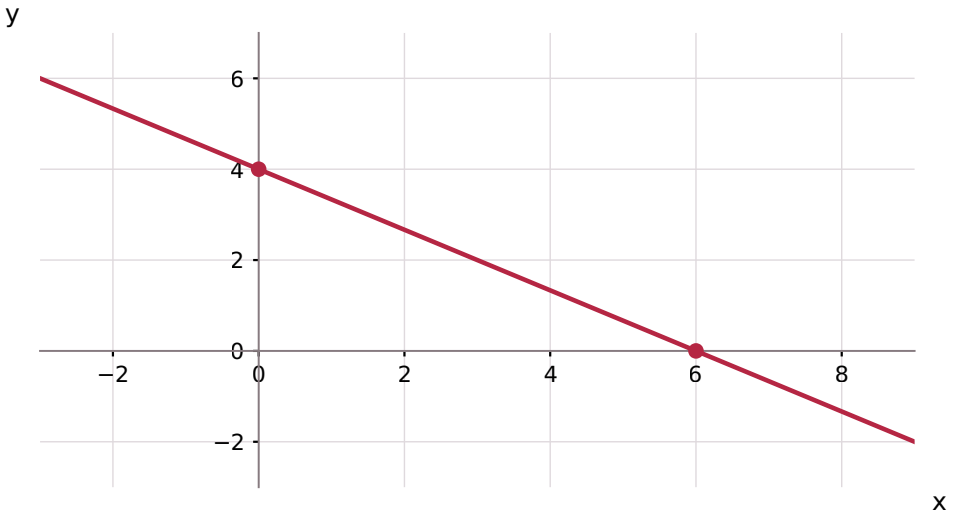


5.06 No. La curvatura cambia en $x = 1$, no en $x = -1$. Las condiciones son incompatibles.

5.07 Ejemplo: $f(x) = 6 - 7x^2/4$ si $x \leq 0$; $f(x) = 6 - 3x^2/4$ si $x > 0$. Cumple los puntos y el máximo absoluto 6.

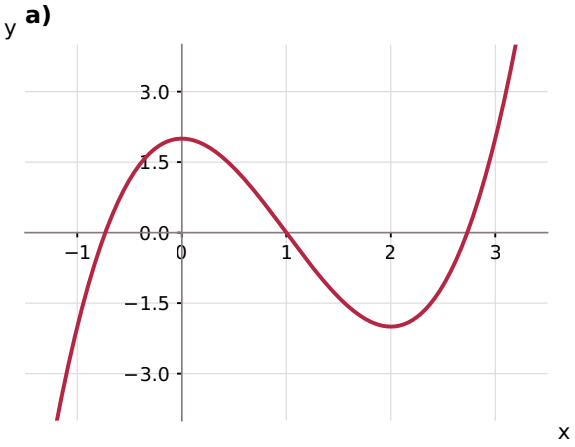


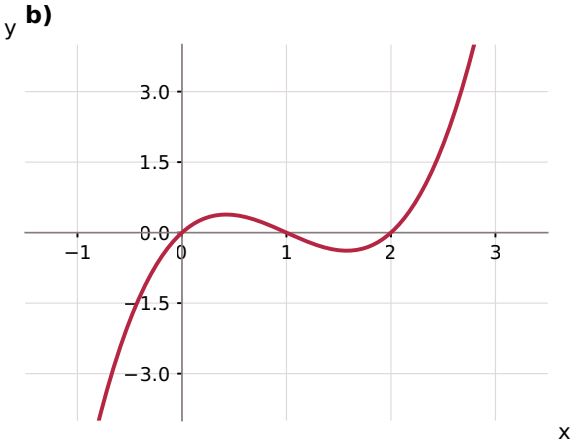
5.08 Ejemplo: f(x) = 4 − 2x/3, una recta decreciente con los cortes y límites pedidos.



5.09 **a)** Dominio ℝ. Cortes X: 1 y 1 ± √3; corte Y: 2. Máximo (0, 2), mínimo (2, −2), inflexión (1, 0).

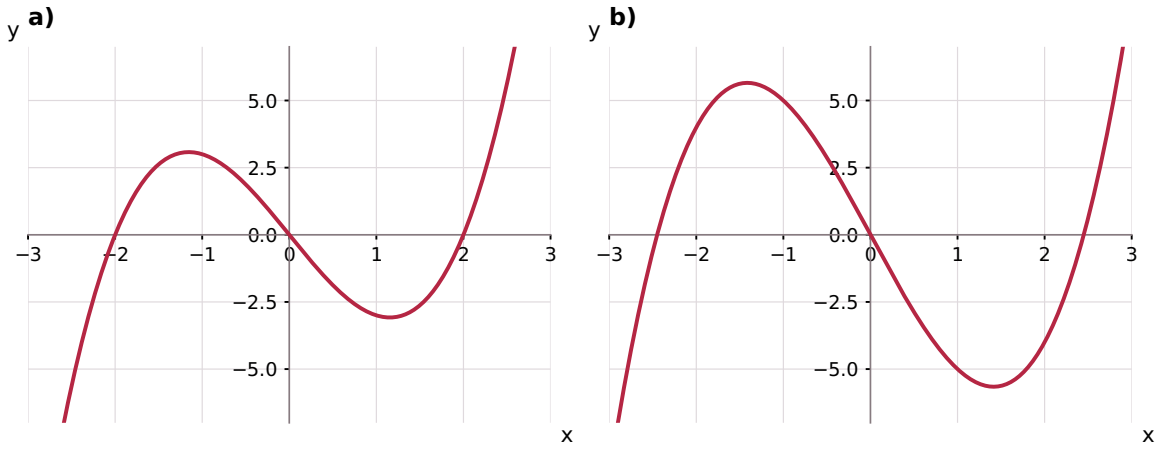
b) Dominio ℝ. Cortes X: 0, 1, 2. Con a = 1/√3, máximo (1 − a, 2a/3), mínimo (1 + a, −2a/3); inflexión (1, 0).





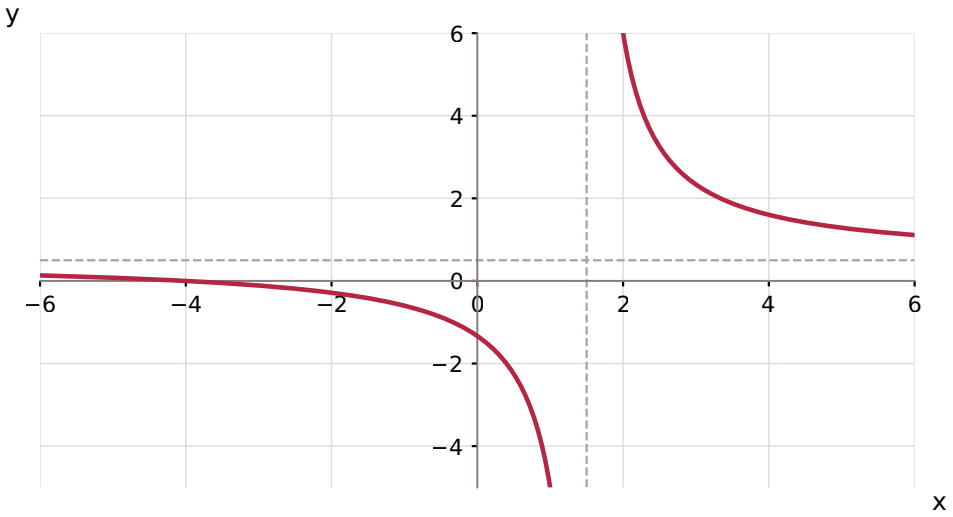
5.10 **a)** Cortes X: -2, 0, 2. Máximo $(-2/\sqrt{3}, 16/(3\sqrt{3}))$; mínimo $(2/\sqrt{3}, -16/(3\sqrt{3}))$; inflexión (0, 0).

b) Cortes X: $-\sqrt{6}$, 0, $\sqrt{6}$. Máximo $(-\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$; mínimo $(\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$; inflexión (0, 0).



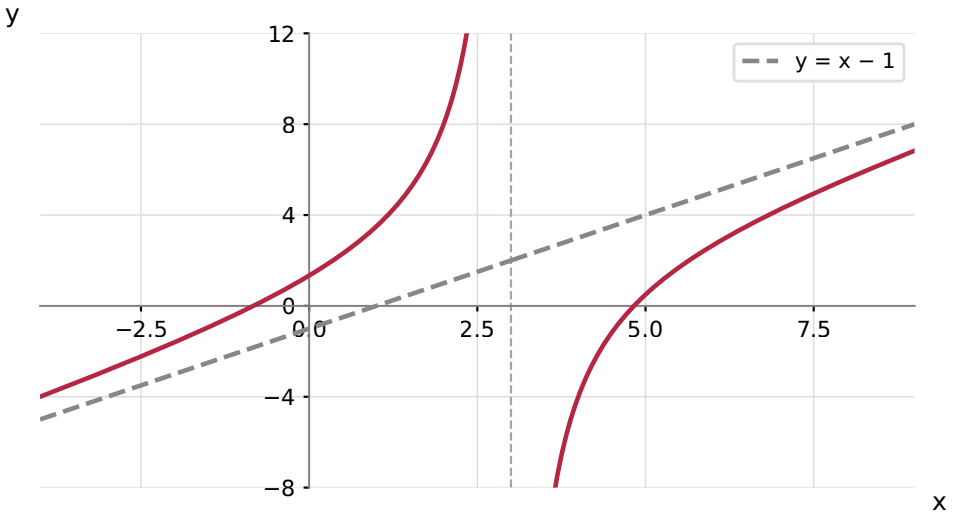
5.11 **a)** Dominio $\mathbb{R}$ salvo 3/2. Asíntotas $x = 3/2$ e $y = 1/2$. Cortes $(-4, 0)$ y $(0, -4/3)$.

b) $f' = -11/(2x - 3)^2 < 0$. $f'' = 44/(2x - 3)^3$: abajo a la izquierda de 3/2 y arriba a la derecha.

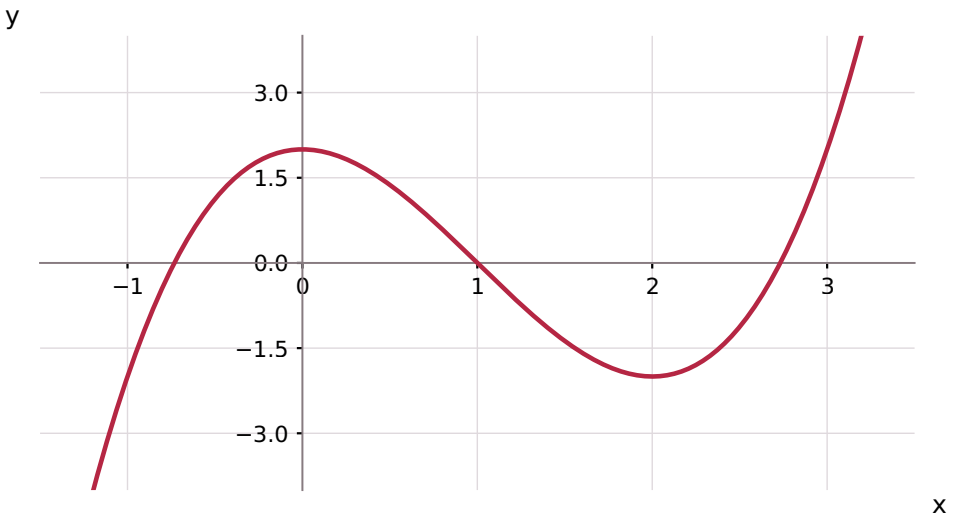


5.12 **a)** $f(x) = x - 1 - 7/(x-3)$. Asíntotas $x = 3$ e $y = x - 1$. Cortes X: $2 \pm 2\sqrt{2}$; corte Y: $4/3$.

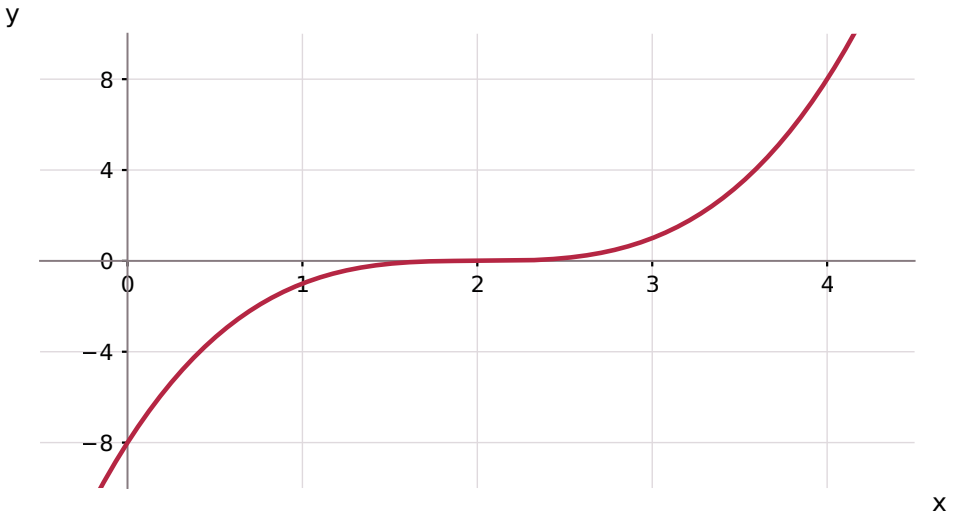
b) $f' = 1 + 7/(x-3)^2 > 0$. $f'' = -14/(x-3)^3$: arriba si $x < 3$, abajo si $x > 3$.



5.13 Ejemplo: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. $f' = 3x(x-2)$; máximo $(0, 2)$, mínimo $(2, -2)$.



5.14 Ejemplo: $f(x) = (x - 2)^3$. $f' = 3(x - 2)^2$ y $f'' = 6(x - 2)$. (2, 0) es una inflexión con tangente horizontal.

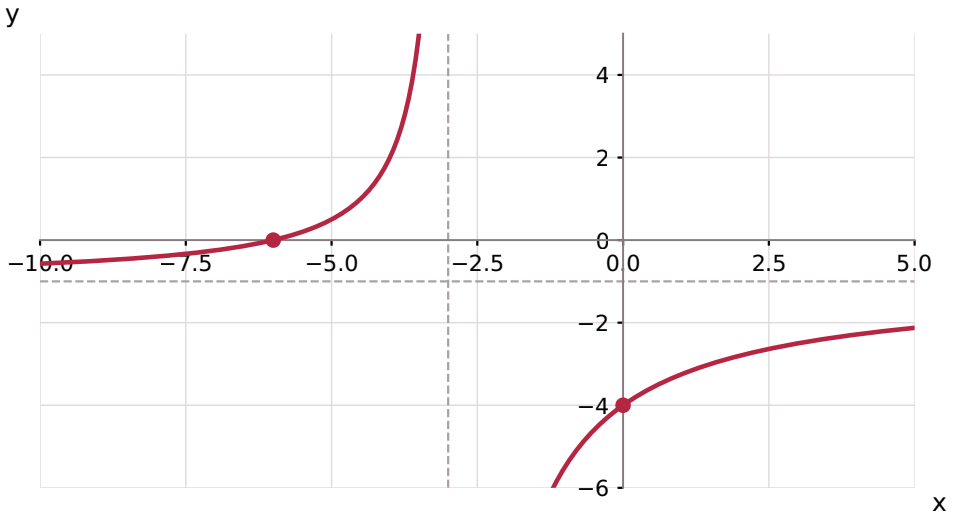


5.15 Ejemplo: $f(x) = 3x^2/(x^2 + 1)$. $f' = 6x/(x^2 + 1)^2$, y su límite en ambos infinitos es 3.



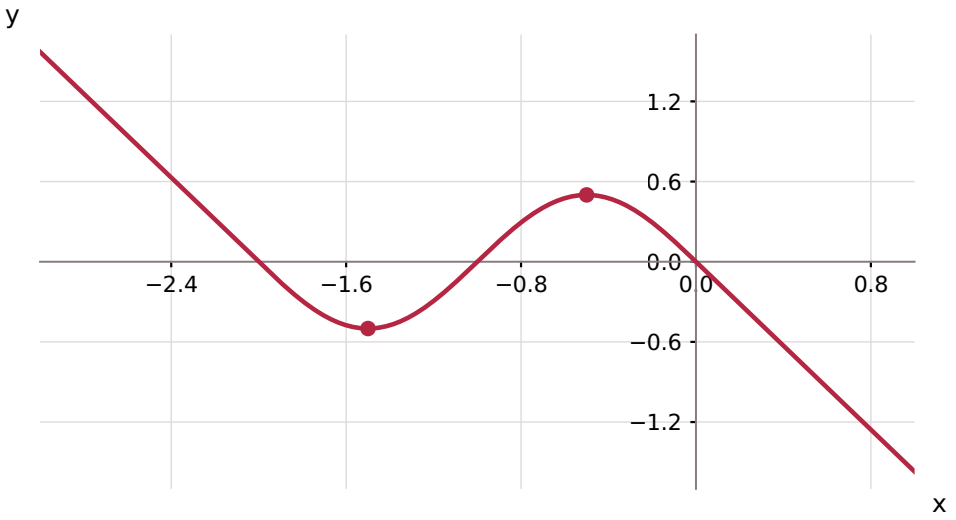
5.16 **a)** Un ejemplo por tramos es $f(x) = -1 - 3/(x + 3)$ si $x < -3$; $f(x) = -1 - 9/(x + 3)$ si $x > -3$.

b) Las derivadas son positivas en cada tramo y los cortes son los pedidos. La monotonía es por intervalos; no es creciente globalmente a través de la discontinuidad.

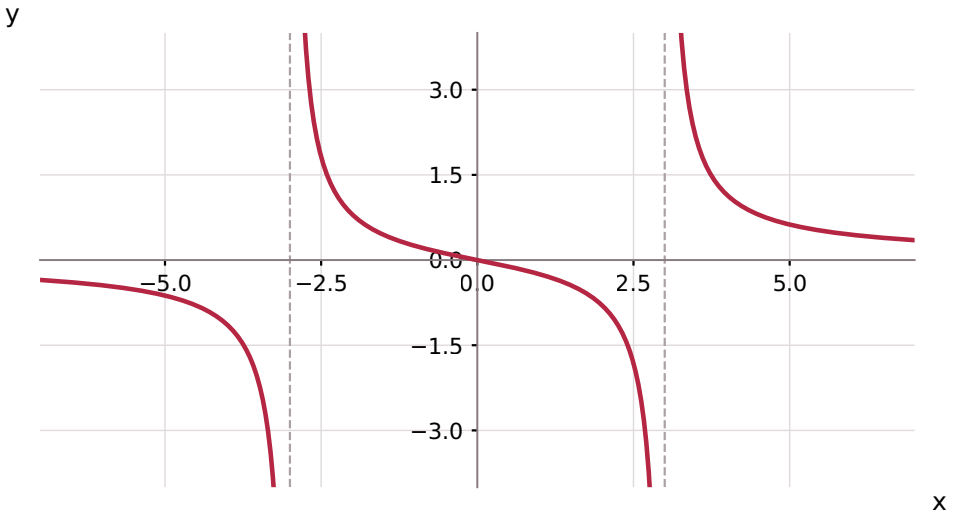


5.17 **a)** Ejemplo: $f(x) = -\pi(x + 2)/2$ si $x < -2$; $f(x) = \text{sen}[\pi(x + 1)]/2$ si $-2 \le x \le 0$; $f(x) = -\pi x/2$ si $x > 0$.

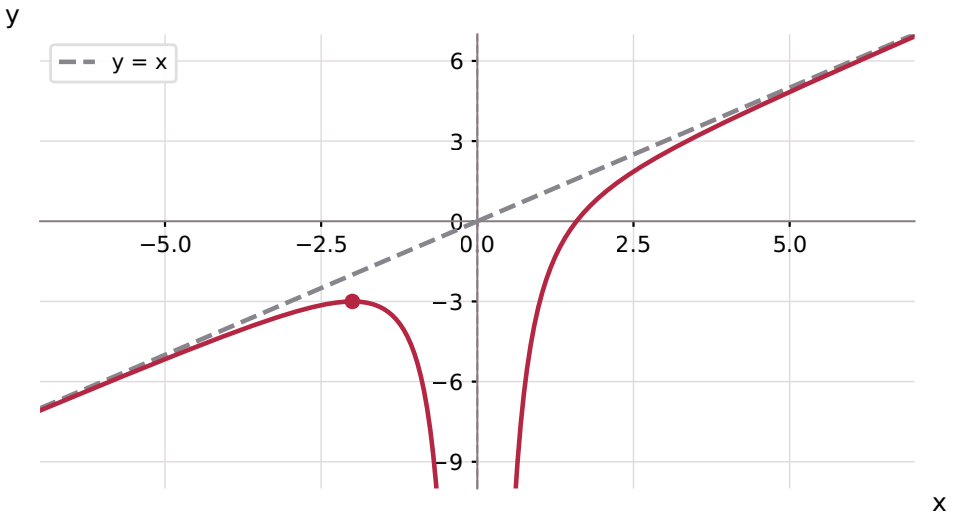
b) Los tramos se unen con la misma pendiente. En el tramo central, $f' = \pi \cos[\pi(x + 1)]/2$ da los intervalos y extremos pedidos.



5.18 Ejemplo: $f(x) = 1/(x + 3) + 1/(x - 3)$. Su derivada es $-1/(x + 3)^2 - 1/(x - 3)^2 < 0$.



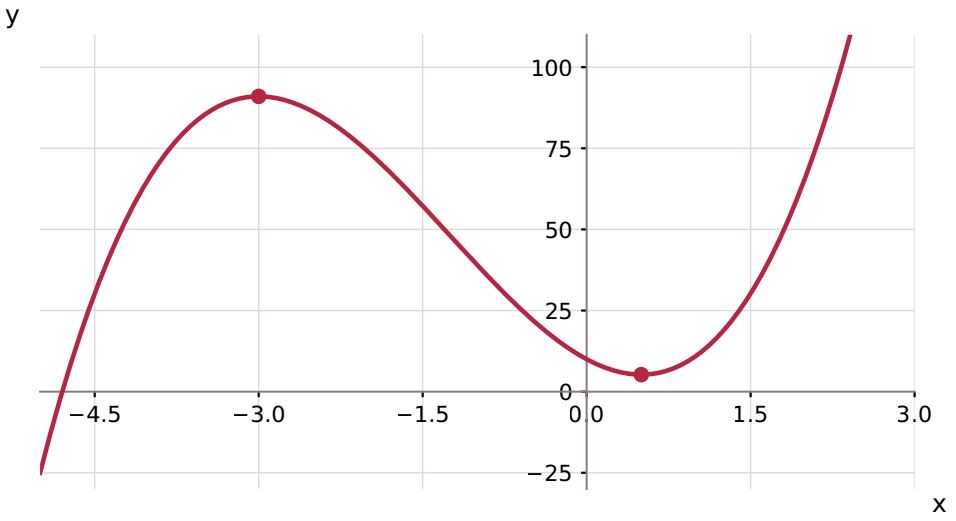
5.19 Ejemplo: $f(x) = x - 4/x^2$. $f' = 1 + 8/x^3$; máximo relativo $(-2, -3)$. Además $f(x) - x \to 0$ en ambos infinitos.



5.20 **a)** $f' = 6(2x - 1)(x + 3)$. Máximo $(-3, 91)$; mínimo $(1/2, 21/4)$.

b) Límite $-\infty$ cuando $x \to -\infty$; límite $+\infty$ cuando $x \to +\infty$.

c) La gráfica tiene inflexión en $(-5/4, 385/8)$.

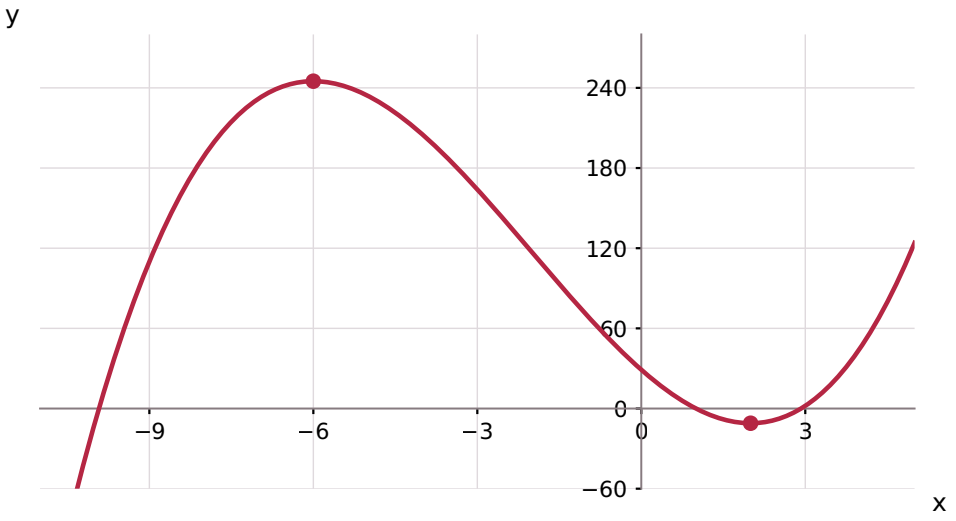


5.21 **a)** Dominio $\mathbb{R}$. No tiene asíntotas.

b) Corte Y: $(0, 29)$. Cortes X: $x = 1$ y $x = (-7 \pm \sqrt{165})/2$.

c) $f' = 3(x + 6)(x - 2)$: crece en $(-\infty, -6)$ y $(2, \infty)$; decrece en $(-6, 2)$.

d) Máximo $(-6, 245)$; mínimo $(2, -11)$. Inflexión $(-2, 117)$.



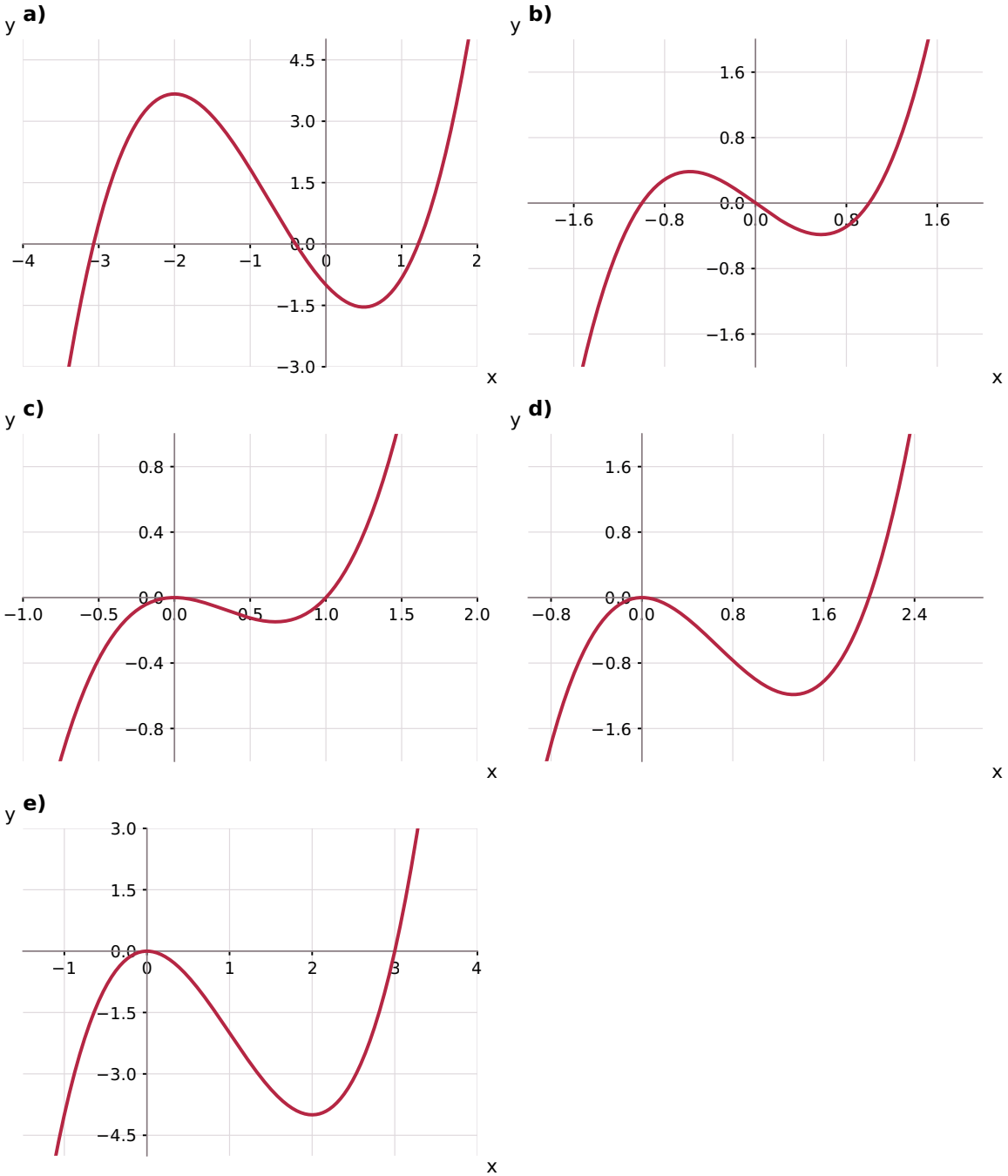
5.22 **a)** Crece en $(-\infty, -2)$ y $(1/2, \infty)$; decrece en $(-2, 1/2)$. Máximo $(-2, 11/3)$, mínimo $(1/2, -37/24)$. $f'' = 4x + 3$: abajo hasta $-3/4$, arriba después. Inflexión $(-3/4, 17/16)$.

b) Crece fuera de $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ y decrece dentro. Máximo $(-1/\sqrt{3}, 2/(3\sqrt{3}))$; mínimo $(1/\sqrt{3}, -2/(3\sqrt{3}))$. $f'' = 6x$; inflexión $(0, 0)$, abajo a la izquierda y arriba a la derecha.

c) Crece en $(-\infty, 0)$ y $(2/3, \infty)$; decrece en $(0, 2/3)$. Máximo $(0, 0)$, mínimo $(2/3, -4/27)$. $f'' = 6x - 2$: abajo antes de $1/3$, arriba después; inflexión $(1/3, -2/27)$.

d) Crece en $(-\infty, 0)$ y $(4/3, \infty)$; decrece en $(0, 4/3)$. Máximo $(0, 0)$, mínimo $(4/3, -32/27)$. $f'' = 6x - 4$: abajo antes de $2/3$, arriba después; inflexión $(2/3, -16/27)$.

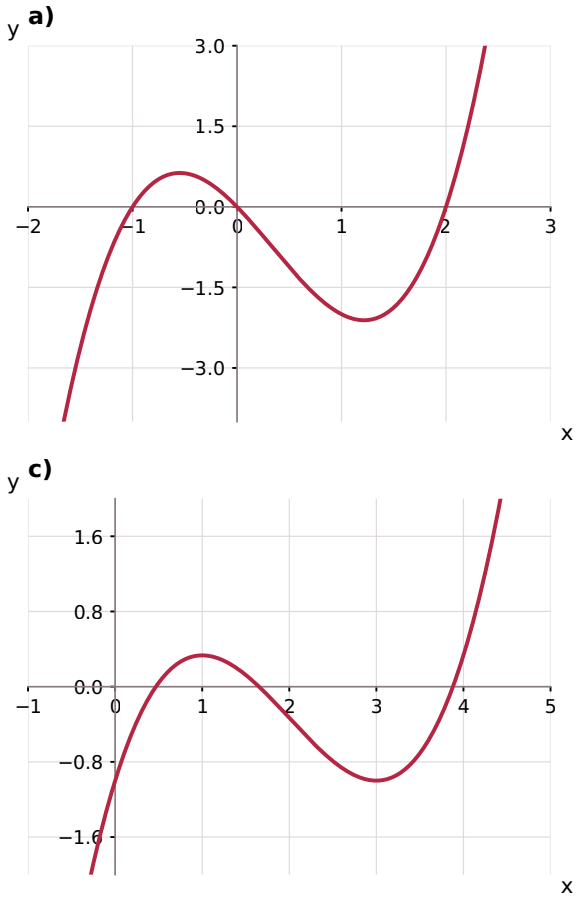
e) Crece en $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$; decrece en $(0, 2)$. Máximo $(0, 0)$, mínimo $(2, -4)$. $f'' = 6x - 6$: abajo antes de 1, arriba después; inflexión $(1, -2)$.

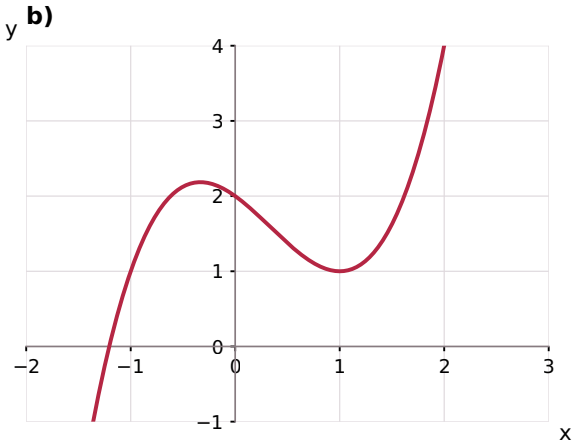


5.23 **a)** Sean $a = (1 - \sqrt{7})/3$ y $b = (1 + \sqrt{7})/3$. Crece en $(-\infty, a)$ y (b, ∞), decrece en (a, b). Máximo $(a, f(a))$, mínimo $(b, f(b))$; inflexión $(1/3, -20/27)$. Abajo antes de 1/3, arriba después.

b) Crece en $(-\infty, -1/3)$ y $(1, \infty)$; decrece en $(-1/3, 1)$. Máximo $(-1/3, 59/27)$; mínimo $(1, 1)$. Inflexión $(1/3, 43/27)$; abajo a la izquierda, arriba a la derecha.

c) Crece en $(-\infty, 1)$ y $(3, \infty)$; decrece en $(1, 3)$. Máximo $(1, 1/3)$, mínimo $(3, -1)$. Inflexión $(2, -1/3)$; abajo a la izquierda, arriba a la derecha.

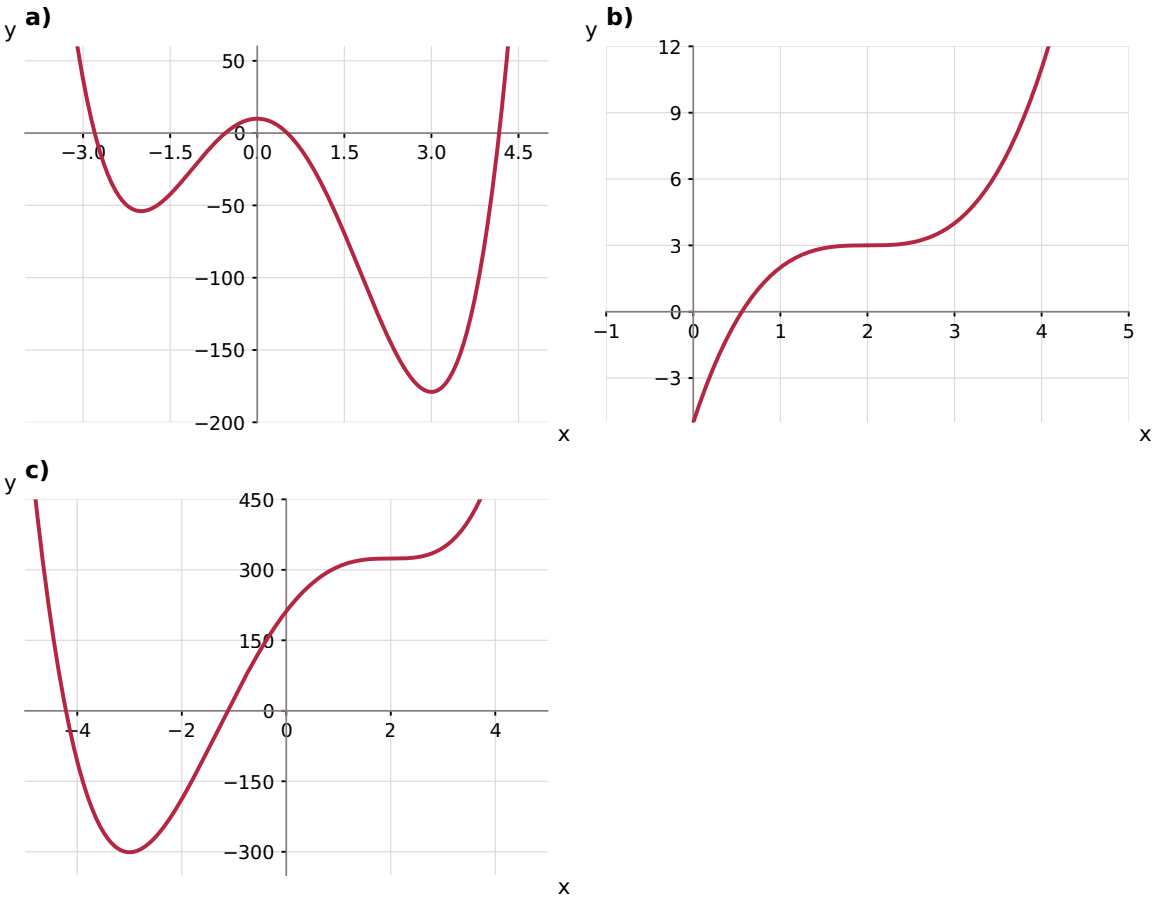




5.24 **a)** Dominio $\mathbb{R}$, sin asíntotas. $f' = 12x(x - 3)(x + 2)$: decrece en $(-\infty, -2)$ y $(0, 3)$, crece en $(-2, 0)$ y $(3, \infty)$. Mínimos $(-2, -54)$ y $(3, -179)$; máximo $(0, 10)$. Sean $u = (1 - \sqrt{19})/3$, $v = (1 + \sqrt{19})/3$: curvatura arriba fuera de $[u, v]$, abajo dentro; inflexiones en u y v.

b) $f(x) = (x - 2)^3 + 3$: dominio $\mathbb{R}$, sin asíntotas, siempre creciente. Sin extremos. Inflexión horizontal $(2, 3)$; abajo antes de 2 y arriba después.

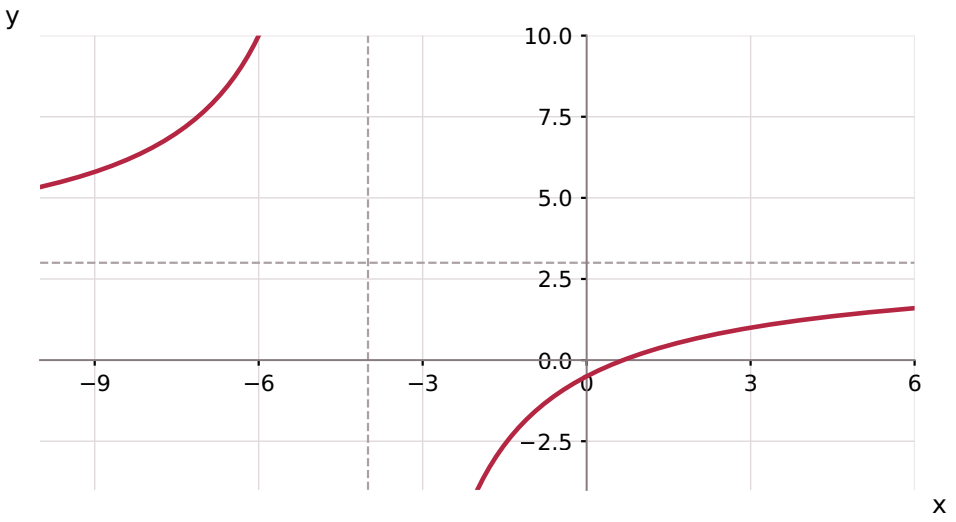
c) Dominio $\mathbb{R}$, sin asíntotas. $f' = 12(x - 2)^2(x + 3)$: decrece hasta -3 y crece después. Único mínimo $(-3, -301)$. $f'' = 12(3x + 4)(x - 2)$: arriba en $(-\infty, -4/3)$ y $(2, \infty)$; abajo entre $-4/3$ y 2. Inflexiones $(-4/3, -1252/27)$ y $(2, 324)$, esta última horizontal.



5.25 **a)** Dominio $\mathbb{R}$ salvo -4. Asíntotas $x = -4$ e $y = 3$. Cortes $(2/3, 0)$ y $(0, -1/2)$.

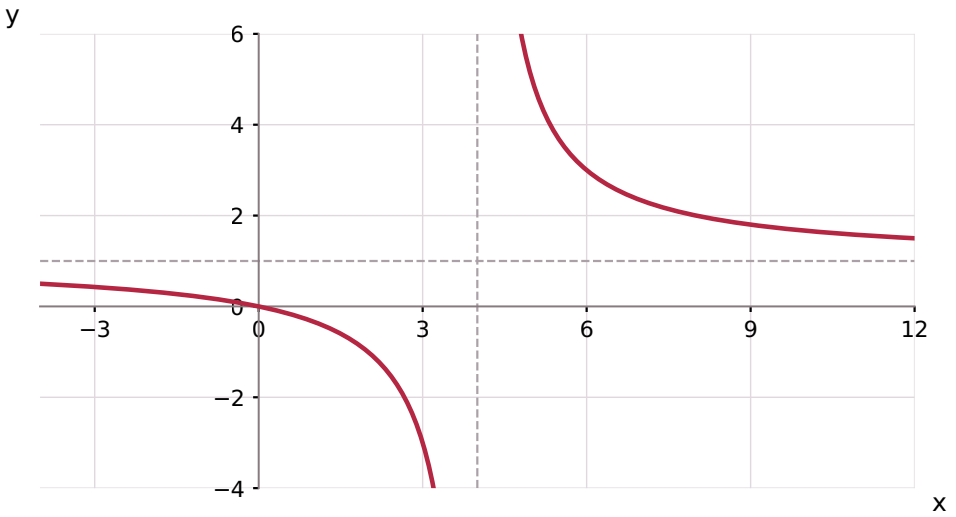
b) $f' = 14/(x + 4)^2 > 0$: creciente en cada intervalo del dominio, sin extremos.

c) $f'' = -28/(x + 4)^3$: arriba para $x < -4$ y abajo para $x > -4$. No hay inflexión en -4, que está fuera del dominio.



5.26 **a)** Dominio $\mathbb{R}$ salvo 4. $f' = -4/(x - 4)^2 < 0$: sin extremos, decreciente en cada tramo.

b) Asíntotas $x = 4$ e $y = 1$. $f - 1 = 4/(x - 4)$: por debajo de $y = 1$ a la izquierda de 4, por encima a la derecha. En 4, límite izquierdo $-\infty$ y derecho $+\infty$. Corte $(0, 0)$.

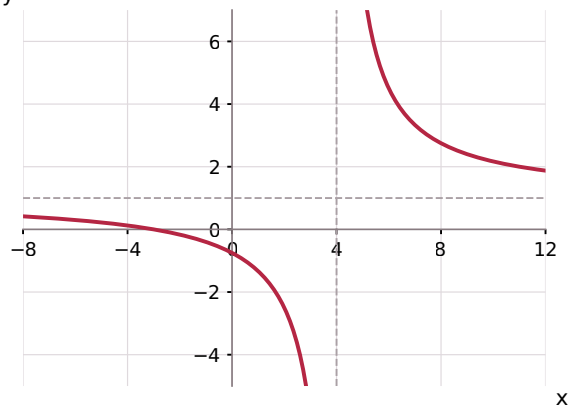


5.27 **a)** Asíntotas x = 4 e y = 1. Cortes (−3, 0) y (0, −3/4); decrece en cada tramo.

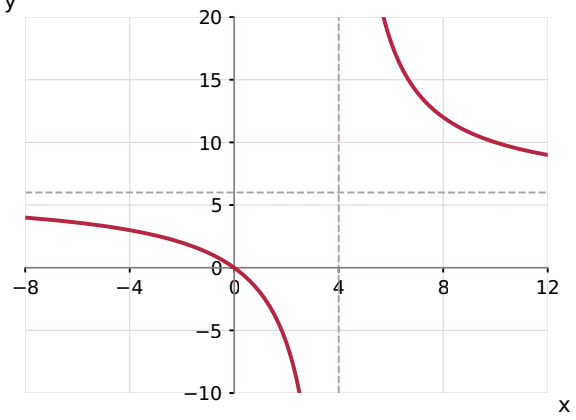
b) Asíntotas x = 4 e y = 6. Corte (0, 0); decrece en cada tramo.

c) Única asíntota y = 1. Dominio $\mathbb{R}$; función par con mínimo (0, −1) y cortes (±1, 0). Siempre por debajo de y = 1.

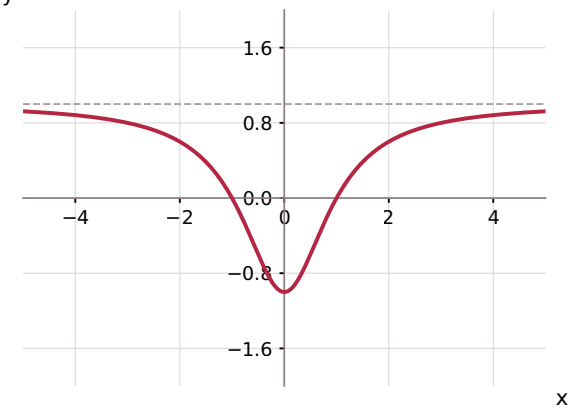
a)



b)



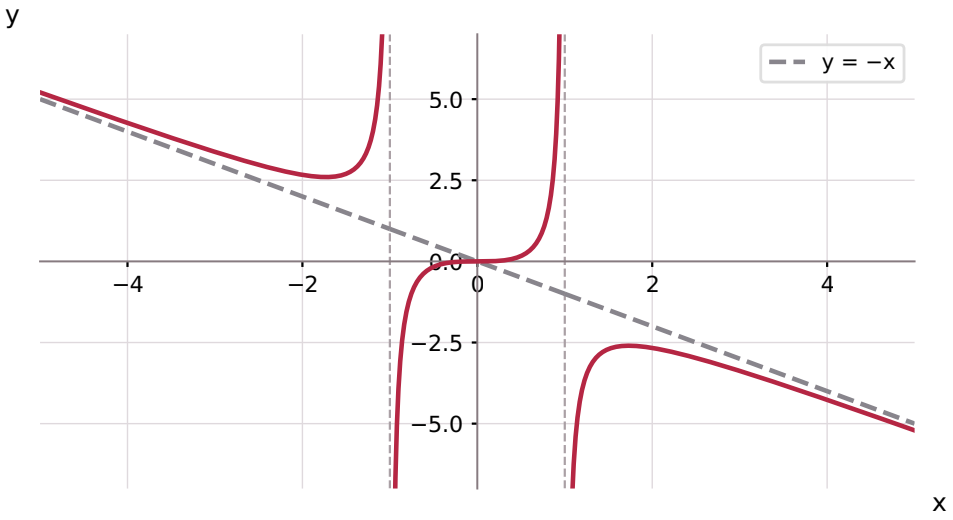
c)



5.28 **a)** Dominio $\mathbb{R}$ salvo ± 1. $f' = x^2(3 - x^2)/(1 - x^2)^2$. Mínimo $(-\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/2)$; máximo $(\sqrt{3}, -3\sqrt{3}/2)$. En $(0, 0)$ hay inflexión horizontal, no extremo.

b) Asíntotas verticales $x = \pm 1$ y oblicua $y = -x$. $f + x = x/(1 - x^2)$: por encima en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$; por debajo en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$.

c) Límites: en -1, $+\infty$ por la izquierda y $-\infty$ por la derecha; en 1, $+\infty$ por la izquierda y $-\infty$ por la derecha. Gráfica impar.

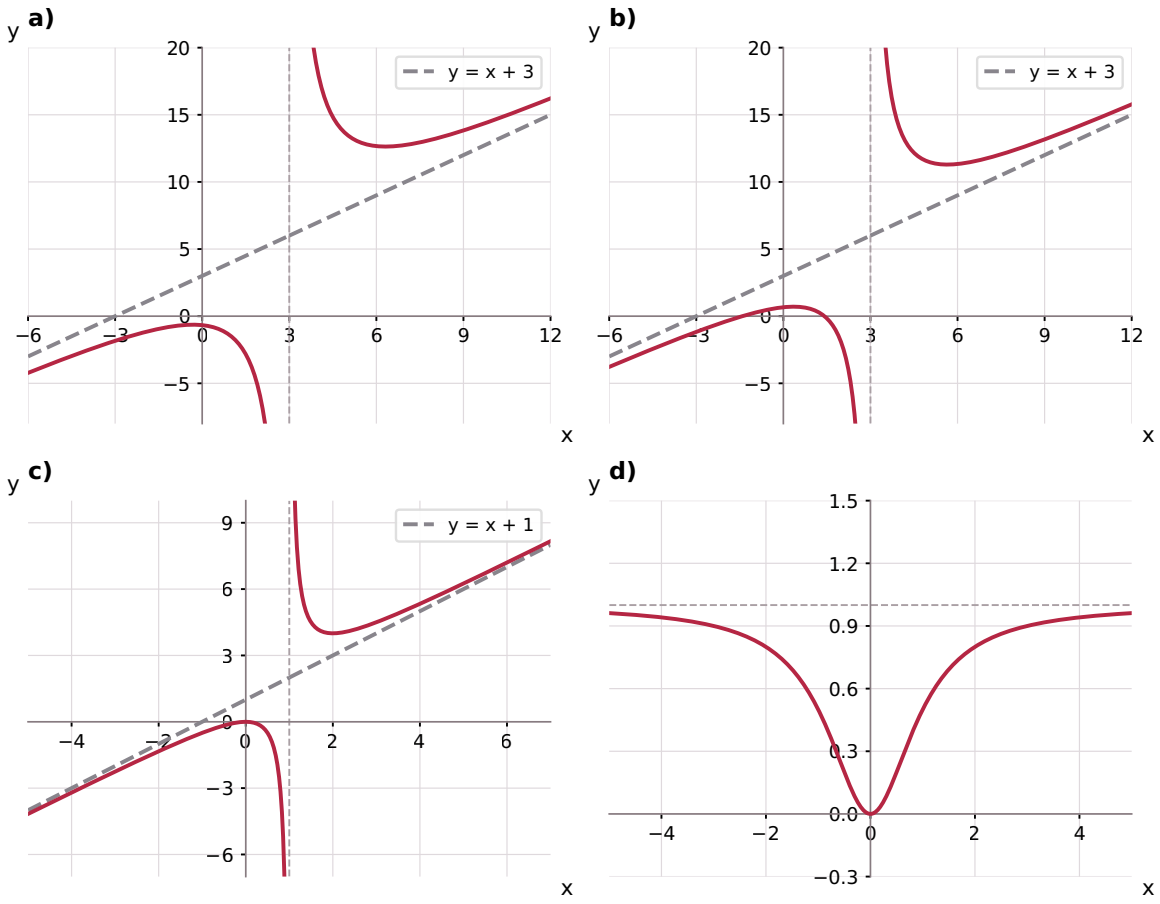


5.29 **a)** Asíntotas $x = 3$ e $y = x + 3$. Diferencia $11/(x - 3)$: por debajo para $x < 3$ y por encima para $x > 3$. Límites en 3: $-\infty$ a la izquierda, $+\infty$ a la derecha.

b) Asíntotas $x = 3$ e $y = x + 3$. Diferencia $7/(x - 3)$: por debajo a la izquierda y por encima a la derecha. Mismos límites laterales que en a).

c) Asíntotas $x = 1$ e $y = x + 1$. Diferencia $1/(x - 1)$: por debajo a la izquierda y por encima a la derecha. Límites en 1: $-\infty$ a la izquierda, $+\infty$ a la derecha.

d) Única asíntota $y = 1$, siempre por encima de la curva, pues $f - 1 = -1/(x^2 + 1)$.

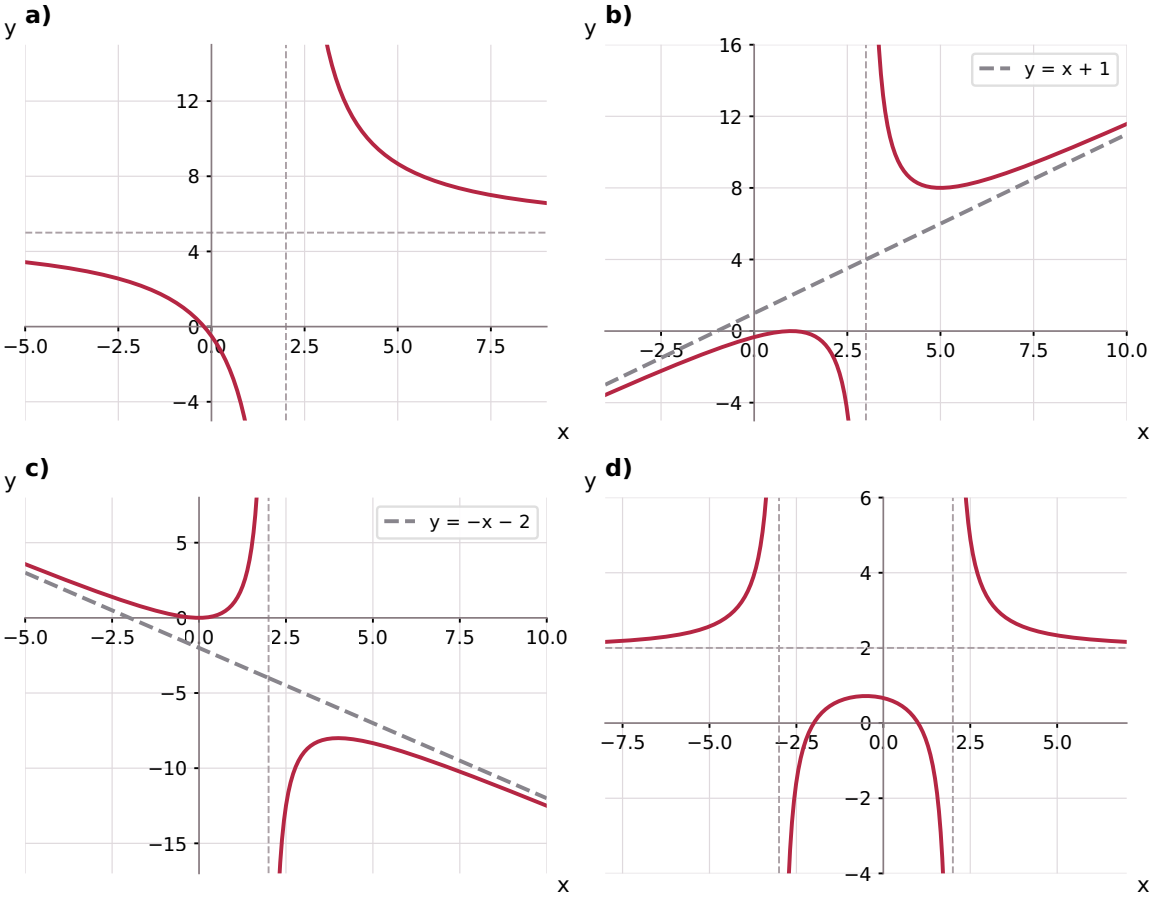


5.30 **a)** Dominio $\mathbb{R}$ salvo 2. Asíntotas $x = 2$ e $y = 5$; cortes $(-1/5, 0)$ y $(0, -1/2)$. $f' = -11/(x-2)^2$: decrece en ambos tramos, sin extremos. $f'' = 22/(x-2)^3$: abajo a la izquierda y arriba a la derecha.

b) Dominio $\mathbb{R}$ salvo 3. Asíntotas $x = 3$ e $y = x + 1$. Cortes $(1, 0)$, $(0, -1/3)$. $f' = (x-1)(x-5)/(x-3)^2$: crece antes de 1 y después de 5; decrece en $(1, 3)$ y $(3, 5)$. Máximo $(1, 0)$, mínimo $(5, 8)$. $f'' = 8/(x-3)^3$: abajo antes de 3, arriba después.

c) Dominio $\mathbb{R}$ salvo 2. Asíntotas $x = 2$ e $y = -x - 2$; corte $(0, 0)$. $f' = x(4-x)/(2-x)^2$: decrece en $(-\infty, 0)$ y $(4, \infty)$, crece en $(0, 2)$ y $(2, 4)$. Mínimo $(0, 0)$, máximo $(4, -8)$. $f'' = 8/(2-x)^3$: arriba antes de 2, abajo después.

d) Dominio $\mathbb{R}$ salvo -3 y 2. Asíntotas $x = -3$, $x = 2$ e $y = 2$; cortes $(-2, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 2/3)$. $f' = -8(2x+1)/(x^2+x-6)^2$: crece en $(-\infty, -3)$ y $(-3, -1/2)$, decrece en $(-1/2, 2)$ y $(2, \infty)$. Máximo $(-1/2, 18/25)$. Curvatura arriba fuera de $[-3, 2]$ y abajo en $(-3, 2)$.



5.31 **a)** Dominio $\mathbb{R}$ salvo -1 y 4. Asíntotas $x = -1$, $x = 4$ e $y = 0$; corte $(0, 0)$. $f' = -(x^2 + 4)/(x^2 - 3x - 4)^2 < 0$: decrece en cada uno de los tres tramos, sin extremos.

b) Dominio $\mathbb{R}$ salvo -1. Asíntotas $x = -1$ e $y = 1$. Corte Y $(0, 3)$, sin cortes X. $f' = -4/(x + 1)^3$: crece antes de -1 y decrece después; sin extremos. Siempre por encima de $y = 1$.

c) Dominio $\mathbb{R}$ salvo -1 y 4. Asíntotas $x = -1$, $x = 4$ e $y = 0$. Cortes $(-5, 0)$, $(0, -5/4)$. $f' = -(x + 11)(x - 1)/(x^2 - 3x - 4)^2$: crece en $(-11, -1)$ y $(-1, 1)$; decrece en $(-\infty, -11)$, $(1, 4)$ y $(4, \infty)$. Mínimo $(-11, -1/25)$, máximo $(1, -1)$.

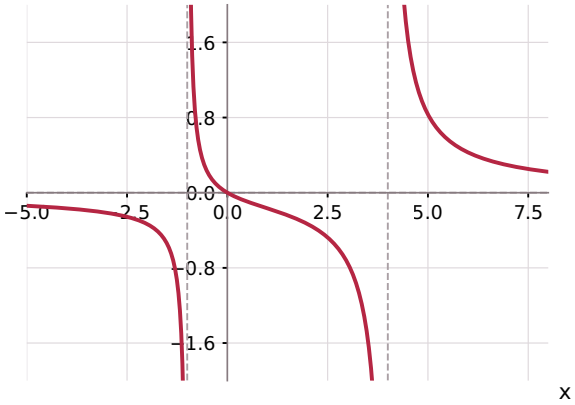
d) Dominio $\mathbb{R}$ salvo 0. Asíntotas $x = 0$ e $y = 1$. Cortes X: $-2 \pm \sqrt{2}$; sin corte Y. $f' = -4(x + 1)/x^3$: decrece en $(-\infty, -1)$ y $(0, \infty)$, crece en $(-1, 0)$. Mínimo $(-1, -1)$.

e) Dominio $\mathbb{R}$ salvo -3 y 2. Asíntotas $x = -3$, $x = 2$ e $y = 0$; corte $(0, 0)$. $f' = -2(x^2 + 6)/(x^2 + x - 6)^2 < 0$: decrece en cada tramo, sin extremos.

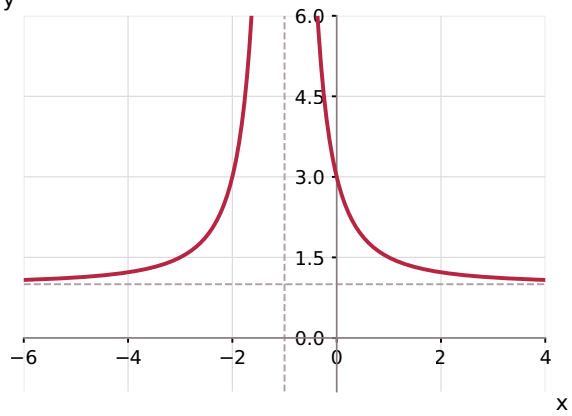
f) Dominio $\mathbb{R}$ salvo ± 1. Asíntotas $x = \pm 1$ e $y = 0$. Cortes $(3, 0)$, $(0, 3)$. Sean $a = 3 - 2\sqrt{2}$ y $b = 3 + 2\sqrt{2}$: crece en $(a, 1)$ y $(1, b)$; decrece en $(-\infty, -1)$, $(-1, a)$ y (b, ∞). Mínimo $(a, (3 + 2\sqrt{2})/2)$, máximo $(b, (3 - 2\sqrt{2})/2)$.

5.31 · Representación de funciones

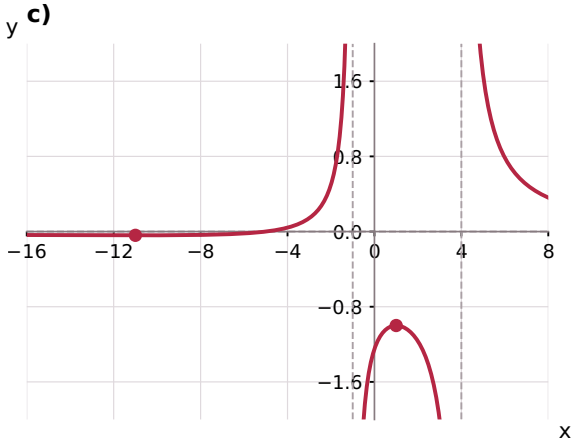
a)



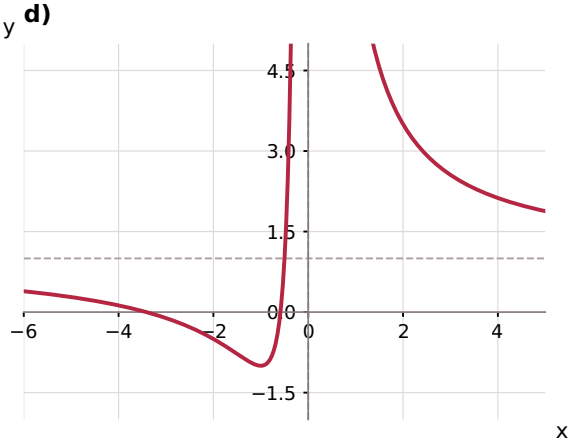
b)



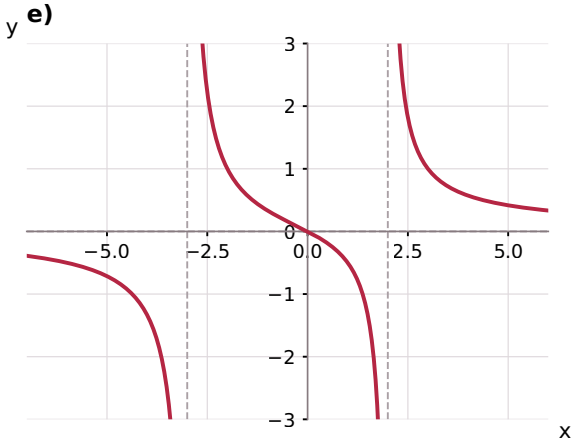
c)



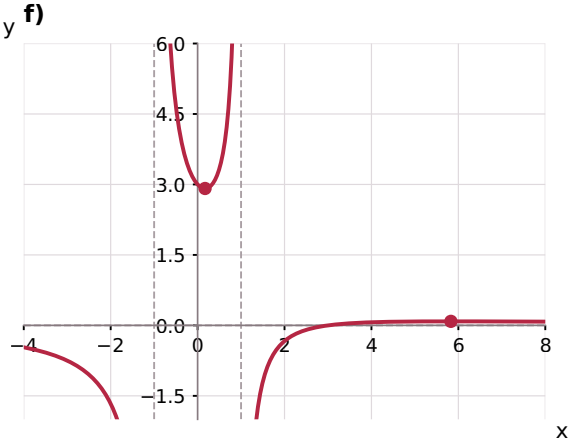
d)



e)



f)

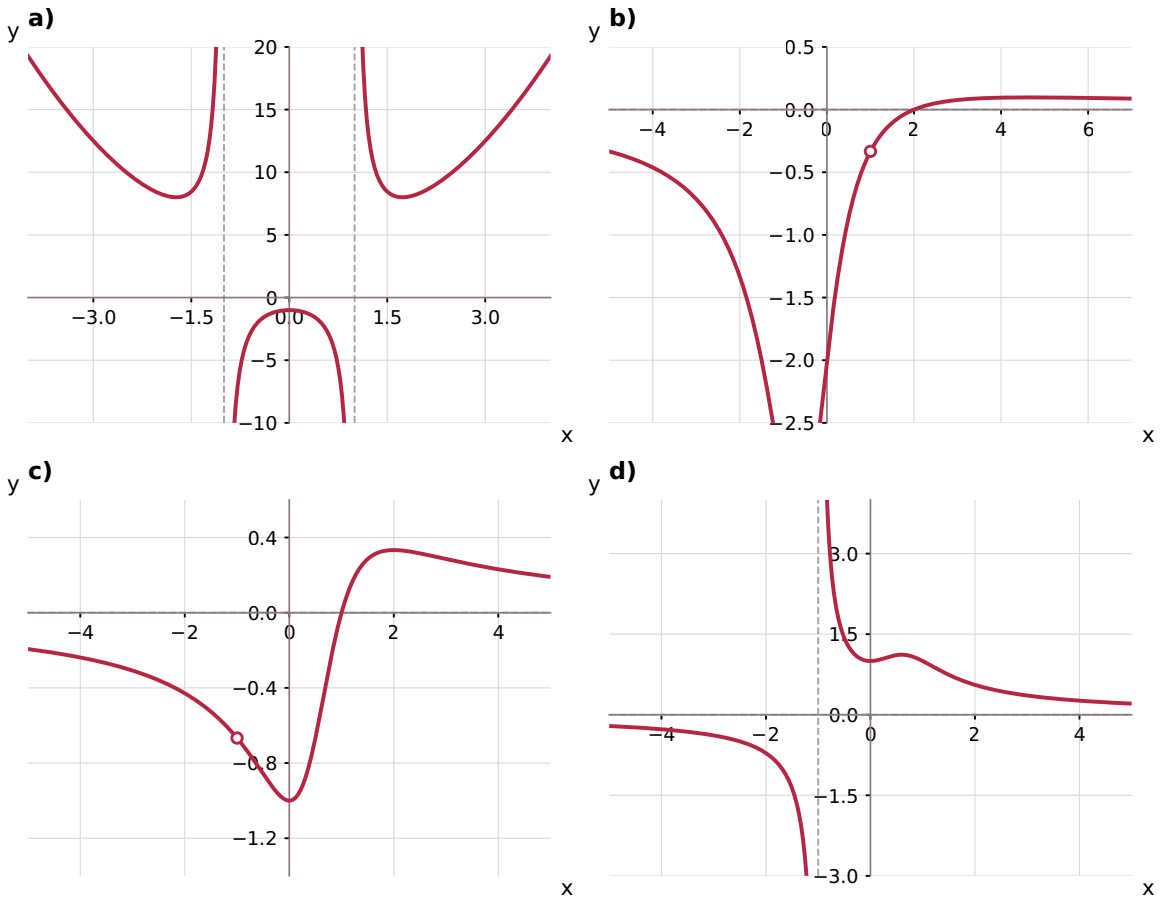


5.32 **a)** Dominio $\mathbb{R}$ salvo ± 1. Cortes: solo $(0, -1)$. Asíntotas verticales $x = \pm 1$; no hay horizontal ni oblicua. $f = x^2 + 3 + 4/(x^2 - 1)$. Mínimos $(\pm\sqrt{3}, 8)$, máximo $(0, -1)$. Decrece en $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(0, 1)$, $(1, \sqrt{3})$; crece en $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 0)$, $(\sqrt{3}, \infty)$.

b) Dominio $\mathbb{R}$ salvo 1. $f = (x - 2)/(x^2 + x + 1)$; hueco $(1, -1/3)$, sin asíntota vertical, horizontal $y = 0$. Cortes $(2, 0)$, $(0, -2)$. Sean $a = 2 - \sqrt{7}$, $b = 2 + \sqrt{7}$: mínimo $(a, f(a))$, máximo $(b, f(b))$; decrece fuera de $[a, b]$, crece dentro, separando el hueco $x = 1$.

c) Dominio $\mathbb{R}$ salvo -1. $f = (x - 1)/(x^2 - x + 1)$; hueco $(-1, -2/3)$. Única asíntota $y = 0$. Cortes $(1, 0)$, $(0, -1)$. Decrece en $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(2, \infty)$; crece en $(0, 2)$. Mínimo $(0, -1)$, máximo $(2, 1/3)$.

d) Dominio $\mathbb{R}$ salvo -1. Asíntotas $x = -1$ e $y = 0$; único corte $(0, 1)$. $f' = -x(x^3 + 3x - 2)/(x^3 + 1)^2$. Sea $a \approx 0{,}596072$ la única raíz real de $x^3 + 3x - 2 = 0$. Decrece en $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, (a, ∞); crece en $(0, a)$. Mínimo $(0, 1)$, máximo $(a, f(a)) \approx (0{,}596072;\ 1{,}118434)$.

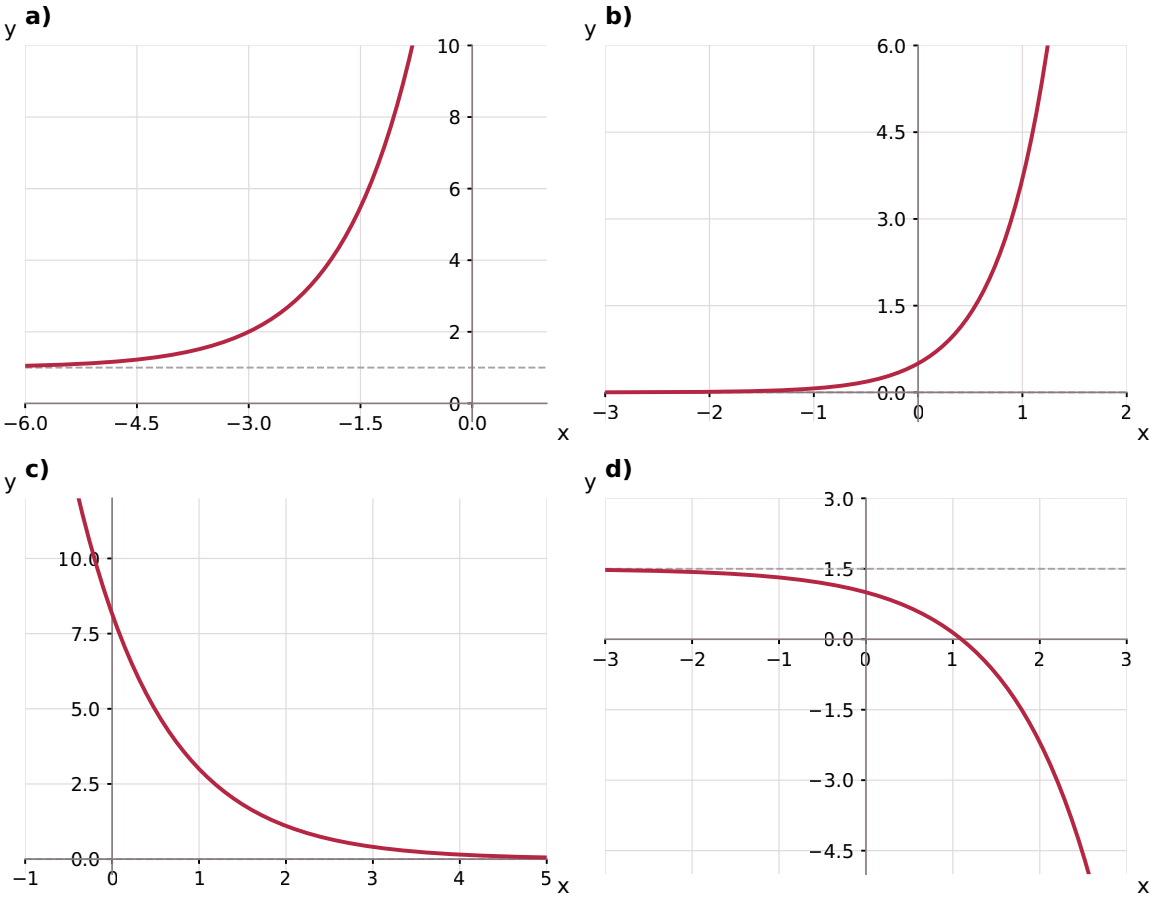


5.33 **a)** Dominio $\mathbb{R}$; corte Y $(0, 1 + e^3)$, sin corte X. Creciente y curvada hacia arriba, sin extremos. Asíntota $y = 1$ cuando $x \to -\infty$.

b) Dominio $\mathbb{R}$; corte Y $(0, 1/2)$, sin corte X. Creciente y curvada hacia arriba, sin extremos. Asíntota $y = 0$ cuando $x \to -\infty$.

c) Dominio $\mathbb{R}$; corte Y $(0, 3e)$, sin corte X. Decreciente y curvada hacia arriba, sin extremos. Asíntota $y = 0$ cuando $x \to +\infty$.

d) Dominio $\mathbb{R}$; cortes $(\ln 3, 0)$, $(0, 1)$. Decreciente y curvada hacia abajo, sin extremos. Asíntota $y = 3/2$ cuando $x \to -\infty$.

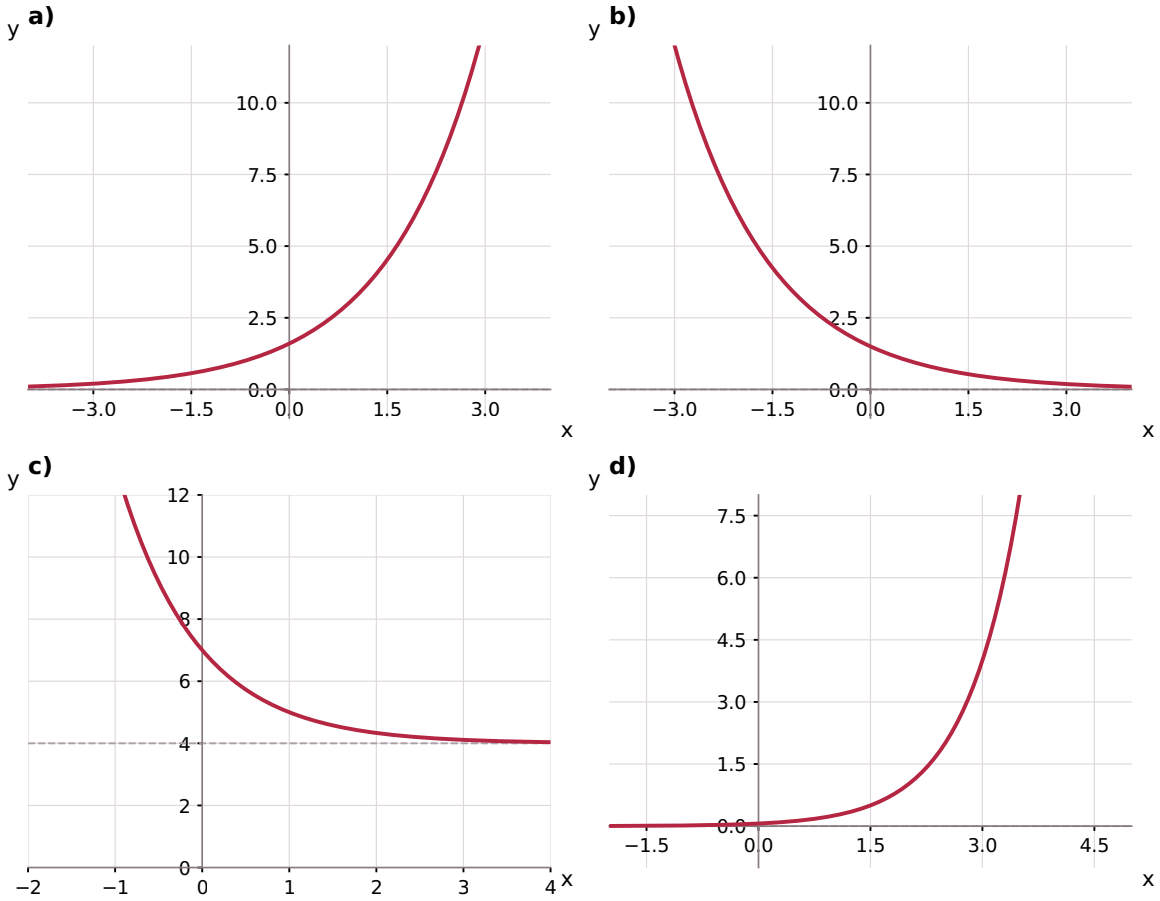


5.34 **a)** Dominio $\mathbb{R}$; corte Y (0, 8/5), sin corte X. Creciente, sin extremos, curvatura hacia arriba. Asíntota $y = 0$ en $-\infty$.

b) Dominio $\mathbb{R}$; corte Y (0, 3/2), sin corte X. Decreciente, sin extremos, curvatura hacia arriba. Asíntota $y = 0$ en $+\infty$.

c) Dominio $\mathbb{R}$; corte Y (0, 7), sin corte X. Decreciente, sin extremos, curvatura hacia arriba. Asíntota $y = 4$ en $+\infty$.

d) Dominio $\mathbb{R}$; corte Y (0, 1/16), sin corte X. Creciente, sin extremos, curvatura hacia arriba. Asíntota $y = 0$ en $-\infty$.



5.35 **a)** Dominio $(0, \infty)$, corte $(1/2, 0)$, asíntota $x = 0$. Crece, sin extremos, curvatura hacia abajo.

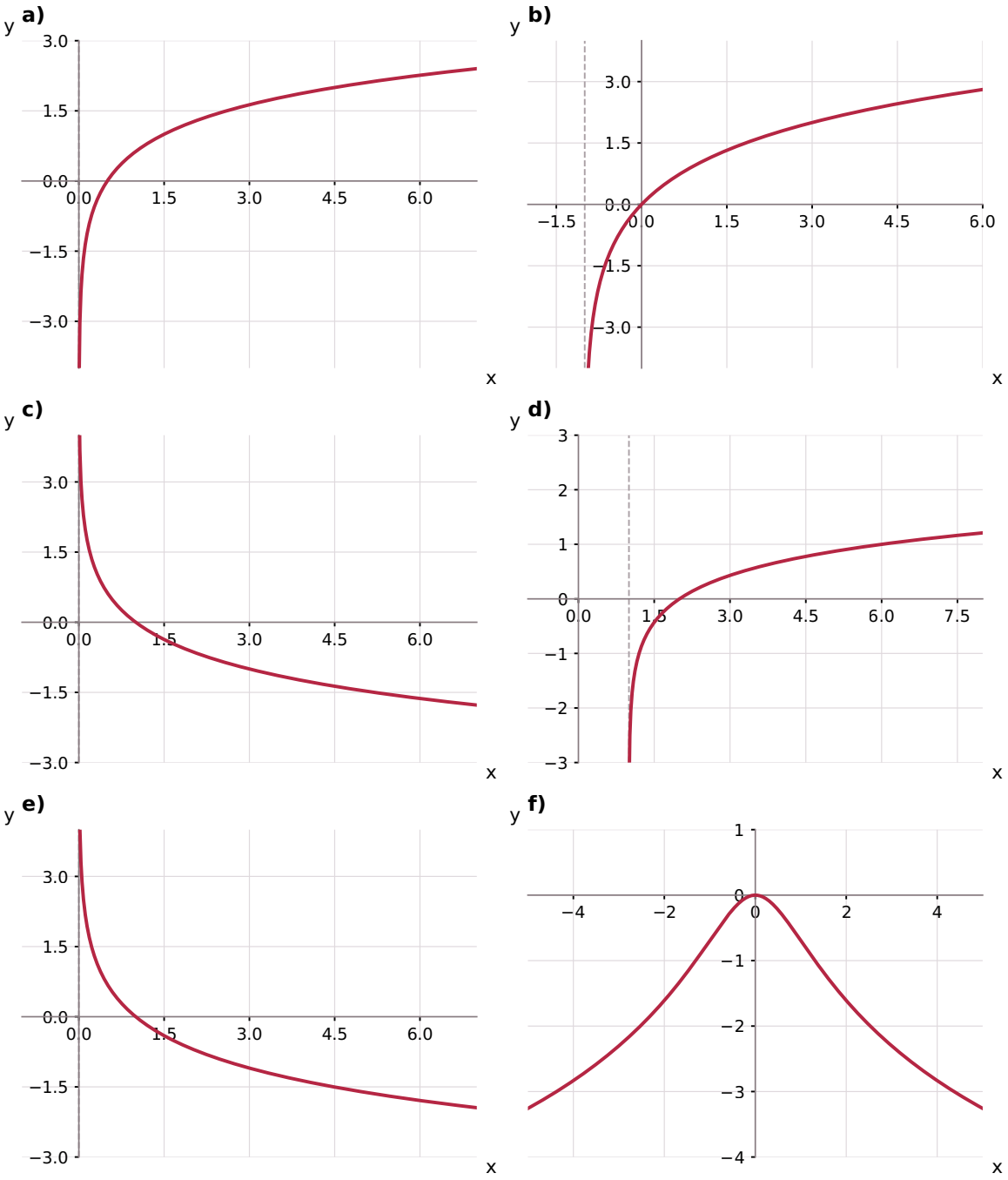
b) Dominio $(-1, \infty)$, corte $(0, 0)$, asíntota $x = -1$. Crece, sin extremos, curvatura hacia abajo.

c) Dominio $(0, \infty)$, corte $(1, 0)$, asíntota $x = 0$. Decrece, sin extremos, curvatura hacia arriba.

d) Dominio $(1, \infty)$, corte $(2, 0)$, asíntota $x = 1$. Crece, sin extremos, curvatura hacia abajo.

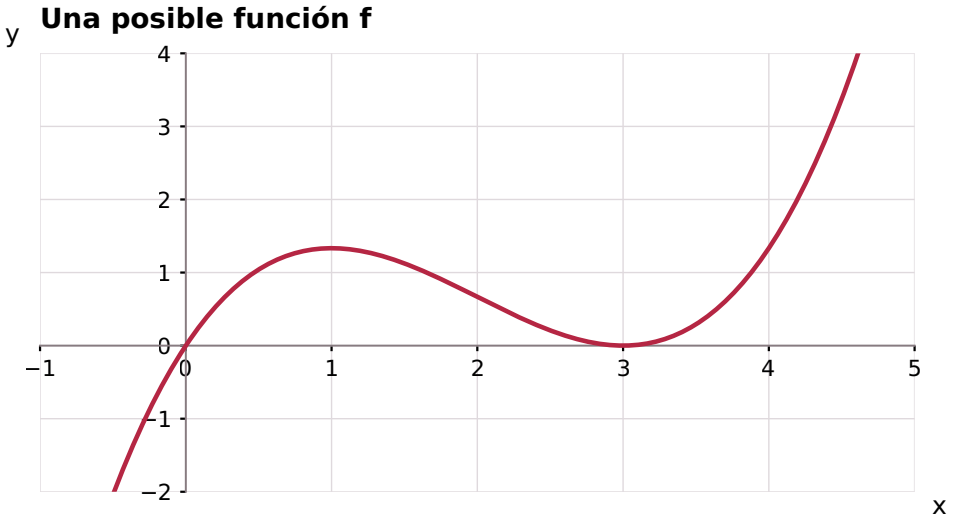
e) Equivale a $-\ln x$: dominio $(0, \infty)$, corte $(1, 0)$, asíntota $x = 0$. Decrece, sin extremos, curvatura hacia arriba.

f) Equivale a $-\ln(x^2 + 1)$: dominio $\mathbb{R}$, corte y máximo $(0, 0)$, sin asíntotas. Crece antes de 0 y decrece después. Curvatura abajo en $(-1, 1)$, arriba fuera; inflexiones $(\pm 1, -\ln 2)$.



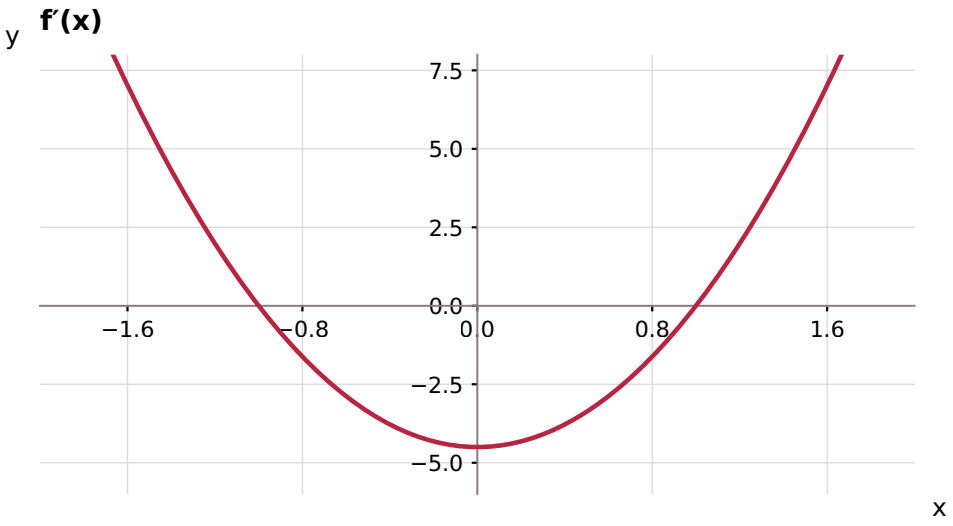
5.36 **a)** f crece antes de 1 y después de 3, y decrece entre ambos. Tiene máximo en $x = 1$, mínimo en $x = 3$ e inflexión en $x = 2$.

b) Un modelo compatible es $f(x) = x^3/3 - 2x^2 + 3x + C$. La gráfica no determina C: todas las traslaciones verticales son válidas. Se dibuja $C = 0$.



5.37 **a)** f' se anula en $x = -1$ y $x = 1$; es positiva fuera de $[-1, 1]$ y negativa dentro. Tiene mínimo en $x = 0$.

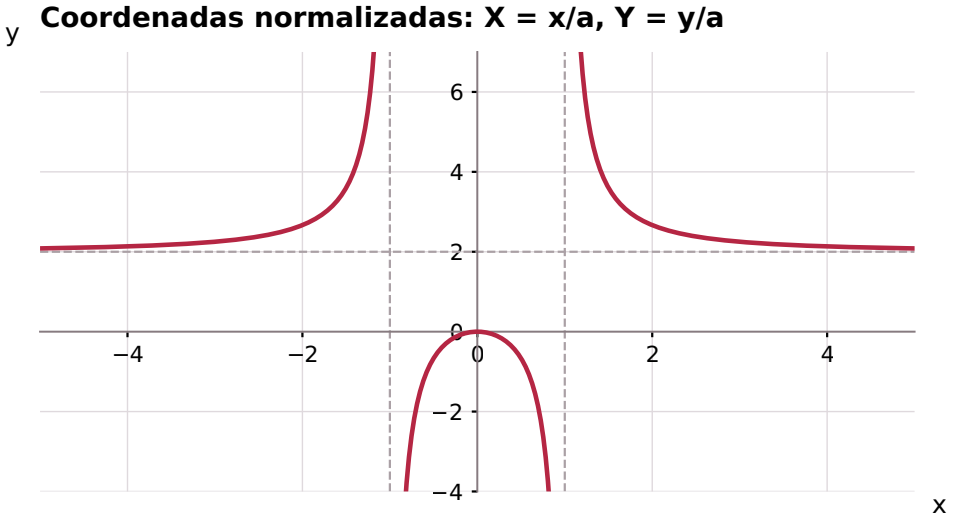
b) Para el modelo dibujado $f(x) = 3x^3/2 - 9x/2$, su derivada es $f'(x) = 9(x^2 - 1)/2$, una parábola.



5.38 **a)** Dominio $\mathbb{R}$ salvo $\pm a$. Función par, único corte (0, 0); asíntotas $x = \pm a$ e $y = 2a$. Está por encima de la horizontal si $|x| > a$ y por debajo si $|x| < a$.

b) $f' = -4a^3x/(x^2 - a^2)^2$: crece en $(-\infty, -a)$ y $(-a, 0)$, decrece en $(0, a)$ y (a, ∞). Máximo relativo (0, 0).

c) $f'' = 4a^3(3x^2 + a^2)/(x^2 - a^2)^3$: curvatura arriba fuera de $[-a, a]$, abajo dentro. La figura usa $X = x/a$ e $Y = y/a$, válida para cualquier $a > 0$.



06 · Problemas de optimización

6.01 **a)** $B(x) = -x^2 + 25x - 100$. Máximo continuo en $x = 12{,}5$, con beneficio 56,25 €.

b) Con unidades enteras, 12 y 13 unidades dan el mismo beneficio máximo: 56 €.

6.02 Sea $y = 20 - x$. $S(x) = x^2 + (20 - x)^2$, $S' = 4x - 40$ y $S'' = 4 > 0$. Resultado: 10 + 10; suma mínima de cuadrados 200.

6.03 $S(x) = x + 4/x$, $x > 0$. $S' = 1 - 4/x^2 = 0$ da $x = 2$. Es mínimo, pues $S''(2) > 0$. La suma mínima vale 4.

6.04 **a)** Si los catetos son x y $10 - x$, $A(x) = x(10 - x)/2$, $0 < x < 10$. $A' = 5 - x$ se anula en 5 y $A'' = -1$.

b) Catetos 5 y 5: triángulo rectángulo isósceles, área máxima 25/2 unidades cuadradas.

6.05 **a)** Los catetos cumplen $x^2 + y^2 = 100$. $A(x) = x\sqrt{(100 - x^2)}/2$, $0 < x < 10$; $A' = (100 - 2x^2)/(2\sqrt{(100 - x^2)})$.

b) El máximo se alcanza con $x = y = 5\sqrt{2}$. Área máxima: 25 unidades cuadradas.

6.06 **a)** Con base x y altura $y = 12/x$, $C(x) = 3x + 4y = 3x + 48/x$. $C' = 3 - 48/x^2$ se anula en $x = 4$; $C'' > 0$. Base 4 m y altura 3 m.

b) Coste mínimo del marco completo: $2 \cdot 4 \cdot 1{,}50 + 2 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ €.

6.07 **a)** $2x + \pi y = 200$. $A = xy + \pi y^2/4 = 100y - \pi y^2/4$, con $0 < y \leq 200/\pi$.

b) $A' = 100 - \pi y/2$: máximo en $y = 200/\pi$ y $x = 0$. El recinto óptimo es un círculo, de área $10\,000/\pi$ m². Si se exige $x > 0$, no se alcanza máximo: esa área es el supremo.

6.08 **a)** Si x es el ancho y y el alto, $(x - 2)(y - 4) = 18$. $A(x) = x[4 + 18/(x - 2)]$, $x > 2$.

b) $A' = 4 - 36/(x - 2)^2 = 0$ da $x = 5$. Como $A'' > 0$, es mínimo: hoja de 5 × 10 cm, área 50 cm².

6.09 **a)** $2x + 2y = 500$: cuadrado de 125 × 125 m. Área máxima 15 625 m².

b) $2x + y = 500$: lados perpendiculares al río de 125 m y lado paralelo de 250 m. Área máxima 31 250 m².

6.10 **a)** $2y + x + \pi x/2 = 5$. $A = xy + \pi x^2/8 = 5x/2 - (4 + \pi)x^2/8$.

b) $A' = 5/2 - (4 + \pi)x/4 = 0$: $x = 10/(4 + \pi)$ m, $y = 5/(4 + \pi)$ m. $A'' < 0$; área máxima $25/[2(4 + \pi)]$ m².

6.11 **a)** Basta minimizar $d^2 = (x - 6)^2 + y^2 = x^2 - 10x + 36$, con $x \geq 0$. Su mínimo está en $x = 5$.

b) Los puntos son $(5, \sqrt{10})$ y $(5, -\sqrt{10})$; distancia mínima $\sqrt{11}$.

6.12 **a)** La recta es $y = mx + 3 - 2m$, con $m < 0$. Área $A(m) = -(3 - 2m)^2/(2m) = -2m + 6 - 9/(2m)$.

b) $A' = -2 + 9/(2m^2) = 0$ da $m = -3/2$. $A'' = -9/m^3 > 0$. Recta $y = -3x/2 + 6$; interceptos 4 y 6, área mínima 12.

6.13 **a)** Si r es el radio del cilindro y h su altura, $r^2 + h^2/4 = 9$. $V(h) = \pi h(9 - h^2/4)$, $0 < h < 6$.

b) $V' = \pi(9 - 3h^2/4) = 0$ da $h = 2\sqrt{3}$ cm. Como $V'' = -3\pi h/2 < 0$, es máximo. Radio $r = \sqrt{6}$ cm y volumen máximo $12\pi\sqrt{3}$ cm³.

07 · Parámetros y condiciones

7.01 $f'(2) = 4 + a = 0$: $a = -4$. $f'' = 2 > 0$ confirma el mínimo $(2, -8)$.

7.02 $f'(x) = 3x + b$, luego $f(x) = 3x^2/2 + bx + c$, con b y c reales.

7.03 $f(x) = a(x - 3)^2 - 8$. Como $9a - 8 = 1$, $a = 1$. Resultado: $f(x) = x^2 - 6x + 1$.

7.04 $c = -5$; $-2a + b = 0$; $a - b - 5 = -8$. Resultado $a = 3$, $b = 6$, $c = -5$.

7.05 $3 + a = 0$ y $1 + a + b = 5$. Resultado $a = -3$, $b = 7$. $f''(1) = 6 > 0$ confirma el mínimo.

7.06 No existe: $f'(0) = 1$ independientemente de a, b y c.

7.07 $8a + 2b + c = 6$; $a + b + c = 2$; $3a + b = 0$. Resultado $a = 1$, $b = -3$, $c = 4$. $f''(1) = 6 > 0$.

7.08

a) $f(x) = a(x + 4)^2(x + 3)$, con $a \neq 0$. Por tanto $b = 11a$, $c = 40a$, $d = 48a$. Hay una familia de soluciones.

b) Si $a > 0$: máximo $(-4, 0)$, mínimo $(-10/3, -4a/27)$. Si $a < 0$, se intercambian.

7.09

a) El mínimo en $x = 0$ exige $a > 0$. El otro punto crítico es $x = -2a/3$; allí el máximo debe valer 0: $4a^3/27 + b = 0$.

b) Con $b = -1 - a$ resulta $(a - 3)(2a + 3)^2 = 0$. Como $a > 0$: $a = 3$, $b = -4$.

c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$. Máximo $(-2, 0)$ y mínimo $(0, -4)$.

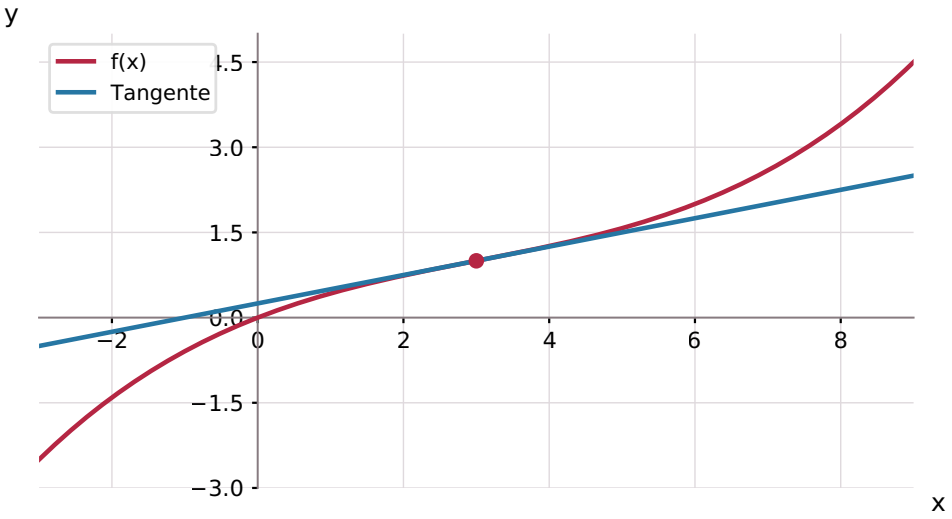
7.10

a) Los vértices pedidos son $(-6, 166)$ y $(2, -90)$. Se imponen $f(-6) = 166$, $f(2) = -90$ y $f'(-6) = f'(2) = 0$.

b) Resultado: $a = 1$, $b = 6$, $c = -36$, $d = -34$. $f''(-6) = -24 < 0$ y $f''(2) = 24 > 0$.

7.11 **a)** f(3) = 1, f′(3) = 1/4, f″(3) = 0. El sistema 27a + 9b + 3c = 1; 27a + 6b + c = 1/4; 18a + 2b = 0 da a = 1/108, b = −1/12, c = 1/2.

b) f′ = [(x − 3)² + 9]/36 > 0: siempre creciente. Inflexión (3, 1); tangente y = (x + 1)/4.



08 · Aplicaciones y razonamiento

8.01

a) Máximo (0, −1): g. Dos asíntotas verticales: j, en $x = \pm\sqrt{2}$.

b) Tangente horizontal en $x = 1$ y $x = -1$: g y h. Máximo (1, 4): h. Siempre creciente: f, pues $3x^2 + 2x + 1 > 0$.

c) Las funciones i y k no cumplen ninguna de las cinco características.

8.02

a) $E(10) = 4{,}5$; $E(16) = 3{,}6$, en las unidades del modelo.

b) $E' = 0{,}03(t - 9)(t - 15)$. Máximo a las 9 h: 4,58; mínimo a las 15 h: 3,5.

c) Aumenta de 8 a 9 h y de 15 a 17 h.

8.03

a) A obtiene beneficios positivos para $x > 0$; B, para todo $x \geq 0$.

b) A: máximo $15/4 = 3{,}75$ a los 10 años. B: máximo $(1 + \sqrt{93\,751})/75 \approx 4{,}096$ a los $(\sqrt{93\,751} - 1)/25 \approx 12{,}208$ años.

c) La empresa A empieza antes el descenso: a los 10 años.

d) No tienen pérdidas en $x \geq 0$; A comienza con beneficio nulo.

8.04

a) En $0 \leq x \leq 50$, $f(x) = 0{,}0001x^2(x - 20)(x + 20)$. Es negativa si $0 < x < 20$, nula en 0 y 20, positiva si $20 < x \leq 50$.

b) $f' = 0{,}0004x(x^2 - 200)$: decrece hasta $10\sqrt{2} \approx 14{,}142$ y crece después. El incremento es positivo al invertir más de 20 000 €; con 20 000 € es nulo.

8.05 **a)** T(1) = −5 °C; T(5) = −3 °C.

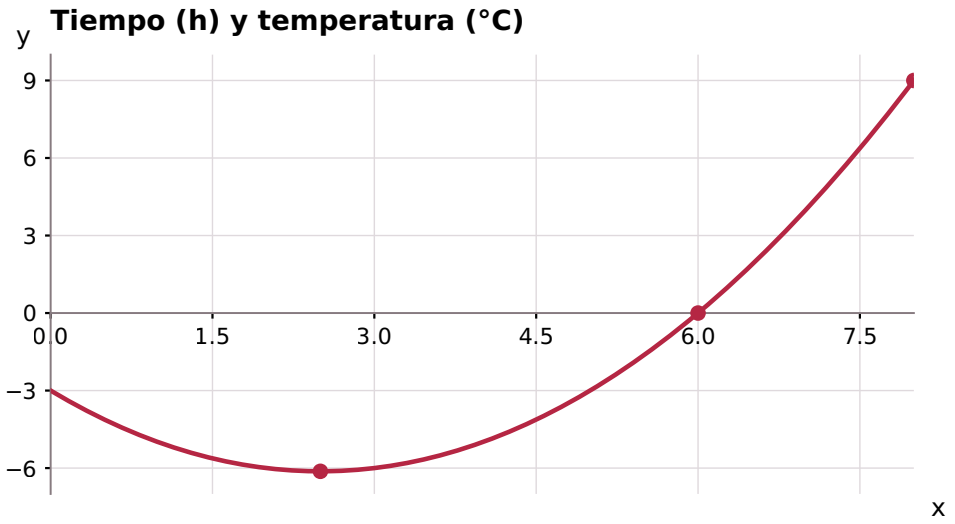
b) 0 °C a las 6 h; −3 °C a las 0 y a las 5 h.

c) Desciende de 0 a 2 h 30 min; asciende desde entonces hasta las 8 h.

d) Negativa en [0, 6), positiva en (6, 8]; nula a las 6 h.

e) Máxima 9 °C a las 8 h; mínima −49/8 = −6,125 °C a las 2 h 30 min.

f) Es el tramo de parábola de la figura, limitado a [0, 8].



8.06 **a)** f′ = 15 − d/2: aumentan hasta el día 30 y disminuyen después.

b) f(1) = 114,75: el modelo estima unas 115 unidades, sin que la expresión determine un recuento entero exacto.

c) El día 59, por simetría respecto a d = 30.

d) El día 30: f(30) = 325 unidades.

e) Los días 20 y 40.

8.07 **a)** N(1) = 582 visitantes.

b) N(14) = 2 376 visitantes.

c) $N' = -3t^2 + 48t - 11 > 0$ en [1, 14]: mínima el día 1 y máxima el día 14.

d) Mínimo 582 y máximo 2 376 visitantes.

8.08 **a)** Decrece en [0, 15] y crece en [15, ∞); los dos tramos coinciden en G(15) = 1.

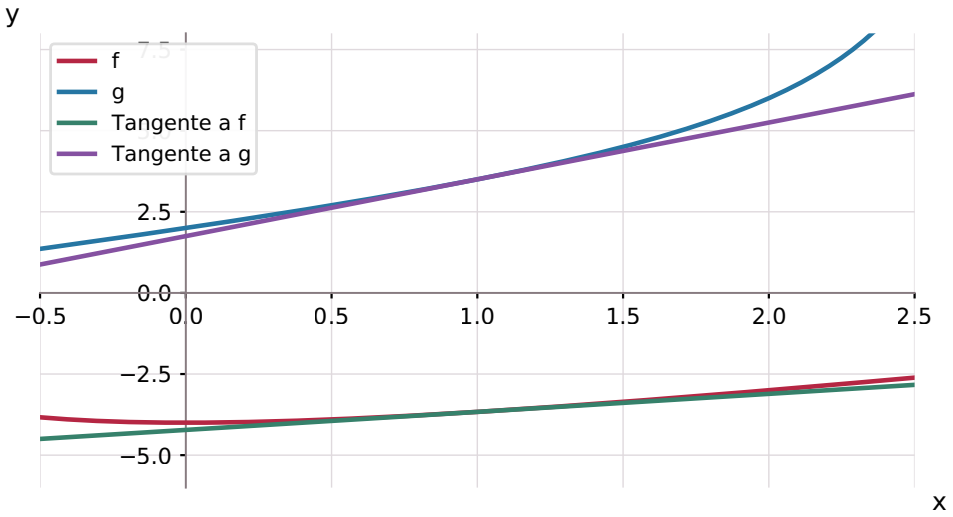
b) A largo plazo, G(x) tiende a 6: 6 000 €, sin alcanzarlos.

c) Mínimo absoluto de 1 000 € a los 15 meses. No tiene máximo absoluto. En x = 0 hay un máximo local de extremo de dominio, G(0) = 3.

d) No basta conocer el mantenimiento para decidir rentabilidad: faltan ingresos y coste de inversión. Si se usa únicamente el criterio G(x) < G(0), el gasto es menor que el inicial durante 0 < x < 35 meses; a los 35 meses vuelve a ser 3 000 €.

8.09 **a)** $f'(1) = 1 - 4/9 = 5/9$; $g'(1) = 1 + 3/4 = 7/4$. g crece más rápidamente en ese punto.

b) Tangente a f: $y + 11/3 = (5/9)(x - 1)$. Tangente a g: $y - 7/2 = (7/4)(x - 1)$.



8.10 **a)** $N(0) = 2\,000$; $N(10) = 7\,000$ bacterias.

b) $N'(10) = -600$: a las 10 h disminuye. $N' = 60(t - 5)(t - 12)$.

c) La disminución más rápida ocurre a las 8,5 h, cuando N' alcanza su mínimo −735 bacterias/h. La población mínima tras comenzar el descenso se alcanza a las 12 h: 6 320 bacterias.

d) Si se entiende que el efecto se manifiesta al comenzar a disminuir la población, empieza a las 5 h.

e) La rapidez de disminución empieza a reducirse a las 8,5 h; a las 12 h termina el descenso y después la población vuelve a crecer.

8.11 **a)** −27. Para $f = (x - 5)^3(x - 1)$, $f' = 4(x - 5)^2(x - 2)$. Decrece hasta 2 y crece después; $f(2) = -27$.

b) Una. $h(x) = x^n - x^m - 1$ baja primero y después sube; $h(0) = -1$ y $h(x) \to \infty$. Su único punto crítico positivo es (m/n) elevado a $1/(n - m)$, donde hay mínimo.

c) 49 cm². Los lados perpendiculares de 6 y 8 forman un triángulo de área 24 e hipotenusa 10, diámetro de la circunferencia. El otro vértice aporta como máximo un triángulo de base 10 y altura 5: área 25.

d) Ninguna opción: el mínimo es 0, alcanzado en $x = 8$. El dominio es [6, 8] y la diferencia de los radicandos es $48 - 6x \geq 0$.

8.12 **a)** Deja de tener pérdidas a los 2 años; desde entonces las ganancias son positivas.

b) Sí. $f'(t) = 8/(t + 2)^2 > 0$ para $t \geq 0$.

c) Tienden a 2 centenas de miles de euros: 200 000 €. Es un límite que no se alcanza en tiempo finito.

8.13 **a)** Para usar la información dada se exige $-8 < 2x - x^2 < 8$, equivalente a $-2 < x < 4$.

b) La función interior $2x - x^2$ crece hasta $x = 1$ y decrece después. Por composición de funciones crecientes, g es creciente en $(-2, 1]$ y decreciente en $[1, 4)$. No hace falta suponer que f sea derivable.

8.14 Es la rapidez de variación de la aceleración con el tiempo: $J(t) = a'(t)$. Si la posición se mide en metros y el tiempo en segundos, su unidad es m/s^3.

8.15 Al iniciar o soltar un frenado, al aumentar progresivamente el acelerador o al arrancar un ascensor cambia la aceleración. Ese cambio produce sobreaceleración; mantener una aceleración constante da jerk nulo.

8.16 $J(t) = a'(t) = v''(t) = s'''(t)$.

8.17 $J = a' = 0$ implica aceleración constante en ese intervalo. Puede ser positiva, negativa o cero; jerk nulo no implica por sí solo velocidad constante.

8.18 **a)** $v(t) = s'(t) = -6t - 2$.

b) $a(t) = v'(t) = -6$.

c) $J(t) = a'(t) = 0$.