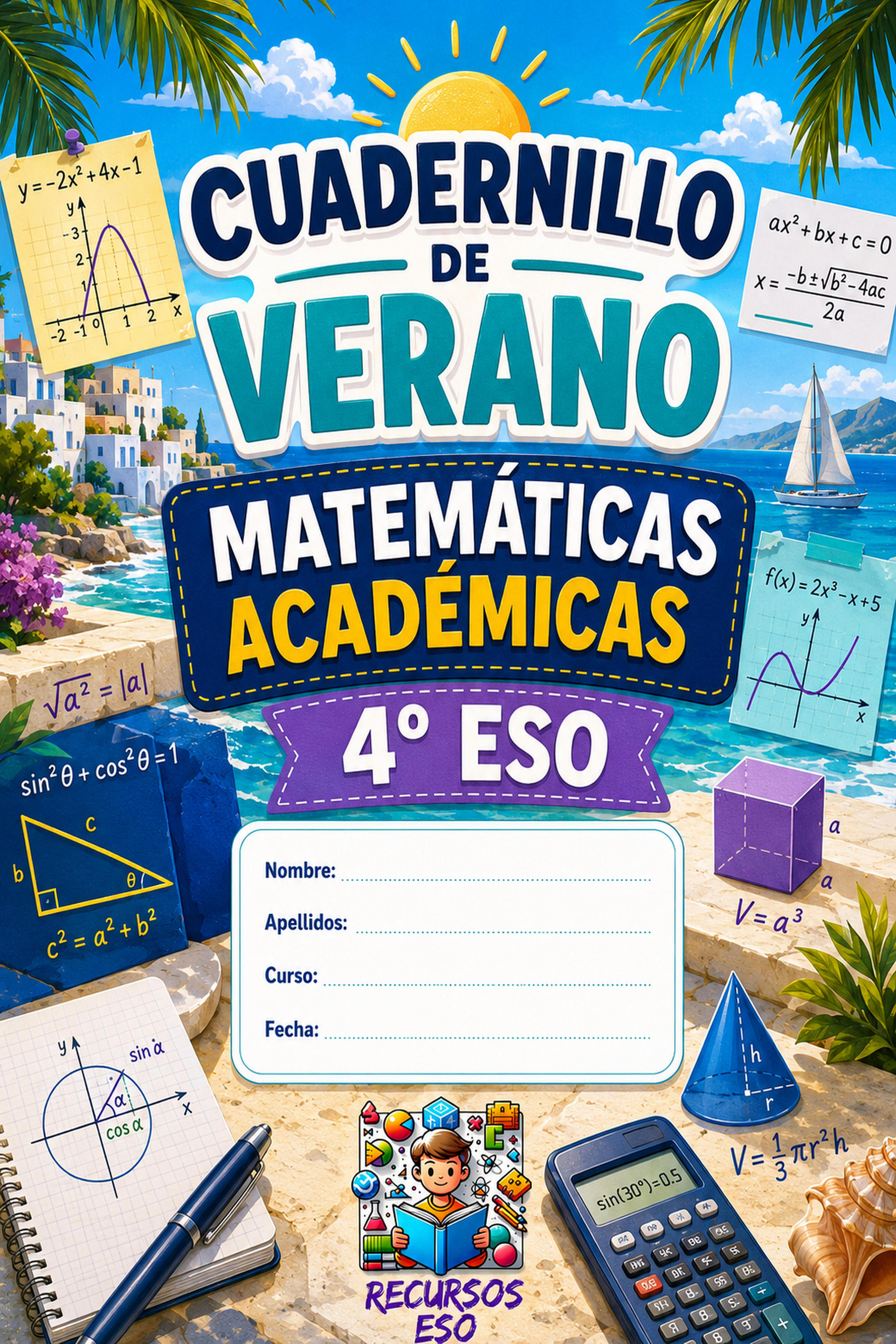




CUADERNILLO DE VERANO

MATEMÁTICAS ACADÉMICAS

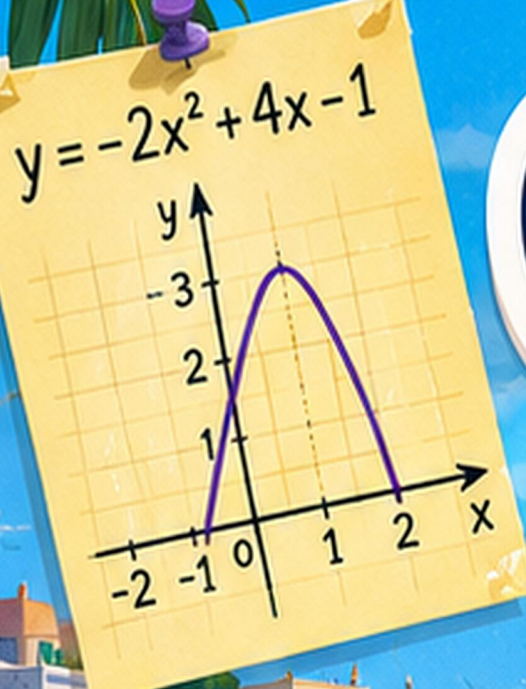
4º ESO

Nombre:

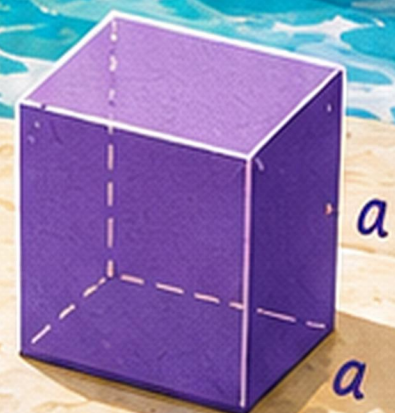
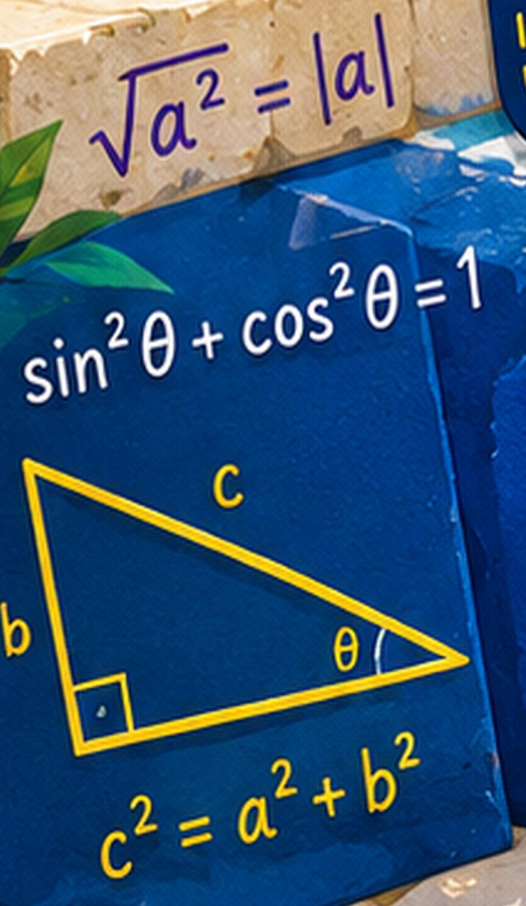
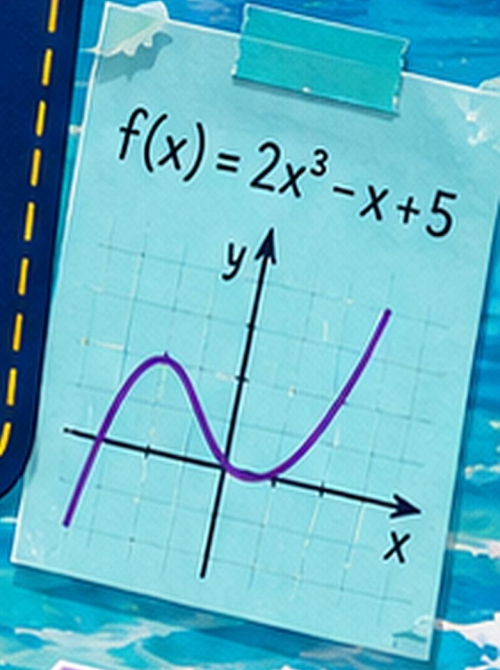
Apellidos:

Curso:

Fecha:



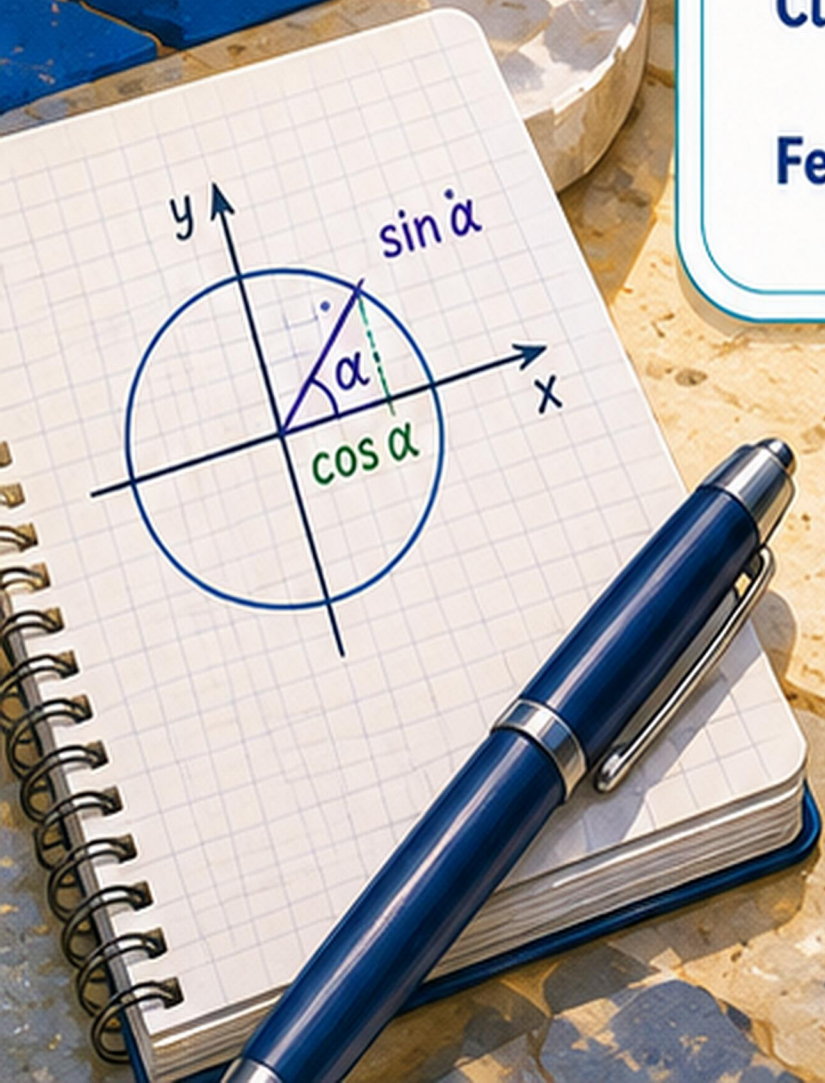
$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



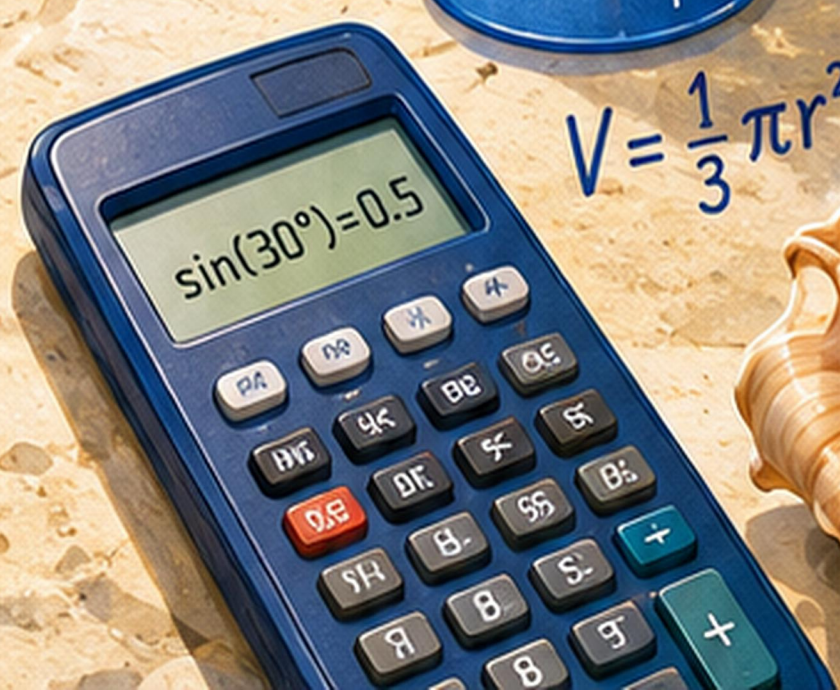
$$V = a^3$$



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



RECURSOS
ESO





Índice del cuadernillo

Matemáticas académicas · 4.º ESO



1		Números reales e intervalos Irracionales, recta real, valor absoluto, errores	pág. 3
2	★	Potencias y radicales Exponente fraccionario, simplificar, racionalizar	pág. 6
3		Polinomios: Ruffini y teorema del resto División, raíces, factorización	pág. 8
4	Aa	Fracciones algebraicas Simplificación y operaciones	pág. 10
5		Ecuaciones bicuadradas, radicales y racionales Cambio de variable, comprobación	pág. 12
6		Sistemas lineales y no lineales Reducción, sistemas de 2.º grado	pág. 15
7		Inecuaciones De 1.er y 2.º grado, intervalos solución	pág. 17
8	★	Trigonometría I: razones Seno, coseno, tangente y ángulos notables	pág. 19
9		Trigonometría II: resolución de triángulos Alturas y distancias	pág. 21
10		Geometría analítica Vectores, punto medio, rectas	pág. 23
11	★	Funciones y sus características Dominio, TVM, simetrías	pág. 25
12		Funciones elementales Parábolas, hipérbolas, exponenciales	pág. 27
13		Estadística Media y desviación con frecuencias, cuartiles	pág. 30
14	Aa	Combinatoria Variaciones, permutaciones, combinaciones	pág. 32
15		Probabilidad Condicionada, contingencia, compuesta	pág. 34
16	★	Juegos matemáticos Escape room final, sudoku, kakuro, laberinto	pág. 37
17		Repaso final acumulativo Problemas que mezclan todas las secciones	pág. 42

CONSEJO: Este es el cuadernillo de cierre de la ESO: 16 secciones con más de 40 páginas de ejercicios que repasan todo 4.º de académicas, la base directa de Bachillerato. Radicales, Ruffini, trigonometría, geometría analítica, combinatoria y probabilidad condicionada. ¡Los juegos también son de nivel final!



¿Cómo uso este cuadernillo?

Lee esto antes de empezar



Este cuadernillo repasa a fondo **Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4.º de ESO**. Es el más extenso de la colección: cada sección incluye teoría esencial y una batería amplia de ejercicios de técnica, problemas contextualizados, retos de razonamiento y comprobación de soluciones. En trigonometría puedes usar la calculadora científica cuando se indique. El solucionario completo está al final.



Álgebra completa

Ruffini, fracciones algebraicas, bicuadradas, sistemas no lineales e inecuaciones.



Trigonometría

Razones, ángulos notables y resolución de triángulos con problemas reales.



Datos y azar

Combinatoria, probabilidad condicionada y estadística con dispersión.

Los colores de cada sección:

Color	¿Qué encontrarás?
Rojo	Números reales, potencias y radicales
Morado	Álgebra: polinomios, fracciones, ecuaciones, sistemas, inecuaciones
Rojo teja claro	Trigonometría y geometría analítica
Verde azulado	Funciones, estadística, combinatoria y probabilidad
Coral	Juegos matemáticos

RECUERDA: Consejo de cara a Bachillerato: en cada ejercicio, escribe TODOS los pasos y comprueba las soluciones sustituyendo. En las ecuaciones con radicales es obligatorio: ¡a veces aparecen soluciones falsas!



RECUERDA: Los **reales (R)** incluyen racionales (fracciones: decimales exactos o periódicos) e **irracionales** (decimales infinitos NO periódicos: $\sqrt{2}$, π , el número de oro). Un **intervalo** es un tramo de la recta real: (a, b) abierto, $[a, b]$ cerrado. El **valor absoluto** $|x|$ es la distancia al cero: $|x| < 3$ significa $-3 < x < 3$.

1 Clasifica cada número marcando **TODOS** los conjuntos a los que pertenece (N, Z, Q, R) y di si es racional o irracional.

Número	N	Z	Q	R	¿Racional o irracional?
$3/4$					
$\sqrt{2}$					
-5					
$2,777... (= 2,(7))$					
π					
$\sqrt{9}$					

2 Verdadero o falso. Corrige las falsas.

	Afirmación	V / F	Corrección si es falsa
a	Todo número decimal periódico es racional		
b	La suma de dos irracionales es siempre irracional		
c	$\sqrt{5}$ es irracional, pero $\sqrt{25}$ es natural		
d	Entre dos números reales siempre hay infinitos reales		

3 Intervalos. Escribe en forma de intervalo y representa mentalmente en la recta.

Descripción	Intervalo
Números entre 2 y 5, incluido el 5 pero no el 2	
Números mayores o iguales que -1	
Números x que cumplen $ x < 3$	
Números x que cumplen $-2 \leq x < 4$	

4 Unión e intersección. Con $A = [1, 4]$ y $B = (2, 6)$, calcula.

a) $A \cap B =$ _____ b) $A \cup B =$ _____

5 Aproximaciones y errores. Tomamos $\sqrt{2} \approx 1,41$. Sabiendo que $\sqrt{2} = 1,41421356...$, calcula.

a) El error absoluto cometido (aproximado a 4 decimales).

b) El error relativo (divide el absoluto entre el valor real; en porcentaje).

c) ¿Qué aproximación es mejor: 1,41 para $\sqrt{2}$ o 3,14 para π ($\pi=3,14159...$)? Compara los errores relativos.

6 Encuentra el intruso. En cada serie hay un número que no encaja con los demás. Rodéalo y justifica.

Serie	¿Por qué no encaja?
$\sqrt{2} \cdot \pi \cdot 0,5 \cdot \sqrt{3}$	
$1/3 \cdot 0,25 \cdot 2,(7) \cdot \sqrt{7}$	

7 Ordena de menor a mayor situándolos aproximadamente en la recta real.

$\sqrt{5}$ 2 $7/3$ $2,3$ $\sqrt{4}$

8 Redondeo y cifras significativas. La población de una ciudad es 487.652 habitantes. Redondea a los millares y a las decenas de millar, y calcula el error absoluto de cada redondeo. ¿Cuál es más preciso?

9 Notación científica (repaso). Opera y expresa el resultado en notación científica.

a) $(3 \cdot 10^4) \cdot (2 \cdot 10^{-6}) =$ _____

b) $(9 \cdot 10^8) : (3 \cdot 10^5) =$ _____

10 Verdadero o falso con intervalos. Corrige las falsas.

	Afirmación	V / F	Corrección si es falsa
a	El intervalo $[2, 5]$ está contenido en $(1, 6)$		
b	El número 3 pertenece al intervalo $(3, 7)$		
c	$(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ es todo $\mathbb{R}$ menos el 2		

11 Entre irracionales. Escribe tres números racionales comprendidos entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ (usa que $\sqrt{2} \approx 1,414$ y $\sqrt{3} \approx 1,732$).

12 Valor absoluto como distancia. Resuelve $|x - 2| \leq 3$ interpretándolo como «números cuya distancia al 2 es como mucho 3», y expresa la solución como intervalo.

13 Clasifica y sitúa. Para cada número, di si es racional o irracional y entre qué dos enteros consecutivos está.

Número	¿Racional/irracional?	Entre los enteros...
$\sqrt{7}$		
$-\sqrt{10}$		
$17/4$		

$\sqrt{4/9}$		
--------------	--	--

- 14** Cota de error. Medimos una mesa y anotamos 1,80 m, sabiendo que el error máximo del metro es de 0,5 cm. a) Da una cota del error absoluto. b) Calcula la cota del error relativo en porcentaje.



RECUERDA: Exponente fraccionario: $a^{(m/n)}$ = raíz n-ésima de a^m ($a^{(1/2)} = \sqrt{a}$). **Simplificar radicales:** extrae los factores cuyo exponente alcance el índice: $\sqrt{8} = \sqrt{(4 \cdot 2)} = 2\sqrt{2}$. Solo se suman radicales **semejantes** (mismo índice y radicando): $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$. **Racionalizar:** quita raíces del denominador multiplicando por la raíz o por el conjugado.

1 Forma exponencial $\leftrightarrow$ radical. Completa la tabla.

Forma radical	Forma exponencial
$\sqrt{a}$	
Raíz cúbica de a^2	
_____	$a^{(3/4)}$
_____	$5^{(1/3)}$

2 Simplifica extrayendo factores del radical.

a) $\sqrt{8} =$ _____ b) $\sqrt{75} =$ _____ c) $\sqrt{72} =$ _____ d) $\sqrt{180} =$ _____

3 Suma y resta de radicales. Reduce a radicales semejantes y opera.

a) $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - \sqrt{3} =$ _____

b) $\sqrt{50} - \sqrt{18} =$ _____

c) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{3} =$ _____

4 Producto y cociente. Calcula y simplifica.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} =$ _____ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} =$ _____ c) $\sqrt{32} : \sqrt{2} =$ _____

5 Racionaliza los denominadores.

a) $1/\sqrt{2} =$ _____ b) $6/\sqrt{3} =$ _____

c) $1/(\sqrt{5} - 2) =$ _____ (multiplica por el conjugado)

6 Encuentra el error. Paula ha escrito: « $\sqrt{9} + \sqrt{16} = \sqrt{25} = 5$ ». Calcula el valor correcto de $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ y explica el fallo.

7 Problema con radicales. Resuelve dejando el resultado en forma de radical simplificado y su valor aproximado.

Problema

Un parque cuadrado tiene 16 m de lado. Se quiere cruzar en diagonal, en línea recta. a) Expresa la longitud de la diagonal como radical simplificado. b) ¿Cuántos metros se ahorran respecto a bordear dos lados? (Aproxima $\sqrt{2} \approx 1,414$.)

- 8** Interés compuesto. Depositas 1.000 € al 10% anual compuesto (cada año se aplica el 10% sobre el total acumulado). a) Escribe la fórmula del capital tras t años. b) ¿Cuánto habrá tras 3 años? c) ¿Y con interés simple? Compara.

- 9** Más radicales. Simplifica y opera.

a) $\sqrt{20} =$ _____ b) $\sqrt{45} =$ _____ c) $\sqrt{20} + \sqrt{45} =$ _____ d) $\sqrt{(9/4)} =$ _____

- 10** Exponentes fraccionarios. Calcula el valor exacto.

a) $27^{(1/3)} =$ _____ b) $16^{(3/4)} =$ _____ c) $4^{(1/2)} \cdot 4^{(3/2)} =$ _____

- 11** Cuadrados de radicales. Calcula.

a) $(2\sqrt{3})^2 =$ _____ b) $(3\sqrt{2})^2 =$ _____ c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} =$ _____

- 12** Problema. Un cuadrado tiene 50 cm^2 de área. Expresa su lado como radical simplificado y aproxima con dos decimales.

- 13** Racionaliza y simplifica.

a) $10/\sqrt{5} =$ _____ b) $\sqrt{3}/\sqrt{2} =$ _____ (racionaliza)

c) $4/(3 - \sqrt{5}) =$ _____ (conjugado)

- 14** Logaritmos (introducción). Recuerda que $\log_2 8$ pregunta «¿a qué exponente elevo 2 para obtener 8?». Calcula.

a) $\log_2 8 =$ _____ b) $\log_{10} 1000 =$ _____ c) $\log_5 25 =$ _____ d) $\log_2 1 =$ _____



RECUERDA: La **regla de Ruffini** divide un polinomio entre $(x - a)$ usando solo los coeficientes. **Teorema del resto:** el resto de dividir $P(x)$ entre $(x - a)$ es $P(a)$. **Teorema del factor:** si $P(a) = 0$, entonces $(x - a)$ es un factor. Las raíces enteras están entre los divisores del término independiente.

1 Divide por Ruffini $(x^3 - 3x^2 + x + 5) : (x - 2)$ e indica cociente y resto.

2 Teorema del resto. SIN dividir, calcula el resto de estas divisiones.

a) $(x^3 - 2x^2 + 3) : (x - 1)$

b) $(x^4 - 5x + 2) : (x + 1)$

3 ¿Es raíz? Comprueba con el teorema del factor si los valores dados son raíces de $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

Valor	P(valor)	¿Es raíz?
$x = 1$		
$x = 2$		
$x = 3$		

4 Factoriza completamente $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ (usa las raíces del ejercicio anterior y Ruffini).

5 Factoriza $Q(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ probando raíces entre los divisores del término independiente ($\pm 1, \pm 2$).

6 Encuentra el error. Diego afirma: «El resto de dividir $x^3 + x$ entre $(x + 2)$ es $P(2) = 10$ ». ¿Qué ha confundido? Da el resto correcto.

7 Con parámetro. Halla el valor de k para que $(x - 3)$ sea un factor de $P(x) = x^2 - kx + 6$ (pista: impón $P(3) = 0$).

8 Identidades notables (repaso exprés). Desarrolla o factoriza.

a) $(2x + 3)^2 =$ _____ b) $(x - 5)^2 =$ _____

c) $9x^2 - 25 =$ _____ d) $x^2 - 12x + 36 =$ _____

9 Otra división con Ruffini. Divide $(x^3 + x^2 - 5x + 3) : (x - 1)$ y factoriza completamente el polinomio.

10 Todas las raíces. Halla las raíces enteras de $P(x) = x^3 - 7x + 6$ probando entre los divisores de 6 ($\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$).

11 Con parámetro (otro). Halla k para que el resto de dividir $(x^2 + kx + 2) : (x - 1)$ sea 5.

12 Construye el polinomio. Escribe un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean 0, 1 y -2, y desarróllalo.

13 Factorización completa (reto). Factoriza $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ (pista: es bicuadrada; halla las raíces y escribe los cuatro factores).

RECUERDA: Una **fracción algebraica** es un cociente de polinomios. Para **simplificar**: factoriza numerador y denominador y cancela factores comunes. Para **sumar**: reduce a común denominador (mcm de los denominadores). Producto: en línea; cociente: en cruz. ¡Nunca canceles sumandos, solo factores!

1 Simplifica factorizando antes.

a) $(x^2 - 4) / (x^2 + 4x + 4) =$ _____

b) $(x^2 - x) / (x^2 - 1) =$ _____

c) $(3x + 6) / (x^2 + 2x) =$ _____

2 Producto y cociente. Opera y simplifica.

a) $(x/3) \cdot (6/x^2) =$ _____

b) $((x+1)/x) : ((x+1)/5) =$ _____

3 Suma y resta. Reduce a común denominador y opera.

a) $1/x + 2/(x+1) =$ _____

b) $2/(x-1) - 1/x =$ _____

4 Encuentra el error. Sara ha simplificado así: $(x+3)/(x+5) = 3/5$, cancelando las x». ¿Por qué es incorrecto? Compruébalo con $x = 1$.

5 Valores prohibidos. Indica para qué valores de x NO está definida cada fracción (denominador cero).

Fracción	Valores prohibidos
$5/(x-2)$	
$(x+1)/(x^2-9)$	
$3/(x^2+1)$	

6 Simplifica con Ruffini. Simplifica $(x^3 - x^2 - 4x + 4)/(x^2 - 3x + 2)$ usando la factorización de la sección anterior $(x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x-2)(x+2))$.

7 Une con flechas cada fracción con su forma simplificada.

Fracción	Simplificada
----------	--------------

1. $(x^2-1)/(x+1)$	A. $x/2$
2. $(2x)/(x^2)$	B. $x-1$
3. $(x^2+x)/(2x+2)$	C. $2/x$
4. $(x^2-2x)/(2x-4)$	D. $x/2$

Soluciones: 1 ____ 2 ____ 3 ____ 4 ____ (dos comparten respuesta equivalente)

8 Producto con factorización. Opera y simplifica al máximo: $((x^2 - 9)/(x + 3)) \cdot (2/(x - 3))$.

9 ¿Identidad o ecuación? Clasifica cada igualdad: identidad (cierta para TODO x) o ecuación (cierta solo para algunos valores). Justifica.

Igualdad	¿Identidad o ecuación?
$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$	
$x + 1 = 3$	
$(x+2)(x-2) = x^2 - 4$	

10 Simplifica en un paso. Simplifica $(5x + 5)/(x^2 + x)$.

11 Ecuación con fracción algebraica. Resuelve $(x + 2)/x = 2$ indicando el valor prohibido.

12 Suma de tres fracciones algebraicas. Opera y simplifica: $1/x + 1/(x+1) + 1/(x(x+1))$.



RECUERDA: Bicuadradas ($ax^4+bx^2+c=0$): cambio $t = x^2$; cada t positiva da dos soluciones $x = \pm\sqrt{t}$. **Con radicales:** aísla la raíz, eleva al cuadrado y **COMPRUEBA** (pueden salir soluciones falsas). **Racionales:** multiplica por el denominador y descarta valores que lo anulen. Grado superior: factoriza e iguala cada factor a cero.

1 Bicuadradas. Resuelve con el cambio $t = x^2$.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

2 Con radicales. Resuelve y COMPRUEBA las soluciones en la ecuación original.

$\sqrt{x+3} = x-3$

3 Racionales. Resuelve (indica los valores prohibidos).

a) $(x+1)/(x-1) = 2$

b) $2/x + 3 = 5$

4 Grado superior por factorización. Resuelve.

a) $x^3 - 4x = 0$

b) $(x-1)(x+3)(2x-6) = 0$

5 Encuentra el error. Al resolver $\sqrt{x} = -4$, Elsa eleva al cuadrado y responde « $x = 16$ ». Comprueba y explica qué ha pasado.

- 6 Problema. El área de un marco cuadrado (lado x) más la de otro cuadrado cuyo lado mide 2 unidades menos suman 100 cm^2 . Plantea $x^2 + (x-2)^2 = 100$ y resuélvela. Interpreta las soluciones.

- 7 Otra bicuadrada. Resuelve $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

- 8 Otro radical. Resuelve $\sqrt{2x + 1} = 3$ y comprueba.

- 9 Ecuación racional. Resuelve $1/(x-1) + 1/(x+1) = 1$ indicando los valores prohibidos.

- 10 Ecuación de grado 4 factorizable. Resuelve $x^4 - 8x^2 = 0$ sacando factor común.

REPASO: Problemas de consolidación: combina lo aprendido y comprueba siempre las soluciones.

- 11 Problema de áreas. El lado de un cuadrado se aumenta en 3 cm y su área se convierte en 64 cm^2 . Plantea una ecuación de segundo grado, resuélvela y da la medida del lado original.

- 12 Problema de velocidad. Un tren recorre 240 km. Si fuera 20 km/h más rápido, tardaría 1 hora menos. Plantea la ecuación (tiempo = espacio/velocidad) y halla su velocidad. Comprueba la solución.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



RECUERDA: Sistemas **lineales**: sustitución, igualación o reducción. Sistemas **no lineales** (con x^2 , $x \cdot y \dots$): despeja en la ecuación lineal y sustituye en la otra; suelen salir DOS soluciones (recta que corta a una curva en dos puntos). Comprueba siempre las parejas (x, y) .

1 Repaso lineal por reducción. Resuelve.

$$3x + 2y = 7 ; 5x - 2y = 1$$

2 Con producto. Dos números suman 7 y su producto es 12. Plantea el sistema $x+y=7$, $x \cdot y=12$ y resuélvelo por sustitución.

3 Recta y circunferencia. Resuelve el sistema.

$$x^2 + y^2 = 25 ; x + y = 7$$

4 Problema geométrico. Un rectángulo tiene 28 cm de perímetro y 48 cm^2 de área. Plantea un sistema y halla sus lados.

5 Interpreta. Sin resolver, razona cuántas soluciones puede tener el sistema formado por la parábola $y = x^2$ y una recta horizontal $y = k$, según el valor de k (positivo, cero o negativo).

6 Inventa. Escribe un problema realista que se resuelva con el sistema $x + y = 20$, $x \cdot y = 96$, y resuélvelo.

7 Recta y parábola como sistema. Resuelve el sistema $y = x^2$; $y = 2x + 3$ e interpreta las soluciones.

8 Verdadero o falso. Corrige las falsas.

	Afirmación	V / F	Corrección si es falsa
a	Un sistema lineal puede tener exactamente dos soluciones		
b	Un sistema no lineal (recta y circunferencia) puede tener dos soluciones		
c	Si al resolver llegas a $0 = 5$, el sistema no tiene solución		

9 Problema de dos cifras. Un número de dos cifras suma 9 entre ellas. Si se invierten las cifras, el número aumenta en 9. Halla el número planteando un sistema.

10 Recta y circunferencia (otra). Resuelve el sistema $x^2 + y^2 = 10$; $y = x + 2$.

REPASO: Problemas de consolidación: plantea el sistema con cuidado y comprueba.

11 Mezcla de monedas. En una hucha hay monedas de 1 € y de 2 €, en total 40 monedas que suman 62 €. Plantea un sistema y averigua cuántas hay de cada clase. Comprueba el resultado.

12 El rectángulo de oro. Un rectángulo tiene un perímetro de 34 cm y una diagonal de 13 cm. Plantea un sistema con $x+y=17$ y $x^2+y^2=169$, y halla sus lados.



RECUERDA: Las inecuaciones se resuelven como ecuaciones, PERO al multiplicar o dividir por un número **negativo** se invierte el sentido de la desigualdad. La solución es un **intervalo**. En las de **2.º grado**: halla las raíces, dibuja mentalmente la parábola y decide dónde es positiva o negativa.

1 De primer grado. Resuelve y expresa la solución como intervalo.

a) $2x - 3 < 5$

b) $-3x + 1 \leq 7$ (¡ojo al signo!)

c) $5 - 2x > x - 4$

2 De segundo grado. Resuelve estudiando el signo de la parábola.

a) $x^2 - 5x + 6 > 0$

b) $x^2 - 4 \leq 0$

3 Comprueba. ¿Es $x = 0$ solución de $x^2 - 5x + 6 > 0$? ¿Y $x = 2,5$? Verifícalo sustituyendo y relaciónalo con el ejercicio anterior.

4 Problema con inecuación. Plantea y resuelve.

Problema

Una empresa de alquiler cobra 40 € fijos más 0,25 € por kilómetro. Otra cobra 25 € fijos más 0,40 € por kilómetro. ¿A partir de cuántos kilómetros es más barata la primera?

5 Traduce y resuelve. «El triple de un número menos 5 no supera 16.» Escribe la inecuación, resuélvela y da tres valores que la cumplan.

- 6 Encuentra el error. Al resolver $-2x > 10$, Iván escribe « $x > -5$ ». Explica el fallo, corrígelo y comprueba con un valor.

- 7 Batería de inecuaciones. Resuelve y expresa en intervalos.

a) $4x + 2 > 2x + 10$

b) $x/2 - 1 \leq 3$

c) $x^2 > 9$

- 8 Problema de la nota media. En dos exámenes has sacado 5 y 3. ¿Qué nota x necesitas en el tercero para que la media de los tres sea al menos 6? Plantea la inecuación e interpreta el resultado.

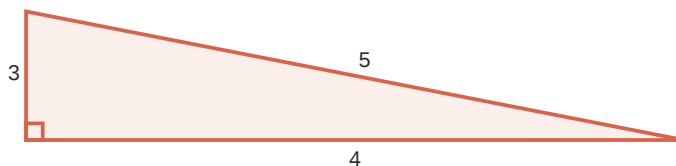
- 9 Inecuación de segundo grado (otra). Resuelve $x^2 - x - 6 < 0$ estudiando el signo de la parábola y expresa la solución como intervalo.

- 10 Sistema de inecuaciones. Halla los valores de x que cumplen A LA VEZ $x + 1 > 0$ y $2x - 6 \leq 0$. Expresa la solución como intervalo.



RECUERDA: En un triángulo rectángulo: $\text{sen } \alpha = \text{opuesto}/\text{hipotenusa}$; $\text{cos } \alpha = \text{contiguo}/\text{hipotenusa}$; $\text{tan } \alpha = \text{opuesto}/\text{contiguo}$. **Relación fundamental:** $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$; además $\text{tan } \alpha = \text{sen } \alpha / \text{cos } \alpha$. Notables: $\text{sen } 30^\circ = \text{cos } 60^\circ = 1/2$; $\text{sen } 45^\circ = \text{cos } 45^\circ = \sqrt{2}/2$; $\text{sen } 60^\circ = \text{cos } 30^\circ = \sqrt{3}/2$; $\text{tan } 45^\circ = 1$.

- 1 Del triángulo a las razones. En el triángulo rectángulo de la figura (catetos 3 y 4, hipotenusa 5), calcula las tres razones del ángulo α (el opuesto al cateto 3).



α es el ángulo inferior derecho

- 2 Relación fundamental. Si $\text{sen } \alpha = 0,6$ (α agudo), calcula $\text{cos } \alpha$ y $\text{tan } \alpha$ SIN hallar el ángulo.

- 3 Completa la tabla de los ángulos notables (con radicales).

	30°	45°	60°
sen			
cos			
tan			

- 4 Verdadero o falso. Corrige las falsas.

	Afirmación	V / F	Corrección si es falsa
a	El seno de un ángulo agudo siempre es menor que 1		
b	$\text{sen } 30^\circ + \text{sen } 60^\circ = \text{sen } 90^\circ$		
c	La tangente puede valer más que 1		
d	Si $\text{sen } \alpha = \text{cos } \alpha$, entonces $\alpha = 45^\circ$		

- 5 Calculadora. Obtén con la calculadora (2 decimales).

a) $\text{sen } 25^\circ =$ _____ b) $\text{cos } 72^\circ =$ _____ c) $\text{tan } 55^\circ =$ _____

d) El ángulo α tal que $\text{tan } \alpha = 0,9 \rightarrow \alpha =$ _____

- 6 Encuentra el error. Marta afirma: « $\text{sen } \alpha = 1,25$ en mi triángulo». Sin ver el triángulo, ¿cómo sabes que se ha equivocado?

7 De coseno al resto. Si $\cos \alpha = 5/13$ (α agudo), calcula $\sin \alpha$ y $\tan \alpha$ con la relación fundamental.

8 Con valores exactos. Calcula usando la tabla de ángulos notables (sin calculadora).

a) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$ b) $\tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

c) $\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

9 Ángulos complementarios. Sabiendo que $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$, completa: a) $\sin 60^\circ = \cos \underline{\hspace{1cm}}$; b) $\cos 25^\circ = \sin \underline{\hspace{1cm}}$; c) si $\sin \alpha = 0,4$, ¿cuánto vale $\cos(90^\circ - \alpha)$?

10 Halla el ángulo. Con la calculadora, obtén el ángulo agudo α en cada caso (redondea a grados).

a) $\sin \alpha = \sqrt{3}/2 \rightarrow \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$ b) $\tan \alpha = 1 \rightarrow \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$ c) $\cos \alpha = 1/2 \rightarrow \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$

REPASO: Problemas de consolidación: aplica las razones y la relación fundamental.

11 Triángulo completo. En un triángulo rectángulo, un cateto mide 8 cm y el ángulo opuesto a ese cateto es 40° . a) Calcula la hipotenusa ($\sin 40^\circ \approx 0,643$). b) Calcula el otro cateto (usa Pitágoras o $\cos/\tan$). c) Halla el otro ángulo agudo.

12 Verifica una identidad. Comprueba, con $\alpha = 30^\circ$, que se cumple $\sin \alpha / \cos \alpha = \tan \alpha$ sustituyendo los valores exactos.



RECUERDA: Para resolver un triángulo rectángulo basta conocer un lado y otro dato (otro lado o un ángulo agudo). Elige la razón que conecte lo que sabes con lo que buscas: opuesto $\leftrightarrow$ sen o tan; contiguo $\leftrightarrow$ cos o tan. Los dos ángulos agudos suman 90° . Puedes usar calculadora.

- 1 La altura del edificio. Desde un punto a 50 m de la base de un edificio se ve su parte más alta bajo un ángulo de 30° . Calcula la altura (usa $\tan 30^\circ = \sqrt{3}/3 \approx 0,577$).
- 2 La escalera. Una escalera de 6 m se apoya en una pared formando 60° con el suelo. a) ¿A qué altura llega? b) ¿A qué distancia de la pared está su base? (Usa valores exactos: $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$, $\cos 60^\circ = 1/2$.)
- 3 Resolver el triángulo. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 10 cm y un ángulo agudo 30° . Calcula los dos catetos y el otro ángulo.
- 4 El ángulo de la rampa. Una rampa salva un desnivel de 2 m con una base horizontal de 8 m. a) Calcula la tangente del ángulo de inclinación. b) Obtén el ángulo con la calculadora. c) ¿Cumple la normativa de accesibilidad si el máximo permitido es 6° ?
- 5 Problema de doble medida. Desde la orilla, el ángulo hacia lo alto de un faro es de 45° . La distancia horizontal al faro es de 22 m. a) ¿Qué altura tiene el faro? b) Si retrocedes hasta que el ángulo sea 30° , ¿a qué distancia estás? ($\tan 30^\circ \approx 0,577$).
- 6 Elige la razón adecuada. Para cada situación, indica qué razón usarías (sen, cos o tan) y por qué, sin resolver.

Situación (triángulo rectángulo)	Razón y por qué
Conozco la hipotenusa y el ángulo; busco el cateto opuesto	
Conozco los dos catetos; busco el ángulo	
Conozco el cateto contiguo y el ángulo; busco la hipotenusa	

- 7 La cometa. El hilo de una cometa mide 50 m y forma 60° con el suelo. ¿A qué altura vuela la cometa? ($\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$.) ¿Y si el ángulo bajara a 30° ?

- 8 Diseña tú el problema. Inventa un problema real que se resuelva con la tangente de un ángulo (altura inaccesible, rampa, sombra...), resuélvelo y comprueba que el resultado es razonable.

- 9 El árbol y su sombra. Un árbol proyecta una sombra de 6 m cuando los rayos del sol forman 40° con el suelo. ¿Qué altura tiene el árbol? ($\tan 40^\circ \approx 0,839$.)

- 10 Estrategia de la altura (triángulo no rectángulo). Un triángulo tiene una base de 10 cm y los ángulos en la base miden 45° y 45° . Traza la altura desde el vértice superior: por simetría cae en el punto medio. Calcula esa altura y el área.

REPASO: Problemas de consolidación: mide lo inaccesible combinando dos triángulos.

- 11 La montaña. Desde un punto se ve la cima de una montaña bajo un ángulo de 30° . Al acercarse 500 m en línea recta, el ángulo pasa a 45° . Llamando h a la altura y x a la distancia al pie desde el segundo punto: de $\tan 45^\circ$ sale $h = x$; de $\tan 30^\circ$ sale $h = (x+500) \cdot \tan 30^\circ$. Iguala y calcula h . ($\tan 30^\circ \approx 0,577$.)

- 12 La grúa. El brazo de una grúa mide 30 m y forma 55° con la vertical. ¿Qué distancia horizontal alcanza la punta desde la base? ($\sin 55^\circ \approx 0,819$.)



RECUERDA: El **vector** entre $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$; su **módulo** es $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (¡Pitágoras!). **Punto medio:** la media de las coordenadas. Recta: $y - y_0 = m(x - x_0)$. **Paralelas:** misma pendiente; **perpendiculares:** $m' = -1/m$.

1 Vectores. Dados $A(1, 2)$ y $B(4, 6)$, calcula.

a) El vector $\overrightarrow{AB}$ y su módulo.

b) El vector $\overrightarrow{BA}$. ¿Qué relación tiene con $\overrightarrow{AB}$?

2 Punto medio y distancia. Calcula.

a) El punto medio del segmento de extremos $(-2, 3)$ y $(4, -1)$.

b) La distancia entre $(0, 0)$ y $(6, 8)$.

3 Ecuación de la recta. Escribe la ecuación de la recta que pasa por $(1, 2)$ con pendiente 3, en forma punto-pendiente y despejada ($y = mx + n$).

4 Recta por dos puntos. Halla la ecuación de la recta que pasa por $A(2, 1)$ y $B(4, 7)$.

5 Paralelas y perpendiculares. Dada la recta $y = 2x + 1$, escribe.

a) La paralela que pasa por $(0, -4)$.

b) La perpendicular que pasa por $(4, 3)$.

6 ¿Están alineados? Comprueba si $A(0, 1)$, $B(2, 5)$ y $C(3, 7)$ están alineados (compara pendientes o vectores).

7 Incidencia. Responde con cálculos.

a) ¿Pertenece el punto $(2, 5)$ a la recta $y = 3x - 1$?

b) Halla el punto de corte de las rectas $y = 3x - 1$ e $y = x + 3$.

8 Simétrico de un punto. Halla el simétrico de $A(1, 3)$ respecto del punto $M(4, 5)$ (pista: M es el punto medio entre A y su simétrico A').

9 Forma general. Pasa la recta $y = 2x - 3$ a la forma general $ax + by + c = 0$ y comprueba si el punto $(1, -1)$ pertenece a ella.

10 El triángulo de coordenadas. Dados $A(0, 0)$, $B(3, 4)$ y $C(3, 0)$: calcula los tres lados, el perímetro, y comprueba si el triángulo es rectángulo.

11 Perpendicularidad. Comprueba si las rectas $y = 2x + 1$ e $y = -x/2 + 4$ son perpendiculares y explica cómo lo sabes por sus pendientes.

12 Punto medio y vértice. Los puntos $A(1, 2)$ y $C(7, 6)$ son vértices opuestos de un rectángulo. a) Halla el centro (punto medio de la diagonal). b) Calcula la longitud de la diagonal AC .



RECUERDA: **Dominio:** valores de x válidos (cuidado con denominadores nulos y raíces de negativos). **TVM** en $[a, b]$: $[f(b) - f(a)] : (b - a)$. Simetrías: función **par** si $f(-x) = f(x)$ (simétrica respecto al eje Y); **impar** si $f(-x) = -f(x)$. Cortes: con el eje X , resuelve $f(x) = 0$; con el eje Y , calcula $f(0)$.

1 Dominios. Calcula el dominio de cada función.

Función	Dominio
$f(x) = 1/(x - 2)$	
$g(x) = \sqrt{x - 3}$	
$h(x) = x^2 - 5x$	
$i(x) = 1/(x^2 - 9)$	

2 TVM. Para $f(x) = x^2$, calcula la tasa de variación media en $[1, 4]$ y en $[-2, 0]$. Interpreta el signo de cada una.

3 Cortes con los ejes. Para $f(x) = x^2 - 9$, halla los cortes con ambos ejes.

4 Par o impar. Estudia la simetría de cada función calculando $f(-x)$.

Función	$f(-x)$	¿Par, impar o ninguna?
$f(x) = x^2$		
$g(x) = x^3$		
$h(x) = x^2 + x$		

5 Lee la gráfica. Una función definida en $[0, 8]$ cumple: crece de $(0, 1)$ a $(3, 5)$; decrece de $(3, 5)$ a $(6, 2)$; vuelve a crecer hasta $(8, 4)$. Responde.

a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Máximos y mínimos (¿absolutos o relativos?).

6 Del contexto al dominio. El precio de un viaje en taxi es $f(x) = 3 + 1,2x$ (x = kilómetros). Aunque la fórmula 'funcione' para cualquier x , ¿cuál es el dominio con sentido real? ¿Qué significa $f(0)$?

7 Continuidad en contexto. Clasifica cada función como continua o discontinua (a saltos) y explica por qué.

Situación	¿Continua o a saltos?
El coste del aparcamiento (se cobra por hora o fracción)	
La temperatura del agua al calentarse	
El precio del envío según tramos de peso	

- 8** TVM con significado. Un coche está en el km 20 a la 1 h de viaje y en el km 140 a las 3 h. Calcula la TVM de la función espacio-tiempo en $[1, 3]$ y explica qué representa físicamente.

- 9** Dominio con raíz y fracción. Halla el dominio de $f(x) = \sqrt{(x-2)/(x-5)}$.



RECUERDA: **Parábola** $y = ax^2 + bx + c$: vértice en $x = -b/(2a)$. **Proporcionalidad inversa** $y = k/x$: hipérbola con asíntotas en los ejes. **Exponencial** $y = a^x$ ($a > 1$ creciente; $0 < a < 1$ decreciente): pasa siempre por $(0, 1)$ y crece más deprisa que cualquier recta.

1 La parábola completa. Para $y = -x^2 + 2x + 3$, calcula.

a) El vértice. ¿Es máximo o mínimo? ¿Por qué?

b) Los cortes con el eje X y con el eje Y.

c) El eje de simetría.

2 Tabla y esbozo. Completa la tabla de $y = -x^2 + 2x + 3$ y esboza la parábola a mano.

x	-1	0	1	2	3
y					

3 Proporcionalidad inversa. Para $y = 4/x$, completa la tabla, indica su dominio y sus asíntotas.

x	-4	-2	-1	1	2	4
y						

4 Exponencial. Para $y = 2^x$, completa la tabla y responde.

x	-2	-1	0	1	2	3
y						

a) ¿Por qué punto pasan TODAS las funciones $y = a^x$? ¿Corta alguna vez al eje X?

5 Crecimiento exponencial real. Un cultivo tiene 500 bacterias y se duplica cada hora: $N = 500 \cdot 2^t$. a) ¿Cuántas hay tras 4 horas? b) ¿En qué momento superan las 15.000? Pruébalo con valores enteros de t.

6 Une con flechas cada situación con su modelo funcional.

Situación	Modelo
1. Reparto de una tarta entre x personas	A. Lineal: $y = mx$
2. Altura de un balón lanzado hacia arriba	B. Exponencial: $y = a^x$
3. Coste proporcional a los kilos comprados	C. Proporcionalidad inversa: $y = k/x$
4. Población que se duplica cada año	D. Cuadrática: $y = ax^2 + bx + c$

Soluciones: 1 ____ 2 ____ 3 ____ 4 ____

7 Recta y parábola. Halla los puntos de corte entre $y = x^2$ y $y = x + 2$ e interprétalos gráficamente.

8 Función a trozos. Sea $f(x) = x + 1$ si $x < 2$, y $f(x) = 5 - x$ si $x \geq 2$. Calcula $f(0)$, $f(2)$ y $f(4)$, y estudia si la función es continua en $x = 2$ (compara el valor al que llega cada trozo).

9 Otra parábola exprés. Para $y = x^2 - 6x + 8$, halla vértice, cortes con el eje X y esboza.

10 Función exponencial decreciente. Para $y = (1/2)^x$, completa la tabla y di si crece o decrece.

x	-2	-1	0	1	2
y					

11 Comparar modelos. Una función lineal es $y = 2x$ y una cuadrática $y = x^2$. a) Complétalas para $x = 0, 1, 2, 3, 4$. b) ¿A partir de qué valor de x la cuadrática supera a la lineal? Razona.

REPASO: Problemas de consolidación: modela situaciones reales con funciones.

12 El puente parabólico. El arco de un puente sigue $y = -0,1x^2 + 2x$ (x, y en metros; x de 0 a 20). a) ¿Qué altura tiene el arco en $x = 5$? b) ¿Dónde está el punto más alto y cuánto mide? (vértice) c) ¿En qué puntos toca el suelo ($y = 0$)?

13

Interés compuesto como exponencial. Un capital de 2.000 € crece un 5% anual: $C = 2.000 \cdot 1,05^t$. a) ¿Cuánto habrá tras 2 años? b) ¿Y tras 10 años? ($1,05^{10} \approx 1,629$.)



RECUERDA: Con **tabla de frecuencias**: media = $\Sigma(xi \cdot fi) : N$; varianza = $\Sigma(xi^2 \cdot fi) : N - \text{media}^2$. **Cuartiles**: Q1, mediana (Q2) y Q3 dividen los datos ordenados en cuatro partes; el diagrama de **caja y bigotes** los dibuja. **CV** = $\sigma : \text{media}$ (para comparar dispersión entre series distintas).

- 1** Con tabla de frecuencias. Número de suspensos por estudiante en un grupo de 10: $x_i = 1, 2, 3, 4$ con $f_i = 2, 5, 2, 1$. Calcula paso a paso.

a) La media.

b) La varianza y la desviación típica σ (usa $\Sigma xi^2 \cdot fi$).

c) El coeficiente de variación.

- 2** Mediana y cuartiles. Con los datos ordenados 3, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, calcula la mediana, Q1, Q3 y el rango intercuartílico.

- 3** Caja y bigotes. Con los resultados anteriores (mín 3, Q1 5,5, mediana 7,5, Q3 10,5, máx 14), dibuja el diagrama de caja sobre una recta graduada.

- 4** Comparar distribuciones. Los tiempos (min) de dos repartidores: Alba tiene media 30 y $\sigma = 3$; Bruno tiene media 24 y $\sigma = 3$. ¿Quién es más regular en proporción? Calcula los CV y razona por qué la misma σ no significa la misma regularidad.

- 5** Análisis crítico. Un titular dice: «El sueldo medio de la empresa es de 3.000 €», pero 9 empleados cobran 1.800 € y el directivo 13.800 €. Comprueba la media, calcula la mediana y explica cuál representa mejor la situación.

- 6** Población, muestra y variables. Para el estudio «horas de sueño de los adolescentes españoles», identifica población, propón una muestra y clasifica la variable (cualitativa/cuantitativa; discreta/continua).

7 Datos agrupados. Alturas de 20 personas por intervalos: $[150, 160) \rightarrow 5$ personas; $[160, 170) \rightarrow 12$; $[170, 180) \rightarrow 3$. Calcula la media usando las marcas de clase (155, 165, 175).

8 Lee la caja. Un diagrama de caja muestra: mínimo 2, $Q1 = 4$, mediana 5, $Q3 = 7$, máximo 12. a) ¿Entre qué valores está el 50% central de los datos? b) ¿La distribución es simétrica? Razona mirando los bigotes.

9 Coeficiente de variación en decisiones. Dos inversiones tienen rentabilidad media del 8%: la A con desviación típica 2 y la B con desviación típica 5. a) Calcula el CV de cada una. b) ¿Cuál es más arriesgada? Razona.

REPASO: Problemas de consolidación: calcula todos los parámetros de una distribución.

10 Estudio completo. Las puntuaciones de 10 jueces a una actuación son: 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 8. Calcula paso a paso: a) la media; b) la moda y la mediana; c) el rango; d) la desviación típica (usa $\sum x_i^2$).

11 Compara dos grupos. Grupo A: media 7, $\sigma = 1$. Grupo B: media 7, $\sigma = 2,5$. a) ¿Qué grupo es más homogéneo? b) Calcula el CV de cada uno y coméntalo.

RECUERDA: ¿Importa el orden? Sí y se usan todos → **permutaciones** $P(n) = n!$ Sí, pero solo k elementos → **variaciones** $V(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot \dots$ (k factores); con repetición: n^k . ¿No importa el orden? → **combinaciones** $C(n,k) = V(n,k) : k!$ El **factorial**: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

1 Factoriales. Calcula.

a) $5! =$ _____ b) $6! : 4! =$ _____ c) $0! =$ _____ d) $7! : (5! \cdot 2!) =$ _____

2 El podio. En una carrera con 8 corredores, ¿de cuántas formas puede quedar el podio (oro, plata y bronce)? ¿Qué herramienta usas y por qué?

3 La estantería. ¿De cuántas maneras puedes ordenar 5 libros distintos en una balda?

4 El equipo. En una clase de 10 estudiantes hay que elegir un equipo de 3 para un concurso (sin cargos: todos iguales). ¿Cuántos equipos distintos hay? ¿Cambiaría la respuesta si fueran presidente, secretario y vocal?

5 Contraseñas. Calcula cuántas contraseñas de 4 cifras (0-9) existen...

a) ...si las cifras pueden repetirse.

b) ...si deben ser todas distintas.

c) ¿Cuántas se descartan al prohibir la repetición?

6 Clasifica y calcula. Indica la herramienta (P, V, VR o C) y resuelve.

Situación	Herramienta	Resultado
Banderas de 3 franjas de colores distintos con 5 colores		
Elegir 2 sabores (distintos) entre 6 para un helado		
Resultados posibles al lanzar una moneda 5 veces		

7 Diagrama de árbol. Un menú ofrece 2 primeros, 3 segundos y 2 postres. Dibuja el árbol (o parte de él) y calcula cuántos menús distintos hay.

8 Números de tres cifras. Con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de tres cifras DISTINTAS se pueden formar? ¿Cuántos de ellos empiezan por 5?

9 Los saludos. En una reunión de 8 personas, todas se dan la mano una vez con cada una de las demás. ¿Cuántos apretones de manos hay? ¿Por qué son combinaciones y no variaciones?

10 La quiniela. En una quiniela hay que marcar 1, X o 2 en cada uno de los 14 partidos. a) ¿Cuántas columnas distintas existen? Exprésalo como potencia. b) ¿Qué herramienta combinatoria es?

11 Diagonales de un polígono. El número de diagonales de un polígono de n lados es $C(n, 2) - n$. Calcula cuántas diagonales tiene un octógono (8 lados).

REPASO: Problemas de consolidación: decide siempre si importa el orden y si hay repetición.

12 La lotería primitiva. Consiste en elegir 6 números distintos del 1 al 49 (sin importar el orden). a) ¿Cuántas combinaciones distintas existen? Plantéalo como $C(49, 6)$ (no hace falta el número exacto, deja la expresión). b) ¿Sería combinación o variación? ¿Por qué?

13 Palabras con y sin sentido. Con las letras de la palabra ROMA (4 letras distintas): a) ¿cuántas ordenaciones distintas hay? b) ¿Cuántas empiezan por vocal?



RECUERDA: Condicionada: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ — «probabilidad de A sabiendo B». En una **tabla de contingencia**, condiciona restringiéndote a la fila o columna dada. **Compuestas sin reemplazamiento:** multiplica actualizando los casos en cada extracción. Contrario: $P(\text{no } A) = 1 - P(A)$.

- 1** **Tabla de contingencia.** En un centro de 60 estudiantes: de los 30 chicos, 18 hacen deporte; de las 30 chicas, 15 hacen deporte. Completa la tabla y calcula.

	Deporte SÍ	Deporte NO	Total
Chicos	18		30
Chicas	15		30
Total			60

a) $P(\text{hacer deporte})$ al elegir un estudiante al azar.

b) $P(\text{deporte} | \text{chico})$: probabilidad de deporte SABIENDO que es chico.

c) $P(\text{chica} | \text{no deporte})$.

- 2** **Sin reemplazamiento.** De una baraja española (40 cartas, 10 de oros), sacamos dos cartas seguidas sin devolver. Calcula.

a) $P(\text{las dos de oros})$.

b) $P(\text{ninguna de oros})$.

- 3** **Experiencias independientes.** Lanzamos un dado dos veces. Calcula.

a) $P(\text{dos seises})$.

b) $P(\text{ningún seis})$.

c) $P(\text{al menos un seis})$ — usa el contrario del apartado b.

- 4** **Árbol con condicionada.** Una urna A tiene 2 bolas rojas y 1 verde; la urna B tiene 1 roja y 3 verdes. Lanzamos una moneda: si sale cara sacamos de A; si sale cruz, de B. Dibuja el árbol y calcula $P(\text{bola roja})$.

- 5 Encuentra el error. Hugo razona: « $P(A) = 0,6$ y $P(B) = 0,7$, luego $P(A \cup B) = 1,3$ ». ¿Qué propiedad de la probabilidad incumple y qué falta en su cálculo?
- 6 Combinatoria + probabilidad. En una bolsa hay papeletas con las 120 formas de ordenar las letras A, B, C, D, E (las 5! permutaciones). Si sacas una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que empiece por A?
- 7 Al menos uno. Lanzamos una moneda 3 veces. Calcula $P(\text{al menos una cara})$ usando el suceso contrario.
- 8 Probabilidad experimental. En un control de calidad se revisaron 200 tornillos y 8 salieron defectuosos.
a) Estima la probabilidad de que un tornillo sea defectuoso. b) ¿Cuántos defectuosos cabe esperar en un pedido de 5.000?
- 9 Diana y probabilidad geométrica. Una diana cuadrada de 20 cm de lado tiene un círculo central de 10 cm de radio. Si un dardo cae al azar dentro del cuadrado, ¿cuál es la probabilidad de que caiga dentro del círculo? (Área círculo = $\pi \cdot r^2$; usa $\pi \approx 3,14$.)
- 10 Tabla de contingencia (otra). En una encuesta a 60 personas, 18 son chicos que hacen deporte y en total 33 hacen deporte; hay 30 chicos. Calcula $P(\text{chico} \cup \text{deporte})$ usando $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

REPASO: Problemas de consolidación: usa árboles y el suceso contrario.

- 11 Test de dos preguntas. Un test tiene 2 preguntas con 4 opciones cada una (solo una correcta). Un estudiante responde al azar. a) $P(\text{acertar las dos})$. b) $P(\text{no acertar ninguna})$. c) $P(\text{acertar al menos una})$.
- 12 Diagnóstico médico (condicionada). Una prueba da positivo en el 90% de los enfermos y en el 20% de los sanos. En una población, el 10% está enfermo. Dibuja el árbol y calcula la probabilidad de dar positivo. ($P(+) = P(\text{enf}) \cdot 0,9 + P(\text{sano}) \cdot 0,2$.)

.....

.....

.....

.....

.....



¡A JUGAR!: Los juegos más difíciles de toda la colección: escape room con Ruffini y combinatoria, sudoku de 24 huecos, kakuro, pirámide con enteros grandes, laberinto y cuadrado mágico avanzado. Todos con solución única comprobada por ordenador. ¡Cierra la ESO jugando!



Escape room: la cámara acorazada

La cámara se abre con un código de **cuatro cifras**. Resuelve las pruebas en orden: cada una da una cifra.

PRUEBA 1

Primera cifra: la raíz cuarta de 16.

PRUEBA 2

Segunda cifra: el resto de dividir $x^3 - 2x + 1$ entre $(x - 2)$ (teorema del resto).

PRUEBA 3

Tercera cifra: el número de soluciones de la bicuadrada $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

PRUEBA 4

Cuarta cifra: $V(3,2)$, las variaciones de 3 elementos tomados de 2 en 2.

CÓDIGO DE LA CÁMARA: ____



- 1 Sudoku 6×6 (nivel final). Completa: números del 1 al 6 sin repetirse en filas, columnas ni bloques de 2×3. ¡24 huecos, el más difícil de la colección!

				3	
		4	5	6	
		5			2
3			6	1	
1				2	
					6

- 2 Kakuro 3×2. Completa con cifras del 1 al 9 (sin repetir en cada fila ni columna): cada fila y columna debe sumar lo indicado. Una celda viene dada como pista.

	Columna A	Columna B	Columna C	Suma fila
Fila 1		6		23
Fila 2				8
Suma columna	11	11	9	

- 3 Pirámide con enteros. Completa: cada casilla es la suma de las dos inferiores. Hay huecos hasta en la base.

	27			
		14		
5	8		2	
12		15	-9	11

- 4 Reto contrarreloj de 4.º. Cálculo mental en 3 minutos.

Operación	Resultado	Operación	Resultado
$\sqrt{50}$ simplificado		5!	
$\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$		C(4,2)	
$(x+3)(x-3)$		$16^{1/2}$	

- 1 Laberinto matemático. Colorea el camino desde la ENTRADA hasta la SALIDA pasando SOLO por casillas cuyo resultado sea 60. Movimientos en horizontal y vertical.

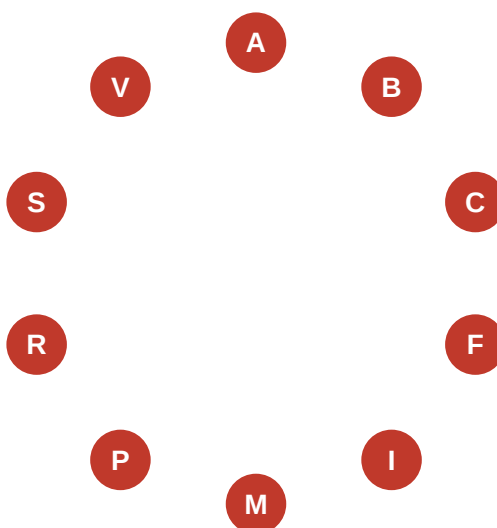
Se entra por la IZQUIERDA de la fila 2 y se sale por la DERECHA de la fila 2.

16+47	72-14	41+12	3×23	28+25	2×32
2×30	72-12	2×26	2×30	65-5	74-14
66-1	65-5	5+55	17+43	69-3	42+19
2×29	13+54	78-15	2×26	22+45	5×13

- 2 Cuadrado mágico final. Completa para que filas, columnas y diagonales sumen la constante 45.

	17	16
19		11
14	13	

PASAPALABRA FINAL · CÓMO SE JUEGA: Último rosco de la ESO: términos de 4.º. ¡Algunas letras están dentro de la palabra!



Definiciones:

A	Empieza por A: Recta a la que la gráfica se acerca sin llegar a tocarla (como los ejes en $y = 4/x$).	_____
B	Empieza por B: Ecuación de cuarto grado sin términos de grado impar; se resuelve con $t = x^2$.	_____

C	<i>Empieza por C:</i> Probabilidad _____: la de un suceso sabiendo que ha ocurrido otro.	_____
F	<i>Empieza por F:</i> $n!$: producto de todos los naturales desde n hasta 1.	_____
I	<i>Empieza por I:</i> Desigualdad algebraica cuya solución es un intervalo.	_____
M	<i>Empieza por M:</i> Longitud de un vector: se calcula con Pitágoras.	_____
P	<i>Empieza por P:</i> Ordenaciones posibles de n elementos distintos: $n!$.	_____
R	<i>Empieza por R:</i> Expresión con raíz, como $\sqrt{8}$; también da nombre a racionalizar.	_____
S	<i>Empieza por S:</i> Razón trigonométrica: cateto opuesto entre hipotenusa.	_____
V	<i>Empieza por V:</i> Segmento orientado con módulo, dirección y sentido.	_____



- 1 Criptograma final. Cada símbolo es siempre la misma cifra. Averigua su valor con las pistas (▲ es mayor que ■).

Pistas

$$\blacktriangle + \blacksquare = 10 \quad \blacktriangle \cdot \blacksquare = 21 \quad \bullet = \blacktriangle - \blacksquare$$

$$\blacktriangle = \underline{\hspace{2cm}} \quad \blacksquare = \underline{\hspace{2cm}} \quad \bullet = \underline{\hspace{2cm}}$$

- 2 Colorea según el resultado. Calcula cada casilla y coloréala según la clave: resultado $1/2 \rightarrow$ ROJO $\cdot 1 \rightarrow$ AMARILLO $\cdot 2 \rightarrow$ AZUL.

$\sin 30^\circ$	$\tan 45^\circ$	$4^{(1/2)}$
$\cos 60^\circ$	2^0	$\sqrt{4}$

- 3 Reto lógico de despedida. Un caracol quiere subir un muro de 10 metros. Cada día sube 3 metros, pero cada noche resbala 2. ¿Cuántos días tarda en llegar arriba? (Cuidado: la respuesta NO es 10. Razona día a día.)



ANTES DE EMPEZAR: Estos problemas mezclan contenidos de varias secciones, como en un examen final. Tómate tu tiempo, escribe todos los pasos y comprueba cada resultado.

- 1 **Números y radicales.** Simplifica $\sqrt{48} - \sqrt{12} + \sqrt{3}$ y racionaliza el resultado dividido entre $\sqrt{3}$.

- 2 **Álgebra.** Factoriza $x^3 - 4x^2 + x + 6$ sabiendo que $x = 2$ es raíz, y usa la factorización para resolver $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$.

- 3 **Ecuaciones.** Resuelve la bicuadrada $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$.

- 4 **Trigonometría.** Una rampa de acceso sube 1,5 m de altura con una longitud (hipotenusa) de 6 m. a) Calcula el seno del ángulo que forma con el suelo. b) Obtén el ángulo con la calculadora.

- 5 **Geometría analítica.** Dados A(-1, 2) y B(3, 4): halla el punto medio, la distancia AB y la ecuación de la recta que pasa por ambos.



6

Funciones. Para la parábola $y = x^2 - 2x - 3$: halla el vértice, los cortes con los ejes y esboza la gráfica.

7

Sistemas. Un cine vende 200 entradas en total entre adultos (8 €) y niños (5 €), recaudando 1.300 €. Plantea un sistema y averigua cuántas entradas de cada tipo se vendieron.

8

Combinatoria y probabilidad. De una bolsa con 5 bolas numeradas del 1 al 5 se extraen dos SIN reemplazamiento. a) ¿Cuántas parejas distintas hay (sin importar el orden)? b) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sumen 6?

9

Estadística. Los datos 4, 6, 6, 7, 9, 10, 12 corresponden a las horas de estudio semanales de 7 estudiantes. Calcula la media, la mediana, el rango y di si la media representa bien al grupo.

10

Reto final de la ESO. Un depósito con forma de cilindro tiene un radio de 3 m y una altura de 4 m. a) Calcula su volumen ($\pi \approx 3,14$). b) Si se llena a razón de 5 m^3 por hora, ¿cuánto tarda en llenarse? Redondea.



Solucionario

Matemáticas · 4.º ESO

Aquí tienes las soluciones de todos los ejercicios. Para los ejercicios de escritura libre se incluye una orientación de lo que se valora. ¡Recuerda usarlas solo después de intentar las actividades!

1 Números reales e intervalos

1. $3/4$: Q y R, racional. $\sqrt{2}$: solo R, irracional. -5 : Z, Q, R, racional. $2,(7)$: Q y R, racional (periódico $\rightarrow$ tiene generatriz $25/9$). π : solo R, irracional. $\sqrt[3]{9} = 3$: N, Z, Q, R, racional.
2. a) V (tiene fracción generatriz). b) F: $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$, que es racional. c) V ($\sqrt{25} = 5$). d) V (la recta real es densa).
3. $(2, 5]$; $[-1, +\infty)$; $(-3, 3)$; $[-2, 4)$.
4. a) $A \cap B = (2, 4]$. b) $A \cup B = [1, 6)$.
5. a) E.abs = $|1,41421... - 1,41| \approx 0,0042$. b) E.rel = $0,0042:1,4142 \approx 0,003 \rightarrow 0,3\%$. c) Para π : E.abs $\approx 0,0016$; E.rel $\approx 0,0005 \rightarrow 0,05\%$. Es mejor la aproximación de π (menor error relativo).
6. 1.ª serie: intruso 0,5 (racional; los demás son irracionales). 2.ª: intruso $\sqrt{7}$ (irracional; los demás son racionales).
7. $\sqrt{4} = 2$ (iguales) $< \sqrt{5} \approx 2,236 < 7/3 \approx 2,333 < 2,3?$ ¡Cuidado! $2,3 < 7/3 \approx 2,33$. Orden: $2 = \sqrt{4} < \sqrt{5} \approx 2,24 < 2,3 < 7/3 \approx 2,33$.
8. A millares: 488.000 (error 348). A decenas de millar: 490.000 (error 2.348). Es más preciso el redondeo a los millares (menor error).
9. a) $6 \cdot 10^{-2}$. b) $3 \cdot 10^3$.
10. a) V. b) F: el paréntesis excluye al 3 (intervalo abierto). c) V.
11. Ejemplos válidos: 1,42; 1,5; 1,7 (cualquier racional entre 1,4142... y 1,7320...).
12. Desde el 2, tres unidades a cada lado: $-1 \leq x \leq 5 \rightarrow [-1, 5]$.
13. $\sqrt{7}$ irracional, entre 2 y 3 (2,64). $-\sqrt{10}$ irracional, entre -4 y -3 (-3,16). $17/4 = 4,25$ racional, entre 4 y 5. $\sqrt[3]{(4/9)} = 2/3$ racional, entre 0 y 1.
14. a) Cota del error absoluto: 0,005 m. b) Error relativo $\leq 0,005:1,80 \approx 0,0028 \rightarrow 0,28\%$.

2 Potencias y radicales

1. $\sqrt{a} = a^{(1/2)}$. Raíz cúbica de $a^2 = a^{(2/3)}$. $a^{(3/4)} =$ raíz cuarta de a^3 . $5^{(1/3)} =$ raíz cúbica de 5.
2. a) $2\sqrt{2}$. b) $5\sqrt{3}$. c) $6\sqrt{2}$ ($72=36 \cdot 2$). d) $6\sqrt{5}$ ($180=36 \cdot 5$).
3. a) $6\sqrt{3}$. b) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. c) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.
4. a) $\sqrt{16} = 4$. b) $\sqrt{36} = 6$. c) $\sqrt{16} = 4$.
5. a) $\sqrt{2}/2$. b) $6\sqrt{3}/3 = 2\sqrt{3}$. c) $(\sqrt{5}+2)/((\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)) = (\sqrt{5}+2)/(5-4) = \sqrt{5} + 2$.
6. $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ (no 5). La raíz de una suma NO es la suma de las raíces: $\sqrt{(9+16)} = 5$, pero $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$.
7. a) $d = \sqrt{(16^2+16^2)} = 16\sqrt{2}$ m. b) Bordear: 32 m; diagonal $\approx 22,6$ m $\rightarrow$ se ahorran unos 9,4 m.
8. a) $C = 1.000 \cdot 1,1^t$. b) $1.000 \cdot 1,331 = 1.331$ €. c) Simple: $1.000+3 \cdot 100 = 1.300$ €. El compuesto gana 31 € más (los intereses generan intereses).
9. a) $2\sqrt{5}$. b) $3\sqrt{5}$. c) $2\sqrt{5}+3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$. d) $3/2$.

10 a) 3 (raíz cúbica de 27). b) (raíz cuarta de 16)³ = $2^3 = 8$. c) $4^2 = 16$ (se suman los exponentes: $1/2 + 3/2 = 2$).

.

11 a) $4 \cdot 3 = 12$. b) $9 \cdot 2 = 18$. c) $\sqrt{36} = 6$.

.

12 Lado = $\sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$ cm.

.

13 a) $10\sqrt{5}/5 = 2\sqrt{5}$. b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}/2 = \sqrt{6}/2$. c) $4(3+\sqrt{5})/((3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})) = 4(3+\sqrt{5})/(9-5) = 3+\sqrt{5}$.

.

14 a) 3 ($2^3=8$). b) 3 ($10^3=1000$). c) 2 ($5^2=25$). d) 0 ($2^0=1$).

.

3 Polinomios: Ruffini y teorema del resto

1. Coeficientes 1, -3, 1, 5 con a=2: bajan 1, -1, -1, resto 3. Cociente: $x^2 - x - 1$; resto: 3.

2. a) Resto = $P(1) = 1 - 2 + 3 = 2$. b) Resto = $P(-1) = 1 + 5 + 2 = 8$.

3. $P(1) = 1 - 1 - 4 + 4 = 0 \rightarrow$ Sí. $P(2) = 8 - 4 - 8 + 4 = 0 \rightarrow$ Sí. $P(3) = 27 - 9 - 12 + 4 = 10 \rightarrow$ NO.

4. Ruffini con x=1: cociente $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$. Factorización: $P(x) = (x-1)(x-2)(x+2)$.

5. $Q(1) = 1 + 2 - 1 - 2 = 0 \rightarrow$ raíz 1. Ruffini: cociente $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$. $Q(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$.

6. Dividir entre $(x+2) = (x-(-2))$ exige evaluar en $a = -2$: $P(-2) = -8 - 2 = -10$. Ha confundido el signo.

7. $P(3) = 9 - 3k + 6 = 0 \rightarrow 3k = 15 \rightarrow k = 5$. (Comprobación: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \checkmark$.)

8. a) $4x^2 + 12x + 9$. b) $x^2 - 10x + 25$. c) $(3x+5)(3x-5)$. d) $(x-6)^2$.

9. Ruffini con 1: cociente $x^2 + 2x - 3$, resto 0. $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$. Factorización: $(x-1)^2(x+3)$.

10 $P(1) = 1 - 7 + 6 = 0 \rightarrow$ raíz 1. Ruffini: cociente $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$. Raíces: 1, 2 y -3.

.

11 $P(1) = 1 + k + 2 = 5 \rightarrow k = 2$.

.

12 $P(x) = x(x-1)(x+2) = x^3 + x^2 - 2x$.

.

13 $t^2 - 5t + 4 = 0 \rightarrow t=1, t=4 \rightarrow x=\pm 1, \pm 2$. Factorización: $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$.

.

4 Fracciones algebraicas

1. a) $(x+2)(x-2)/(x+2)^2 = (x-2)/(x+2)$. b) $x(x-1)/((x+1)(x-1)) = x/(x+1)$. c) $3(x+2)/(x(x+2)) = 3/x$.

2. a) $6x/(3x^2) = 2/x$. b) $5(x+1)/(x(x+1)) = 5/x$.

3. a) $(x+1+2x)/(x(x+1)) = (3x+1)/(x(x+1))$. b) $(2x-(x-1))/(x(x-1)) = (x+1)/(x(x-1))$.

4. Solo se cancelan FACTORES, no sumandos. Con x=1: $(1+3)/(1+5) = 4/6 = 2/3 \neq 3/5$. La fracción no se puede simplificar.

5. $5/(x-2)$: $x \neq 2$. $(x+1)/(x^2-9)$: $x \neq 3$ y $x \neq -3$. $3/(x^2+1)$: ninguno (x^2+1 nunca es 0): definida para todo R.

6. Denominador: $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Fracción = $(x-1)(x-2)(x+2)/((x-1)(x-2)) = x+2$.

7. 1-B ($= (x+1)(x-1)/(x+1)$). 2-C. 3-A ($x(x+1)/(2(x+1)) = x/2$). 4-D ($x(x-2)/(2(x-2)) = x/2$). La 3 y la 4 simplifican igual: $x/2$.

8. $(x+3)(x-3) \cdot 2 : ((x+3)(x-3)) = 2$. Todo se cancela: el resultado es la constante 2.

9. 1. Identidad (notable, cierta siempre). 2. Ecuación (solo $x=2$). 3. Identidad (suma por diferencia).

10 $5(x+1) : (x(x+1)) = 5/x$.

.

11 $x \neq 0$; $x + 2 = 2x \rightarrow x = 2 \checkmark$.

.

12 Común denom. $x(x+1)$: $[(x+1) + x + 1] / (x(x+1)) = (2x+2)/(x(x+1)) = 2(x+1)/(x(x+1)) = 2/x$.

.

5 Ecuaciones bicuadradas, radicales y racionales

1. a) $t^2 - 13t + 36 = 0 \rightarrow t = 4$ y $t = 9 \rightarrow x = \pm 2$ y ± 3 (cuatro soluciones). b) $t = 1$ y $t = 4 \rightarrow x = \pm 1$ y ± 2 .

2. Elevando: $x+3 = x^2 - 6x + 9 \rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \rightarrow x = 1$ y $x = 6$. Comprobación: $x = 1 \rightarrow \sqrt{4} = 2$ pero $1 - 3 = -2 \neq 2$ (falsa). $x = 6 \rightarrow \sqrt{9} = 3$ y $6 - 3 = 3 \checkmark$. Única solución: $x = 6$.

3. a) $x \neq 1$; $x+1 = 2x-2 \rightarrow x = 3 \checkmark$. b) $x \neq 0$; $2/x = 2 \rightarrow x = 1 \checkmark$.

4. a) $x(x^2 - 4) = x(x+2)(x-2) = 0 \rightarrow x = 0, 2, -2$. b) $x = 1, -3, 3$.

5. Con $x = 16$: $\sqrt{16} = 4 \neq -4$. La ecuación NO tiene solución: una raíz cuadrada nunca es negativa. Elevar al cuadrado introdujo una solución falsa.

6. $x^2 + x^2 - 4x + 4 = 100 \rightarrow 2x^2 - 4x - 96 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 48 = 0 \rightarrow \Delta = 4 + 192 = 196 \rightarrow x = (2 \pm 14):2 \rightarrow x = 8$ (o $x = -6$, sin sentido geométrico). Lados: 8 y 6 cm ($64 + 36 = 100 \checkmark$).

7. $t^2 - 10t + 9 = 0 \rightarrow t = 1$ y $t = 9 \rightarrow x = \pm 1$ y ± 3 .

8. $2x + 1 = 9 \rightarrow x = 4$. Comprobación: $\sqrt{9} = 3 \checkmark$.

9. $x \neq 1$, $x \neq -1$. Común denom.: $(x+1) + (x-1) = (x-1)(x+1) \rightarrow 2x = x^2 - 1 \rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$ (dos soluciones válidas).

10. $x^2(x^2 - 8) = 0 \rightarrow x^2 = 0$ ($x = 0$ doble) o $x^2 = 8$ ($x = \pm 2\sqrt{2}$). Soluciones: 0, $2\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$.

.

11. $(x+3)^2 = 64 \rightarrow x+3 = 8$ (la raíz positiva) $\rightarrow x = 5$ cm. ($x+3 = -8$ daría $x = -11$, sin sentido.)

.

12. $240/v - 240/(v+20) = 1 \rightarrow 240(v+20) - 240v = v(v+20) \rightarrow 4.800 = v^2 + 20v \rightarrow v^2 + 20v - 4.800 = 0 \rightarrow \Delta = 400 + 19.200 = 19.600 \rightarrow v = (-20 \pm 140):2 = 60$ km/h. Comprobación: $240/60 = 4$ h y $240/80 = 3$ h $\checkmark$.

.

6 Sistemas lineales y no lineales

1. Sumando: $8x = 8 \rightarrow x = 1$; $3 + 2y = 7 \rightarrow y = 2$. Solución (1, 2).

2. $y = 7 - x \rightarrow x(7 - x) = 12 \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \rightarrow x = 3$ y $x = 4$. Los números son 3 y 4 (soluciones (3, 4) y (4, 3)).

3. $y = 7 - x \rightarrow x^2 + (7 - x)^2 = 25 \rightarrow 2x^2 - 14x + 49 = 25 \rightarrow 2x^2 - 14x + 24 = 0 \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \rightarrow x = 3$, $x = 4$. Soluciones: (3, 4) y (4, 3): la recta corta a la circunferencia en dos puntos.

4. $x + y = 14$ (semiperímetro); $x \cdot y = 48$. $y = 14 - x \rightarrow x^2 - 14x + 48 = 0 \rightarrow x = 6$ y $x = 8$. Lados: 6 y 8 cm.

5. $k > 0$: dos soluciones (corta en $\pm \sqrt{k}$). $k = 0$: una (toca en el vértice). $k < 0$: ninguna (la recta pasa por debajo de la parábola).

6. Respuesta libre. Ej.: 'Un huerto rectangular con semiperímetro 20 m y área 96 m^2 ' $\rightarrow x^2 - 20x + 96 = 0 \rightarrow x = 8$ y $x = 12$. Lados 8 y 12.

7. $x^2 = 2x + 3 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$ y $x = -1$. Soluciones (3, 9) y (-1, 1): los dos puntos donde la recta corta a la parábola.

8. a) F: los lineales tienen 0, 1 o infinitas (dos rectas no se cortan en exactamente 2 puntos). b) V. c) V (incompatible).

9. $d(\text{decenas}) + u(\text{unidades}) = 9$; $(10u + d) - (10d + u) = 9 \rightarrow 9u - 9d = 9 \rightarrow u - d = 1$. Con $d + u = 9$: $u = 5$, $d = 4$. El número es 45 (y al invertir, $54 = 45 + 9 \checkmark$).

10. $x^2 + (x+2)^2 = 10 \rightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = 1$ y $x = -3$. Soluciones: (1, 3) y (-3, -1).

.

11. $x + y = 40$ (n° monedas); $x + 2y = 62$ (valor). Restando: $y = 22$ monedas de 2 €, $x = 18$ de 1 €. Comprobación: $18 + 44 = 62$ € $\checkmark$.

.

- 12 De $x+y=17 \rightarrow (x+y)^2=289 \rightarrow x^2+2xy+y^2=289$; como $x^2+y^2=169 \rightarrow 2xy=120 \rightarrow xy=60$. Entonces x,y son soluciones de $t^2-17t+60=0 \rightarrow t=5$ y $t=12$. Lados: 5 y 12 cm.

7 Inecuaciones

1. a) $2x < 8 \rightarrow x < 4 \rightarrow (-\infty, 4)$. b) $-3x \leq 6 \rightarrow x \geq -2$ (cambia el sentido) $\rightarrow [-2, +\infty)$. c) $9 > 3x \rightarrow x < 3 \rightarrow (-\infty, 3)$.
2. a) Raíces 2 y 3; parábola hacia arriba, positiva fuera: $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$. b) Raíces ± 2 ; negativa o nula entre ellas: $[-2, 2]$.
3. $x=0$: $6 > 0$ ✓ sí (0 está en $(-\infty, 2)$). $x=2,5$: $6,25-12,5+6 = -0,25 < 0$ ✗ no (2,5 está entre las raíces, donde la parábola es negativa).
4. $40+0,25x < 25+0,40x \rightarrow 15 < 0,15x \rightarrow x > 100$. A partir de 100 km conviene la primera (en 100 km cuestan igual: 65 €).
5. $3x-5 \leq 16 \rightarrow 3x \leq 21 \rightarrow x \leq 7 \rightarrow (-\infty, 7]$. Valen, por ejemplo, 7, 0 y -3.
6. Al dividir entre -2 hay que INVERTIR la desigualdad: $x < -5$. Comprobación: $x=-6 \rightarrow -2 \cdot (-6)=12 > 10$ ✓; con $x=0$ (que cumpliría la respuesta de Iván): $0 > 10$ ✗.
7. a) $2x > 8 \rightarrow x > 4 \rightarrow (4, +\infty)$. b) $x/2 \leq 4 \rightarrow x \leq 8 \rightarrow (-\infty, 8]$. c) $x < -3 \cup x > 3 \rightarrow (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. ¡Ojo: no es solo $x > 3$!
8. $(5+3x)/3 \geq 6 \rightarrow 8+x \geq 18 \rightarrow x \geq 10$. Necesitas exactamente un 10: es posible pero justo al límite.
9. Raíces: $x^2-x-6=0 \rightarrow x=3$ y $x=-2$. Parábola hacia arriba: negativa ENTRE las raíces $\rightarrow (-2, 3)$.
10. $x+1 > 0 \rightarrow x > -1$; $2x-6 \leq 0 \rightarrow x \leq 3$. La intersección: $(-1, 3]$.

8 Trigonometría I: razones

1. $\sin \alpha = 3/5 = 0,6$; $\cos \alpha = 4/5 = 0,8$; $\tan \alpha = 3/4 = 0,75$.
2. $\cos^2 \alpha = 1-0,36 = 0,64 \rightarrow \cos \alpha = 0,8$. $\tan \alpha = 0,6:0,8 = 0,75$.
3. $\sin$: $1/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2$. $\cos$: $\sqrt{3}/2, \sqrt{2}/2, 1/2$. $\tan$: $\sqrt{3}/3, 1, \sqrt{3}$.
4. a) V (el cateto opuesto es menor que la hipotenusa). b) F: $1/2 + \sqrt{3}/2 \approx 1,37 \neq 1$. c) V (p. ej., $\tan 60^\circ = \sqrt{3} \approx 1,73$). d) V (para ángulos agudos).
5. a) 0,42. b) 0,31. c) 1,43. d) $\alpha = \arctan 0,9 \approx 41,99^\circ \approx 42^\circ$.
6. El seno nunca supera 1: el cateto opuesto no puede ser mayor que la hipotenusa. Habrá dividido al revés (quizá era la tangente o invirtió los lados).
7. $\sin^2 \alpha = 1 - 25/169 = 144/169 \rightarrow \sin \alpha = 12/13$. $\tan \alpha = (12/13):(5/13) = 12/5$.
8. a) $1/4 + 3/4 = 1$ (¡la relación fundamental!). b) $(\sqrt{3}/3) \cdot \sqrt{3} = 1$. c) $(\sqrt{2}/2) \cdot (\sqrt{2}/2) = 2/4 = 1/2$.
9. a) $\cos 30^\circ$. b) $\sin 65^\circ$. c) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = 0,4$.
10. a) 60° . b) 45° . c) 60° . (Son ángulos notables.)
11. a) $\sin 40^\circ = 8/h \rightarrow h = 8:0,643 \approx 12,44$ cm. b) otro cateto $= \sqrt{(12,44^2 - 8^2)} \approx \sqrt{(154,8 - 64)} \approx \sqrt{90,8} \approx 9,53$ cm. c) $90 - 40 = 50^\circ$.
12. $\sin 30^\circ / \cos 30^\circ = (1/2)/(\sqrt{3}/2) = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3 = \tan 30^\circ$ ✓.

9 Trigonometría II: resolución de triángulos

1. $h = 50 \cdot \tan 30^\circ = 50 \cdot 0,577 \approx 28,87$ m.
2. a) $h = 6 \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3} \approx 5,20$ m. b) $d = 6 \cdot \cos 60^\circ = 3$ m.
3. Cateto opuesto a 30° : $10 \cdot \sin 30^\circ = 5$ cm. Contiguo: $10 \cdot \cos 30^\circ = 5\sqrt{3} \approx 8,66$ cm. Otro ángulo: $90 - 30 = 60^\circ$.
4. a) $\tan \alpha = 2/8 = 0,25$. b) $\alpha = \arctan 0,25 \approx 14^\circ$. c) NO cumple: $14^\circ > 6^\circ$ (haría falta una base mucho más larga).

5. a) $\tan 45^\circ = 1 \rightarrow \text{altura} = \text{distancia} = 22 \text{ m}$. b) $22 = d \cdot \tan 30^\circ \rightarrow d = 22:0,577 \approx 38,1 \text{ m}$.
6. 1. Seno (opuesto = hip-sen). 2. Tangente ($\tan = \text{op}/\text{cont}$; luego $\arctan$). 3. Coseno ($\text{hip} = \text{cont}/\cos$).
7. A 60° : $h = 50 \cdot \sqrt{3}/2 = 25\sqrt{3} \approx 43,3 \text{ m}$. A 30° : $h = 50 \cdot 1/2 = 25 \text{ m}$.
8. Respuesta libre. Se valora el planteamiento correcto ($\tan = \text{opuesto}/\text{contiguo}$), la resolución y la comprobación de que la medida obtenida tiene sentido.
9. $h = 6 \cdot \tan 40^\circ \approx 6 \cdot 0,839 \approx 5,03 \text{ m}$.
10. La altura divide la base en 5 y 5. Con $\tan 45^\circ = 1 = h/5 \rightarrow h = 5 \text{ cm}$. Área = $10 \cdot 5 : 2 = 25 \text{ cm}^2$.
11. $x = (x+500) \cdot 0,577 \rightarrow x = 0,577x + 288,5 \rightarrow 0,423x = 288,5 \rightarrow x \approx 682 \text{ m}$; $h = x \approx 682 \text{ m}$ de altura.
12. Alcance horizontal = $30 \cdot \sin 55^\circ \approx 30 \cdot 0,819 \approx 24,57 \text{ m}$.

10 Geometría analítica

1. a) $AB = (3, 4)$; $|AB| = \sqrt{9+16} = 5$. b) $BA = (-3, -4)$: el opuesto de AB .
2. a) $M = ((-2+4)/2, (3-1)/2) = (1, 1)$. b) $d = \sqrt{(36+64)} = 10$.
3. $y - 2 = 3(x - 1) \rightarrow y = 3x - 1$.
4. $m = (7-1):(4-2) = 3$; $y - 1 = 3(x - 2) \rightarrow y = 3x - 5$.
5. a) misma $m=2$: $y = 2x - 4$. b) $m' = -1/2$: $y - 3 = -1/2(x - 4) \rightarrow y = -x/2 + 5$.
6. $m(AB) = 4:2 = 2$; $m(BC) = 2:1 = 2$. Misma pendiente $\rightarrow$ Sí están alineados.
7. a) $3 \cdot 2 - 1 = 5 \checkmark$ sí pertenece. b) $3x - 1 = x + 3 \rightarrow x = 2, y = 5 \rightarrow$ se cortan en $(2, 5)$ (¡el punto del apartado a!).
8. $(1+x)/2 = 4 \rightarrow x = 7$; $(3+y)/2 = 5 \rightarrow y = 7$. $A' = (7, 7)$.
9. $2x - y - 3 = 0$. Con $(1, -1)$: $2+1-3 = 0 \checkmark$ pertenece.
10. $AB = 5$; $BC = 4$; $CA = 3$. Perímetro: 12. Es rectángulo: $3^2+4^2 = 5^2$ (el ángulo recto está en C).
11. $m_1 = 2$ y $m_2 = -1/2$. Como $m_1 \cdot m_2 = 2 \cdot (-1/2) = -1 \rightarrow$ Sí son perpendiculares (el producto de pendientes es -1).
12. a) Centro = $((1+7)/2, (2+6)/2) = (4, 4)$. b) $AC = \sqrt{((7-1)^2+(6-2)^2)} = \sqrt{(36+16)} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7,21$.

11 Funciones y sus características

1. f: $\mathbb{R} - \{2\}$. g: $x \geq 3 \rightarrow [3, +\infty)$. h: todo $\mathbb{R}$ (polinomio). i: $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$.
2. $[1,4]$: $(16-1):3 = 5$ (crece de media 5 unidades por unidad de x). $[-2,0]$: $(0-4):2 = -2$ (en ese tramo la función decrece).
3. Eje X: $x^2-9=0 \rightarrow (-3, 0)$ y $(3, 0)$. Eje Y: $f(0) = -9 \rightarrow (0, -9)$.
4. $f(-x) = x^2 = f(x) \rightarrow$ PAR. $g(-x) = -x^3 = -g(x) \rightarrow$ IMPAR. $h(-x) = x^2 - x$: ni una ni otra $\rightarrow$ ninguna.
5. a) Crece en $(0,3)$ y $(6,8)$; decrece en $(3,6)$. b) Máximo absoluto en $(3, 5)$; mínimo relativo en $(6, 2)$; el mínimo absoluto está en $(0, 1)$.
6. Dominio real: $x \geq 0$ (no hay km negativos). $f(0) = 3 \text{ €}$: la bajada de bandera.
7. 1. A saltos (escalonada: sube de golpe con cada hora empezada). 2. Continua. 3. A saltos (cada tramo de peso tiene su precio).
8. $\text{TVM} = (140-20):(3-1) = 60$. Es la velocidad media del coche en ese tramo: 60 km/h.

9. La raíz exige $x \geq 2$; la fracción exige $x \neq 5$. Dominio: $[2, 5) \cup (5, +\infty)$.

12 Funciones elementales

1. a) $x = -2: (-2) = 1$; $y(1) = 4 \rightarrow$ vértice (1, 4), MÁXIMO ($a = -1 < 0$, abre hacia abajo). b) $-x^2 + 2x + 3 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$ y $x = -1$; eje Y: (0, 3). c) $x = 1$.
2. y: 0, 3, 4, 3, 0. Simetría clara alrededor de $x = 1$; pasa por los cortes (-1,0) y (3,0).
3. y: -1, -2, -4, 4, 2, 1. Dominio $\mathbb{R} - \{0\}$. Asíntotas: los dos ejes ($x = 0$ e $y = 0$). Es una hipérbola.
4. y: 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8. a) Todas pasan por (0, 1) porque $a^0 = 1$; nunca corta al eje X ($a^x > 0$ siempre): el eje X es su asíntota.
5. a) $500 \cdot 16 = 8.000$. b) $t = 5$: $16.000 > 15.000 \rightarrow$ a las 5 horas (a las 4 horas aún no: 8.000).
6. 1-C, 2-D, 3-A, 4-B.
7. $x^2 = x + 2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$ y $x = -1$. Puntos: (2, 4) y (-1, 1): la recta corta a la parábola en dos puntos.
8. $f(0) = 1$; $f(2) = 3$; $f(4) = 1$. En $x = 2$: el primer trozo llega a $2 + 1 = 3$ y el segundo vale $5 - 2 = 3 \rightarrow$ coinciden: la función ES continua en $x = 2$.
9. Vértice: $x = 3$, $y = 9 - 18 + 8 = -1 \rightarrow (3, -1)$, mínimo. Cortes: $x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x = 2$ y $x = 4$. Corte eje Y: (0, 8).
10. y: 4, 2, 1, 1/2, 1/4. DECRECIENTE (base entre 0 y 1); pasa por (0, 1).
11. a) Lineal: 0, 2, 4, 6, 8. Cuadrática: 0, 1, 4, 9, 16. b) Coinciden en $x = 0$ y $x = 2$; a partir de $x > 2$ la cuadrática crece más rápido y la supera (en $x = 3$: $9 > 6$).
12. a) $y(5) = -2,5 + 10 = 7,5$ m. b) Vértice $x = -2: (-0,2) = 10$; $y(10) = -10 + 20 = 10$ m. c) $-0,1x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(-0,1x + 2) = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = 20$ (los dos apoyos).
13. a) $2.000 \cdot 1,1025 = 2.205$ €. b) $2.000 \cdot 1,629 \approx 3.258$ €.

13 Estadística

1. a) $\sum x_i \cdot f_i = 2 + 10 + 6 + 4 = 22 \rightarrow$ media 2,2. b) $\sum x_i^2 \cdot f_i = 2 + 20 + 18 + 16 = 56 \rightarrow$ varianza = $56:10 - 2,2^2 = 5,6 - 4,84 = 0,76 \rightarrow \sigma \approx 0,87$. c) CV = $0,87:2,2 \approx 0,40$ (40%).
2. Mediana = $(7+8):2 = 7,5$. Q1 = $(5+6):2 = 5,5$. Q3 = $(9+12):2 = 10,5$. RIC = $10,5 - 5,5 = 5$.
3. Dibujo: bigote de 3 a 5,5; caja de 5,5 a 10,5 con la mediana marcada en 7,5; bigote de 10,5 a 14.
4. CV Alba = $3:30 = 0,10$; CV Bruno = $3:24 = 0,125$. Alba es proporcionalmente más regular: la misma dispersión absoluta pesa más sobre una media menor.
5. Media = $(9 \cdot 1.800 + 13 \cdot 800):10 = 30.000:10 = 3.000$ € ✓ pero engañosa. Mediana = 1.800 € (el valor central). La mediana representa mejor: la media está distorsionada por un valor extremo.
6. Población: adolescentes españoles. Muestra: p. ej., 2.000 adolescentes de centros de varias comunidades elegidos al azar. Variable: cuantitativa continua (el tiempo puede tomar cualquier valor).
7. Media = $(155 \cdot 5 + 165 \cdot 12 + 175 \cdot 3):20 = (775 + 1.980 + 525):20 = 3.280:20 = 164$ cm.
8. a) Entre Q1 y Q3: [4, 7]. b) No: el bigote derecho (7 a 12) es mucho más largo que el izquierdo (2 a 4): hay valores altos alejados (asimetría a la derecha).
9. a) CV_A = $2:8 = 0,25$; CV_B = $5:8 = 0,625$. b) La B es más arriesgada: mayor dispersión relativa (más variabilidad para la misma rentabilidad media).
10. a) Suma = 80 $\rightarrow$ media 8. b) Moda 8 (aparece 4 veces); mediana = $(8+8):2 = 8$. c) Rango = $10 - 6 = 4$. d) $\sum x_i^2 = 36 + 49 + 49 + 64 + 64 + 64 + 81 + 81 + 100 + 64 = 652$; varianza = $652:10 - 8^2 = 65,2 - 64 = 1,2 \rightarrow \sigma \approx 1,10$.
11. a) El A (menor desviación típica con la misma media). b) CV_A = $1:7 \approx 0,14$; CV_B = $2,5:7 \approx 0,36 \rightarrow$ el A tiene mucha menos dispersión relativa.

14 Combinatoria

1. a) 120. b) $6 \cdot 5 = 30$. c) 1 (por definición). d) $7 \cdot 6 : 2 = 21$.
2. Importa el orden y no se usan todos $\rightarrow$ variaciones: $V(8,3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.
3. Permutaciones: $P(5) = 5! = 120$ maneras.
4. Sin orden: $C(10,3) = 10 \cdot 9 \cdot 8 : (3 \cdot 2 \cdot 1) = 120$ equipos. Con cargos sí importa el orden: $V(10,3) = 720$.
5. a) $VR(10,4) = 10^4 = 10.000$. b) $V(10,4) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5.040$. c) $10.000 - 5.040 = 4.960$.
6. 1. $V(5,3) = 60$ (importa el orden de las franjas). 2. $C(6,2) = 15$ (no importa el orden). 3. $VR(2,5) = 2^5 = 32$.
7. Regla del producto: $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ menús.
8. $V(5,3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ números. Empiezan por 5: fijada la primera, $V(4,2) = 12$.
9. $C(8,2) = 8 \cdot 7 : 2 = 28$ apretones. Son combinaciones porque el saludo A-B es el mismo que B-A: no importa el orden.
- 10 a) $VR(3,14) = 3^{14} = 4.782.969$ columnas. b) Variaciones con repetición (3 opciones, 14 posiciones, se repiten).
.
- 11 $C(8,2) - 8 = 28 - 8 = 20$ diagonales.
.
- 12 a) $C(49,6) = 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 : 6! = 13.983.816$ combinaciones. b) Combinación: no importa el orden en que salgan los números.
.
- 13 a) $P(4) = 4! = 24$. b) Empiezan por O o por A (2 opciones) y las otras 3 se ordenan de $3! = 6$ formas $\rightarrow 2 \cdot 6 = 12$.
.

15 Probabilidad

1. Tabla: chicos no 12; chicas no 15; deporte sí 33, no 27. a) $33/60 = 11/20$. b) $18/30 = 3/5$. c) $15/27 = 5/9$.
2. a) $10/40 \cdot 9/39 = 3/52 \approx 0,058$. b) $30/40 \cdot 29/39 = 29/52 \approx 0,558$.
3. a) $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$. b) $5/6 \cdot 5/6 = 25/36$. c) $1 - 25/36 = 11/36$.
4. $P(\text{roja}) = P(\text{cara}) \cdot P(\text{roja}|\text{A}) + P(\text{cruz}) \cdot P(\text{roja}|\text{B}) = 1/2 \cdot 2/3 + 1/2 \cdot 1/4 = 1/3 + 1/8 = 11/24$.
5. Una probabilidad nunca supera 1. Falta restar la intersección: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
6. Empiezan por A: $4! = 24$ de las 120 $\rightarrow P = 24/120 = 1/5$ (lógico: 5 letras equiprobables para la primera posición).
7. $P(\text{ninguna cara}) = (1/2)^3 = 1/8 \rightarrow P(\text{al menos una}) = 1 - 1/8 = 7/8$.
8. a) $P \approx 8/200 = 0,04$ (4%). b) $5.000 \cdot 0,04 = 200$ tornillos defectuosos.
9. $P = \text{área círculo} : \text{área cuadrado} = (3,14 \cdot 100) : (20^2) = 314 : 400 \approx 0,785$ (78,5%).
- 10 $P(\text{chico}) = 30/60$; $P(\text{deporte}) = 33/60$; $P(\text{chico} \cap \text{deporte}) = 18/60$. $P(\text{chico} \cup \text{deporte}) = 30/60 + 33/60 - 18/60 = 45/60 = 3/4$.
.
- 11 a) $1/4 \cdot 1/4 = 1/16$. b) $3/4 \cdot 3/4 = 9/16$. c) $1 - 9/16 = 7/16$.
.
- 12 $P(+) = 0,10 \cdot 0,9 + 0,90 \cdot 0,2 = 0,09 + 0,18 = 0,27$ (el 27% da positivo).
.

16 Juegos matemáticos

1. 1.^a: ■16 = 2. 2.^a: $P(2) = 8 - 4 + 1 = 5$. 3.^a: soluciones ± 2 y $\pm 3 \rightarrow$ 4. 4.^a: $V(3,2) = 3 \cdot 2 = 6$. El código es 2546.
2. Solución del sudoku (filas de arriba abajo): 561234 / 234561 / 615342 / 342615 / 156423 / 423156.

3. Fila 1: $9+6+8 = 23$. Fila 2: $2+5+1 = 8$. Columnas: $9+2=11$ ✓, $6+5=11$ ✓, $8+1=9$ ✓. ($A1=9$, $B1=6$ dada, $C1=8$, $A2=2$, $B2=5$, $C2=1$; con la pista la solución es única.)
4. Base: 12, -7, 15, -9, 11. Fila 2: 5, 8, 6, 2. Fila 3: 13, 14, 8. Fila 4: 27, 22. Cima: 49. (La casilla oculta de la base se deduce: $12 + x = 5 \rightarrow x = -7$.)
5. $5\sqrt{2}$; 120; $1/2+1/2 = 1$; 6; x^2-9 ; 4.
6. El camino de casillas con resultado 60: fila 2 col 1 $\rightarrow$ fila 2 col 2 $\rightarrow$ fila 3 col 2 $\rightarrow$ fila 3 col 3 $\rightarrow$ fila 3 col 4 $\rightarrow$ fila 2 col 4 $\rightarrow$ fila 2 col 5 $\rightarrow$ fila 2 col 6.
7. Constante 45: filas 12-17-16 / 19-15-11 / 14-13-18. Las casillas ocultas (diagonal) son 12, 15 y 18.
8. A: asíntota. B: bicuadrada. C: condicionada. F: factorial. I: inecuación. M: módulo. P: permutaciones. R: radical. S: seno. V: vector.
9. Dos números que suman 10 y multiplican 21: 7 y 3 ($t^2-10t+21=0$). Como $\blacktriangle > \blacksquare$: $\blacktriangle=7$, $\blacksquare=3$, $\bullet=4$. ¡Es un sistema no lineal disfrazado!
- 10 Fila 1: $\sin 30^\circ=1/2$ rojo; $\tan 45^\circ=1$ amarillo; $4^{1/2}=2$ azul. Fila 2: $\cos 60^\circ=1/2$ rojo; $2^0=1$ amarillo; $\sqrt{4}=2$ azul.
- 11 Cada ciclo día+noche avanza 1 m neto, PERO el último día llega arriba sin resbalar: tras 7 días y 7 noches está a 7 m; el 8.º día sube 3 m y alcanza los 10 m. Respuesta: 8 días.

17 Repaso final acumulativo

1. $\sqrt{48}=4\sqrt{3}$, $\sqrt{12}=2\sqrt{3} \rightarrow 4\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$. Dividido entre $\sqrt{3}$: $3\sqrt{3}/\sqrt{3} = 3$.
2. Ruffini con 2: cociente $x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)$. Factorización: $(x-2)(x-3)(x+1)$. Raíces: $x = 2, 3$ y -1 .
3. $t^2-29t+100=0 \rightarrow \Delta=841-400=441 \rightarrow t=(29\pm 21):2 \rightarrow t=25$ y $t=4 \rightarrow x=\pm 5$ y ± 2 .
4. a) $\sin \alpha = 1,5/6 = 0,25$. b) $\alpha = \arcsen 0,25 \approx 14,48^\circ$.
5. Punto medio: (1, 3). Distancia: $\sqrt{(4^2+2^2)}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$. Pendiente $m=(4-2)/(3+1)=1/2$; $y-2 = 1/2(x+1) \rightarrow y = x/2 + 5/2$.
6. Vértice: $x=1$, $y=1-2-3=-4 \rightarrow (1, -4)$, mínimo. Cortes eje X: $x^2-2x-3=0 \rightarrow x=3$ y $x=-1$. Corte eje Y: (0, -3).
7. $a+n=200$; $8a+5n=1.300$. De la 1.ª $n=200-a \rightarrow 8a+1.000-5a=1.300 \rightarrow 3a=300 \rightarrow a=100$ adultos y $n=100$ niños.
8. a) $C(5,2) = 10$ parejas. b) Suman 6: {1,5} y {2,4} $\rightarrow 2$ casos $\rightarrow P = 2/10 = 1/5$.
9. Media = $54:7 \approx 7,71$. Mediana = 7 (valor central). Rango = $12-4 = 8$. La media representa razonablemente al grupo, aunque el 12 la eleva algo.
- 10 a) $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 9 \cdot 4 = 113,04 \text{ m}^3$. b) $113,04:5 \approx 22,6$ horas.