

FICHA DE PROBLEMAS DE FUNCIONES

Curso: 4º ESO

Asignatura: Matemáticas

1. FUNCIÓN LINEAL

1.1 Un taxi cobra una tarifa fija de 3€ más 0,85€ por kilómetro recorrido.

Escribe la función coste $C(x)$ y calcula cuánto cuesta recorrer 12 km.

1.2 Una botella de agua se enfría en la nevera a un ritmo constante de 1,5°C por minuto desde los 25°C.

Expresa la temperatura en función del tiempo y halla la temperatura a los 6 min.

1.3 Una panadería vende barras a 0,90€ cada una y cobra un suplemento de 2€ por entrega.

Modeliza el coste total y calcula cuántas barras se han pedido si la factura es de 11€.

1.4 Una antena emite una señal cuya intensidad disminuye 2 unidades por cada kilómetro.

Escribe la función y determina a qué distancia la intensidad vale 30 unidades si en el origen vale 80.

2. RECTAS Y PARÁBOLAS

2.1 La altura (en metros) de una pelota lanzada al aire viene dada por $h(t) = -4t^2 + 16t + 2$.

Calcula la altura máxima y cuándo ocurre.

2.2 Una fuente lanza un chorro de agua cuya trayectoria describe $y = -x^2 + 6x$.

¿A qué distancia horizontal vuelve a caer al suelo?

2.3 Un faro proyecta una luz que describe una parábola cuya abertura depende de la ecuación $y = 3(x-2)^2 - 5$.

Halla el vértice y explica qué representa físicamente.

2.4 Una empresa produce beneficios según $B(x) = -2x^2 + 20x - 18$, donde x son cientos de unidades vendidas.

¿Cuántas unidades deben vender para obtener el beneficio máximo?

2.5 Una motocicleta frena describiendo la ecuación de frenado $d(t) = -2t^2 + 12t$.

¿Cuánto tiempo tarda en detenerse completamente?

3. TRANSFORMACIONES GRÁFICAS

3.1 El precio de una acción sigue la función $f(x) = x^2$.

Una noticia desplaza la gráfica 3 unidades a la derecha y 2 hacia arriba. Escribe la nueva función.

3.2 La intensidad de sonido sigue $f(x) = x$.

Un cambio en el sistema la multiplica por -2 . Escribe la nueva función.

3.3 La deformación de un resorte sigue la gráfica de $f(x) = |x|$.

Una fuerza externa comprime la función horizontalmente a la mitad. ¿Qué función resulta?

3.4 La temperatura de una placa se modela por $f(x) = e^x$.

Un ajuste la traslada 4 unidades a la izquierda. Escribe la nueva función.

4. FUNCIÓN IRRACIONAL

4.1 La velocidad máxima de un dron viene dada por $v(x) = \sqrt{40 - x}$, donde x es la carga que transporta.

¿Cuál es la carga máxima que puede llevar?

4.2 La distancia visible en un día de niebla es $d(x) = \sqrt{x + 5}$, donde x es la altitud en metros.

Halla la distancia visible a 0 m, 5 m y 20 m.

4.3 El caudal de un río se aproxima por $Q(t) = \sqrt{3t}$, donde t son horas desde el deshielo.

Halla el caudal tras 1 h, 4 h y 9 h.

4.4 La intensidad lumínica que recibe una célula depende de $I(x) = \sqrt{10 - 2x}$.

¿Para qué valores de x está definida?

5. FUNCIÓN RACIONAL

5.1 La velocidad de un coche en cierto tramo es $v(x) = 100 / (x - 2)$, donde x es el tiempo.

Explica por qué no puede ser $x = 2$ y calcula la velocidad en $x = 3$.

5.2 La presión en un tubo sigue $P(x) = 50 / x$.

¿Cuál es la presión a $x = 5$? ¿Y cuando $x \rightarrow 0$?

5.3 La eficiencia de una máquina es $E(x) = x / (x + 4)$.

Halla los valores cuando $x = 0, 4, 8$, y encuentra el comportamiento cuando $x \rightarrow \infty$.

5.4 Un dron tarda $t(d) = d / (d - 10)$ en recorrer una distancia d .

¿Para qué distancias la función no está definida?

6. FUNCIÓN INVERSA

6.1 La conversión $^{\circ}\text{C} \rightarrow ^{\circ}\text{F}$ se modela por $F = (9/5)C + 32$.

Obtén la inversa ($^{\circ}\text{F} \rightarrow ^{\circ}\text{C}$) y convierte 95°F a $^{\circ}\text{C}$.

6.2 Una tarifa telefónica cumple $P(x) = 5x + 7$.

Halla la función inversa y determina cuántos minutos se han hablado si la factura es de 32€.

6.3 En un laboratorio, la concentración es $C(t) = 12/(t + 1)$.

Obtén la inversa y calcula el tiempo cuando la concentración es 3 unidades.

6.4 La velocidad en un tramo es $v(x) = 2x - 4$.

Escribe la inversa y calcula $v^{-1}(10)$.

7. FUNCIÓN COMPUESTA

7.1 Un precio final depende de $f(x) = 1.21x$, $g(x) = x - 15$.

Calcula $(f \circ g)(x)$: precio tras aplicar descuento y luego impuestos.

7.2 La temperatura en un horno viene dada por $f(t) = 2t + 20$, $g(x) = x^2$.

Halla $(g \circ f)(t)$: energía en función del tiempo.

7.3 Una bacteria crece según $f(x) = 3x$, $g(x) = x + 4$.

Interpreta $(f \circ g)(x)$ en el contexto biológico.

7.4 Un sensor mide $f(x) = x$, $g(x) = 5 - x$.

Construye $(f \circ g)(x)$ y explica cuándo está definida.

8. FUNCIÓN POLINÓMICA

8.1 El beneficio de una empresa viene dado por $B(x) = x^3 - 6x$.

Halla los valores de x que dan beneficio cero.

8.2 La producción óptima se modela por $P(x) = 2x^3 - 3x^2$.

Calcula $P(0)$, $P(1)$, $P(5)$.

8.3 Un sensor tiene respuesta $S(x) = x^4 - 16x^2$.

Halla las raíces y los intervalos donde es positiva.

8.4 La aceleración de un coche es $a(t) = t^3 - 4t^2 + t$.

Calcula $a(0)$, $a(1)$, $a(3)$.

9. FUNCIÓN EXPONENCIAL

9.1 Una población bacteriana se duplica cada hora: $P(t) = 500 \cdot 2^t$.

¿Cuántas bacterias habrá a las 3 h? ¿a las 6 h?

9.2 Un dispositivo almacena energía según $E(t) = 100 \cdot 3^{-t}$.

Interpreta el modelo y calcula $E(0)$, $E(2)$.

9.3 La intensidad luminosa sigue $I(x) = 2^{x+1}$.

Calcula $I(-1)$, $I(0)$, $I(3)$.

9.4 La radiactividad de un material disminuye como $R(t) = 80 \cdot (0.5)^t$.

Halla la radiactividad a $t=1$, 3, 5.

10. FUNCIÓN LOGARÍTMICA

10.1 El pH se define como $\text{pH} = -\log(\text{H}^+)$.

Calcula el pH si $\text{H}^+ = 10^{-4}$.

10.2 La magnitud sísmica responde a $M = \log(I/I_0)$.

Un terremoto es 1000 veces más intenso que el de referencia. ¿Cuál es su magnitud?

10.3 El nivel sonoro es $\text{dB} = 10 \cdot \log(I/I_0)$.

Calcula los dB cuando la intensidad es 100 veces la de referencia.

10.4 La escala de luminosidad estelar es $L = \log(5x)$.

Calcula L para $x=1$, $x=10$, $x=100$.

11. FUNCIONES A TROZOS

11.1 Un ascensor cambia de velocidad según:

$$v(t) = \begin{cases} 2t & t < 3 \\ 6 & 3 \leq t < 8 \\ -2t + 22 & t \geq 8 \end{cases}$$

Calcula $v(1)$, $v(4)$, $v(8)$, $v(10)$.

11.2 La tarifa de envío de paquetes es:

$$C(p) = \begin{cases} 5 & p < 1 \\ 3p + 2 & 1 \leq p < 5 \\ 20 & p \geq 5 \end{cases}$$

Halla el coste para paquetes de 0.5, 2, 4.5 y 8 kg.

11.3 El nivel de luz en un túnel es:

$$L(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & 0 \leq x \leq 10 \\ 20 & x > 10 \end{cases}$$

Interpreta el modelo y calcula valores en $x=0,4,10,12$.

11.4 La temperatura de un motor sigue:

$$T(t) = \begin{cases} 30 + 5t & t < 4 \\ 50 & 4 \leq t < 7 \\ 100 - 10t & t \geq 7 \end{cases}$$

Indica si la función es continua y calcula $T(3)$, $T(4)$, $T(8)$.

SOLUCIONES

1. FUNCIÓN LINEAL

1.1

- $C(12) = 13,2 \text{ €}$
- Distancia para $87\text{€} \approx 99 \text{ km}$

1.2

$$T(6) = 16 \text{ °C}$$

1.3

Barras: 10

1.4

Distancia: 25 km

2. RECTAS Y PARÁBOLAS

2.1

- Altura inicial: 2 m
- Tiempo máximo: 2 s
- Altura máxima: 18 m

2.2

Vuelve al suelo en $x = 6$

2.3

Vértice: (2, -5)

2.4

Máximo en $x = 5 \rightarrow 500$ unidades

2.5

Se detiene a los 6 s

3. TRANSFORMACIONES GRÁFICAS

3.1

Traslación: +3 derecha, +2 arriba

3.2

- $p(x)$: 4 derecha
- $q(x)$: compresión horizontal y reflexión vertical

3.3

Se estrecha hacia el eje y (compresión horizontal por 2)

3.4

Nueva función: $g(x) = e^{(x+4)}$

4. FUNCIÓN IRRACIONAL

4.1

Dominio: $x \leq 40$

Carga máx.: 40

4.2

- $d(0) = 5$
- $d(5) = 10$
- $d(20) = 5$

4.3

- $Q(1) = 3$
- $Q(4) = 6$
- $Q(9) = 9$

4.4

Dominio: $x \leq 5$

5. FUNCIÓN RACIONAL

5.1

- No definida en $x = 2$
- $v(3) = 100$

5.2

- $P(5) = 10$
- $|P(x)| \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0$

5.3

- $E(0) = 0$, $E(4) = 0.5$, $E(8) = 0.67$
- Límite cuando $x \rightarrow \infty$: 1

5.4

No definida en $d = 10$

6. FUNCIÓN INVERSA

6.1

- Inversa: $C = (5/9)(F-32)$
- $C(95^\circ F) = 35^\circ C$

6.2

- Inversa: $P^{-1}(y) = (y-7)/5$
- Minutos para 32€: 5

6.3

- Inversa: $t = 12C - 1$
- Para $C = 3$: $t = 3$

6.4

- Inversa: $v^{-1}(y) = (y + 4)/2$
- $v^{-1}(10) = 7$

7. FUNCIÓN COMPUESTA

7.1

$$(f \circ g)(x) = 1,21(x - 15)$$

7.2

$$(g \circ f)(t) = (2t + 20)^2$$

7.3

$$(f \circ g)(x) = 3x + 12$$

7.4

- $(f \circ g)(x) = 5 - x$
- Dominio: $x \leq 5$

8. FUNCIÓN POLINÓMICA

8.1

Raíces: $x = 0, \pm 6$

8.2

- $P(0) = 0$
- $P(1) = -1$
- $P(5) = 175$

8.3

Raíces: $x = 0$ (doble), $x = \pm 4$

Signo: + en $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$, - en $(-4, 0) \cup (0, 4)$

8.4

- $a(0) = 0$
- $a(1) = -2$
- $a(3) = -6$

9. FUNCIÓN EXPONENCIAL

9.1

- $P(3) = 4000$
- $P(6) = 32000$

9.2

- $E(0) = 100$
- $E(2) \approx 11,11$

9.3

- $I(-1) = 1$
- $I(0) = 2$
- $I(3) = 16$

9.4

- $R(1) = 40$
- $R(3) = 10$
- $R(5) = 2,5$

10. FUNCIÓN LOGARÍTMICA

10.1

$$\text{pH} = 4$$

10.2

$$M = 3$$

10.3

$$\text{dB} = 20$$

10.4

- $L(1) = \log 5$
- $L(10) = \log 50$
- $L(100) = \log 500$

11. FUNCIONES A TROZOS

11.1

- $v(1) = 2$
- $v(4) = 6$
- $v(8) = 6$
- $v(10) = 2$

11.2

- $C(0,5) = 5$
- $C(2) = 8$
- $C(4,5) = 15,5$
- $C(8) = 20$

11.3

- $L(0) = 0$
- $L(4) = 8$
- $L(10) = 20$
- $L(12) = 20$

11.4

- $T(3) = 45$
- $T(4) = 50$
- $T(8) = 20$
- Continua en $t = 4$ y no continua en $t = 7$