

Parábolas

EJERCICIO 11 : Representa gráficamente las siguientes parábolas

a) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ b) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$ c) $y = 2x^2 - x - 3$ d) $y = -25x^2 + 75x$ e) $y = -x^2 + 2x - 1$

Solución:

a)

• Vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow y = \frac{1}{2} - 1 - \frac{3}{2} = -1 - \frac{3}{2} = -2 \Rightarrow$ El vértice es $V(1, -2)$.

• Puntos de corte con los ejes:

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{2} \rightarrow \left(0, -\frac{3}{2}\right)$

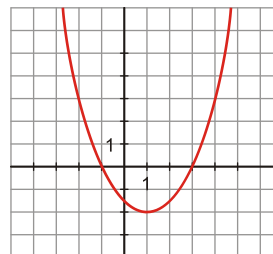
— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow -1 \end{matrix}$

Puntos de corte con el eje X : $(3, 0)$ y $(-1, 0)$

• Puntos próximos al vértice:

• Representación

X	-2	0	1	2	3
Y	5/2	-3/2	-2	-3/2	5/2



b)

• Hallamos su vértice: $x = \frac{2}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 4 \rightarrow y = \frac{1}{4} \cdot 16 - 8 + 4 = 0 \rightarrow V(4, 0)$

• Puntos de corte con los ejes:

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$

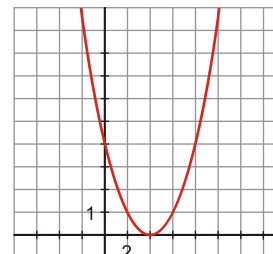
$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow (4, 0)$, que coincide, lógicamente, con el vértice.

— Con eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$

• Puntos próximos al vértice:

• Representación

X	2	3	4	5	6
Y	1	1/4	0	1/4	1



c)

• Calculamos su vértice: $x = \frac{1}{16} \rightarrow y = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} - 3 = -\frac{25}{8} \rightarrow V\left(\frac{1}{4}, -\frac{25}{8}\right)$

• Puntos de corte con los ejes:

— Con eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=-3 \rightarrow (0, -3)$

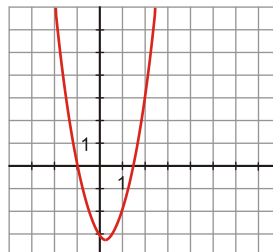
— Con eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -1 \end{cases}$

Los puntos de corte con el eje X son: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ y $(-1, 0)$

• Puntos próximos al vértice:

X	-1	0	1/4	1	2
Y	0	-3	-25/8	-2	3

• Representación:



d)

• Hallamos el vértice: $x = \frac{-75}{-50} = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{-225}{4} + \frac{225}{2} = \frac{225}{4} \rightarrow V\left(\frac{3}{2}, \frac{225}{4}\right)$

• Puntos de corte con los ejes:

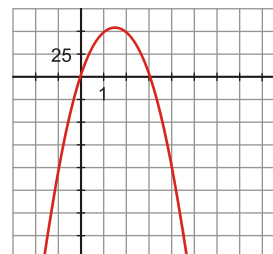
— Con eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow (0, 0)$

— Con eje $X \rightarrow y=0 \Rightarrow -25x^2 + 75x = 0 \rightarrow -25x(x-3) = 0 \begin{cases} x=0 \rightarrow (0, 0) \\ x=3 \rightarrow (3, 0) \end{cases}$

• Tabla de valores para obtener puntos próximos al vértice:

X	0	1	3/2	2	4
Y	0	50	225/4	50	-100

• Representación:



e)

• Hallamos su vértice: $x = \frac{-2}{-2} = 1 \rightarrow y = -1 + 2 - 1 = 0 \rightarrow V(1, 0)$

• Puntos de corte con los ejes:

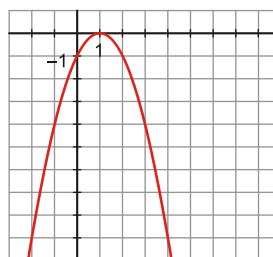
— Con eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=-1 \rightarrow (0, -1)$

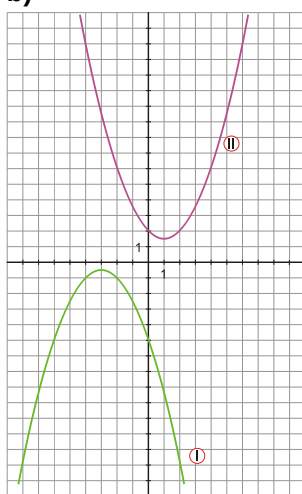
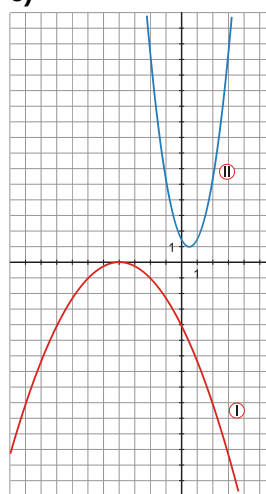
— Con eje $X \rightarrow$ el único punto de corte será el vértice: $(1, 0)$

• Puntos próximos al vértice:

X	-1	0	1	2	3
Y	-4	-1	0	-1	-4

• Representación:



EJERCICIO 12 : Halla las expresiones analíticas de estas parábolas:**a)****b)****c)****Solución:**

a) La expresión analítica de ambas parábolas será de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c son números reales que tenemos que calcular a partir de las gráficas.

• Ecuación de la parábola I:

— Punto de corte con el eje Y : $(0, 6) \rightarrow c = 6$

— Vértice: $V(-3, -3)$, que además es un punto de la parábola.

$$\text{Así: } \left. \begin{aligned} \frac{-b}{2a} &= -3 \rightarrow b = 6a \\ -3 &= (-3)^2 a + (-3)b + 6 \end{aligned} \right\} \rightarrow -3 = 9a - 18a + 6 \rightarrow -9 = -9a \rightarrow a = 1 \rightarrow b = 6$$

— La ecuación de la parábola I es: $y = x^2 + 6x + 6$

• Ecuación de la parábola II:

— Corta al eje Y en $(0, -1) \rightarrow c = -1$

$$\left. \begin{aligned} \frac{-b}{2a} &= \frac{1}{2} \rightarrow b = -a \\ \text{— Vértice } V\left(\frac{1}{2}, 0\right): 0 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 a + \frac{1}{2}b - 1 \rightarrow \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}a = 1 \rightarrow a - 2a = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow a = -4 \rightarrow b = 4$$

— La expresión analítica de la parábola II es: $y = -4x^2 + 4x - 1$

b) Sus ecuaciones serán de la forma $y = ax^2 + bx + c$, a, b, c , números reales.

• Ecuación de la parábola I:

— Corta al eje Y en el punto $(0, -5)$, luego: $c = -5$

— El vértice es $V\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$, que así mismo es un punto de la parábola. Luego de aquí obtendremos dos

ecuaciones cuyas incógnitas son a y b :

$$\left. \begin{aligned} \frac{-b}{2a} &= -3 \rightarrow b = 6a \\ -\frac{1}{2} &= (-3)^2 a + (-3)b - 5 \rightarrow -\frac{1}{2} = 9a - 3b - 5 \end{aligned} \right\} \rightarrow -\frac{1}{2} = 9a - 18a - 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} = -9a - 5 \rightarrow -1 = -18a - 10 \rightarrow 9 = -18a \rightarrow a = -\frac{1}{2} \rightarrow b = -3$$

— La ecuación de la parábola I es: $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 5$

- Ecuación de la parábola II:

— Corta al eje Y en (0, 2) $\rightarrow c = 2$

$$\left. \begin{aligned} V\left(1, \frac{3}{2}\right) &\rightarrow \frac{-b}{2a} = 1 \rightarrow b = -2a \\ \frac{3}{2} &= a + b + 2 \rightarrow a + b = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a - 2a &= -\frac{1}{2} \rightarrow -a = -\frac{1}{2} \\ a &= \frac{1}{2} \quad b = -1 \end{aligned}$$

— La ecuación de la parábola II es: $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$

c) Observamos que ambas son parábolas, luego sus ecuaciones serán de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c son números reales.

- Ecuación de la parábola I:

— $c = -4$ porque pasa por (0, -4).

— Vértice $V(-4, 0)$, de donde sacamos dos ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{-b}{2a} &= -4 \rightarrow b = 8a \\ 0 &= 16a - 4b - 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} 16a - 32a &= 4 \rightarrow -16a = 4 \rightarrow a = -\frac{1}{4} \rightarrow b = -2 \end{aligned}$$

— La ecuación de la parábola I es: $y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x - 4$

- Ecuación de la parábola II:

— $c = \frac{3}{2}$ porque pasa por $\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

$$\left. \begin{aligned} V\left(\frac{1}{2}, 1\right) &\rightarrow \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \rightarrow b = -a \\ 1 &= \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + \frac{3}{2} \rightarrow 4 = a + 2b + 6 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} -2 &= -a \rightarrow a = 2 \rightarrow b = -2 \end{aligned}$$

— La ecuación de la parábola II es: $y = 2x^2 - 2x + \frac{3}{2}$

EJERCICIO 13 : Completa las expresiones de estas dos gráficas:



a) $y = \square x^2 + 12x + \square$

b) $y = \square x^2 + \square$

Solución:

- Parábola a)

Punto de corte con el eje Y: (0, 10) $\rightarrow c = 10$

$$\left. \begin{aligned} V(-2, -2) &\rightarrow \frac{-b}{2a} = -2 \rightarrow -12 = -4a \rightarrow a = 3 \\ b &= 12 \end{aligned} \right\}$$

Ecuación de a): $y = 3x^2 + 12x + 10$

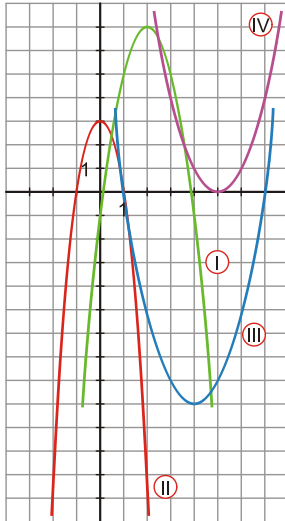
- Parábola b)

$c = 4 \rightarrow$ la ecuación será de la forma $y = ax^2 + 4$. Un punto de la parábola es el (1, 1), así:

$$1 = a + 4 \rightarrow a = -3$$

La ecuación buscada es: $y = -3x^2 + 4$

EJERCICIO 14 : Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones:

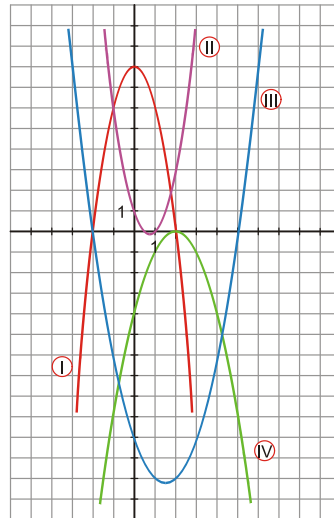


- a) $y = (x - 5)^2$
- b) $y = -2x^2 + 8x - 1$
- c) $y = -4x^2 + 4$
- d) $y = x^2 - 8x + 7$

Solución: a) → IV b) → I c) → II d) → III

EJERCICIO 15 : Relaciona cada una de las siguientes expresiones con su gráfica correspondiente:

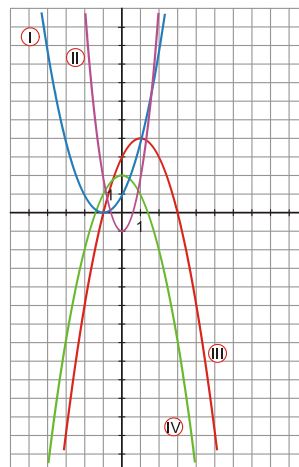
- a) $y = -2x^2 + 8$
- b) $y = x^2 - 3x - 10$
- c) $y = -(x - 2)^2$
- d) $y = 2x^2 - 3x + 1$



Solución: a) → I b) → III c) → IV d) → II

EJERCICIO 16 : Relaciona cada gráfica con una de las siguientes expresiones:

- a) $y = -x^2 + 2x + 3$
- b) $y = (x + 1)^2$
- c) $y = 3x^2 - 1$
- d) $y = 2 - x^2$



Solución: a) → III b) → I c) → II d) → IV

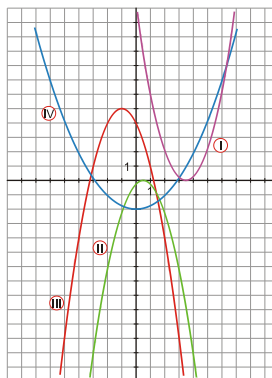
EJERCICIO 17 : Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones:

a) $y = -x^2 - 2x + 4$

b) $y = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

c) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$

d) $y = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$



Solución: a) $\rightarrow$ III b) $\rightarrow$ II c) $\rightarrow$ IV d) $\rightarrow$ I

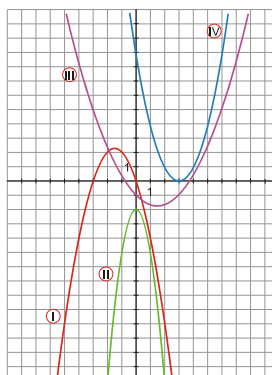
EJERCICIO 18 : Relaciona cada una de las siguientes expresiones con su gráfica correspondiente:

a) $y = -x^2 - 3x$

b) $y = (x - 3)^2$

c) $y = -2 - 3x^2$

d) $y = \frac{1}{3}x^2 - x - 1$



Solución: a) $\rightarrow$ I b) $\rightarrow$ IV c) $\rightarrow$ II d) $\rightarrow$ III

Rectas y parábolas

EJERCICIO 19 : Resuelve gráfica y analíticamente los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 \\ y = 1 - x \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -2x^2 + 8x - 11 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$

Solución:

a)

Resolución analítica: Despejamos y de cada ecuación e igualamos:

$$x^2 + 2x - 3 = 1 - x \rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{matrix} -4 \\ 1 \end{matrix}$$

Si $x = -4 \rightarrow y = 1 + 4 = 5$

Si $x = 1 \rightarrow y = 0$

Las soluciones son: $x = -4, y = 5$; $x = 1, y = 0$

Resolución gráfica

• Representamos la parábola $y = x^2 + 2x - 3$:

— Vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow y = 1 - 2 - 3 = -4 \Rightarrow V(-1, -4)$

— Cortes con los ejes:

Eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$