Aplicaciones geométricas de coordenadas

Punto medio de un segmento

Las coordenadas del punto medio, $M(x, y)$, del segmento AB, con $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$, son la semisuma de las coordenadas de sus extremos: $(x, y) = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$

Por ejemplo, el punto medio del segmento AB, donde $A(3, -6)$ y $B(-7, -4)$, es $M(-2, -5)$.

División de un segmento en partes iguales

Para dividir el segmento PQ, donde $P(0, 1)$ y $Q(2, 5)$, en tres partes iguales, se hallan dos puntos $M(x, y)$ y $N(x', y')$, tales que:

$$\overrightarrow{PM} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{3} \Rightarrow M = \frac{Q - P}{3} + P = \frac{Q + 2P}{3} = \frac{(2, 5) + 2 \cdot (0, 1)}{3} = \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{PN} = \frac{2\overrightarrow{PQ}}{3} \Rightarrow N = \frac{2Q - 2P}{3} + P = \frac{2Q + P}{3} = \frac{2 \cdot (2, 5) + (0, 1)}{3} = \left(\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

Cálculo de los vértices de un paralelogramo

Conocidos tres vértices, $A(1, 3)$, $B(3, -2)$ y $C(4, 2)$, el cuarto vértice $D(x, y)$ verifica la siguiente condición:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow B - A = C - D \Rightarrow D = C + A - B$$

$$D = (4, 2) + (1, 3) - (3, -2) = (4 + 1 - 3, 2 + 3 - (-2)) = (2, 7)$$

Condición de alineación de tres puntos

Tres puntos $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ y $C(c_1, c_2)$ están alineados si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen la misma dirección, es decir, si se cumple la siguiente igualdad:

$$\frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{c_2 - a_2}{b_2 - a_2}$$

Por ejemplo, los puntos $A(2, 3)$, $B(4, 7)$ y $C(5, 9)$ están alineados, ya que cumplen:

$$\frac{5 - 2}{4 - 2} = \frac{9 - 3}{7 - 3}$$

y los puntos $M(2, 1)$, $N(3, 2)$ y $P(4, 5)$ no están alineados, porque

$$\frac{4 - 2}{3 - 2} \neq \frac{5 - 1}{2 - 1}$$

1 Halla el punto medio, M, de los siguientes pares de puntos:

a) $A(2, 3)$ y $B(4, 5)$ ***b)*** $C(4, 1)$ y $D(-6, -9)$ ***c)*** $E(3, 8)$ y $F(4, -1)$

2 Un segmento tiene un extremo en $A(1, 9)$ y su punto medio es $M(3, 5)$. Calcula las coordenadas del otro extremo del segmento, B.

3 Divide en cuatro partes iguales el segmento AB, donde $A(2, 9)$ y $B(0, -3)$. Es decir, calcula los puntos M, N y P tales que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{PB}$.

Solucionario

1 ***a)*** $M = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = (3, 4)$

b) $M = \left(\frac{4-6}{2}, \frac{1-9}{2}\right) = (-1, -4)$

c) $M = \left(\frac{3+4}{2}, \frac{8-1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$

2 Si $B(x, y)$, entonces $3 = \frac{x+1}{2}$; $5 = \frac{y+9}{2}$, luego $x = 5$, $y = 1$; es decir, $B(5, 1)$.

3 $\overrightarrow{AM} = \frac{AB}{4} \Rightarrow M = \frac{B-A}{4} + A = \frac{B+3A}{4} = \frac{(0, -3) + 3 \cdot (2, 9)}{4} = \left(\frac{6}{4}, \frac{24}{4}\right)$

$\overrightarrow{AN} = \frac{2 \cdot AB}{4} \Rightarrow N = \frac{2B-2A}{4} + A = \frac{2B+2A}{4} = \frac{2 \cdot (0, -3) + 2 \cdot (2, 9)}{4} = \left(\frac{4}{4}, \frac{12}{4}\right) = (1, 3)$

$\overrightarrow{AP} = \frac{3 \cdot AB}{4} \Rightarrow P = \frac{3B-3A}{4} + A = \frac{3B+A}{4} = \frac{3 \cdot (0, -3) + (2, 9)}{4} = \left(\frac{2}{4}, \frac{0}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$