

Las Cifras Historia de una gran invención

G. Ifrah

La prehistoria de los números

¿Dónde y cuándo comenzó esta fantástica aventura de la inteligencia humana? ¿En Asia, en Europa o en algún lugar de África? ¿En la época del hombre de Cromagnon, hace treinta mil años? ¿O en la del hombre de Neanderthal hace cerca de cincuenta milenios? ¿O más bien hace cien mil años, incluso quinientos mil años o también, por qué no, un millón de años?

No sabemos nada. El evento se pierde en la noche de los tiempos prehistóricos y no queda actualmente ninguna huella de él. Sin embargo es un hecho cierto: hubo un tiempo en el que el ser humano no sabía en modo alguno contar. La prueba es que todavía hay hombres incapaces de concebir ningún número abstracto y que ni siquiera saben que dos y dos son cuatro.

Cuando el número era “sentido”

En nuestros días, varios pueblos «primitivos» están todavía, por así decirlo, en ese «grado cero» del conocimiento de los números. Este es el caso por ejemplo de los Zulúes y de los Pigmeos de África, de los Aran-da y de los Kamilarai de Australia, de los aborígenes de las islas Murray y de los Botocudos de Brasil.

Uno, dos y... muchos, constituyen las únicas magnitudes numéricas de tales indígenas que todavía viven en la edad de piedra. Sólo conocen dos «nombres de número» propiamente dichos: uno para la unidad y otro para el par. Los más dotados para la aritmética consiguen expresar los números tres y cuatro articulando algo así como: dos-uno y dos-dos. Pero no van más lejos. Más allá, todo es impreciso, confuso: emplean palabras o expresiones que se podrían traducir por muchos, varios, una *aglomeración*, una *multitud*, etc. Y les resulta tan difícil concebir un número superior o igual a cinco como lo sigue siendo para nosotros representar cantidades del tipo de un *trillón de billones*. Tanto es así que algunos, más allá de tres o cuatro elementos, se limitan a mostrar su cabello como para decir: « ¡son tan innumerables como los cabellos de mi cabeza! ».

En realidad, ellos no conciben el número bajo el ángulo de la abstracción. Más bien es «sentido» de un modo cualitativo, un poco como se percibe un olor, un color, un ruido o la presencia de un individuo o de una cosa del mundo exterior. Para su inteligencia, el número está reducido a una noción global bastante confusa —la

«pluralidad material»— y adquiere el aspecto de una realidad concreta indisociable de la naturaleza de los seres o de los objetos considerados. Es decir que esos indígenas no tienen conciencia, por ejemplo, de que una agrupación de cinco hombres, cinco caballos, cinco ovejas, cinco bisontes, cinco dedos, cinco cocos o cinco canoas presentan una característica común, que es precisamente la de «ser cinco»

Las posibilidades numéricas de dichos pueblos se reducen a esa especie de capacidad natural llamada normalmente *la percepción directa del número o*, más sencillamente, *la sensación numérica*. Aptitud natural que evidentemente no hay que confundir con la *facultad abstracta de contar*, que a su vez procede de un fenómeno mental mucho más complejo y constituye una adquisición relativamente reciente de la inteligencia humana.

Uno y dos: los primeros números inventados

El hombre de las épocas más remotas de esta historia, no mucho más dotado que estos indígenas, también debía de estar incapacitado mentalmente para concebir los números en sí mismos. Y sus posibilidades numéricas debían igualmente de limitarse a una apreciación global del espacio ocupado por los seres y los objetos circundantes. A lo sumo, nuestro lejano antepasado debía de poder establecer una diferencia muy clara entre la unidad, el par y la pluralidad.

Uno y dos, es verdad, son los primeros conceptos numéricos inteligibles para el ser humano. El Uno es, en efecto, el hombre activo, asociado a la obra de la creación. Es él mismo en el seno de un grupo social y su propia soledad frente a la vida y a la muerte. Es también el símbolo del hombre erguido, el único ser vivo que goza de esta facultad, así como el del falo erecto que distingue al hombre de la mujer. El Dos, corresponde a la evidente dualidad de lo masculino y lo femenino, a la simetría aparente del cuerpo humano. Es también el símbolo de la oposición, de lo complementario, de la división, de la rivalidad, del conflicto o del antagonismo. Y se manifiesta por ejemplo en la idea de vida y de muerte, de bien y de mal, de verdadero y de falso, etc.

Vanas lenguas y escrituras, antiguas y modernas, llevan las huellas evidentes de estas limitaciones primitivas. Empezando, por supuesto, por esa distinción gramatical que varios pueblos han hecho (o siguen haciendo) entre el singular, el dual y el plural. Así, en griego antiguo, *ho lukos*, significaba «el lobo», *tō lukō* «los dos lobos» y *hoi lukoi* «los lobos». En árabe moderno, se emplea también la forma *rajulun* para «un hombre», *rajulani* para «dos hombres» y *rijalun* para «hombres»

Incluso conocemos una «ortografía» atestiguada en las inscripciones pictóricas del Egipto de los faraones. Esta consistía en repetir tres veces el mismo jeroglífico (o también añadirle tres pequeños trazos verticales a la imagen correspondiente): No sólo lo hacían para representar tres ejemplares del ser o del objeto así figurado sino también para indicar el plural.



En chino antiguo, se expresaba la idea de «bosque» repitiendo tres veces el pictograma de un «árbol» y la idea de «multitud» reproduciendo tres veces la imagen del ser humano.

Es más: en la lengua de los sumerios, los términos empleados para 1, 2 y 3 eran respectivamente: *gesh*, *min* y *esh*. El primero significaba igualmente «el hombre, el macho, el miembro viril» y el sentido suplementario del segundo era el de «la mujer»; en cuanto al término *esh* («tres»), también poseía el sentido de «muchos» y servía normalmente como sufijo verbal para marcar el plural (un poco como nuestra «s»).

En la lengua francesa hay también una relación evidente entre el número *trois* (tres), el adverbio *tres* (muy) que marca, para un adjetivo o un adverbio, una intensidad llevada a su grado más alto y la preposición —de origen latino— *trans* que significa principalmente «mas allá».

En francés antiguo, el término *tres* era empleado como preposición con el sentido de «hasta», el verbo *transir* significaba literalmente «ir más allá»,

En latín, la palabra *tres* («tres») y el prefijo *trans* tenían por supuesto el mismo radical, y la palabra *ter* servía no sólo para señalar el sentido de «tres veces», sino también la idea de cierta pluralidad.

También en inglés la palabra *thrice* tiene dos significados: el de «tres veces» y el de «varios». Los nombres *three* («tres»), *throng* («una multitud») y *throng* («más allá») tienen visiblemente la misma raíz etimológica.

Para terminar, también el antiguo termino sajón *thria* «tres» (de donde además proceden en el sentido indicado, la palabra inglesa *three* y las palabras germánicas antiguas *dri*, *drio* y *driu*, que han dado a su vez el actual término alemán *dreí*), posee

una raíz común con la palabra *throp* «acumulación», antiguamente utilizado en francico (lengua de los antiguos Francos emparentada con el antiguo sajón y las lenguas germánicas occidentales). De este último termino derivan, de una parte, el adverbio francés *trop* (demasiado) y su homólogo italiano *troppo* (en el sentido de «mucho, más de lo necesario») y por otra el antiguo término latino medieval *troppus* («rebaño; banda»), que a su vez ha dado origen a las palabras *troupe* y *troupeau* (en francés), *tropa* (en español), *truppa* (en italiano), *troop* (en inglés) y *Trupp* (en alemán).

Desde la noche de los tiempos, el número tres ha sido sinónimo de pluralidad, de multitud, de acumulación, de más allá, etc., y ha constituido, por consiguiente, una especie de límite imposible de concebir ni precisar. Lo que quiere decir que en el espíritu del hombre la invención de los números ha marcado una primera pausa en dos tiempos.

El número y el niño pequeño

Todo esto está de hecho ilustrado por el estudio del comportamiento del niño, cosa que no es nada extraña pues en el desarrollo del niño pequeño se reproducen las etapas de la evolución de la inteligencia humana.

Entre los seis y los doce meses, un niño adquiere más o menos cierta apreciación global del espacio ocupado por las cosas o las personas circundantes. Se representa conjuntos relativamente restringidos de seres u objetos que le son familiares por su naturaleza y por su cantidad. A esta edad puede generalmente reunir en un solo grupo algunos objetos análogos previamente separados, y en cuanto algo falta en algunos de dichos conjuntos familiares, se da cuenta de ello inmediatamente. Pero el número, simplemente *sentido* y *percibido*, todavía no es concebido por él de una manera abstracta y ni siquiera se le ocurrirá utilizar sus diez dedos para señalar alguno de los primeros números.

Entre los doce y los dieciocho meses, el niño aprende poco a poco a distinguir entre *uno*, *dos* y *varios* objetos y a discernir de un solo golpe la importancia relativa de dos colecciones reducidas de seres u objetos. Pero sus capacidades numéricas siguen encerradas en unos límites tan estrechos que le resulta imposible diferenciar claramente entre los números y las colecciones que corresponden a dichos números.

Después, se produce un hecho muy notable que yo mismo he observado varias veces: entre los dos y los tres años, una vez que el niño ha adquirido el uso de la palabra y que ha aprendido a nombrar los primeros números, se tropieza generalmente durante cierto tiempo con la dificultad de concebir y de decir el número

tres. El niño cuenta comenzando por supuesto por uno y dos, pero olvidando inmediatamente el tercer número: ¡uno, dos, cuatro!

Los límites de la sensación numérica

También algunos animales están dotados de una suerte de percepción directa de los números. En algunos casos, esta capacidad natural les permite reconocer que un conjunto (numéricamente débil) percibido por segunda vez, ha sufrido una modificación después de que le han sido quitados o añadidos uno o varios elementos. Por ejemplo, un jilguero adiestrado para escoger su alimento entre dos montoncitos de granos, generalmente puede llegar a distinguir tres de uno, tres de dos, cuatro de tres y seis de tres. Por el contrario, dicho pájaro confunde casi siempre cuatro y cinco, siete y cinco, seis y ocho, diez y seis. Es más, numerosas experiencias han demostrado que los ruiseñores, las urracas y los cuervos son capaces de distinguir cantidades concretas que van de uno a cuatro.

El dueño de un castillo decidió matar a un cuervo que había anidado en la atalaya del mismo. En vanas ocasiones, intentó sorprender al pájaro pero cuando se acercaba, el cuervo abandonaba el nido, se situaba en un árbol vecino y regresaba en cuanto el hombre salía de la torre. Entonces, un día el castellano le tendió una trampa: hizo entrar a dos compañeros en la torre; al cabo de unos instantes, se marchaba uno mientras que el otro se quedaba, Pero lejos de dejarse engañar por esta maniobra, el cuervo esperó a que el segundo también se marchara para volver a su sitio. A la vez siguiente hizo entrar a tres hombres, dos de los cuales se alejaron en seguida: el tercero pudo esperar cuanto quiso para atrapar al cuervo, ya que el astuto volátil se mostraba aún más paciente que él. Las siguientes veces repitieron el experimento con cuatro hombres, pero siempre sin éxito. Finalmente, la estrategia dio resultado con cinco personas, porque el cuervo no podía reconocer más de cuatro hombres o cuatro objetos.

Sería un error suponer que nosotros mismos podemos hacer mucho más *si nos dejamos guiar tan sólo por nuestras facultades naturales de reconocimiento inmediato de los números*. En la práctica, cuando queremos discernir tal o cual cantidad, recurrimos a la memoria o a procedimientos como la comparación, el desdoblamiento, la agrupación mental o, más bien, a la facultad abstracta de contar, hasta el punto de que nos es generalmente difícil tomar conciencia de los verdaderos límites de nuestras propias aptitudes en la materia.

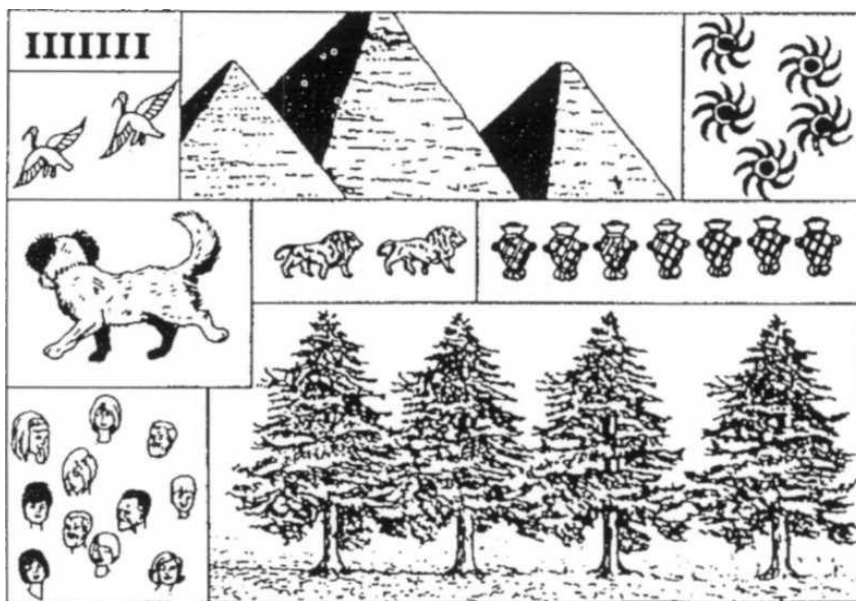
No obstante, pongámonos frente a una serie de seres u objetos análogos *alineados* y propongámonos indicar su número *de un solo y rápido vistazo* (es decir, sin ningún artificio). ¿Hasta dónde podremos llegar? Podemos distinguir sin

equivocarnos y a primera vista *uno, dos, tres* e incluso *cuatro* elementos, pero aquí se acaba nuestro poder de identificación de los números. Más allá de cuatro, todo se confunde en nuestro espíritu y nuestra visión global ya no nos sirve de nada.

¿Hay veinte o quince platos en esta pila? ¿Trece o catorce vehículos en la calzada? ¿Once o doce arbustos en ese bosquecillo? ¿Diez o quince peldaños en esa escalera? ¿Nueve, más que ocho o quizás seis ventanas en esa fachada? *Es necesario contarlos para saberlo.*

El ojo, por así decirlo, no es un «instrumento de medida» lo suficientemente preciso; ¡su poder de percepción directa de los números rebasa muy pocas veces (por no decir nunca) el número cuatro! Una primera ilustración de este hecho nos la proporciona la existencia de vanas tribus de Oceanía que tienen la costumbre de declinar las formas gramaticales en *singular, dual, trial, cuatrial* y... en *plural*.

Entre estos pueblos, la capacidad de individualización de los nombres comunes va hasta cuatro¹. Hasta aquí, en efecto, los nombres de seres y objetos están claramente expresados en sus lenguas y provistos cada uno de sus propias características; pero, más allá, tanto los nombres como los números carecen de declinación y de personalidad y revisten el carácter difuso y mal precisado de la pluralidad material. Es un poco como si, en nuestra lengua, expresásemos para los asnos, por ejemplo, la diferencia entre uno, dos, tres, cuatro y varios más, diciendo *baudet* para «un asno», *baudeta* para «dos asnos», *baudeti* para «tres asnos», *baudato* para «cuatro asnos» y *baudets* (con una «s» al final) para «asnos»



¹ En nuestras gramáticas actuales esta capacidad esta muy limitada, pues se detiene en la unidad.

Otro ejemplo: en latín los nombres de los cuatro primeros números (*unas, dúo, tres, quatuor*) eran los únicos que se declinaban: a partir del quinto, los nombres de los números no tenían ni declinación ni género.

Asimismo, los nombres que los romanos solían conceder a sus hijos del sexo masculino (¡en aquella época las hijas no tenían nombre propio!) eran, hasta el cuarto inclusive, apelativos particulares con formas normales, como por ejemplo: *Appius, Aulius, Gaius, Lucius, Marcus, Servias*, etc. En cambio, a partir del quinto se limitaban a llamar a sus hijos con simples nombres de números: *Quintus* (el quinto), *Sextus* (el sexto), *Octavius* (el octavo), *Decimus* (el décimo), o incluso *Numerus* («numeroso»). Pensemos, por ejemplo, en el analista Quintus Fabius Pictor, en el poeta Quintus Horatius Flaccus (más conocido con el nombre de Horacio), en Sextus Pompeius Magnus (hijo del gran Pompeyo), así como en el poeta satírico Juvenal, que en realidad se llamaba Decimus Junius Juvenalis.

También hay que observar que los cuatro primeros meses del año romano primitivo (el llamado de Rómulo) eran los únicos que tenían nombres particulares (Martius, Aprilis, Maius, Junius), porque a partir del quinto, los nombres de los meses no eran sino números de orden: *Quintilis, Sextilis, September, October, November, December*². Las civilizaciones egipcia, sumeria, elamita, babilónica, fenicia, griega, maya, azteca y muchas más nos corroboran estos hechos. Al comienzo de la Historia de sus respectivas escrituras, estos pueblos adoptaron la costumbre de anotar los nueve primeros números naturales mediante la repetición de otros tantos trazos verticales, círculos, puntos y otros signos análogos que representaban la unidad, disponiéndolos más o menos de este modo en una misma línea:

I	II	III	IIII	IIIII	IIIIII	IIIIIII	IIIIIIII	IIIIIIIIII
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Pero abandonaron rápidamente este principio porque para los números superiores a 4 tales series de signos idénticos no le facilitaban a un «lector con prisas» la suma inmediata de las unidades correspondientes. Para eludir la dificultad, los egipcios y los cretenses, por ejemplo, tuvieron la idea de agrupar sus cifras-unidades siguiendo un principio que podríamos llamar el *desdoblamiento*:

² El año primitivo romano (304 días) constaba sólo de diez meses y empezaba entonces por *Martius* (marzo). Se le prolongó añadiéndole dos meses suplementarios a los que llamaron *Januarius* y *Februarius*, que se convirtieron en nuestros actuales enero y febrero. Más adelante, cuando Julio César hizo la reforma del calendario, el año, que empezaba el 1º de marzo, pasó a empezar el 1º de enero, y el año romano constó de 365 días. Después se decretó que el mes de Quintilis (el quinto del año primitivo) que vio nacer a César, se llamaría a partir de entonces en su honor *Julius*, del que deriva nuestro julio. Algo más tarde, el mes de *Sextilis* (el sexto del año primitivo) fue llamado *Augustas* (que después sería nuestro agosto actual) en honor a los servicios prestados por el emperador de ese nombre durante dicho mes.

I	II	III	IIII	III	III	IIII	IIII	IIII
				II	III	III	IIII	IIII
				(3+2)	(3+3)	(4+3)	(4+4)	(5+4)
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Otros pueblos (como los babilonios o los fenicios) tuvieron la idea de recurrir más bien a un *principio ternario*, superando la dificultad de la siguiente manera.

I	II	III	III	III	III	III	III	III
			I	II	III	III	III	III
			(3+1)	(3+2)	(3+3)	I	II	III
						(3+3+1)	(3+3+2)	(3+3+3)
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Otros pueblos también aportaron una solución al mismo problema al imaginar un signo especial para el número *cinco* (idea sugerida sin duda por los cinco dedos de la mano). Como los antiguos romanos, usaron entonces un *principio quinario* para representar los números de seis a nueve.

I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	VIII
					(5+1)	(5+2)	(5+3)	(5+4)
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Un último ejemplo: cuando un comerciante, de vino o de cerveza lleva la «cuenta» de sus clientes alineando sobre un pedazo de cartón tantos trazos como consumos les quedan todavía por pagar, efectúa generalmente esta operación siguiendo las etapas sucesivas del procedimiento siguiente:

1	I	6	IIII I	11	IIII IIII I
2	II	7	IIII II	12	IIII IIII II
3	III	8	IIII III	13	IIII IIII III
4	IIII	9	IIII IIII	14	IIII IIII IIII
5	IIII I	10	IIII IIII I	15	IIII IIII IIII I

Es exactamente lo que hace un prisionero, cuando lleva la cuenta del tiempo de su encarcelamiento grabando sobre la pared de su celda tantos trazos como días han pasado desde su detención. No cabe pues la menor duda: *¡Las facultades humanas de percepción directa de los números no pasan del número cuatro!*

Una capacidad numérica rudimentaria que apenas supera, a la de algunos animales; he aquí sin duda el núcleo primitivo de nuestra aritmética actual. Y no cabe duda alguna de que si el espíritu humano se hubiera limitado a esta aptitud, jamás hubiera accedido a la abstracción del cálculo, como no lo han hecho dichos animales. Afortunadamente, el hombre ha sabido ampliar sus posibilidades, tan limitadas, de la sensación numérica inventando cierto número de procedimientos mentales. Procedimientos que resultarían fecundos, pues iban a dar a la especie humana la posibilidad de progresar en el universo de los números.

Cómo aprendió el hombre a contar

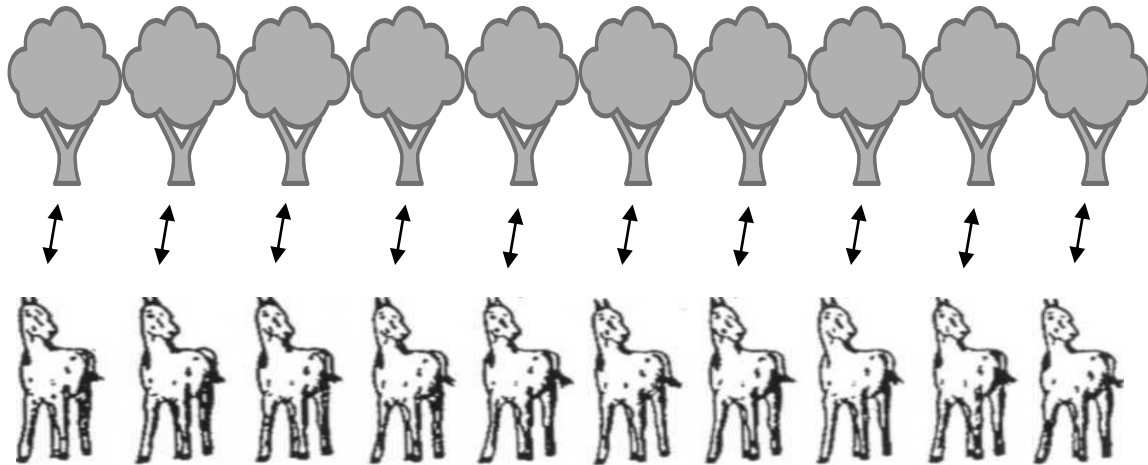
La invención de los números, establecida sin duda alguna sobre bases empíricas, debió deberse a preocupaciones de orden práctico y utilitario. En efecto, los que guardaban ovejas o cabras, por ejemplo, al final de cada pastoreo se tenían que asegurar de que todos los animales habían vuelto al redil. Los que almacenaban utensilios o armas o los que guardaban reservas de alimentos para las necesidades de la vida comunitaria, debían comprobar que los víveres, o las armas e instrumentos, estaban en idéntica situación a como los habían dejado, tiempo atrás. Aquellos que mantenían relaciones hostiles con sus vecinos, al término de cada expedición militar debían preocuparse por saber si seguían teniendo la misma cantidad de soldados. También aquellos que practicaban una economía de trueque directo tenían que saber «evaluar» para poder intercambiar los productos o mercancías.

El primer procedimiento aritmético

Todo empezó por este artificio al que llamamos la correspondencia unidad por unidad, y que permite, incluso a los espíritus peor dotados, comparar fácilmente dos colecciones de seres u objetos, tengan o no la misma naturaleza, sin tener que recurrir al cálculo abstracto.

Un simple ejemplo nos va a permitir familiarizarnos con ese procedimiento que domina actualmente todas las ciencias exactas y que procede de la prehistoria de la aritmética. Subamos a un autocar. Con excepción del conductor que posee una plaza privilegiada tenemos ante nosotros dos conjuntos: los asientos y los viajeros. De un solo y rápido vistazo podemos saber si ambos conjuntos contienen o no el «mismo número» de elementos y, en caso negativo, podemos incluso indicar sin vacilaciones cuál de los dos tiene «el mayor número» de elementos. Esta apreciación del número, obtenida sin tener que contar, es debida precisamente al procedimiento de la correspondencia unidad por unidad.

En efecto, si en dicho autocar hay plazas libres y no hay nadie de pie, sabremos a ciencia cierta que a cada viajero le corresponde un asiento, pero que cada asiento no corresponde forzosamente a un pasajero; hay entonces menos viajeros que asientos. En cambio, si nadie está de pie y no hay ninguna plaza libre, sabremos que cada asiento corresponde a un solo viajero y a la inversa; hay pues tantos asientos como pasajeros. Resumimos esta situación diciendo que hay un emparejamiento (o también una correspondencia biunívoca o en términos matemáticos modernos una *biyección*) entre el conjunto de asientos y los viajeros de dicho autocar.



Hay un «emparejamiento» entre una colección determinada y otra, cuando a cualquier elemento de una de ellas le corresponde un elemento único de la otra y a la inversa.

Cuando un niño llega a los quince o dieciséis meses, ha rebasado la fase de la simple observación del mundo que le rodea. Ya está capacitado para concebir el principio de la correspondencia unidad por unidad, y en particular la propiedad del emparejamiento. Si le damos, por ejemplo, igual número de muñecas que de sillitas, probablemente veremos cómo asocia cada una de esas muñecas a cada una de esas sillitas. Al jugar, no hará más que emparejar los elementos de una pequeña colección (las muñecas) con los de otra segunda colección (las sillitas). En cambio, si le damos más muñecas que sillitas (o a la inversa) sin duda le veremos sin saber qué hacer al cabo de un rato: habrá comprobado la imposibilidad de emparejamiento.

Pero esta artimaña del espíritu no proporciona únicamente un medio para establecer una comparación entre dos agrupaciones; permite también englobar varios números, sin tener que contar, incluso sin tener que nombrar o conocer las cantidades implicadas.

Para evitar que en una sala de cine entren más espectadores que los que permite el número de asientos, la cajera se provee precavidamente de un plano de la sala antes de poner a la venta las entradas. En su plano hay tantas casillas como asientos en la sala. Cada vez que vende una entrada, pone una cruz en la casilla. Al hacer esto empareja una primera vez los asientos de la sala con las casillas de su plano, una segunda vez las casillas de su plano con las entradas vendidas, y por último dichas entradas con los espectadores admitidos en la sala. Y si fuese tan perezosa que no quisiera contar el número real de entradas vendidas, este procedimiento elemental, aplicado en tres ocasiones, la autorizará con toda seguridad a poner el cartel de «completo» al final de la operación.

Para enumerar los atributos de Alá (hay 99 y un centésimo que corresponde al «verdadero Nombre de Dios»), o también para recitar las (99 + 1) eulogías obligatorias después de la oración, los musulmanes acostumbran utilizar un rosario en el que cada «cuenta» corresponde a un atributo divino o a una eulogía. Este objeto de devoción consiste en un collar de cien perlas ensartadas (99 pequeñas y una grande), que se van pasando entre los dedos a medida que se recitan las eulogías o se enumeran los atributos de Alá.



Los budistas realizan esta misma práctica desde hace mucho tiempo. También la encontramos entre los cristianos, cuando recitan los *Pater Noster*, los *Gloria Patri*, las *Ave María*, etc. Como estas letanías tienen que ser recitadas varias veces siguiendo unos números respectivos muy concretos, el rosario cristiano se compone generalmente de un collar con cinco decenas de cuentas pequeñas, separadas unas de otras por una cuenta más gruesa, y de una cadena que consta primero de una cuenta gruesa y tres pequeñas y luego de una cuenta gruesa y una cruz. Así se recitan las letanías sin tener que contarlas y sin olvidar ninguna: se recita un *Ave María* por cada cuenta pequeña del collar, un *Gloria Patri* en la última cuenta de cada decena, un *Pater Noster* por cada cuenta gruesa, etc.

Gracias al principio de la correspondencia unidad por unidad, dichas religiones han elaborado ese sistema para evitar a los fieles perderse en las letanías de los nombres divinos o en las frecuentes repeticiones de sus invocaciones sagradas.

Vemos así cómo dicho principio puede a veces ser útil a las personas más «civilizadas», siendo todavía de mayor utilidad para los hombres «totalmente incultos».

Pensemos en un hombre que no sepa nada de aritmética y a quien queremos mandar a la tienda de la esquina a comprar diez terrones de azúcar, cinco botellas de aceite y cuatro sacos de patatas. ¿Cómo podemos confiar esta tarea a alguien que no sabe contar y que por lo tanto no sabrá manejar el dinero normalmente, como nosotros?

En la práctica, este hombre podrá desenvolverse perfectamente, siempre que, por supuesto, se le ponga previamente la operación a su alcance. Para ello bastará con recurrir a un subterfugio material, cuyo principio básico será precisamente el de la correspondencia unidad por unidad.

Le podremos confeccionar diez bolsitas de color blanco, que asociaremos a los diez terrones de azúcar; otras cinco bolsas de color amarillo que asociaremos a las cinco botellas de aceite y por último otras cuatro bolsas de color marrón, que se asociarán a los cuatro sacos de patatas. Después se introducirá en cada bolsita una cantidad de dinero que corresponda exactamente al precio del artículo de que se trate. Después, bastará con explicar a este hombre que deberá cambiar al tendero cada bolsa blanca por un terrón de azúcar, cada bolsa amarilla por una botella de aceite y cada bolsa marrón por un saco de patatas para que se realice la operación.

Técnicas primitivas de «contabilidad»

Sin duda, gracias a este principio, durante varios milenios el hombre prehistórico ha podido hacer aritmética antes incluso de tener conciencia de ello y de saber lo que es un número abstracto. Hemos podido comprobarlo al estudiar el comportamiento de personas totalmente incultas y el de determinados pueblos indígenas de Oceanía, África y América. Porque dichos pueblos, con técnicas particulares (y que a la vista de nuestros medios actuales podemos calificar de «concretas»), saben obtener los mismos resultados que nosotros, al menos hasta cierto punto...

Pensemos en un pastor que guarda un rebaño de ovejas a las que encierra todas las noches en una cueva. Estas ovejas son 55. Pero el pastor, que no sabe contar mejor que el hombre del ejemplo anterior, ignora totalmente lo que es el número 55. Sólo sabe que hay «muchas ovejas». Pero como esto no es muy preciso, a él de todos modos le gustaría estar seguro de que por las noches todas sus ovejas están a buen recaudo. Entonces, un día, se le ocurre una idea. Sin saberlo, va a recurrir a un procedimiento concreto que los hombres prehistóricos ya conocían varios milenios antes que él: la práctica de la muesca. Se sienta a la entrada de la cueva y hace entrar a los animales uno a uno. Luego con la ayuda de un sílex, hace una muesca en un palo cada vez que una oveja pasa delante de él. De esta manera, y sin conocer su verdadera significación matemática, cuando ha pasado el último animal el pastor ha realizado exactamente cincuenta y cinco muescas. A partir de ahora podrá comprobar sin dificultad si su rebaño está completo o no lo está. Siempre que vuelva de los pastos, hará entrar a los animales uno por uno, e irá poniendo cada vez su dedo sobre una muesca. Si cuando todas las ovejas han pasado ante él quedan muescas, es que ha perdido algunas. Si no es así, es que

todo está en orden, y si entretanto naciese un cordero no tendría más que marcar otra muesca más en su palo.

Así, gracias al principio de la correspondencia unidad por unidad, es posible desenvolverse aunque el lenguaje, la memoria o el pensamiento abstracto sean totalmente deficientes.

Cuando se pueden emparejar término por término los elementos de una primera colección con los de una segunda colección, se desprende una noción abstracta, totalmente independiente de la naturaleza de los seres u objetos de que se trate, que expresa una característica común de ambas colecciones. Así, los conjuntos como el día y la noche, los gemelos, una pareja de animales, las alas de un pájaro o incluso los ojos, las orejas, los brazos, los pechos o las piernas de un ser humano, presentan una característica común, totalmente abstracta que es precisamente la de «ser dos».

Dicho de otro modo, la propiedad del emparejamiento suprime la distinción entre dos conjuntos debido a la naturaleza de sus respectivos elementos. Gracias a esta abstracción el artificio de la correspondencia unidad por unidad puede desempeñar un papel importante en materia de recuento. Pero en la práctica, los métodos que se derivan de ella sólo pueden convenir evidentemente a colecciones relativamente reducidas.

También, debido a ello, puede ser de gran utilidad recurrir ocasionalmente a intermediarios materiales, ya que proporcionan cierto número de conjuntos-modelos a los que siempre podemos referirnos independientemente de la naturaleza de sus componentes. Por ejemplo, al marcar veinte muescas en un palo de hueso o de madera, lo mismo nos podemos referir a veinte hombres que a veinte ovejas o veinte cabras, veinte bisontes, veinte caballos, veinte días, veinte pieles, veinte canoas u otras tantas medidas de trigo.

Asimismo, cualquier técnica del número que se pueda forjar en estas condiciones se reducirá desde ahora a escoger, entre los conjuntos-modelos disponibles, aquél que podamos emparejar término por término, con la agrupación cuya totalidad se quiera percibir. Pero como es natural, para aplicar este principio se puede recurrir a muchos otros intermediarios materiales en vez de al procedimiento de las muescas.

El pastor del ejemplo podía haber empleado perfectamente guijarros para comprobar que las ovejas que sacaba por la mañana volvían todas por la tarde. Para ello le hubiera bastado con asociar un guijarro con cada cabeza de ganado que custodiaba, guardar después todos los guijarros, y luego, a la vuelta, proceder a la

inversa. Al comprobar que al último animal le correspondía el último guijarro del montón, podría estar seguro de que no se le había perdido ninguna cabeza. Y si entretanto hubiera nacido un cordero no habría tenido más que añadir un nuevo guijarro al montón...

Con este mismo fin, hombres de diferentes lugares han utilizado también conchas, perlas, frutos secos, huesos, bastoncillos, dientes de elefante, cocos, bolitas de arcilla, granos de cacao, incluso cagarrutas, con los que hacían montones o hileras correspondientes a la cantidad de seres u objetos que querían contar. También han alineado trazos en la arena o han hecho nudos en cordeles, han pasado cuentas de perlas o conchas ensartadas en una especie de rosario.

Se han utilizado igualmente los dedos de la mano, miembros y diferentes partes del cuerpo humano. Así procedían todavía a principios de siglo los Elema y los Papúes de Nueva Guinea, los Bosquimanos de África del sur, los Lengua del Chaco (Paraguay), así como otros muchos aborígenes de Oceanía, África y América. Siempre, y dentro de un orden previamente establecido, se referían a los dedos de la mano y de los pies, a las articulaciones de brazos y piernas, a los ojos, a las orejas, a la nariz, a la boca, al tórax, a los pechos, a las caderas, al esternón, incluso a las partes genitales. Y así, según las tribus, se conseguía «contar visualmente», por así decirlo, hasta 17, 29, 33 o incluso más.

Cómo contar sin saber contar

Imaginemos a un grupo de indígenas. Todavía no son capaces de concebir los números abstractos, pero sin embargo saben salir del paso y obtienen resultados satisfactorios cuando se trata de cantidades relativamente reducidas. Para ello se valen de todo tipo de intermediarios concretos. Pero la mayoría de las veces, «cuentan visualmente» utilizando la siguiente técnica corporal:

Se tocan sucesivamente, uno a uno, los dedos de la mano derecha a partir del más pequeño, después la muñeca, el codo, el hombro, la oreja y el ojo del lado derecho. Luego se tocan la nariz y la boca, después el ojo, la oreja, el hombro, el codo y la muñeca del lado izquierdo, para terminar por el dedo meñique de la mano izquierda. Se llega así al número 22. Si ello no bastare, se añaden primero los pechos, las caderas y el sexo, después las rodillas, los tobillos y los dedos del pie derecho e izquierdo. Lo que permite alcanzar diecinueve unidades suplementarias, es decir un total de 41.

Supongamos que unos indígenas han llevado a cabo recientemente una expedición militar contra un poblado vecino que se había sublevado y es sometido. Al final de una reunión del consejo de guerra, el jefe decide exigir una reparación y

encarga a varios de sus subordinados que consigan un tributo entre los habitantes de dicho poblado:

«Por cada guerrero que hemos perdido en combate, les dice su jefe, deberán darnos todos los collares de perlas que pueda haber desde el dedo meñique de mi mano derecha hasta el ojo del mismo lado. Todas las pieles de animales que pueda haber desde el dedo meñique de mi mano derecha hasta mi boca. Y por último, todos los cestos de alimentos que pueda haber desde el dedo meñique de mi mano derecha hasta la muñeca izquierda.»

El jefe explica así a sus hombres que la multa infligida a los sublevados es de:

10 collares de perlas,	}	por cada uno de los guerreros murtos en combate
12 pieles de animales		
y 17 cestos de alimentos		

En esta batalla los indígenas han perdido dieciséis hombres. Por supuesto ellos no conocen el número dieciséis, pero disponen de un medio infalible para determinar dicho número en esa situación. En efecto, antes de la expedición, cada soldado deposita un guijarro en un montón y, a la vuelta, cada superviviente coge de nuevo uno de ellos; de modo que los guijarros que quedan corresponden exactamente al número de pérdidas sufridas en combate.

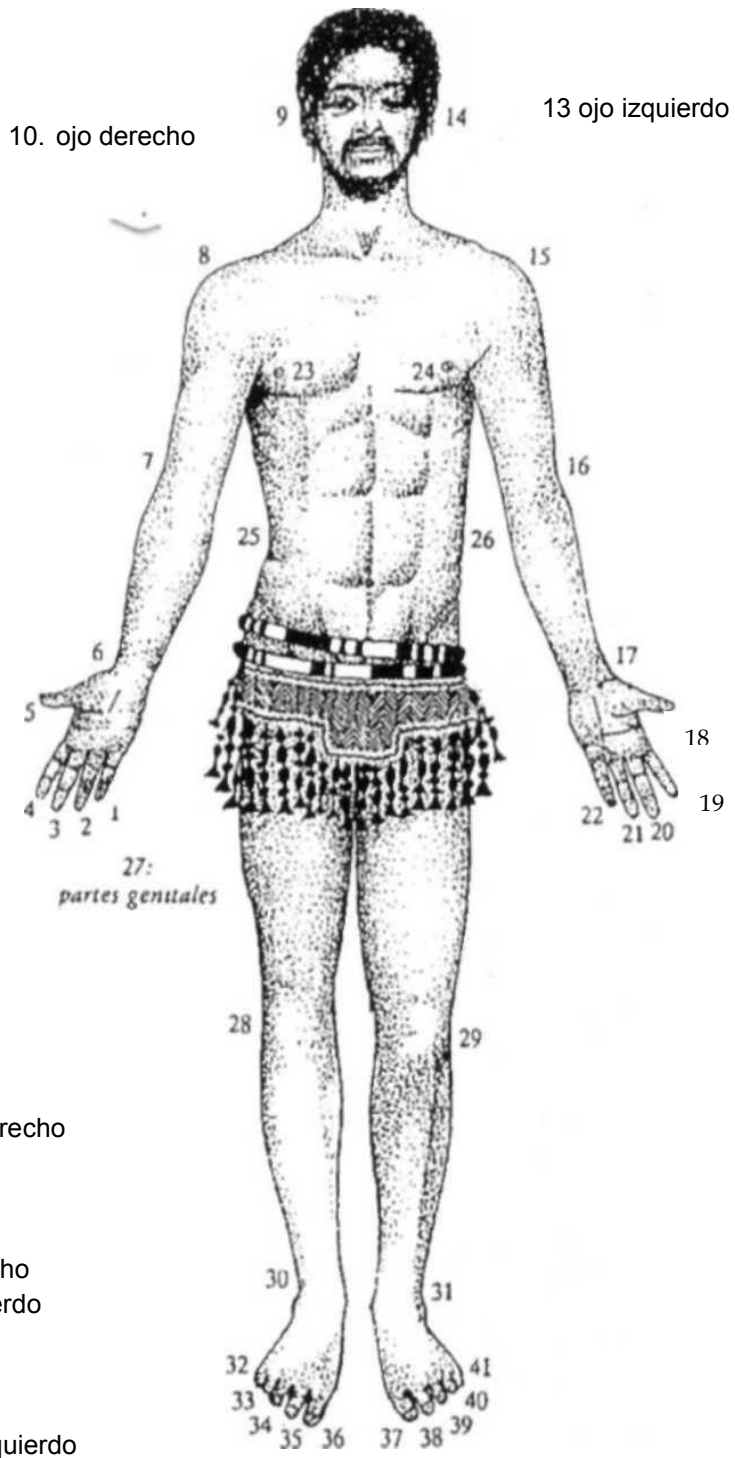
Uno de los emisarios del jefe recoge los dieciséis guijarros, pero se los cambian por una cantidad igual de palitos, más cómodos de transportar. El jefe comprueba seguidamente que sus mensajeros han asimilado y recordado todas sus instrucciones y los deja encaminarse al poblado de los sublevados.

Después de haber dado a conocer a los vencidos «el importe» de la multa que deben pagar, los emisarios proceden al recuento del botín.

Uno de ellos se adelanta y ordena a los habitantes del poblado que le den un collar de perlas cada vez que nombre una parte de su cuerpo. Entonces se toca sucesivamente el meñique, el anular, el dedo medio, el índice y el pulgar de la mano derecha. Le llevan un primer collar, luego un segundo, y así sucesivamente hasta el quinto. A continuación pasará a la muñeca, al codo, al hombro, a la oreja y al ojo derechos; lo que permite obtener por lo tanto cinco collares más. De este modo, al finalizar esta operación y sin concebir de forma abstracta el número exacto, habrá adquirido los diez collares solicitados.

Otro mensajero, por el mismo procedimiento, recoge doce pieles de animales y un tercero accede a los diecisiete cestos de alimentos exigidos.

1. meñique derecho
2. anular derecho
3. medio derecho
4. índice derecho
5. pulgar derecho
6. muñeca derecha
7. codo derecho
8. hombro derecho
9. oreja derecha
10. ojo derecho
11. nariz
12. boca
13. ojo izquierdo
14. oreja izquierda
15. hombro izquierdo
16. codo izquierdo
17. muñeca izquierda
18. pulgar izquierdo
19. índice izquierdo
20. medio izquierdo
21. anular izquierdo
22. meñique izquierdo
23. pecho derecho
24. pecho izquierdo
25. cadera derecha
26. cadera izquierda
27. partes genitales
28. rodilla derecha
29. rodilla izquierda
30. tobillo derecho
31. tobillo izquierdo
32. dedo pequeño del pie derecho
33. dedo siguiente del pie
34. dedo siguiente del pie
35. dedo siguiente del pie
36. dedo gordo del pie derecho
37. dedo gordo del pie izquierdo
38. dedo siguiente del pie
39. dedo siguiente del pie
40. dedo siguiente del pie
41. dedo pequeño del pie izquierdo



El cuerpo humano: origen de la aritmética
(técnica corporal utilizada por los Papúes de Nueva Guinea).

El hombre que controla el número de guerreros muertos en el combate entra entonces en acción y aparta uno de los dieciséis valiosos palitos. Después vuelven a realizarse las tres operaciones anteriores, tras lo cual aparta un segundo palito. Procediéndose de este modo hasta que ya no queden palos. Al comprobar que «el recuento está hecho», los mensajeros cogen el botín y regresan a su poblado.

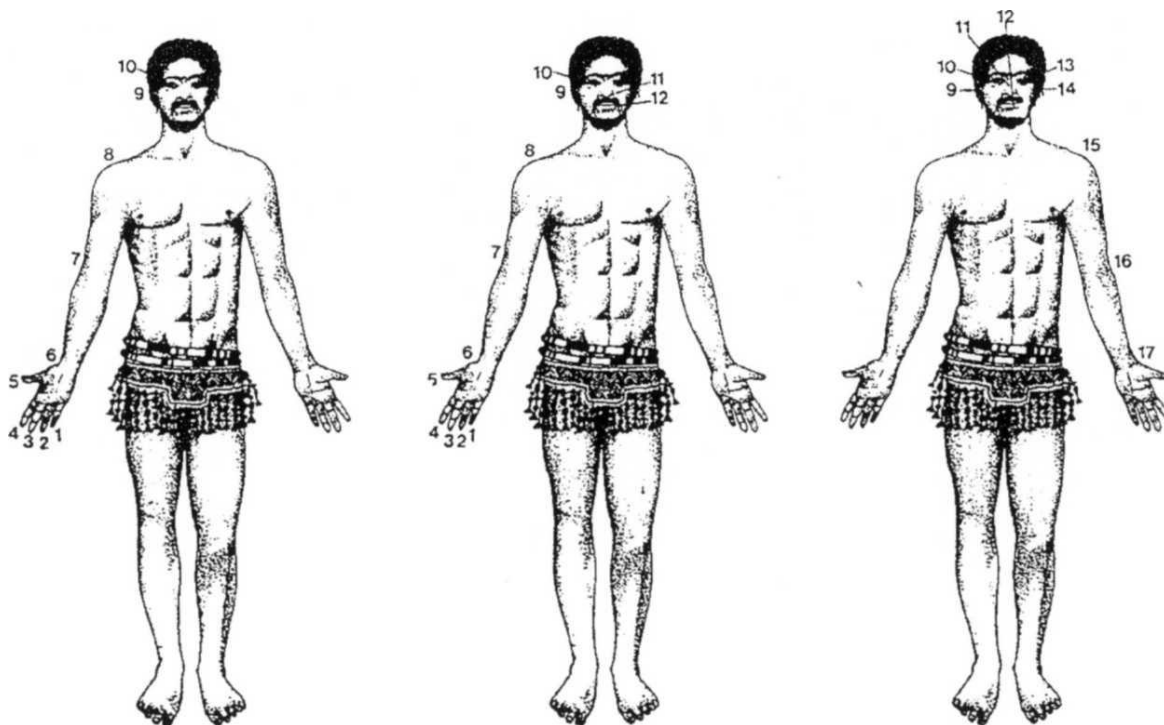
Como se puede ver, estos aborígenes no utilizan esta técnica corporal conforme a una idea completamente idéntica a la que nosotros podríamos tener.

Para nosotros, que sabemos contar de forma totalmente abstracta, el orden preestablecido de las distintas partes del cuerpo implicadas en esta operación constituye una serie aritmética propiamente dicha, y cada una de ellas se transforma en nuestro pensamiento en un auténtico «número de orden». Asimismo, para nosotros, cada una de estas referencias corporales consecutivas podrá ser característica de una determinada cantidad de seres, objetos, o elementos cualesquiera. Por ejemplo, para indicar, mediante ese procedimiento, el número de los días de la semana, no será necesario que recordemos que ésta incluye tantos días como referencias hay en la sucesión que va desde el dedo meñique hasta el codo del mismo lado. Bastará con dar el «número de orden» del último día de la semana señalando únicamente el codo derecho, pues éste por sí solo simboliza para nosotros la importancia numérica de cualquier colección formada por siete elementos.

Nosotros disponemos, es cierto, de una abstracción generalizadora que nos permite separar los conceptos propiamente dichos y, en particular, la noción de número. Pero esto no les sucede a los indígenas, que no son capaces de hacer abstracción de las diferencias individuales y cuya concepción todavía respeta demasiado la especificidad de las colecciones de que se trate. De hecho sólo conocen la correspondencia unidad por unidad y, exigiendo mucho a su memoria, sólo llegan a ello con movimientos consecutivos añadiendo o suprimiendo una o algunas unidades del conjunto inicial.

Por supuesto, estos hombres no tienen ninguna idea abstracta del número diez, por ejemplo. Pero saben que tocándose sucesivamente el dedo meñique, el anular, el medio, el índice y el pulgar de la mano derecha, y después, el codo, el hombro, la oreja y el ojo del mismo lado, harán que desfilen ante ellos tantos hombres, animales u objetos como referencias corporales haya en esa sucesión. Después de esta operación, recordaran perfectamente hasta que parte de su cuerpo ha llegado una cantidad de seres u objetos igual a dicho número. De tal modo que, repitiendo la misma operación, localizarán este número cuantas veces quieran.

Dicho de otro modo, este procedimiento es para ellos más que un medio simple y cómodo de obtener conjuntos-modelos con los que puedan emparejar término por término aquellas agrupaciones cuya totalidad desean alcanzar. Y cuando los indígenas fueron a pedir el tributo a los rebeldes esta es la única noción a la que recurrieron. Simplemente han emparejado término por término tres de estas agrupaciones tipo con diez collares de perlas, doce pieles de animales y diecisiete cestos de alimentos por cada uno de sus guerreros



mueren en combate.

Calculo de los 10 collares de perlas.

Cálculo de las 12 pieles de animales.

Cálculo de los diecisiete cestos de alimentos

Los indígenas no consideran como «número» a cada una de estas referencias corporales. Para ellos es más bien el último elemento de un conjunto tipo que concluye cuando termina una sucesión regulada de movimientos referidos a esas partes de su cuerpo.

Esto significa que para ellos, la simple designación de una de dichas partes no basta para caracterizar determinada cantidad de seres u objetos si no está acompañada de la serie de gestos correspondientes.

Y en una conversación que haga referencia a tal o a cual número, no pronunciarán un «nombre de número» propiamente dicho. Se limitarán a

enumerar, en el orden que sea necesario, determinado número de partes del cuerpo y se referirán simultáneamente a la sucesión de gestos asociados a ellas pues tal enumeración no basta para constituir una auténtica serie aritmética... Lo que obligará evidentemente a los interesados a mantener fijos sus ojos en el narrador. De todos modos, incluso con estos medios tan limitados, los indígenas han llegado sin saberlo a alcanzar números relativamente altos, puesto que en realidad han recogido:

16 x 10 = 160 collares de perlas,
16 x 12 = 192 pieles de animales
y 16 x 17 = 272 cestos de alimentos,
es decir, ¡seiscientos veinticuatro unidades en total!

El motivo es muy sencillo: es porque se les ha ocurrido relacionar las diferentes partes del cuerpo implicadas por sus operaciones con objetos concretos mucho más manejables. Los indígenas han «contado» correctamente los collares, las pieles y los cestos mediante su técnica corporal habitual; pero los soldados muertos en la batalla (factor determinante del tributo) han sido «contados» con guijarros o palitos...

Un calendario empírico

En el poblado, se disponen ahora a localizar nuevamente el día y el mes en el que deben celebrar una ceremonia religiosa de gran importancia. El brujo, que ha proclamado por la mañana la llegada de la Luna Nueva, acaba de comunicar, mediante una serie de gestos muy precisos, que la ceremonia se celebrará exactamente el décimo tercer día de la octava Luna, a partir de ese día.

Varios Soles y varias Lunas, ha dicho, deberán aparecer y después desaparecer antes de que llegue la fiesta. La Luna que acaba de nacer deberá llenarse primero y después vaciarse totalmente. Tendrá luego que renacer tantas veces como pueda hacerlo desde el dedo meñique de mi mano derecha hasta el codo del mismo lado. Luego el Sol deberá salir y ponerse tantas veces como pueda hacerlo desde el dedo meñique de mi mano derecha hasta mi boca. Sera entonces cuando salga el Sol bajo el que celebraremos juntos la ceremonia del Gran Tótem.

Evidentemente estas personas saben situarse en la sucesión de las Lunas. Cosa totalmente normal porque es el fenómeno natural más regular y más evidente después de la alternancia del día y de la noche. Y como ocurre con todos los calendarios empíricos, empiezan con el final de cada lunación

mediante la observación del primer creciente de la Luna Nueva. Por lo tanto van a poder «contar el tiempo» y llegar sin equivocarse a la fecha convenida, gracias a algunos procedimientos concretos que la tradición les ha legado y que sus antepasados imaginaron tras vanas generaciones de vacilaciones y reflexiones...

De acuerdo con la palabra del brujo, el jefe de la tribu dibuja sobre su propio cuerpo, con un producto colorante duradero, algunos signos apropiados que permitirán memorizar esta importante fecha y localizarla sin equivocarse. Primero marca las apariciones consecutivas que la Luna deberá hacer a partir de ese momento, mediante un pequeño círculo en el dedo meñique, anular, medio, índice, pulgar, y en la muñeca y el codo del brazo derecho.

Después señala los días que deberán pasar desde la llegada de la última Luna dibujando un pequeño trazo, primero en cada dedo de su mano derecha, Juego en la muñeca, el codo, el hombro, la oreja-y el ojo del mismo lado, para terminar en la nariz y la boca. Tras lo cual dibuja un gran trazo debajo de su ojo izquierdo, simbolizando así la llegada del día anunciado.

Al día siguiente, al ponerse el sol, el hombre designado por el jefe para «contar las Lunas» toma uno de esos huesos marcados con treinta muescas que utilizan cada vez que necesitan tener presentes los días de una misma Luna en el orden de su sucesión regular.

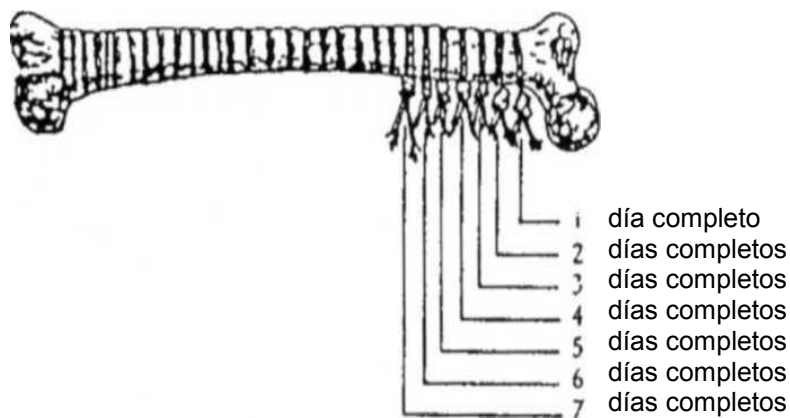
Después, ata una cuerdecilla alrededor de la primera muesca. Al final de la siguiente jornada, ata otra cuerdecilla alrededor de la segunda muesca y procede así cada noche hasta el final del mes. Cuando llega a la antepenúltima muesca, dirige una atenta mirada al cielo, hacia el punto en el que el sol acaba de ponerse; sabe que a partir de ese momento la aparición del primer creciente es inminente.

Pero ese día, el creciente de la Luna Nueva todavía no puede verse en el cielo. Y a la tarde siguiente se pone nuevamente en observación tras haber atado una cuerdecilla alrededor de la última muesca. Y aunque esa noche la situación del cielo no le permita descubrir la Luna Nueva queda declarada la llegada del nuevo mes. Entonces traza un pequeño círculo en su dedo meñique derecho, expresando así que acaba de concluir una lunación.

A la tarde siguiente, el hombre coge otro hueso parecido y ata una cuerdecilla alrededor de la primera muesca. A la tarde siguiente repite la misma operación sobre la segunda muesca y así sucesivamente hasta que concluye la segunda lunación. Pero al acabar ese mes, sabe que a partir de ese momento, ya no necesita escudriñar el cielo para observar el nacimiento efectivo de la

nueva Luna. Sus antepasados han observado desde hace mucho tiempo que una lunación se termina alternativamente en la antepenúltima y la última muesca de su hueso. Y no se han equivocado demasiado porque la duración media de una lunación es de aproximadamente veintinueve días y doce horas.

El hombre procede pues de este modo, considerando sucesivamente meses alternos de veintinueve y de treinta días hasta la llegada de la última Luna, ocasión en la que dibuja un pequeño círculo en su codo derecho. Después, tras haber comprobado que hay tantos círculos en su tatuaje como en el de su jefe, sabe que su tarea ha concluido pues el «recuento de las Lunas» acaba de terminarse.



A partir de entonces, el responsable del poblado será quien se encargue de «contar» el tiempo o más bien los días que faltan para llegar a la fecha convenida. Pero en lugar de proceder como el hombre anterior, atando cuerdecillas a las muescas de un hueso, contará esos días con las partes de su propio cuerpo.

Los indígenas celebrarán la ceremonia del Gran Tótem cuando su jefe llegue a su ojo izquierdo, tras haber tachado sucesivamente, durante los doce primeros días de la octava Luna, cada uno de los doce pequeños trazos que había trazado anteriormente sobre su cuerpo desde el dedo meñique derecho hasta su boca.

Estos métodos (de los que poseemos varios testimonios entre los indígenas de Australia, por ejemplo) señalan una superioridad evidente sobre procedimientos elementales como el uso de las muescas o los montones de guijarros que sólo tienen en cuenta el emparejamiento. Ya no utilizan simplemente el principio de la correspondencia unidad por unidad, sino que introducen también la relación tan importante de la sucesión. La noción de orden ya está aquí presente aunque realmente no lo sepan. Se trata, pues, de un

empezaba una nueva etapa cada vez que una oveja pasaba ante él. Y cuando el último animal hubo desfilado ante sus ojos, retuvo definitivamente la palabra correspondiente que a partir de ese momento simbolizaría para él la importancia numérica del rebaño.

Hay que aclarar que este pastor era muy supersticioso. Estaba atormentado por el temor ancestral del «pecado de la enumeración» que está expresado en el conocido adagio: «Una vez contados los niños o las ovejas, el lobo se los come.»

Todavía muy difundida en nuestros días, esta vieja creencia (uno de cuyos vestigios es la superstición referente al 13) expresa en efecto el temor y la repugnancia que, desde tiempo inmemorial, han tenido (y siguen teniendo a veces) las tradiciones populares hacia el número y el arte de contar.

Por ejemplo, en África muchas chozas sólo tienen una entrada: por lo tanto hay que avisar a todos los que van a dormir en ella que no cometan la imprudencia de acostarse con los pies hacia afuera porque los espíritus malignos de la noche, que tienen la afición de contar todo lo que se encuentran, no tardarían nada en contar los dedos de sus pies y se lo llevarían en el acto.

Según la misma creencia, los números no sólo expresan cantidades aritméticas; también contienen ideas y fuerzas desconocidas para la mayoría de los mortales. Fuerzas unas veces benéficas y otras maléficas, que pueden desplazarse en una corriente invisible, un poco como un río subterráneo. Así pues, convendría no emplearlas de forma inadecuada. Si bien se puede contar sin inconvenientes elementos que no nos conciernen directamente (como por ejemplo los seres u objetos de otros), hay que evitar en cambio, expresar los números que se refieran a seres queridos o a cosas que nos atañen directamente, ya que nombrar una entidad, es permitir su delimitación. Por lo tanto nunca habrá que pronunciar el número de hermanos, esposas o hijos, ni el de bueyes, ovejas o casas, así como tampoco la edad o la cantidad total de bienes, porque al hacerlo se les podría dar a los espíritus del Mal la idea de aprehender la fuerza escondida de esos números y darles por lo tanto la posibilidad absoluta de actuar sobre las personas o las cosas enumeradas...

Por pura superstición, el pastor había adoptado este recitado para poder determinar el número de animales que tenía y al mismo tiempo conjurar la mala suerte. Esta letanía, es cierto, era para él como una especie de «máquina de calcular» que poseía simultáneamente dos virtudes protectoras: se trataba de los siete versículos de la *fatiba* («la obertura»), con los que comienza el Corán y que todo musulmán debe saber de memoria y recitar por riguroso orden de sucesión.

Independientemente de cualquier consideración religiosa o supersticiosa, este pastor utilizaba esta letanía un poco como los niños utilizan hoy esas canciones que recitan para designar, por la sucesión de las sílabas correspondientes, a aquel o aquellos que deben desempeñar un papel particular en sus juegos (¡y que los soldados germanos recitaban para diezmar a sus prisioneros!).

Dichas cancioncillas empiezan generalmente por «uno, dos, tres», Seguidamente contienen dos o varias fórmulas de tres sílabas y se terminan con la repetición de los tres primeros nombres de los números o por una frase que significa «escápate» o «y después se va». Muchas de ellas se han deformado con el uso, hasta el punto de resultar incomprensibles. Pero a veces puede encontrarse de nuevo la fórmula originaria, como por ejemplo en la canción infantil siguiente:

Am, stram, gram
Piké, piké, kollégram
Bouré, bouré, ratatam,
Am, stram, gram.

Que es una antigua cancioncilla germánica deformada en boca de los niños franceses y cuya traducción es:

«Una, dos, tres,
Vuela, vuela,
abejorro, Corre, corre, jinete.
Uno, dos, tres.»

Estas canciones infantiles, que muchas veces corresponden a antiguas fórmulas mágicas, también son, sin duda, un vestigio del antiguo temor místico a los números. Seguramente fueron inventadas por quienes cuidaban niños o por pastores supersticiosos que habían encontrado en ellas una manera cómoda de contar niños o animales preservándoles de la mala suerte.

Otra forma de contar oralmente sin decir los nombres de los números es la de un niño inadaptado que conocí hace algunos años. Tenía la costumbre de enumerar las cosas y los seres de su entorno pronunciando en este orden los siguientes nombres propios: André, Jacques, Paul, Alain, Georges, Francois, Gérard, Robert... Y es que en el dormitorio su compañero Andre ocupaba siempre la primera cama, Jacques la segunda, Paul la tercera, Alain la cuarta, y así sucesivamente. Este orden invariable de sucesión había quedado fijado en su memoria visual y se había transformado en su mente en orden numérico.

Asimismo, una niña a quien le habían dado caramelos se puso a contarlos mediante la conocida serie de: enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio, julio... La niña también hubiera podido utilizar la sucesión de las letras del alfabeto (A, B, C, D, E, F, G...), hasta tal punto es cierto que una serie de palabras o de símbolos se convierten en una especie de «máquina de calcular», una vez dispuestas en un orden riguroso previamente establecido. Exactamente lo mismo sucede en lo que respecta a las referencias corporales.

El cuerpo humano, origen de la aritmética

Cuando se acostumbra a considerar cierto número de partes del cuerpo humano en un orden previamente establecido que siempre es el mismo, su sucesión, por la fuerza de la memoria y de la costumbre, acaba tarde o temprano siendo numérica y abstracta.

Las referencias correspondientes (sobre todo las primeras que son las más corrientes en la práctica) evocan cada vez menos las simples partes del cuerpo para suscitar más fuertemente en la mente la idea de cierta serie de números. Tienden pues a separarse de su contexto para poder ser aplicables a seres, objetos o cualesquiera otros elementos. Esta es la razón de que las técnicas corporales del número tengan tanta importancia en la historia universal de la aritmética. Sin duda han sido ellas las que hicieron que nuestros lejanos antepasados tuvieran conciencia de la noción de orden, que estaba destinada a desempeñar un papel esencial tanto en las matemáticas como en cualquier otra ciencia. Por ello, dichas técnicas han permitido a nuestros antepasados adquirir poco a poco la facultad de contar y les han abierto la vía a una auténtica comprensión de los números abstractos. Sin ellas, nuestros procedimientos numéricos probablemente no hubieran superado la etapa de las técnicas elementales del emparejamiento.

Mientras el ser humano recurra al artificio de la enumeración abstracta, las diferentes partes de su cuerpo estarán ahí para recordarle el origen humano, exclusivamente antropomórfico, de esa etapa, indudablemente la más decisiva de su evolución mental.

Contar; una facultad humana

Contrariamente a la percepción directa de los números, contar no es una aptitud natural. Hemos visto que algunas especies animales están más o menos dotadas de una suena de sensación numérica. Pero esto no implica que sepan contar como nosotros. Hasta donde alcanza nuestro conocimiento, contar, en

efecto, es un atributo exclusivamente humano: tiene que ver con un fenómeno mental muy complejo, íntimamente ligado al desarrollo de la inteligencia.

«Contar» los objetos de una colección, es atribuir a cada uno de ellos un símbolo (una palabra, un gesto o un signo gráfico por ejemplo) que corresponde a un número sacado de la «serie de los números naturales» empezando por la unidad y procediendo por orden hasta el cumplimiento de los elementos de dicha colección.

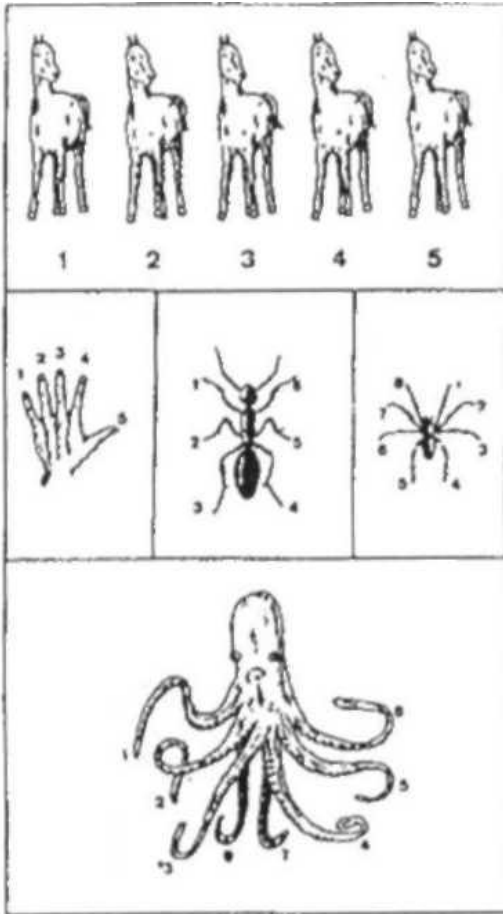
En la colección, así transformada en procesión, cada símbolo será el número de orden del elemento al que haya sido atribuido. Y el «número de los que forman ese conjunto» será precisamente el número de orden de su último elemento. Pongamos, por ejemplo, una caja con veinte bolas. A primera vista diremos que dicha caja contiene varias bolas, pero como eso no es muy preciso, recurrimos al recuento para conocer su número exacto.

Se saca entonces una bola completamente al azar y se le atribuye el «número 1», luego otra, a la que se le atribuye el «número 2», y así sucesivamente hasta que ya no queda ninguna bola en la caja. Al sacar la última bola, que recibirá el «número 20», diremos sin ambigüedad que había veinte bolas en la caja. Habremos transformado un dato impreciso en una información muy exacta.

He aquí ahora un conjunto de puntos dispuestos de forma desordenada. Como es natural, nuestra visión global de los números no nos sirve de nada: no se puede reconocer a primera vista la cantidad exacta de dichos puntos. Tenemos que recurrir al recuento. Para esto, bastará con unir los puntos por una línea «en zigzag», pasando sucesivamente de un punto al siguiente: así, no olvidaremos ninguno ni volveremos nunca sobre algún punto ya considerado. Estos puntos formarán eso que se ha dado en llamar una cadena. Se atribuirá seguidamente un número de orden a cada uno de sus elementos a partir de uno de los puntos extremos. El número del punto terminal de dicha cadena nos dará el número de puntos de que se trate.

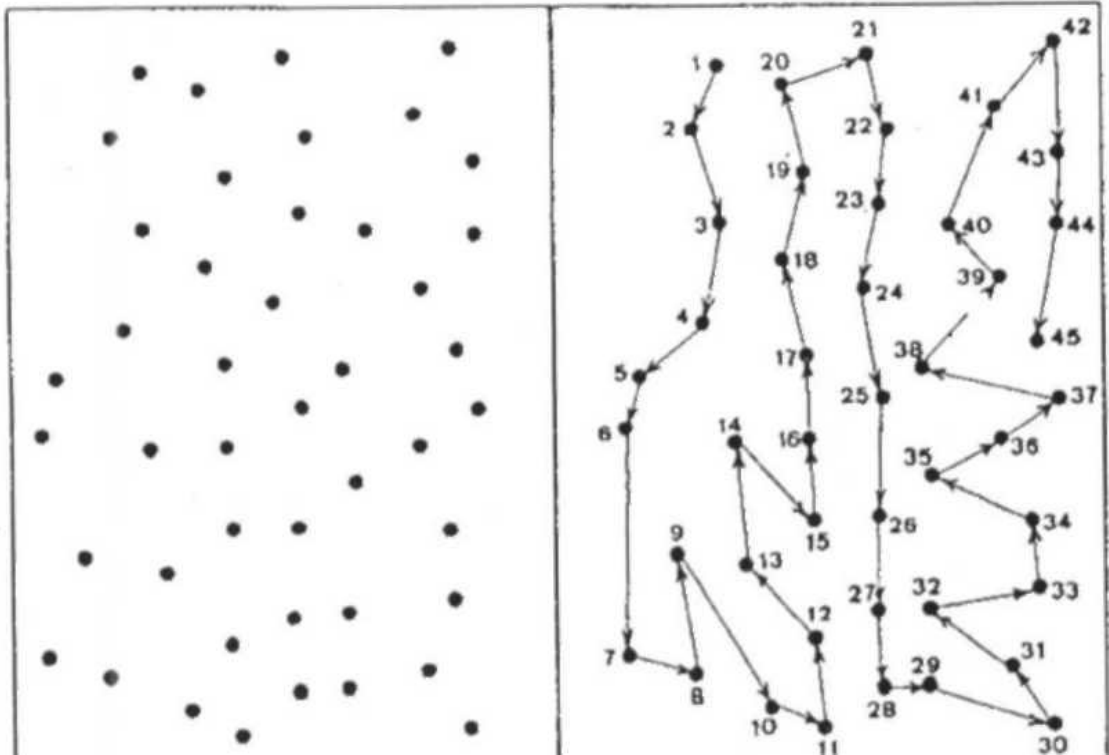
Gracias al artificio del recuento, una noción confusa, heterogénea y mal precisada —la pluralidad concreta— se transformará en nuestro espíritu en una noción abstracta y homogénea, la de la cantidad absoluta.

Cualquiera que sea el elemento por el que se inicie la enumeración, este proceso siempre conducirá al mismo resultado: el número de elementos de una colección es totalmente independiente del orden de la «numeración» de sus elementos.



◀ Recuento que permite el paso de la pluralidad concreta al número abstracto.

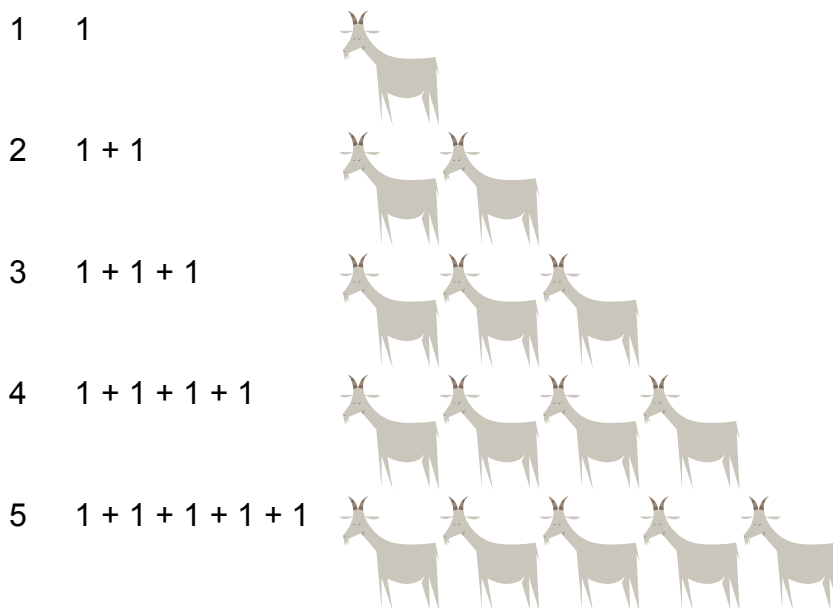
Recuento de una «nube» de puntos.



En realidad para que un hombre sepa contar y concebir los números tal y como nosotros lo entendemos se requieren tres condiciones psicológicas:

- debe poder asignar un «rango» a cada ser que desfila ante él;
- debe ser capaz de intervenir para introducir en la unidad que pasa el recuerdo de todas las que le han precedido;
- debe saber convertir dicha sucesión en simultaneidad.

Para que el arte del cálculo abstracto pueda progresar, la comprensión de los números exige su «clasificación en un sistema de unidades numéricas jerarquizadas que encajan entre sí de manera consecutiva». Esta organización de los conceptos numéricos según un orden invariable de sucesión consiste en esta idea que hace aparecer los números naturales como verdaderas colecciones de unidades abstractas, obtenidas sucesivamente, a partir de «uno»; por el añadido suplementario de una unidad. En realidad, todo elemento de la serie regular de los números naturales distinto de «uno» se obtiene añadiendo una unidad al número que le antecede en esta procesión natural. Es lo que se llama el principio de recurrencia. De ello se deduce que, según la expresión del filósofo alemán Schopenhauer, «todo número entero natural presupone que los anteriores son la causa de su existencia», Es decir que nuestro espíritu sólo puede concebir un número bajo el ángulo de la abstracción si ya ha asimilado los anteriores: si se carece de esa capacidad intelectual, los números se convierten en el espíritu del hombre en nociones globales bastante confusas.



La generación de los números naturales por el llamado procedimiento de la «recurrencia».

La cuestión del concepto numérico, que ha podido parecer a primera vista elemental, se muestra mucho más complicada a partir de ahora. La anécdota siguiente referida por Paul Bourdin, refuerza esta observación:

Conocí a una persona, decía, que al dormirse, oyó dar las cuatro e hizo la siguiente cuenta: ¡Una, una, una, una! Y ante lo absurdo de su planteamiento, exclamó: ¡Este reloj se ha vuelto loco, ha dado cuatro veces la una!

Los dos aspectos del número natural

La noción de número reviste dos aspectos complementarios: uno, llamado *cardinal* que sólo se basa en el principio del emparejamiento, y el otro, llamado ordinal, que exige a la vez el procedimiento del acopiamiento y de la sucesión.

Establezcamos la diferencia con un sencillo ejemplo. El mes de enero tiene treinta y un días. El número 31 indica aquí el número total de días de ese mes; es, pues, un número cardinal. Si, por el contrario, consideramos una expresión como «el 31 de enero», el número 31 en esta ocasión no está utilizado bajo el aspecto cardinal, y esto a pesar de la terminología que por lo demás no es más que un abuso del lenguaje consagrado por el uso. Este concepto más bien designa «el trigésimo primer» día del mes de enero: especifica el rango de un elemento muy determinado (en este caso, el último) de un conjunto que contiene treinta y un días; estamos ante un número ordinal (o como se suele decir, un número).

«Hemos aprendido a pasar con tanta facilidad del número cardinal al número ordinal que ya no distinguimos estos dos aspectos del número natural. Cuando queremos determinar la pluralidad de los objetos de una agrupación, es decir, su número cardinal, ya no estamos sujetos a la obligación de encontrar un conjunto-modelo al que podamos compararle, simplemente lo «contamos». Y nuestros progresos en matemáticas se deben a que hemos aprendido a identificar los dos aspectos del número.

En efecto, mientras que en la práctica el número cardinal es el que realmente nos interesa, dicho número es incapaz de servir de base a una aritmética pues las operaciones aritméticas están fundadas en la hipótesis tácita de que siempre podemos pisar de un número cualquiera a su sucesor. Ahora bien, en esto consiste la esencia misma del concepto del número ordinal. El emparejamiento, por sí solo, es incapaz de crear cálculo. Sin nuestra facilidad para disponer los seres y los objetos según la sucesión natural, se habría progresado muy poco. Nuestro sistema numérico está íntimamente impregnado

de estos dos principios, el de la correspondencia y la sucesión, que constituyen el tejido de todas las matemáticas y de todos los ámbitos de las ciencias «exactas» (T. Dantzig¹).

Diez dedos para aprender a contar

Precisamente, gracias a los diez dedos, el ser humano ha adquirido gradualmente todas esas premisas necesarias. No es por casualidad por lo que nuestros escolares siguen todavía contando de esta forma e incluso nosotros mismos a veces recurrimos a esos gestos para dar más énfasis a lo que pensamos.

Pongamos el caso de un niño pequeño. Mientras no haya alcanzado un grado suficiente de desarrollo que le permita contar con sus dedos, seguirá balbuceando. Por el contrario, en cuanto alcanza esa fase (esto se produce generalmente entre los tres y los cuatro años), está capacitado para contar de forma abstracta y dentro de poco podrá acceder a un verdadero aprendizaje del cálculo. Los pedagogos dicen que a esa edad el niño está en la fase intelectual del «pre-cálculo».

En efecto, a partir de esa edad apunta en él la capacidad real de aprendizaje de la aritmética que le permitirá primero contar hasta diez y después ampliar progresivamente la serie regular de los números a medida que va accediendo a lo abstracto.

En un librito de recuerdos sobre la infancia de sus hijos, Georges Duchamel cuenta cómo Bernard, llamado «Baba», antes incluso de conocer los nombres de cada número propiamente dicho, ya poseía al menos, gracias a sus dedos, una idea de la sucesión regular de los números enteros naturales y de la propiedad de la recurrencia:

«Los principios son duros. Baba hace lo que puede. Declara:

—Vengo a buscar caramelos. Dadme para todos.

—¿Cuántos?

—Uno, uno y uno.

Está claro, pero todavía no es la aritmética verdadera.

Entonces, aprende a contar con los dedos. Cuando le preguntan su edad, la edad de Maryse, la edad de Robert, muestra con bastante exactitud un mayor

¹ Le Nombre, language de la science. A. Blanchard, Paris, 1974.

o menor número de dedos. Primero una mano, luego la otra. Y de pronto, las cosas se complican:

— ¿Qué edad tiene Jacqueline?

Se abstrae por unos momentos y responde:

— ¡Ah, para Jacqueline necesito el dedo pequeño del pie!»

Entre las técnicas corporales del número, los dedos de la mano han desempeñado un papel determinante. La humanidad entera ha aprendido a contar abstractamente hasta cinco con los dedos de una mano y luego ha prolongado la serie hasta diez por simetría con los dedos de la otra, antes incluso de poder extender indefinidamente la sucesión regular de los números enteros naturales. De hecho en muchas lenguas hay rastros indudables de este origen antropomórfico de la facultad de contar.

En la lengua *Ali* de Centroáfrica, los números cinco y diez se dicen, respectivamente, *moro* y *mbuna*; el sentido etimológico de la primera palabra es «la mano» y la segunda proviene de una contracción de *moro* («cinco») y de *buna*, que quiere decir «dos» (así pues: *diez* = «dos manos»). En la lengua *Bugilai* de Nueva Guinea, los nombres de los cinco primeros números también llevan, por así decirlo, la misma huella digital: 1 se dice *tarangesa* (literalmente: «de la mano izquierda, el dedo meñique»), 2 es *meta kina* («el dedo siguiente»), 3 se expresa mediante *guigimeta-kina* («el dedo de en medio»), 4 se dice *topea* («el índice») y el nombre de 5 es *manda*, (que quiere decir «el pulgar»).

Podría muy bien ocurrir que las palabras indoeuropeas, semíticas o mongolas actuales para los diez primeros números naturales, también hayan sido hace ya mucho tiempo nombres relacionados con alguna técnica digital del número (pero se trata de una simple hipótesis imposible de comprobar, pues el verdadero significado de los nombres originales correspondientes se ha perdido en la noche de los tiempos).

La mano del hombre posee, es verdad, innumerables recursos en la materia. Constituye una especie de «instrumento natural», particularmente diseñado para tomar conciencia de los diez primeros números y el aprendizaje de la aritmética elemental.

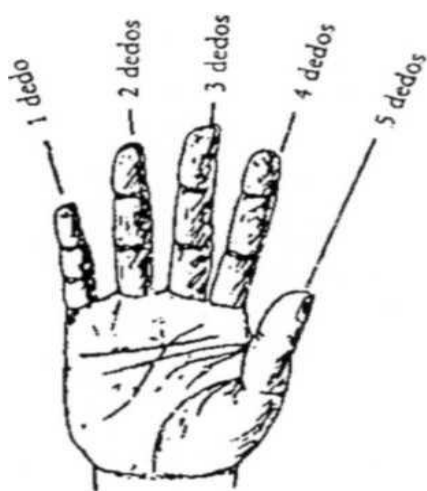
Debido a su número de dedos y gracias a su relativa autonomía, así como a su gran movilidad, la mano forma la colección de conjuntos-modelo más simple que el hombre haya tenido, por así decirlo, a mano.

Por la disposición disimétrica de sus dedos, la mano respeta perfectamente la limitación (a cuatro) de la capacidad humana de reconocimiento inmediato y visual de los números: el pulgar se aparta considerablemente del índice y permite así una verdadera oposición de los otros cuatro dedos. Esto, evidentemente, proporciona a los cinco primeros números una serie reconocible a primera vista. De manera que el número cinco se impone por sí mismo como unidad de cuenta junto a la decena.

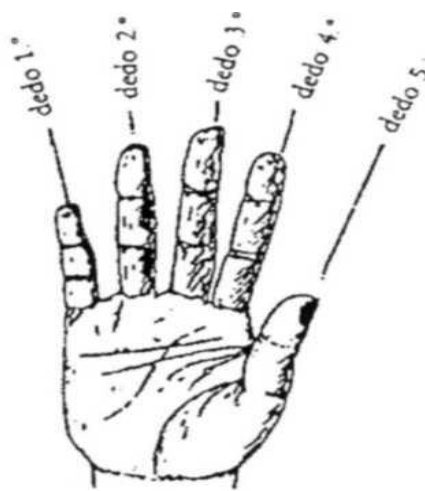
Por último, debido a la especificidad de cada uno de sus dedos, la mano también puede ser contemplada como una verdadera sucesión de unidades abstractas obtenidas consecutivamente a partir de la primera por el añadido suplementario de una unidad.

Es como decir que con la mano, los dos aspectos complementarios del número natural se hacen completamente intuitivos. La mano actúa en esta circunstancia como un instrumento que permite pasar insensiblemente del número cardinal al número ordinal correspondiente (o a la inversa). ¿Se quiere indicar que una colección incluye tres, cuatro, siete o incluso diez elementos? Se levantan o se doblan *simultáneamente* tres, cuatro, siete o diez dedos y se les utiliza como un modelo cardinal. ¿Se quieren contar esos mismos elementos? Se levantan o se doblan sucesivamente tres, cuatro, siete o diez dedos y entonces se les utiliza como un sistema ordinal.

La mano del hombre se presenta como la «maquina de calcular» más sencilla y más natural que existe. Por esta razón, desempeñará posteriormente un importante papel en la génesis de nuestro sistema de numeración.



Aspecto Cardinal



Aspecto Ordinal

La invención de la base

Cuando el ser humano accedió a la abstracción numérica y comprendió la sutil diferencia que existe entre el número cardinal y el número ordinal, volvió a coger sus antiguos «utensilios» (guijarros, palitos, rosarios de cuentas, palos con muescas, cordeles con nudos, etc.). Pero esta vez los consideró desde el punto de vista del recuento. De este modo, estos simples intermediarios materiales se convirtieron en auténticos *símbolos numéricos*, mucho más cómodos para asimilar, recordar, diferenciar o combinar números naturales.

Después aprendió a concebir conjuntos cada vez más amplios. Pero entonces tropezó con nuevas dificultades: para representar números más elevados, evidentemente no podemos multiplicar indefinidamente guijarros, palitos o cordeles con nudos, tampoco podemos ampliar a voluntad el número de dedos de la mano ni el de ninguna parte del cuerpo, como tampoco se puede repetir una misma palabra de forma ilimitada, ni crearse indefinidamente nuevos nombres de números o nuevos símbolos. Imaginemos simplemente todos los nombres que deberíamos saber de memoria o todos los símbolos que deberíamos utilizar para expresar simplemente la cantidad de céntimos igual al valor de un billete de quinientos francos.

A partir de ahí, el ser humano se encontró ante un problema que a primera vista parecía insuperable: ¿cómo designar (concretamente, de palabra o más adelante, por escrito) *números elevados con la menor cantidad posible de símbolos?*

Diez, la base más generalizada

En algunas regiones de África occidental, aun no hace mucho tiempo, los pastores tenían una costumbre muy práctica para calcular un rebaño. Hacían desfilar a los animales unos detrás de otros. Cuando pasaba el primero, ensartaban una concha en una tira blanca, y otra cuando pasaba el segundo, y así sucesivamente. Al llegar al décimo animal deshacían el collar y ensartaban una concha en una tira azul que asociaban a las decenas. Después, encartaban de nuevo conchas en la tira de cuero blanca hasta llegar al vigésimo animal, y entonces ensartaban una segunda concha en la tira azul. Cuando había ya diez conchas es que habían pasado cien animales; entonces deshacían el collar de las decenas y ensartaban una concha en una tira roja reservada para las centenas. Y así sucesivamente hasta que se acababa el recuento de los animales. Al llegar a los doscientos cincuenta y ocho animales, por ejemplo, habría ocho conchas en la tira blanca, cinco en la tira azul y dos en la tira roja.

Pero no vayamos a creer que el razonamiento de estas gentes era «primitivo»: Todavía contamos siguiendo el mismo principio que ellos, pero con símbolos diferentes.

La idea fundamental de este procedimiento reside en el predominio de la agrupación por *decenas* (o por paquetes de diez unidades), por *centenas* (o decenas de decenas), etc.

En esta técnica concreta, cada concha de la tira blanca vale una unidad simple, mientras que cada concha de la segunda o la tercera tira señala una agrupación de diez o cien unidades. A esto se le llama en el lenguaje de los matemáticos «emplear la base diez». En las lenguas indoeuropeas, semíticas o mongolas, los nombres de números están contruidos generalmente sobre una base decimal.

Consideremos, por ejemplo, la numeración oral china que no contiene ninguna anomalía. A cada número inferior o igual a diez le corresponde un nombre individual:

<i>yí</i>	<i>ér</i>	<i>san</i>	<i>si</i>	<i>wú</i>	<i>liú</i>	<i>qí</i>	<i>bá</i>	<i>jiú</i>	<i>sbi</i>
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Los nueve primeros son las «unidades del primer orden decimal» y el último es «la base» del sistema (que señala una «unidad del segundo orden»).

Para designar un número superior a diez, se agrupan las unidades por paquetes de diez:

11	<i>shí-yí</i> («diez-uno»)	20	<i>ér-shí</i> («dos-diez»)
12	<i>shí-ér</i> («diez-dos»)	30	<i>sán-shí</i> («tres-diez»)
13	<i>shí-sán</i> («diez-tres»)	40	<i>si-shí</i> («cuatro-diez»)

Si el número de decenas es superior o igual a diez se las agrupa a su vez por paquetes de diez y se obtienen las centenas (o «unidades del tercer orden»):

100	<i>bái</i>
200	<i>ér-bái</i> («dos-cien»)
300	<i>san-bái</i> («tres-cien»)

Agrupando las centenas por paquetes de diez, se obtienen los miles (o «unidades del cuarto orden»):

1000	<i>qián</i>
2000	<i>ér-qián</i> («dos-mil»)
3000	<i>sán-qian</i> («tres-mil»)

.....

A continuación vienen las decenas de mil o «unidades del quinto orden» (diez mil se dice *wán* en chino), y así sucesivamente.

A partir de ese momento los nombres de los números intermedios se componen partiendo de los anteriores conforme a las potencias decrecientes de diez:

53 781: wú wán san qián qí bái jiū-shí yī
(«cinco-diez mil») («tres-mil») («siete-cien») («ocho-diez») («uno»)

Nuestra numeración escrita actual también se apoya en la base diez, pero utiliza los siguientes símbolos gráficos (a los que normalmente se da el nombre de «cifras árabes»):

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Los nueve primeros números representan las unidades del primer orden y el décimo el concepto «cero». La base diez, que es el primer número representado mediante dos cifras, se escribe 10 (lo que significa: «*una* decena y *cero* unidades»). A continuación se representan los números de uno a noventa y nueve combinando sucesivamente dos de esas diez cifras:

11	(« <i>una</i> decena y <i>una</i> unidad»)
12	(« <i>una</i> decena y <i>dos</i> unidades»)

.....

20	(« <i>dos</i> decenas y <i>cero</i> unidades»)
30	(« <i>tres</i> decenas y <i>cero</i> unidades»)

.....

99	(« <i>nueve</i> decenas y <i>nueve</i> unidades»)
----	---

La centena, que equivale al cuadrado de la base diez, se escribe 100 («*una* centena, *cero* decenas y *cero* unidades»): es el número menos elevado representado mediante tres cifras. Los números de ciento uno a novecientos noventa y nueve se escriben combinando sucesivamente tres de las diez cifras fundamentales:

101 («*una* centena, *cero* decenas y *una* unidad»)
358 («*tres* centenas, *cinco* decena y *ocho* unidades»), etc.

A continuación viene el millar que equivale al cubo de la base y que se escribe bajo la forma 1 000 («*un* millar, *cero* centenas, *cero* decenas y *cero* unidades»), luego ¡a decena de mil, que se escribe 10 000. Y así sucesivamente.

La base diez ha sido sin duda alguna, y continua siéndolo, la más difundida a lo largo de la historia, y su adopción es hoy en día prácticamente universal.

¿Se debe ello a sus ventajas prácticas o matemáticas? Evidentemente, no.

La base decimal presenta, desde luego, una clara ventaja sobre bases tan elevadas como la treinta o ¡a base sesenta por ejemplo, pues corresponde a un orden de magnitud aceptable para la memoria humana: los nombres de números o los símbolos de base que requiere no son muy numerosos, y una tabla de sumar o de multiplicar puede aprenderse de memoria sin mucha dificultad. La base decimal es asimismo mejor que bases tan pequeñas como dos o tres, ya que evita cualquier esfuerzo considerable de representación: mientras que en nuestra numeración escrita, el número dos mil cuatrocientos cincuenta y dos se escribe sólo con cuatro cifras (2 452), en un sistema de base dos (dado que dicho sistema no tiene más que dos cifras: 1 y 0) se expresaría con doce cifras (¡100110010100!).

Pero desde este punto de vista, lo mismo hubieran podido servir otros muchos números e incluso mejor que la decena.

En efecto, no habría ningún inconveniente en cambiar de «escala» y contar con otra base. Hay bases como siete, ocho, once, doce o trece que proporcionarían órdenes de magnitud tan adecuados para la memoria humana como la decena. En cuanto a las operaciones aritméticas, podrían realizarse en dichos sistemas siguiendo técnicas totalmente análogas a las que realizamos actualmente con la base decimal. Pero tendríamos que perder la costumbre de dar prioridad a la decena y a sus potencias, porque las denominaciones o los símbolos correspondientes resultarían inútiles en un sistema en el que se contase por ejemplo por docenas y potencias de doce...

Si hubiera que realizar alguna vez una reforma completa de nuestros sistemas de numeración y confiar dicha tarea a un grupo de expertos, probablemente asistiríamos a una interminable disputa entre especialistas, con la sempiterna oposición entre lo práctico y lo teórico:

- Lo que necesitamos actualmente es una base matemáticamente satisfactoria, diría uno.

- De ninguna manera, respondería el otro. Los mejores sistemas son aquellos cuya base contiene el máximo de divisores. Y de dichas bases la docena me parece la más adaptable, si consideramos las limitaciones de la memoria humana. Mientras que nuestra base diez tan sólo es múltiplo de dos y de cinco, la base doce es divisible a la vez por 2, 3, 4 y 6. Y precisamente ahí es donde reside el principal interés del sistema *duodecimal*. Piense en los calculadores y en los comerciantes, que estarían contentísimos de poseer esta forma de contabilidad y de cálculo: Ello les suspondría poder tomar con bastante facilidad la mitad, el tercio, la cuarta e incluso la sexta parte de dicha base. Y estas fracciones son tan naturales y de uso tan corriente que todos las usamos sin darnos cuenta. Pero esto no es todo, imagínese las ventajas que también se podrían obtener para los cálculos relativos a la división del tiempo: un año contendría en meses un número igual a dicha base; un día valdría en horas el doble de esa misma base; una hora correspondería en minutos a cinco veces esta base y un minuto valdría lo mismo en segundos.

Piense también en lo cómodo que sería para los geómetras poder medir los arcos y los ángulos en grados que valiesen cinco veces su base en minutos, y en minutos que valiesen otro tanto en segundos. La medida del círculo completo sería en ese caso igual a treinta veces la base doce, lo que daría para un ángulo una medida igual a quince veces la base. Por último, imagínese a los astrónomos pudiendo medir la eclíptica siguiendo una división en treinta partes iguales a la base doce. Por no hablarle de Mme. Soleil, que podría calcular tranquilamente sus horóscopos sobre dicha base y considerar los signos del zodiaco en número igual a la base de esta numeración.

- Se equivoca usted, diría el teórico. El principal interés de una numeración estriba en que permita a sus usuarios una representación simple y sin ambigüedad alguna de los números enteros o fraccionarios. Lo que habría que adoptar es una numeración basada en un número primo, es decir en una base cuyo único y exclusivo divisor fuese ella misma. Pondré como ejemplo la numeración de base *once*. Esta sería mucho más ventajosa que las bases diez y doce, puesto que en ella las fracciones serían generalmente *irreducibles*. Y sólo tendría una única y exclusiva representación. Por ejemplo, el número que representamos mediante la notación 0,68 en nuestro sistema decimal corresponde al mismo tiempo a las fracciones 68/100, 34/50 y 17/25: *en una numeración con una base siete, once o en general con un número primo tales ambigüedades desaparecerían completamente.* ¡Imagínese las ventajas de una reforma de este tipo!

Al no ser un número primo y al no poseer más que dos divisores, la base decimal no encontraría ningún miembro de esa comisión que la defendiera. Sin embargo sería utópico pensar que todavía se puede volver atrás e intentar modificar ahora la base de nuestra numeración escrita u oral. La costumbre de contar por decenas está tan anclada en nuestra tradición que la elección de esta unidad de cuenta parece indestructible. Lo único que se podía hacer era reformar las extrañas e incómodas divisiones de los antiguos sistemas de pesos y medidas para adaptarlas definitivamente a la numeración decimal. Es lo que se hizo en la época de la Revolución Francesa cuando la Convención Nacional creó el *sistema métrico decimal*, imponiéndolo en diciembre de 1799 con la Ley del 19 de Frimario del año VIII...

Pero entonces, ¿de dónde viene la base diez? Algunos autores iluminados han querido ver la intervención de la Providencia:

El número diez, decía uno de ellos, es el más perfecto de todos (!). Las divisiones y las formas de las extremidades de nuestras manos y de nuestros pies han sido establecidas conforme a esta noción... Y es así como, con fundamento y con arreglo a la divina naturaleza, los hombres de todos los países contamos, sin premeditación alguna, según este número perfecto.

¡Curiosa manera de atribuir a una armonía previamente establecida un hecho debido simplemente a la evolución fisiológica de los mamíferos! Esto nos recuerda aquella famosa frase de Joseph Prudhomme: «¡Admira, hijo mío, la sabiduría divina que ha hecho que los ríos pasen justo a través de las ciudades!»

Como la humanidad ha aprendido a contar con sus diez dedos la preferencia casi general por las agrupaciones de diez ha estado determinada en realidad por ese «accidente de la naturaleza» que es la anatomía de las manos.







Para convencernos de ello, imaginémosnos un clan que, por ejemplo, por motivos religiosos estuviese temporalmente sujeto a la prohibición de hablar. Estos hombres se disponen a contar un rebaño de bisontes.

Cuando pasa el primer animal, un hombre levanta un dedo. Luego levanta otro dedo cuando pasa el segundo animal, y así sucesivamente hasta llegar al décimo bisonte.

En ese momento, otro hombre que no ha dejado de mirar las manos del primero, levanta un primer dedo mientras que su colega baja los suyos. Ya tenemos el recuento de una primera decena. Cuando pasa el decimoprimer animal, el primer hombre (el de las unidades) vuelve a levantar su primer dedo. Al llegar al decimosegundo levanta otro dedo y procede así hasta que pasa el vigésimo animal.

El hombre de las decenas mantiene su primer dedo levantado hasta que el décimo dedo de su colega se levanta a su vez. Entonces él levanta su segundo dedo, mientras que el primer hombre baja nuevamente los suyos.

Cuando haya pasado el bisonte número cien, entrará en juego un tercer hombre que levantará su primer dedo en cuanto los otros dos bajen los suyos: sus dedos irán indicando las centenas de la misma forma. Y cuando pase el animal 627, el hombre de las unidades tendrá siete dedos levantados, el de las decenas, dos dedos y el de las centenas, seis dedos.

Ayudante n.º 3		Ayudante n.º 2		Ayudante n.º 1	
Izquierda	Derecha	Izquierda	Derecha	Izquierda	Derecha
					
6		2		7	
600		20		7	

Este recuento, efectuado sin haber sido pronunciada una sola palabra, demuestra que han sido los diez dedos los que han impuesto al hombre la idea de las agrupaciones por paquetes de diez. Esta es la razón de que dicha base ocupe en nuestras numeraciones un lugar, en cierto modo, inexpugnable.

Si la naturaleza hubiese dado seis dedos a cada mano, la mayoría de las numeraciones de la historia estarían basadas en el número doce.

Por el contrario, si la evolución natural de dicho órgano hubiera restringido a cuatro, por ejemplo, el número de dedos de cada mano de la raza humana (como ha ocurrido con las ranas) nuestras formas tradicionales de contar y nuestros sistemas de numeración serían hoy de base ocho.

Otra solución: la base cinco

Pero no todas las civilizaciones han resuelto de la misma manera el problema de la base. La base diez no ha sido la única base a la que se ha referido el hombre en el transcurso de los tiempos.

Algunos pueblos han adquirido la costumbre de agrupar los seres y los objetos por paquetes de cinco.

Por ejemplo, en la lengua Api de las Nuevas Hébridas, los cinco primeros números reciben nombres independientes:

<i>tai</i>	para	1	
<i>lúa</i>	para	2	
<i>tolu</i>	para	3	
<i>vari</i>	para	4	
<i>luna</i>	para	5	(literalmente: «la mano»)

Entre cinco y diez, son nombres compuestos:

<i>otai</i>	para	6	(literalmente: «el nuevo uno»)
<i>olua</i>	para	7	(literalmente: «el nuevo dos»)
<i>otolu</i>	para	8	(literalmente: «el nuevo tres»)
<i>ovari</i>	para	9	(literalmente: «el nuevo cuatro»)
<i>lualuna</i>	para	10	(literalmente: «las dos manos»)

Después, y esta última palabra funciona como una unidad de cuenta:

para el 11, se dice:	<i>lualuna i tai</i>	(= 2 x 5 + 1)
para el 12, se dice:	<i>lualuna i lua</i>	(= 2 x 5 + 2)
para el 15, se dice:	<i>toluluna</i>	(= 3 x 5)
para el 16, se dice:	<i>toluluna i tai</i>	(= 3 x 5 + 1)
para el 20, se dice:	<i>variluna</i>	(= 4 x 5)
para el 24, se dice:	<i>variluna i vari</i>	(= 4 x 5 + 4), etc.

El origen de esta manera de contar es antropomórfico. La case cinco ha encontrado su razón de ser entre los pueblos que han aprendido a enumerar con una sola mano y a prolongar la serie de los números utilizando la otra como referencia.

Esto es en cualquier caso lo que ilustra la técnica digital que describimos a continuación, de la que encontramos rastros en diferentes regiones de África y de Oceanía y que vanos comerciantes hindúes de la región de Bombay siguen empleando hoy en día para satisfacer sus necesidades más comunes.

En primer lugar se cuentan las cinco primeras unidades, extendiendo sucesivamente los dedos de la mano izquierda. Luego, cuando se ha llegado al número cinco, se dobla el pulgar derecho. Seguidamente se sigue contando hasta diez volviendo a extender los dedos de la mano izquierda, después de lo cual se dobla el índice derecho para registrar las cinco unidades suplementarias que acaban

de ser consideradas. Se podrá contar así hasta 25. Y si esto no bastare, se podrá incluso prolongar la operación hasta 30 volviendo nuevamente a los dedos de la mano izquierda ya libre.



Veinte dedos para contar

Otros pueblos han preferido adoptar una *base vigesimal*: han adquirido ya costumbre de agrupar por veintenas y potencias de veinte los seres y los objetos que enumeran. Este ha sido el caso de los Malinke del Alto Senegal y de Guinea, de los Banda de Centroáfrica, de los Yebu y de los Yoruba de Nigeria, de los Tamanas de Orinoco (junto a la meseta de las Guyanas, en Venezuela), de los Esquimales de Groenlandia, de los Ainos de la isla de Sakhaline (junto a las costas de Asia oriental, entre el mar de Japón y el mar de Okhostsk), de los Mayas y de los Aztecas de la America Central precolombina, etc.

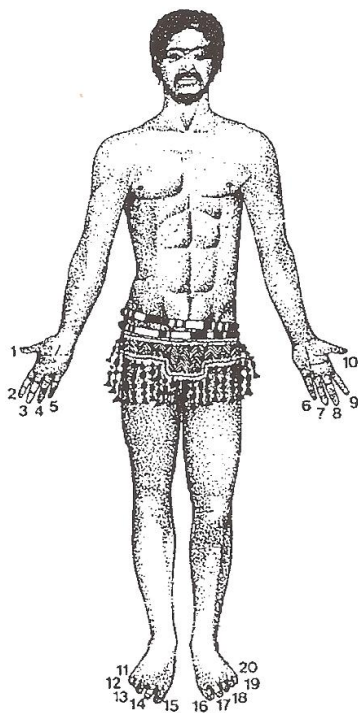
Por ejemplo, los aztecas contaban de la siguiente manera:

1	<i>ce</i>	
2	<i>ome</i>	
3	<i>yey</i>	
4	<i>nai</i>	
5	<i>chica</i> (o <i>macuilli</i>)	
6	<i>chica-ce</i>	(= 5 + 1)
7	<i>chic-ome</i>	(= 5 + 2)
8	<i>chicu-ey</i>	(= 5 + 3)
9	<i>chic-nai</i>	(= 5 + 4)
10	<i>matlactli</i>	
11	<i>matlactli on ce</i>	(= 10 + 1)
12	<i>matlactli on orne</i>	(= 10 + 2)
13	<i>matlactli on yey</i>	(= 10 + 3)

14	<i>matlactli on naui</i>	(= 10 + 4)
15	<i>caxtulli</i>	
16	<i>caxtulli on ce</i>	(= 15 + 1)
17	<i>caxtulli on ome</i>	(= 15 + 2)
18	<i>caxtulli on yey</i>	(= 15 + 3)
19	<i>caxtulli on naui</i>	(= 15 + 4)
20	<i>cem poualli</i>	(«una veintena»)
30	<i>cem poualli on matlactli</i>	(= 1 X 20 + 10)
40	<i>ome poualli</i>	(= 2 x 20)
53	<i>orne poualli on matlactli on yey</i>	(= 1 x 20 + 10 + 3)
100	<i>macuil poualli</i>	(= 5 x 20)
400	<i>cen tzuntli</i>	(«una cuatro centena»)
800	<i>ome tzuntli</i>	(«dos cuatro centenas»), etc.

La idea fundamental contenida en este ejemplo nos explica la razón de que estos pueblos hayan llegado a adoptar dicha base y nos revela el origen igualmente antropomórfico de esta manera de contar:

- los cinco primeros nombres de números de la lengua azteca pueden efectivamente estar asociados con los dedos de una mano;
- los cinco siguientes con los dedos de la otra mano;
- los otros cinco con los dedos de un pie;
- y los cinco últimos con los dedos del otro pie.



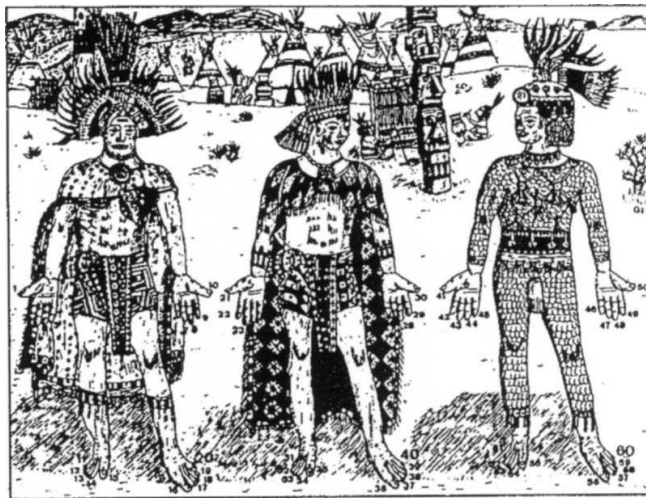
- 1 pulgar derecho
- 2 índice derecho
- 3 medio derecho
- 4 anular derecho
- 5 meñique derecho
- 6 meñique izquierdo
- 7 anular izquierdo
- 8 medio izquierdo
- 9 índice izquierdo
- 10 pulgar izquierdo
- 11 dedo pequeño del pie derecho
- 12 dedo siguiente
- 13 dedo siguiente
- 14 dedo siguiente
- 15 dedo gordo del pie derecho
- 16 dedo gordo del pie izquierdo
- 17 dedo siguiente
- 18 dedo siguiente
- 19 dedo siguiente
- 20 dedo pequeño del pie izquierdo

Remontémonos algunos milenios, en alguna parte de México, por ejemplo. Estamos en una tribu de indios cuyos descendientes crearán posteriormente la civilización azteca.

Están preparándose para una expedición militar y se disponen a contar sus guerreros, para ello algunos hombres se han alineado para servir de «máquina de calcular». Un ayudante va a proceder al recuento de los soldados haciendo lo siguiente con cada hombre:

Toca un dedo del primer hombre cuando pasa el primer guerrero, luego otro dedo al pasar el segundo, y así sucesivamente hasta llegar al décimo soldado. Seguidamente pasa a los dedos de los pies de dicho hombre y procede de la misma manera hasta llegar al vigésimo guerrero.

Luego pasa al segundo hombre. Y al tocarle el último dedo del pie, habrá otros veinte guerreros contados (o sea cuarenta en total). Sigue actuando así con todos los hombres que sean necesarios hasta concluir el recuento de los soldados.



Al pasar el quincuagésimo tercer guerrero, el contable habrá tocado el *tercer dedo del primer pie del tercer hombre*.

Hay que destacar el dato de que los esquimales de Groenlandia (así como los Tamañas del Orinoco) emplearan para el número 53 una expresión que significaba literalmente: «del hombre tercero, tres sobre el primer pie».

Añadamos que los Banda de Centroáfrica siguen expresando el numero veinte diciendo algo así como «colgar un hombre» y que en algunos dialectos mayas, la expresión *hunc uimic*, que quiere decir «una veintena»- también significa «un hombre»,

Los Malinké del Alto Senegal y de Guinea, dicen «un hombre completo» para veinte y «un lecho» para cuarenta (aludiendo a la unión de los dedos de las manos y de los pies de un hombre y de una mujer tendidos en el mismo lecho). No cabe la menor duda de que *esos pueblos han adoptado la base veinte, porque se han dado cuenta de que inclinándose un poco también podrían contar los diez dedos de sus pies.*

La difusión de la numeración vigesimal a lo largo de la historia ha sido bastante débil, pero en varias lenguas quedan rastros de una tradición probablemente muy antigua, de cuentas por veintenas.

Así, por ejemplo, las expresiones inglesas: *one score, two scores, three scores*, etc. (en donde el término *score* está empleado algunas veces también de forma invariable) significan respectivamente: 20, 40, 60, etc. William Shakespeare ha usado a menudo ese tipo de expresión, por ejemplo en su *Enrique IV*, donde se puede leer esto (acto II, escena IV):

I'll procure this fat rogue a charge of foot

And I know, his death will be a march of twelve scores...

(«Conseguiré a ese truhán un empleo en la infantería y estoy seguro de que no resistirá una marcha de 240...»)

Tanto en francés, como en latín, la propia forma del número *vingt* (veinte), (*viginti* en latín, y *vinti* en latín medieval), visiblemente independiente de «deux» (dos) (o *dúo*) y de «dix» (diez) (o *decem*) constituye posiblemente un vestigio de esa cuenta vigesimal desaparecida. En francés antiguo, el empleo de formas análogas a *quatre-vingts* (ochenta), era bastante frecuente, puesto que para 60, 120 o 140, por ejemplo, se decía normalmente:

«*trois-vingts*», **six-vingts*» o **sept-vingts*»

(«tres-veinte», «seis-veinte» o «siete-veinte»).

Por eso, hubo antaño un cuerpo de 220 oficiales de policía de París, llamado *Le Corps des onze-vingts*. También por esta razón el hospital que se construyó en el siglo XIII en París para albergar a 300 veteranos ciegos, se llamó (y se sigue llamando) *Hôpital des Quinze-Vingts*.

La cuenta por docenas

Mucho más extendida está la *cuenta duodecimal* que, de haberse generalizado, podría haber originado una numeración completa de base doce, lo cual,

como ya hemos podido comprobar, nos hubiera proporcionado un sistema mucho más cómodo que nuestra numeración decimal ya que el número 12 es divisible a la vez por 2, 3, 4 y 6.

Dicho sistema ha sido empleado en los métodos comerciales de antaño, cuyos vestigios son entre nosotros *la docena* y *la gruesa* (doce docenas) y que seguimos manteniendo en lo que respecta a los huevos o las ostras, por ejemplo.

Los sumerios (y luego los asirio-babilonios), atribuyeron a esta base así como a sus múltiplos y divisores un papel preponderante en las medidas de distancias, superficies, volúmenes, capacidades y pesos.

Además, solían subdividir el día en doce partes iguales, llamadas *danna*, que equivalía cada una a dos horas nuestras.

También utilizaron para el círculo, como para la eclíptica y el zodiaco, una división en doce *bérü* (o «sectores») de 30° cada uno.

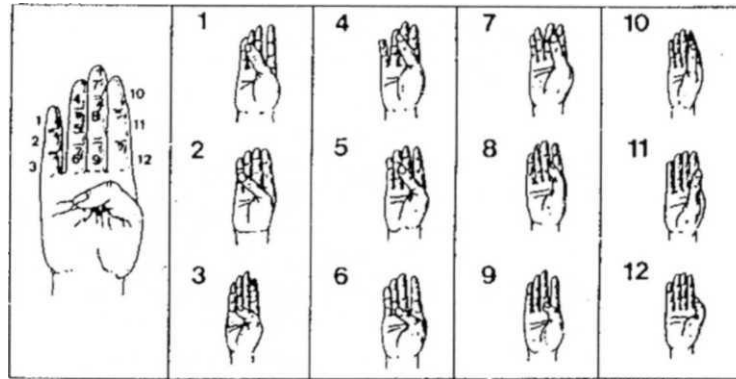
Los romanos, asimismo, emplearon un sistema fraccionario basado en la división del *As* (nombre de una unidad aritmética monetaria o ponderal) en doce subunidades llamadas *onzas*.

Y en vísperas de la Revolución francesa, los pueblos europeos seguían evaluando sus valores monetarios en *soles torneses* convertibles en doce *denarios torneses* y midiendo las longitudes en *pies*, *pulgadas*, *líneas* y *puntos*; un «pie» equivalía a 12 pulgadas, una «pulgada» a 12 líneas y una «línea» a 12 puntos.

El relativo éxito de esta base tiene, por supuesto, sus ventajas prácticas, pero todavía sigue sin explicarse su origen. A mi entender, hay muchas posibilidades de que sea un origen manual.

Efectivamente, es posible contar de 1 a 12 utilizando los dedos de una sola mano: *basta con apoyar el pulgar, sucesivamente, sobre cada una de las tres falanges (o articulaciones) de los cuatro dedos opuestos de la misma mano.*

Cada dedo tiene tres falanges (o articulaciones) y como las del pulgar están excluidas de la cuenta (porque se trata precisamente del dedo que realiza la operación), la docena puede así imponerse como base de un sistema numérico.



Sin duda alguna este procedimiento es el que ha determinado que vanos pueblos hayan adoptado la docena como unidad secundaria de cuenta junto a la decena.

Se trata de una hipótesis difícil de comprobar, pero en la actualidad existe un procedimiento concreto: todavía lo utilizan en india, Indochina, Pakistán, Afganistán, así como en Egipto, Siria, Turquía, Irak e Irán. En cualquier caso esta hipótesis presenta la ventaja de sugerir una explicación al misterioso origen de la base sexagesimal.

La enigmática base sexagesimal

La sesentena, en tanto que unidad de cuenta, constituye una base muy elevada, que sobrecarga considerablemente la memoria: exige que se conozcan sesenta palabras o signos diferentes para expresar los números de 1 a 60. Los nombres de números o los símbolos de base que precisa son tan numerosos que, por ejemplo, no sería fácil aprender de memoria una tabla de sumar o de multiplicar.

Y sin embargo, algunos pueblos la han utilizado a través de la historia y nuestra propia cultura conserva vestigios de ella pues la seguimos utilizando para expresar la medida del tiempo en horas, minutos y segundos, o la de los arcos y ángulos en grados, minutos y segundos.

Esta base fue empleada en primer lugar por los sumerios, que solían contar por sesentenas y potencias de sesenta. Seguidamente pasó a los matemáticos y astrónomos babilonios (los sucesores de los sumerios en Mesopotamia) quienes la utilizaron para elaborar un sistema erudito de numeración antes de legárnosla a través de los astrónomos griegos y árabes...

Todavía no nos explicamos muy bien por qué se les ocurrió a los sumerios utilizar una base tan elevada. Se han emitido vanas hipótesis a este respecto, pero ninguna parece concluyente.

Según algunos autores, la elección de esta base habría sido de origen metrológico. Pero esta hipótesis es inaceptable porque sitúa la cuestión en un plano teórico: en realidad los sumerios introdujeron en su sistema metrológico la base sexagesimal porque ya existía en su numeración.

Según otros autores, el número de días del año, redondeado hasta 360, habría originado la división del círculo en 360° . Como la cuerda del sextante (es decir, la sexta parte de un círculo) es igual al radio correspondiente, ese número habría engendrado la división del círculo en seis partes iguales a 60° , cosa que habría dado prioridad a la sesentena.

Aún hay otros autores que han creído encontrar el origen del sistema en la relación entre la «hora» sumeria (igual a dos horas nuestras) y el diámetro aparente del sol expresado en unidades de tiempo equivalente cada una a dos minutos nuestros.

Otra hipótesis, pero ésta de tipo geométrico, es la de que el triángulo equilátero habría servido para medir las diferencias de dirección en el plano; y, de la división decimal del ángulo (igual a 60°) dada por esta figura, procedería la división sexagesimal del plano (y por lo tanto del círculo) que a su vez habría originado la numeración de base sexagesimal.

Pero a tales «explicaciones» se puede objetar perfectamente que ni la astronomía ni la geometría pueden explicar el origen de un sistema de numeración.

No obstante cabe pensar que la base sexagesimal se ha mantenido hasta la época moderna para medir el tiempo y para medir los arcos y los ángulos, en particular gracias a sus propiedades geométricas y astronómicas.

Otra explicación que se ha dado es la de que la elección de esta base debió de originarse en épocas arcaicas de la conjunción de dos civilizaciones diferentes, una de las cuales habría aportado una numeración basada en la base diez y la otra en un sistema construido sobre la base seis. A esto se ha objetado con razón que «la existencia de un sistema de numeración cuya base fuese igual a seis es un postulado sin ningún fundamento histórico».

Aunque no haya testimonios históricos de la base seis, sí los hay, y abundantes, de la base doce. Conocemos la importancia del papel que se le atribuía en la civilización sumeria por lo que podría haber desempeñado un papel fundamental en el establecimiento del sistema. A mi entender, ambas hipótesis pueden ser ciertas.

Por lo pronto se puede pensar que debido a la conjunción de dos culturas diferentes, una que cuenta por docenas y otra que realiza cuentas decimales, la elección de la base sexagesimal procede, en ciertos medios eruditos, de una combinación "científica» de la base doce con la base diez.

La base decimal, también ha desempeñado un papel importante en la civilización sumeria. Los aritméticos del País de Sumer la han utilizado como unidad auxiliar para aliviar la memoria en su numeración sexagesimal, que necesitaba teóricamente conocer sesenta palabras o símbolos diferentes para expresar los números de 1 a 60.

En una sociedad que, según esta hipótesis, cuenta a la vez por docenas y (secundariamente) por decenas, unos aritméticos que ya habían llegado a una avanzada fase intelectual (como lo demuestran lo que conocemos de sus trabajos) habrían combinado ambos procedimientos según la propiedades del *mínimo común múltiplo* para formar un ciclo erudito de sesenta unidades que son enormemente cómodas para calcular. 60 es, en efecto, el mínimo común múltiplo de 10 y de 12 y corresponde también al entero más pequeño cuyos divisores son los seis primeros números. De ahí la adopción de la sesentena como base de un sistema de numeración.

También cabe pensar (y esta hipótesis me parece más verosímil) que la elección de la base sexagesimal procede de una combinación 'natural» de la base doce y de la base *cinco* (probablemente ambas de origen manual).

Esta hipótesis me parece tanto más plausible cuanto que en la lengua sumeria se pueden encontrar rastros evidentes de esta última base. Dejando de lado algunas variantes, los nombres que dicha lengua posee para los diez números son los siguientes:

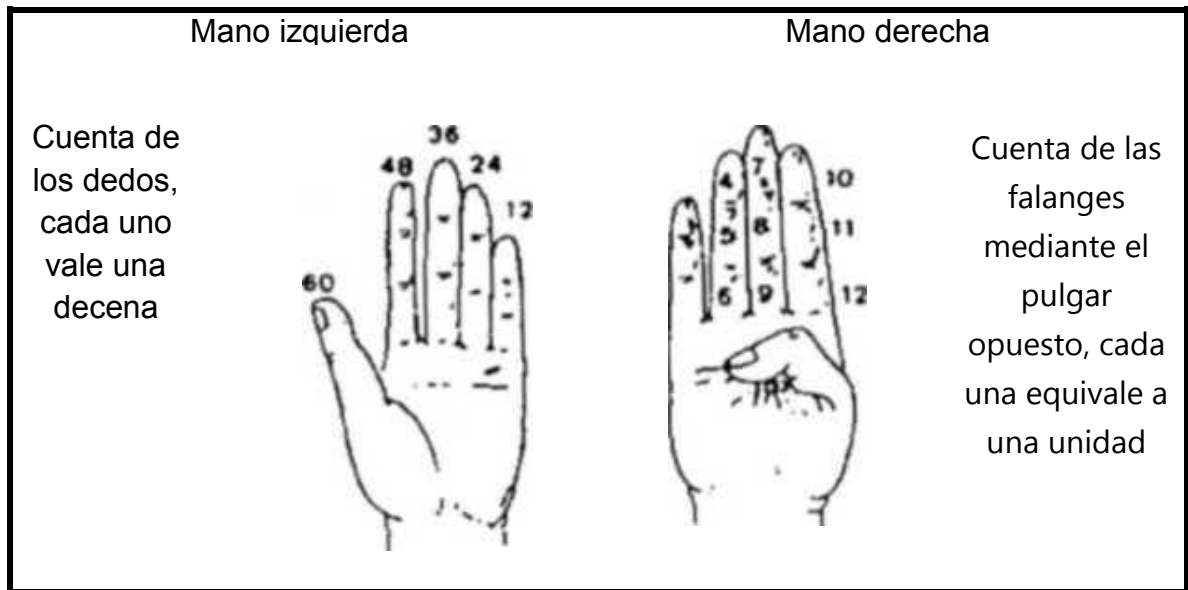
1	<i>gesh</i>	
2	<i>min</i>	
3	<i>esh</i>	
4	<i>limmu</i>	
5	<i>ia</i>	
6	<i>ash</i>	(= $a + sh = iá + gesh = 5 + 1$)
7	<i>imín</i>	(= $i + min = iá + min = 5 + 2$)
8	<i>ussu</i>	
9	<i>illimmu</i>	(= $i + limmu = iá + limmu = 5 + 4$)
10	<i>u</i>	(literalmente «los dedos»)

Exceptuando el número 8, la lengua sumeria refleja en los nombres de los números 6, 7 y 9, una descomposición anterior según la base cinco (puede muy bien ocurrir que en épocas arcaicas, el número 8 haya sido expresado de la misma manera que 6, 7 y 9; desgraciadamente, el nombre original correspondiente se ha perdido en la noche de los tiempos)

Ahora bien, más adelante podremos ver que la idea de contar con los dedos, superada gracias a un esfuerzo intelectual, ha abierto muchas veces la vía a elaboraciones aritméticas de un nivel superior.

Según esta última hipótesis, el origen de la base 60 ha podido estar asociado a un sistema de recuento manual que posiblemente los sumenos habían empleado desde muy temprano. Esta hipótesis, por supuesto, es muy difícil de comprobar, pero en nuestros días hay un procedimiento concreto de este tipo: todavía la utilizan en el Cercano Oriente, en la India y en la península de Indochina.

Gracias a esta técnica digital, la sesentena se nos muestra claramente como una base principal y los números 12 y 5 como bases auxiliares. Se practica de la manera siguiente:



Se cuenta de 1 a 12 con la mano derecha, apoyando el pulgar sucesivamente sobre cada una de las tres falanges de los cuatro dedos opuestos de la misma mano. Al llegar a la docena con esa mano, doblamos entonces el meñique izquierdo. Volvemos seguidamente a la primera mano y se sigue la cuenta de 13 a 24 repitiendo la misma técnica. Luego, cuando se llega al número 24, se dobla el anular izquierdo y se sigue contando de la misma manera de 25 a 36 con la mano derecha y

se procede igualmente hasta 48 (doblado entonces el índice izquierdo), luego hasta 60, cuando ya se han doblado los cinco dedos de la mano izquierda.

El origen de la base sexagesimal podría provenir de una combinación de la cuenta de las doce falanges de una mano mediante el pulgar opuesto y de la cuenta digital elemental de base 5.

Esta hipótesis (que conviene considerar con precaución, pues no es más que una afirmación carente de pruebas) podría confirmar el origen puramente antropomórfico de las otras bases históricas y reforzar por consiguiente la importancia de la función del cuerpo humano en la historia de los números y de los sistemas de numeración.

Sea como fuere, la adquisición de la facultad de contar y el descubrimiento fundamental del principio de la base han desempeñado un papel considerable en la historia de las civilizaciones. Han facilitado a los hombres un elevado número de creaciones e invenciones, e incluso de revoluciones en los ámbitos más diversos, como por ejemplo en el de la economía y los intercambios comerciales.

El número, el valor, la moneda

Cuando los hombres vivían en comunidades pequeñas y sacaban cuanto necesitaban de la naturaleza, no cabe duda de que las diferentes sociedades debían de estar escasísimamente comunicadas entre sí.

Pero con el desarrollo de la artesanía y de la cultura, y debido a la desigual distribución de los diferentes productos naturales, el intercambio comercial fue haciéndose cada vez más necesario.

El primer tipo de intercambio comercial fue el *trueque*, fórmula mediante la cual se intercambian directamente (y, por tanto, sin intervención de ninguna «moneda» en el sentido moderno de la palabra) productos y mercancías que correspondían a materias primas u objetos de extrema necesidad.

A veces, cuando se trataba de grupos que mantenían relaciones poco amistosas, esos intercambios se hacían bajo la forma de un *trueque silencioso*. Una de las partes interesadas depositaba en un lugar previamente acordado las diferentes mercancías que se querían intercambiar y al día siguiente encontraba en su lugar (o junto a ellas) los productos propuestos por la otra parte. Si el primero consideraba que el intercambio era adecuado, se llevaba los productos, si no, volvía al día siguiente para encontrar una cantidad más importante. El mercado podía durar

vanos días, o incluso concluirse sin intercambio alguno si ambas partes no llegaban a un acuerdo.

Entre los Aranda de Australia, los Veddah de Ceylán, los Bosquimanos y los Pigmeos de África, los Botocudos de Brasil, así como en Siberia y en Polinesia se han podido observar escenas como ésta.

Con la intensificación de las comunicaciones entre los diferentes grupos y la importancia cada vez mayor de las transacciones, la práctica del trueque directo se convirtió bastante rápidamente en un estorbo. Ya no se podían intercambiar mercancías según el capricho de tal o cual individuo o conforme a una costumbre establecida tras interminables discusiones.

Entonces se experimentó la necesidad de crear un sistema relativamente estable de evaluaciones y equivalencias, basado en un principio (similar al de la base de un sistema de numeración) que definía algunas *unidades* o *patrones* fijos. Sistema a partir del cual siempre se puede estimar cualquier valor, no sólo para las operaciones de carácter económico sino también (y sobre todo posiblemente) para la regulación de problemas jurídicos importantes como el *precio de la novia*, el *precio del robo*, o el *precio de la sangre* (estimación en bienes de consumo de una «mujer que se toma», de un delito de robo o de un delito de golpes o heridas que haya acarreado la muerte de un individuo). Para esto han servido cualquier tipo de productos, de materias u objetos de uso corriente.

Algunos pueblos pastores, como los griegos y los romanos de los períodos arcaicos, evaluaron sus productos y mercancías en cabezas de ganado. En la *Ilíada* de Homero, por ejemplo, una «mujer apta para mil trabajos» es evaluada en 4 bueyes, la armadura de bronce de Glauco en 9 bueyes y la armadura de Diomedes, que era de oro, en 100 bueyes.

Además, nuestros términos de *pecunia* (en el sentido de dinero moneda), *péculo* (en el sentido de «economía» o «ahorro»), el francés *pécunieux* (en el sentido de adinerado, poseedor de mucho dinero líquido), *pecuniario*, etc., derivan del latín *pecunia* («fortuna, dinero, moneda») que a su vez procede de *pecus* que significa «ganado».

En la zona ártica del Canadá, así como en Siberia y en Groenlandia, los valores han sido estimados (hasta en épocas recientes) en pieles de algún animal o también en piezas de paño. Los aztecas del México precolombino, utilizaban una pieza de tejido (el *quachtli*), con su múltiplo, la «carga» que valía veinte veces más; también se utilizaban granos de cacao con su múltiplo, el *xiquipilli*, que valía 8 000

veces más; también empleaban pequeñas hachas de cobre, así como cañas repletas de polvo de oro.

Los mayas evaluaban sus bienes de consumo en fardos de algodón, betún o también mediante perlas de piedra o de jade, cerámicas, joyas, granos de cacao, etc. En China, durante la segunda mitad del II milenio antes de J. C., los valores se calculaban en caparazones de tortuga, en pieles o cuernos de animales, en granos, en cuero, en armas y en utensilios de piedra, etc.

En las Islas del Pacífico, los valores se calculaban en collares de perlas. Los indios del noroeste de América (en particular los iraqueses y los algonquinos) empleaban lo que ellos llamaban *wampums*, es decir, hileras de conchas multicolores que servían de adorno. En cuanto a los dogones de Mali, hasta hace poco seguían utilizando el *cauri* (una concha preciosa de la especie de las porcelanas) como unidad principal de valoración de bienes propios, delitos o mercancías. Entre ellos una gallina, por ejemplo, valía 240 cauris, una cabra o una oveja 2 400 cauris, un asno 32 000 cauris, un caballo 64 000 cauris y un buey 96 000 cauris. Las conchas de esta especie particular también han sido el patrón monetario de muchas poblaciones no industriales, como por ejemplo los indígenas de las islas Maldivas, de Malasia, de Chad y de todo el África oriental (donde no hace mucho se cambiaban cinco francos franceses por 5 000 cauris).

También se han descubierto cauris en numerosos emplazamientos chinos que se remontan a los siglos XV y XVI antes de nuestra era, así como en yacimientos prehistóricos en Inglaterra.

Entre los demás objetos o materiales que han servido de «moneda de cambio» se encuentran también: la sal en barras en algunas regiones de África, el té en polvo en Asia central, bolas de tabaco en África oriental, cuchillos de bronce en China y América central, hachas talladas en Ecuador, gongs metálicos en Indochina, dientes de elefante en la India, Malasia y Polinesia, etc.

Sin embargo, estos métodos presentaron serias dificultades de aplicación a medida que se diversificaba la comunicación entre las sociedades y se desarrollaba la agricultura, la artesanía y los intercambios comerciales.

Al emplear dos grupos distintos unos patrones monetarios diferentes sobre bases igualmente diferentes, no debía de ser fácil encontrar un rápido entendimiento. Y cuando conseguían superar el problema no debía de ser muy cómodo pasar de un sistema de valor a otro.

Por lo tanto, se sintió la necesidad de encontrar un material y un sistema de evaluación más estables, más cómodos y más fiables que los patrones monetarios de los tipos anteriores y que todos los grupos implicados pudieran reconocer sin esfuerzo.

Cuando la humanidad pasó de la edad de piedra a la de los metales, fue adquiriendo paulatinamente conciencia de que los cuerpos metálicos eran perfectos para cumplir esa función.

Al principio, los metales fueron transformados en utensilios, armas u objetos de adorno y bajo este aspecto sirvieron como patrones de valor, compitiendo con los cauris, los animales, el algodón, las pieles o el cuero.

Pero a partir de cierta época, desempeñaron un papel cada vez más importante en las transacciones comerciales y se convirtieron gradualmente en la «moneda de cambio» preferida por los vendedores y los compradores, y a los viejos patrones sólo les quedó el recuerdo de su antigua preponderancia.

Asimismo, y a partir de ese momento, las diferentes mercancías fueron evaluadas cuantitativamente por el peso según una especie de patrón de peso de algún tipo de metal (bronce, cobre, estaño, plata, oro, etc.).



Escenas de mercado en una pintura funeraria egipcia del Antiguo Imperio (alrededor del siglo XXV a. de J. C.)

Entre los fenicios y los hebreos, los bienes de consumo, multas e impuestos, eran evaluados, por así decirlo, en una balanza mediante un patrón de peso llamado «siclo» o *sheqel* (palabra que quiere decir precisamente «cuenta» y «peso» al mismo tiempo).

El sico fenicio pesaba alrededor de unos 14,50 gramos nuestros, mientras que el sheqel de los hebreos valía 11,4 gramos.

El *Génesis* nos refiere que cuando el patriarca Abraham compró la gruta de Makhpela, pesó cuatrocientos siclos de plata para Efron el Hetita.

Y después, cuando Saúl buscaba las burras de su padre, recurrió a los servicios de una «vidente» a la que remuneró entregándole un cuarto de sico de plata.

En el Egipto de los faraones, era frecuente que se valoraran y pagaran en metal los productos y mercancías que primero se entregaban en pepitas, en virutas e incluso en lingotes o anillas y posteriormente se pesaban. La principal unidad fue el *deben* que equivalía a nuestros 91 gramos.

Un contrato de venta fechado en el Imperio Nuevo (siglos XVI-XI a.C.) fija en los siguientes términos el importe de los detalles correspondientes, partiendo del *deben* como patrón de peso y del cobre como metal de referencia.

Dado a Hay por el soldado Nebsmen:

1 buey, igual a:	120 <i>debens</i> (de cobre)
Recibí a cambio:	
2 tarros de grasa, igual a:	60 <i>debens</i>
5 paños de tejido fino, igual a:	25 <i>debens</i>
1 vestido de lino meridional, igual a:	20 <i>debens</i>
y 1 cuero, igual a:	15 <i>debens</i>

Este ejemplo nos muestra que en los mercados de antaño los productos de consumo podían tener el mismo valor de intercambio comercial que el metal. Por ejemplo, ese buey fue pagado efectivamente con 120 *debens* de cobre, pero de esta «cantidad de cobre» ni una sola unidad era realmente de metal, ya que 60 *debens* de cobre fueron pagados a cambio de dos tarros de grasa, 25 *debens* de cobre a cambio de cinco paños de tejido fino, etc. Sin embargo, no se trata de un simple *trueque*, en el sentido que hemos definido anteriormente, ya no es un intercambio directo sino más bien un auténtico sistema monetario: gracias al patrón de metal, las mercancías no son intercambiadas a gusto de los tratantes, ni según unas

costumbres establecidas —a menudo arbitrarias— sino más bien en función de un sistema estable, admitido por todos y que fija de forma aproximada su «justo precio».

Hay una tablilla de arcilla mesopotámica, fechada aproximadamente en 1800 antes de J. C, que nos ofrece un elocuente testimonio a este respecto. Se trata de una carta enviada por un rey de Quatna al que reinaba en la misma época en la ciudad de Ekallatim. El primero reprocha ardientemente a «su hermano» que sólo le haya enviado una débil «cantidad de estaño» a cambio de dos caballos con un valor varias veces superior:

«¡Estas cosas no deben decirse! Sin embargo, ahora, tengo que decirlas para aliviar mi corazón. Me habías pedido los dos caballos que deseabas y yo te los he mandado. ¿No es completamente cierto que has conseguido de mí lo que quenas? ¡Y osas enviarme ese poco de estaño! Habrás de saber que el precio de esos dos caballos, aquí, en Quatna, es de seiscientos siclos de plata. Y tú, ¡tú me has enviado sólo veinte minas de estaño! Pero, ¿qué dirán quienes se enteren?».

Ahora que sabemos que en Mesopotamia el sico de plata valía en aquella época de tres a cuatro minas de estaño comprendemos mucho mejor esa indignación. ¡Se deberían haber pagado entre 1.800 y 2.400 minas de estaño por los dos caballos!

Pero no creamos que para estas operaciones se empleaba ya el «dinero» como forma de pago, en el sentido que nosotros le damos. Se trataba solamente de introducir en las transacciones una especie de unidad de valor con la que se comparaba el precio de cada mercancía o acción de que se tratase. A partir de ahí, se podía emplear en cualquier sitio y en cualquier momento cualquier tipo de metal (pesándolo por supuesto con referencia a esa unidad ponderal) como «valor de cambio, de salario o de multa». Pero a veces sucedía que una persona con pocos escrúpulos falsificaba los patrones mezclando a los metales preciosos todo el metal vil que pudiera sin que se descubriese el fraude.

La persona honrada que pensaba recibir en pago de algún objeto, pongamos siete siclos de oro y a quien astutamente entregaban una aleación con la apariencia de oro pero que contenía una cuarta parte de plata, perdía, sin darse cuenta, casi una cuarta parte de su mercancía. El temor a la falsificación contribuyó durante mucho tiempo a restringir el cambio con metales entre el pueblo y mantuvo en los mercados la venta y la compra por intercambio de productos de la naturaleza o de artesanía. A fin de cuentas, la idea de la *pieza de moneda de cambio*, en el sentido moderno del término, apareció (probablemente en el siglo VII, simultáneamente, entre los lidios de Asia menor y los chinos) cuando el metal fue fundido en pequeños lingotes o en piezas fácilmente manejables, con un

peso fijo y acuñadas con la marca oficial de alguna autoridad pública, que sería la única habilitada para certificar «el buen peso y la buena ley». Así fue inventado el sistema ideal de intercambio comercial, universalmente adoptado en la actualidad. El resto es una historia totalmente distinta...

Así pues, al aprender a contar de manera abstracta y a agrupar todo tipo de elementos según el principio de la base, el hombre aprendió a *estimar, evaluar y medir* diversas magnitudes (peso, longitud, área, volumen, capacidad, etc.). Aprendió asimismo a alcanzar y a concebir números cada vez mayores, antes incluso de poder dominar la idea del infinito.

Pudo elaborar también varias técnicas operacionales (mentales, concretas o, más tarde, escritas) y elaborar los primeros rudimentos de una aritmética que primero sería práctica antes de hacerse abstracta y conducir al álgebra.

También quedó abierto el camino para la elaboración de un calendario y de una astronomía, así como de una geometría basada primero en las medidas de longitud, de áreas y de volúmenes, antes de ser especulativa y axiomática.

En resumen, la adquisición de estas premisas fundamentales permitió poco a poco a la humanidad intentar medir el mundo, comprenderlo un poco mejor, poner a su servicio algunos de sus innumerables secretos y organizar, para desarrollarla, su economía.

Las primeras máquinas de calcular

Un instrumento natural: la mano

La mano del hombre, maravilla de movilidad y eficacia, es el más antiguo y el más generalizado de los auxiliares de cuenta y de cálculo empleados por los pueblos a lo largo de los siglos. Los arqueólogos, historiadores, etnólogos y filólogos han encontrado huellas de ello en todas las épocas y en todas las regiones del mundo, ya sea Oceanía o África, Europa o Polinesia, Mesopotamia o el Irak actual, el Islam o el Egipto faraónico, Roma o la Grecia antigua, China o la América precolombina, la India o nuestro Occidente medieval.

Podríamos decir que es la primera «máquina de calcular» de todos los tiempos. Y esta «máquina» es ciertamente más cómoda de lo que podrían ser sus ocho tentáculos para un pulpo. Pues si estos cefalópodos -de quienes se dice que son los más inteligentes de los invertebrados- decidiesen un día utilizar sus brazos con fines aritméticos (para contar por ejemplo los diversos peces devorados desde cada marea), tendrían que recurrir a unos ejercicios gimnásticos mucho más complicados que los nuestros.

Es cierto que la mano del hombre, gracias al considerable número de huesos y articulaciones correspondientes, a la disposición disimétrica de sus dedos y su relativa autonomía, al diálogo que mantiene permanentemente con el cerebro, es la más sorprendente concentración natural de recursos en la materia.

Una vez que hubo aprendido a contar bajo el ángulo de la abstracción y que hubo asimilado el principio de la base, el ser humano supo evidentemente sacar el máximo provecho de su mano...

Una curiosa manera de regatear

El procedimiento más elemental es aquél al que recurrimos a veces y con el que nuestros niños aprenden a contar. Consiste en atribuir un valor entero a cada dedo en el orden de la sucesión regular de los números empezando por la unidad. En esta técnica digital (de la que existen múltiples variantes por todo el mundo), la asignación numérica se hace, bien levantando sucesivamente los dedos, partiendo de la mano cerrada, bien doblándolos uno tras otro a partir de la mano extendida. Además, esto puede efectuarse de derecha a izquierda o de izquierda a derecha. Por último, esta cuenta puede empezar por el pulgar o por el dedo meñique, o incluso por el índice como hacen los musulmanes de África del Norte.

Hay un procedimiento parecido procedente de una tradición oriental muy antigua. Todavía se utilizaba, a comienzos de este siglo, en Argelia, en Arabia, en Siria, en Irak y en Irán, así como en India, en Mongolia y en China. Se trata de una técnica digital bastante singular que los comerciantes y sus clientes han empleado durante mucho tiempo para las transacciones comerciales.

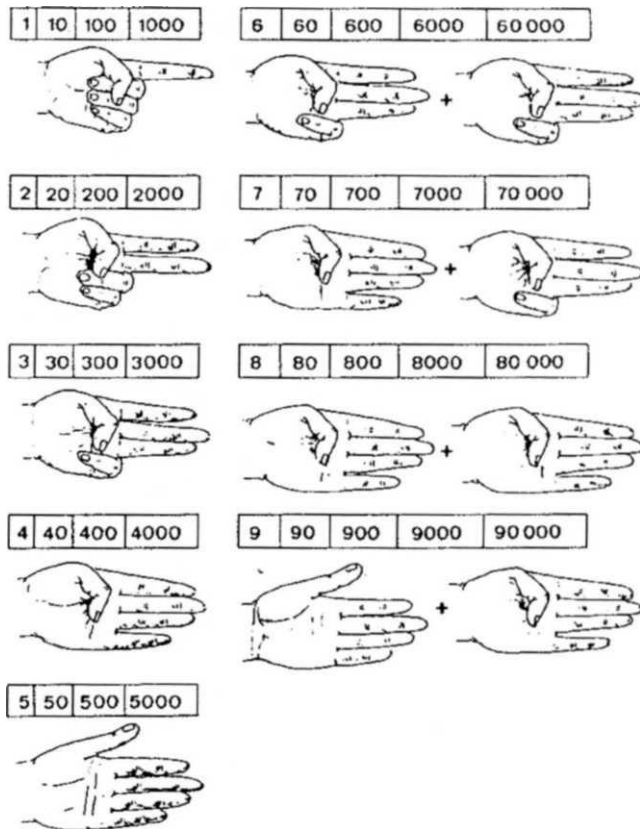
El viajero Karsten Niehbur, en su Descripción de Arabia, habló de ello en el siglo XVIII:

Los orientales, contaba, tienen un método particular de cerrar un trato delante de varias personas sin que ninguna sepa el precio estipulado. Todavía siguen utilizándolo. Yo temía que alguien me comprase algo por ese sistema que permite al agente o al comisionista engañar a quien le ha encargado la transacción, incluso en su presencia. Las dos partes dicen lo que se pide y lo que se quiere pagar, tocándose los dedos. Y para hacer este trato, se cubren la mano con el faldón de su vestido, no para rodear de misterio este arte, sino para que los asistentes no se enteren del regateo que pudiera producirse.

Efectivamente, el comprador y el vendedor se sentaban uno frente al otro y se daban la mano derecha bajo un paño que sostenían con la otra para esconder sus gestos. Después se tocaban los dedos según quisiesen aumentar o reducir sus recíprocas ofertas. El regateo, que podía durar varias horas, tenía lugar sin que se pronunciara ni una sola palabra. La norma era la impasibilidad y el menor signo equívoco podía ser interpretado en detrimento de una de las dos partes.

- Para indicar la unidad, agarraban el índice del contrario (pero no el pulgar).
- Para 2, el índice y el medio juntos.
- Para 3, el índice, el medio y el anular juntos.
- Para 4, la mano menos el pulgar.
- Y para 5, la mano entera.
- Luego, para 6 presionaban dos veces seguidas el índice, el medio y el anular juntos (es decir, 2 X 3).
- Para 7, tomaban primero la mano menos el pulgar, después apretaban el índice, el medio y el anular juntos (4 + 3)...
- Seguidamente, para 10, 100, 1 000 ó 10 000, volvían a tomar el índice de contrario (exactamente como para 1). Para 20, 200, 2 000 ó 20 000, presionaban el índice y el medio juntos (como para 2). Y así sucesivamente.

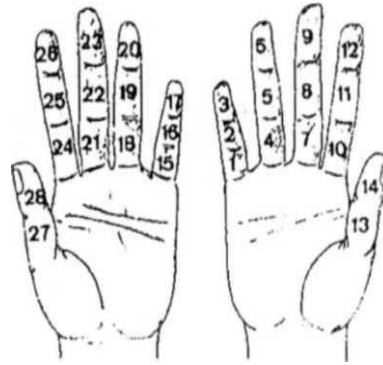
Esto no podía dar lugar a confusiones porque se trataba de una transacción sobre cuya importancia ya se habían puesto desde el principio más o menos de acuerdo ambas partes: un vendedor deseoso de fijar el precio de un artículo en torno a los 400 dinares, por ejemplo, se entendía con su cliente, antes del regateo, en el orden de magnitud de las centenas.



Contar con las falanges

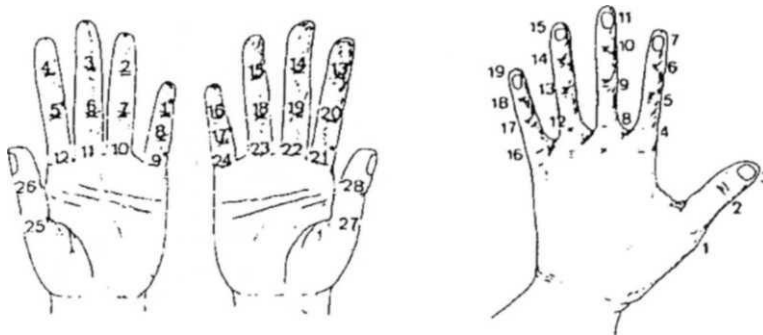
¿Por qué contar sólo con los dedos si la mano tiene también falanges y articulaciones? Esto es lo que se han dicho desde hace mucho tiempo varios pueblos asiáticos.

Por ejemplo en la India, en Indochina y en la China meridional encontramos frecuentemente la siguiente técnica. Se practica en cada una de las dos manos mediante un dedo de la otra. Cada falange vale una unidad, y se empieza con una mano por la falange inferior del dedo meñique para terminar por la falange superior del pulgar (también se puede empezar por la falange superior del meñique para terminar por la falangeta del pulgar). Se puede por tanto ir de 1 a 14 con una sola mano y seguir la cuenta hasta 28 con la otra.



En China, algunas mujeres calculaban su ciclo menstrual atándose, cada día, sucesivamente, una cuerdecilla alrededor de las 28 falanges de sus manos. Habían encontrado un cómodo medio de determinar los días de adelanto o de retraso que pudieran tener respecto a un ciclo normal.

Un poco antes de la época de Carlomagno, un monje anglosajón, Beda el Venerable (673-735) utilizó también sus veintiocho falanges, pero fue para contar los 28 años del ciclo solar. Beda empezó la cuenta por un año bisiesto, y por la falange superior del dedo meñique y contaba horizontalmente serpenteando de arriba a abajo. Después, tras haber llegado a la falange inferior de su Índice izquierdo (es decir el doceavo año del ciclo solar), seguía la cuenta de los años procediendo de igual modo en la mano derecha, pero empezando esta vez por la falange superior de su dedo índice derecho (y no por la del meñique de esa misma mano). Los cuatro últimos años acababan de contarse con las falanges de ambos pulgares.



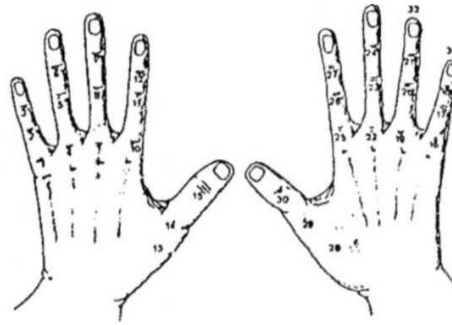
Para contar los diecinueve años del ciclo lunar (lapso de tiempo a cuyo término las fases de la luna deben repetirse en las mismas fechas), ese mismo monje utilizó las catorce articulaciones de la mano izquierda, así como las cinco uñas correspondientes. Beda empezó por la base del pulgar, y al tocar la uña del dedo meñique llegó al decimonoveno año del ciclo.

Hay que precisar que el cómputo de Beda el Venerable iba referido principalmente a los cálculos relativos al año solar y que utilizaba los ciclos, lunar y solar, del calendario juliano con sus periodos bisiestos. Su finalidad era la de determinar la fecha de la Pascua, objeto de una violenta controversia en aquella época entre la Iglesia de Roma y las iglesias de Irlanda.

En las provincias de Dacca (Bangladesh) y de Calcuta (en Bengala) siguen utilizando un procedimiento, al parecer, que se utilizó durante mucho tiempo en el noroeste de la India. Varios autores europeos lo consignaron desde el siglo XVII, principalmente el viajero francés Jean-Baptiste Tavernier (1605-1689) en sus Viajes por Turquía, Persia y las Indias. Permite contar hasta 15 con una mano y hasta 30 con las dos. Para ello utilizan las articulaciones de los dedos, empezando por la articulación inferior del dedo meñique y retrocediendo hacia el pulgar donde la parte carnosa de abajo cuenta como juntura.



En casi todos los países islámicos (desde Pakistán hasta África del Norte) encontramos el mismo sistema, pero en estas regiones obedece sobre todo a una práctica religiosa. Los musulmanes lo utilizan tradicionalmente para enumerar los «atributos magníficos de Alá» (o también para contar las eulogías que se dicen después de la oración obligatoria), cuando no tienen un rosario a mano. En este caso hay que enumerar 99 atributos (o 99 eulogías). Se tocan sucesivamente las articulaciones de los dedos de cada mano contando la parte carnosa de cada pulgar como una articulación. Se empieza por la juntura inferior del meñique izquierdo y, procediendo como hemos explicado antes, se llega al número 15, y haciendo lo mismo con la otra mano, al número 30. Se cuenta hasta 33 considerando los bordes respectivos del dedo meñique, del anular y del medio derechos. Repitiendo dos veces más todo lo anterior, se llega finalmente a 99.



Contar como los sordomudos

Veamos ahora un sistema de numeración manual más elaborado que los anteriores. Ha sido practicado por los pueblos latinos desde la antigüedad hasta épocas recientes y también está atestiguado en el Cercano Oriente donde parece haber persistido durante mucho más tiempo.

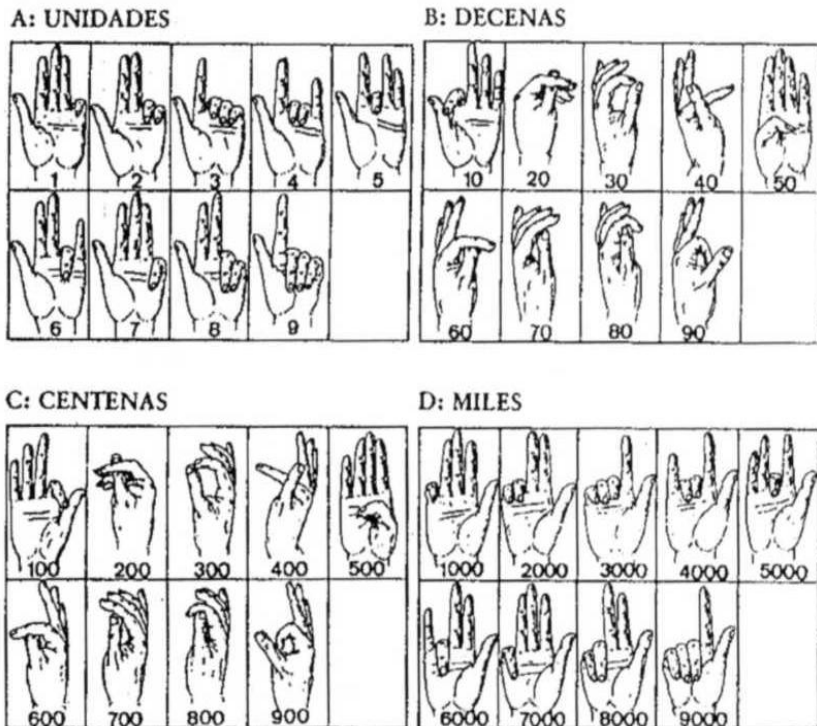
Se trata de un procedimiento análogo, en cierto modo, a los métodos de expresión digital de los sordomudos. Mediante unos gestos realizados con una mano o con ambas, se pueden representar los números de 1 a 9 999.

Se utilizan por separado el dedo meñique, el anular y el medio de una mano (la izquierda para los occidentales y la derecha para los orientales) para representar las unidades, y el pulgar y el índice para expresar las decenas.

- Para indicar la unidad, se dobla el meñique a la altura de la articulación central.
- Para 2, se juntan el anular y el meñique doblándolo de la misma manera.
- Para 3, se junta el dedo medio a los dos anteriores.
- Para 4, se extiende el meñique dejando los demás dedos en su posición anterior.
- Para 5, se hace lo mismo con el anular.
- Para 6, se extiende el medio y se dobla el anular de forma que su borde quede a mitad de la palma.
- Para 7, se levantan todos los dedos, excepto el meñique, cuyo borde se inclina marcadamente hacia la muñeca.

- Para 8, se junta el anular doblándolo de la misma manera.
- Para 9, se hace lo mismo con el medio.
- Para indicar la decena, se coloca la uña del Índice en la articulación superior del pulgar, de modo que el espacio que queda entre ambos dedos parezca un círculo.
- Para 20, se coloca el borde del pulgar entre la falange inferior del índice y la del pulgar.
- Para 30, se coloca el borde del índice sobre la uña del pulgar.
- Para 40, se coloca la falange superior del pulgar sobre el dorso de la falange inferior del índice sin dejar ningún espacio entre el pulgar y el borde de la palma.
- Para 50, se curva el pulgar colocando su borde en medio de la palma.
- Para 60, asimismo se dobla el pulgar y se cubre la convexidad de la uña con la parte interna de la falange del centro del índice (como un arquero que coge una flecha).
- Para 70, se extienden el pulgar y el índice, después se apoya la parte interna de la falange del centro del índice contra el borde del pulgar sin que se tape la uña de este último.
- Para 80, se levanta el pulgar y se coloca su uña en la articulación interna del centro del índice doblado.
- Para 90, por último, se coloca la uña del índice en la raíz del pulgar.
- Las centenas y los miles se representan ejecutando los mismos gestos con la otra mano (la derecha para los occidentales y la izquierda para los orientales).
- Para 100, 200, 300..., se hace con esa mano exactamente lo mismo que para 10, 20, 30... con la primera.
- Y para 1 000, 2 000, 3 000..., se hacen con esa mano los mismos gestos que con la otra para 1, 2, 3...

Este sistema permitía a sus usuarios contar de 1 a 99 con una sola mano, y de 1 a 9 999 con ambas.



De los juegos de dedos a los juegos de palabras

Probablemente, ya desde la más remota antigüedad se conocía esta mímica tan antigua.

Los habitantes del Egipto faraónico parecen haberla empleado al menos desde el Antiguo Imperio (siglos XXVIII-XIII antes de J. C.), como parecen probarlo varias pinturas funerarias.



Los antiguos romanos también han utilizado este sistema de cuenta manual. Lo sabemos gracias a la gran cantidad de leseras numéricas desenterradas en las excavaciones arqueológicas y que se remontan la mayoría a comienzos de la era cristiana. Son pequeñas fichas de hueso o de marfil que representan cada una cierta cantidad de dinero y que los recaudadores romanos daban a los contribuyentes a

modo de «recibo»; suelen tener en una cara, una de las figuras digitales del sistema al que nos referimos, y, en la otra, su correspondiente valor en cifras romanas.



Tésera romana del siglo mostrando el gesto para 9.

También lo sabemos gracias a las alusiones hechas por numerosos autores latinos. En su Institución oratoria, el retórico Quintiliano (35-95 después de J. C.) escribía lo siguiente:

El conocimiento de los números no sólo es necesario para el orador, sino para cualquiera que conozca los primeros rudimentos de las letras. Se utilizan con frecuencia en los tribunales y un abogado que vacile sobre un producto, o que simplemente muestre inseguridad o torpeza en la forma de contar con sus dedos, inmediatamente da una mala impresión de su talento.

Aludía Quintiliano al sistema del que nos ocupamos que era de uso muy corriente en el Imperio Romano y que exigía de sus usuarios una destreza absoluta.

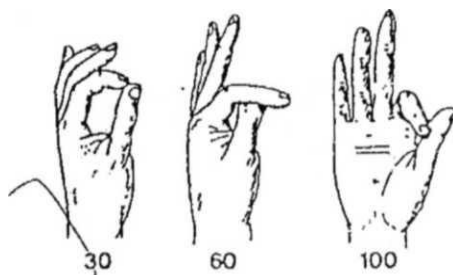
Una alusión más concreta a este procedimiento la hace el poeta Juvenal (55-135 después de J. C.) en una de sus Sátiras, donde dice lo siguiente de Néstor, el legendario rey de Pilo de quien se dice que vivió más de un siglo:

« ¡Feliz Néstor, que habiendo superado la centena, cuenta ya los años con la mano derecha!»

Comprendemos mucho mejor el significado de estas palabras al saber que los romanos contaban las unidades y las decenas con la mano izquierda y las centenas y los miles con la mano derecha.

San Jerónimo, el filólogo latino que vivió en el siglo IV, se refiere también a esta práctica en un pasaje de su Tratado sobre la sentencia evangélica:

Cien, sesenta y treinta, explica, son frutos de una misma semilla en una misma tierra. Treinta corresponde a las bodas, pues la conjunción de los dedos entrelazándose como en un tierno abrazo representa al marido y a la esposa. Sesenta representa a las viudas que están en una situación de angustia y tribulación. Y el gesto de cien (lector, te ruego, préstame toda tu atención), que es el de diez transferido a los mismos dedos de la mano izquierda a la derecha, expresa en la derecha, la corona de la virginidad.



Después de la caída del Imperio Romano, este sistema de cuenta manual tuvo una vigencia completamente excepcional en Occidente hasta fines de la Edad Media. Fue incluso uno de los más notables instrumentos pedagógicos de la enseñanza medieval. Y no hace más de cuatrocientos años, su uso estaba tan extendido entre los eruditos europeos que un manual de aritmética sólo se consideraba completo si lo explicaba detalladamente. Sólo la enorme difusión del cálculo escrito mediante las cifras «árabes» hizo que esta aritmética manual perdiese definitivamente su importancia.

Cuenta manual particular en un libro de aritmética publicado en Alemania en 1727.



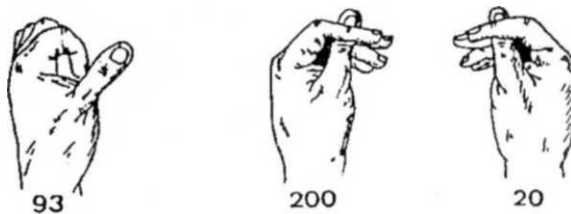
En tierras islámicas, la fortuna de esta mímica fue al menos tan grande como en Occidente. Desde los primeros siglos de la Hégira, los poetas árabes y persas hicieron una sutil alusión a la falta de generosidad de un personaje diciendo que «su mano hacía 93»

Un ejemplo: el poeta persa Firdusi (alrededor de 940-1020), quien estuvo muy mal recompensado por su Libro de los Reyes, ironizó de esta manera sobre la gran avaricia del sultán Mahmud el Ghaznavide:

«La mano del rey Mahmud, de augusto origen, es nueve veces nueve y tres veces cuatro.»

En esta cuenta manual, al número 93 se le representa casi con la mano cerrada, símbolo muy generalizado de la avaricia.

También esta apostilla del poeta persa Sanayi (muerto en 1160): «Lo que en la mano izquierda expresa 200 en la mano derecha sólo vale 20.»



Esto era literalmente cierto, pero el poeta quería decir con ello que, a veces, la repetición de un mismo acto en la vida, puede desvalorizarlo.

El poeta Anwari (muerto en 1189, aproximadamente), dirigiéndose en términos corteses, en uno de sus poemas, al Visir Nizam el-Mulk, elogia la habilidad de este último en materia de cálculo:

«Tú doblabas el dedo meñique de la mano izquierda a la edad en que los niños se chupan el pulgar.»

El poeta expresaba con ello que el visir sabía contar al menos hasta mil desde muy pequeño. También, estos versos de Khaqani (1106-1200):

¿Qué batalla es ésta dispuesta entre Rustem y Bahram?

¿Qué cólera, qué disensiones agitan a estos dos descendientes de ilustres familias?

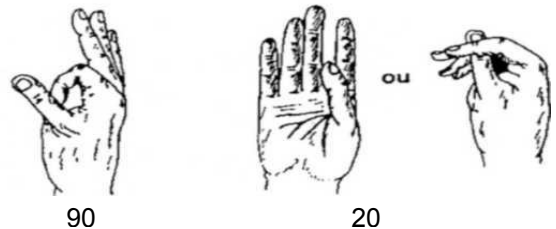
Sobre su 90, luchan día y noche para saber cuál de los dos ejércitos tendrá el número 20.

El significado del último verso, que era evidente para la gente de la época, parece bastante oscuro para un lector del siglo XX. Pero situando este pasaje en su contexto originario y examinando atentamente los gestos relacionados con los números 20 y 90 según la técnica anterior, comprendemos que significa lo siguiente:

¡Luchan día y noche sobre su trasero para saber cuál de los dos ejércitos llevará la delantera!

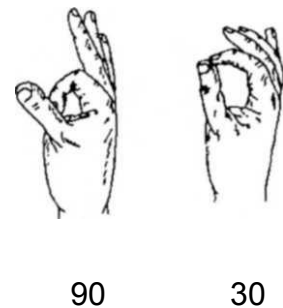
En efecto, el número 90, por su gesto obsceno, representaba frecuentemente al ano (y por extensión, al trasero) en el lenguaje popular. En cuanto a la expresión «tener el número 20 sobre alguien» por su sugestiva representación tenía el sentido peyorativo del acto sexual, y por lo tanto en un contexto militar, el de «llevar la delantera»

Una alusión libertina del mismo tipo se encuentra en un comentarista de textos seculares árabes y persas, Ahamad al-Babir al-Tarabu-lusi. Este, en uno de sus escritos, nos dice que para que sus alumnos recordaran bien los gestos que corresponden a los números 30 y 90, no podía evitar contarles lo siguiente:



Cierto poeta se mostró muy sutil en un epigrama contra un bello adolescente llamado Khalid, diciendo que este acostumbraba a salir con una fortuna de 90 dirhams y a volver sólo con la tercera parte.

El tal Khalid era, en efecto, homosexual: «De modo que, señalaba al-Babir, el poeta ha querido decir que Khalid era «estrecho cuando partía pero "ancho" cuando regresaba.»

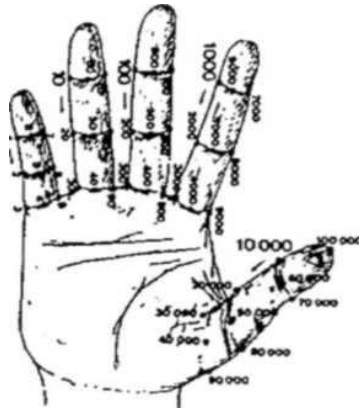


Esta mímica numérica tenía que ser muy corriente para que este tipo de sutilezas pudiesen ser apreciadas por los lectores de la época.

Cómo contar con los dedos hasta diez mil millones

Pero la mano del hombre no sólo ha permitido contar hasta 10 000. Algunos hombres han sabido ampliar sus posibilidades a números mucho más elevados. Este ha sido el caso de los calculadores chinos, que perfeccionaron un sistema que permitía -al menos en teoría- contar hasta cien mil con una mano, ¡y hasta diez mil millones con las dos!

En este procedimiento manual, cada articulación de las falanges se subdivide en tres partes: izquierda, central y derecha. De modo que cada dedo corresponde a las nueve unidades consecutivas de un mismo orden decimal: el meñique derecho a las unidades simples, el anular de la misma mano a las decenas, el medio a las centenas, el índice a los millares y el pulgar derecho a las decenas de mil; el pulgar izquierdo corresponde a las centenas de mil, el índice de la misma mano a los millones, y así sucesivamente.



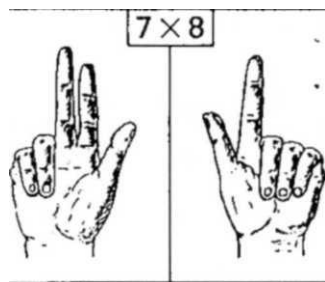
Se cuenta primero de 1 a 3, tocando sucesivamente el lado izquierdo de las articulaciones, superior, media e inferior del dedo meñique derecho. Luego se cuenta de 4 a 6, tocando sucesivamente, de abajo a arriba, la parte central de las articulaciones inferior, media y superior. Por último se cuenta de 7 a 9 tocando de arriba a abajo el lado derecho de las articulaciones superior, media e inferior. Se procede del mismo modo con el anular derecho, contando primero de 10 a 30, luego de 40 a 60, y finalmente de 70 a 90. Se procede de igual manera con el dedo medio derecho para contar de 100 a 900. Y así sucesivamente. De modo que al llegar a la articulación inferior derecha del meñique izquierdo, se alcanzan los nueve mil millones.

El cálculo digital

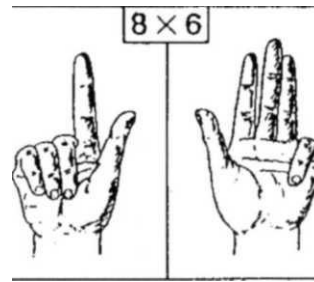
La mano del hombre no sólo ha servido para contar, sino también para calcular, es decir para efectuar diversas operaciones aritméticas.

Conocí a un campesino auvernés, originario de la región de Saint Flour, en Francia, que sabía hacer multiplicaciones con sus dedos, simplemente enumerando los datos y excluyendo cualquier tipo de artificio manual. Este campesino perpetuaba una tradición muy antigua de la que todavía se encuentran huellas en India, Irak, Siria, África del Norte, etc.

Para multiplicar 8 por 9 por ejemplo, doblaba tantos dedos de una mano como unidades suplementarias hay en 8 con relación a 5, es decir $8 - 5 = 3$ dedos, y mantenía los otros dos dedos estirados. Doblabo luego tantos dedos de la otra mano como unidades suplementarias hay en 9 con relación a 5, es decir $9 - 5 = 4$ dedos, y mantenía estirado el dedo que le quedaba. Entonces obtenía el resultado del producto multiplicando primero por diez (mentalmente, por supuesto) el número de dedos doblados de ambas manos -lo que le daba: $(3 + 4) \times 10 = 70$ - y añadiendo seguidamente ese resultado parcial al producto de los dedos levantados de la primera mano por los dedos levantados de la otra; es decir: $2 \times 1 = 2$. De modo que llegaba a: $8 \times 9 = (3 + 4) \times 10 + (2 \times 1) = 72$.



Producto de 7 por 8
 Doblar: (7-5) dedos de una mano, y (8-5) de la otra.
 Resultado: 5 dedos doblados en total, 3 dedos levantados en una mano y 2 dedos en la otra.
 Por lo tanto: $7 \times 8 = 5 \times 10 + 3 \times 2 = 56$



Producto de 8 por 6
 Doblar: (8-5) dedos de una mano y (6-5) de la otra.
 Resultado: 4 dedos doblados en total, 2 dedos levantados en una mano y 1 en la otra.
 Por lo tanto: $8 \times 6 = 4 \times 10 + 2 \times 1 = 48$

Para multiplicar 9 por 7, doblaba también tantos dedos de una mano como unidades suplementarias hay en 9 con relación a 5, es decir $9 - 5 = 4$ dedos, y tantos dedos de la otra mano como unidades suplementarias hay en 7 con relación a 5, es decir $7 - 5 = 2$ dedos. El resultado se obtenía multiplicando por 10 el número total de dedos doblados en ambas manos -lo que daba: $(4 + 2) \times 10 = 60$ - y añadiendo ese resultado parcial al producto de los dedos levantados de una mano por los dedos levantados de la otra -es decir a: $1 \times 3 = 3$. En este caso llegaba a: $9 \times 7 = 10 \times (4 + 2) + (1 \times 3) = 63$.

Este procedimiento concreto, que a los antiguos se les ocurrió sin duda empíricamente, es infalible: permite efectuar rápidamente las multiplicaciones de todos los números comprendidos entre 1 y 10.

Daremos la justificación matemática para aquéllos que se atreven con el álgebra elemental: x e y son dos números comprendidos entre 5 y 10 que hay que multiplicar entre sí. Doblamos tantos dedos de una mano como unidades

suplementarias hay en x con relación a 5, es decir $(x - 5)$ dedos, y tantos dedos de la otra mano como unidades suplementarias hay en y con relación a 5, es decir $(y - 5)$ dedos. El número de dedos estirados en la primera mano es igual a: $A = 5 - (x - 5)$, mientras que el de dedos estirados en la otra mano es de $B = 5 - (y - 5)$.

En cuanto al número total de dedos doblados en las dos manos, es igual a:

$$R = (x - 5) + (y - 5).$$

La regla que corresponde a esta multiplicación digital se justifica porque la expresión:

$(10 \times R) + (A \times B)$ (producto por diez del número total de dedos doblados, aumentado con el producto de dedos estirados) corresponde exactamente a:

$10 [(x - 5) + (y - 5)] + [5 - (x - 5)] \times [5 - (y - 5)] = xy$; es decir al producto de que se trate.

El campesino también conseguía multiplicar los números comprendidos entre 10 y 15 merced a otro procedimiento.

Para multiplicar 14 por 13 por ejemplo, doblaba tantos dedos de una mano como unidades suplementarias hay en 14 con relación a 10 (es decir $14 - 10 = 4$ dedos) y tantos dedos de la otra mano como unidades suplementarias hay en 13 con relación a 10 (es decir, $13 - 10 = 3$ dedos). Obtenía entonces el producto buscado multiplicando (mentalmente) por diez el número total de dedos doblados (lo que daba: $(4 + 3) \times 10 = 70$), luego añadiendo a esto el producto (igual a $4 \times 3 = 12$) de los dedos doblados, y finalmente sumando ese resultado parcial a 10×10 . De modo que llegaba a: $14 \times 13 = 10 \times (4 + 3) + (4 \times 3) + 100 = 182$.

Mediante otras técnicas parecidas, llegaba incluso a multiplicar todos los números comprendidos entre 15 y 20, entre 20 y 25 y así sucesivamente.

Estas técnicas (que implican saber de memoria los cuadrados respectivos de 10, 15, 20, 25, etc.) están justificadas matemáticamente por las fórmulas siguientes:

- _ Multiplicación de los números comprendidos entre 10 y 15: $10 [(x - 10) + (y - 10)] + (x - 10) \times (y - 10) - 10^2 = xy$;
- _ Multiplicación de los números comprendidos entre 15 y 20: $15 [(x - 15) + (y - 15)] + (x - 15) \times (y - 15) + 15^2 = xy$;

- Multiplicación de los números comprendidos entre 20 y 25: $20 [(x - 20) + (y - 20)] + (x - 20) \times (y - 20) + 20^2 = xy$; y así sucesivamente.

Ahora podemos comprender como unos hombres que no disponían de nuestro cálculo moderno mediante las cifras «árabes» pudieron, durante muchos siglos, desplegar toda su imaginación para salir del paso gracias a su memoria y a los múltiples recursos de los dedos de la mano.

Pero la mano, primer soporte concreto de la cuenta y del cálculo, no es más que un modo pasajero de registrar el concepto numérico. Es cierto que obedece a las necesidades de la representación visual de los números, pero con seguridad no a la necesidad de memorizarlos.

Con la intensificación de las comunicaciones entre las distintas sociedades y con el desarrollo de la artesanía y del comercio, la humanidad, que todavía no sabía «escribir» pero que quería hacer el balance de sus bienes particulares, así como el de sus actividades económicas, se encontró frente a un nuevo problema: ¿Cómo memorizar convenientemente un recuento?

Y como no había nacido con nada que pudiese responder a esta necesidad, la humanidad nuevamente tuvo que hacer un esfuerzo creativo.

Contar con cuerdas

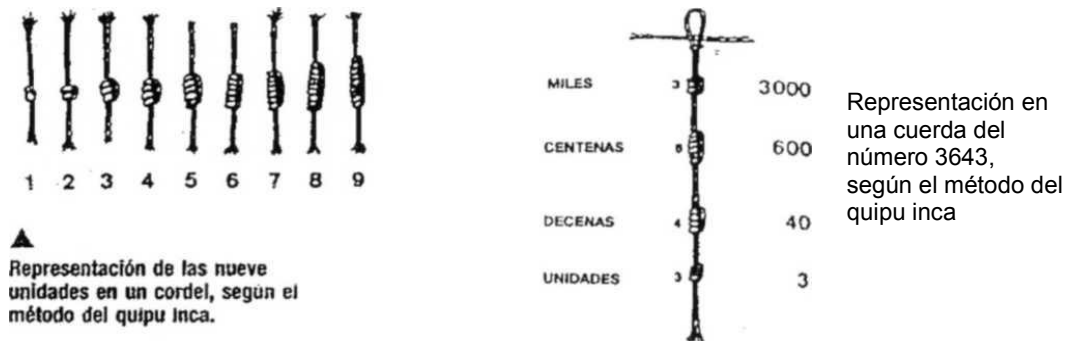
Cuando a comienzos del siglo XVI, los conquistadores españoles desembarcaron en América del Sur, bajo el mando de Pizarro, encontraron un vasto imperio. Este se extendía de norte a sur abarcando unos 4 000 kilómetros, que cubrían más de cien millones de hectáreas y ocupaban los actuales territorios de Bolivia, Perú y Ecuador. En aquella época, la civilización de los incas (cuyos orígenes se remontan a comienzos del siglo XII de nuestra era) estaba en todo su apogeo.

Este alto grado de cultura y esta prosperidad parecen, a primera vista, tanto más sorprendentes cuanto que los incas no conocían ni la rueda, ni la tracción animal, ni siquiera la escritura en el sentido en que nosotros la entendemos.

Sin embargo, es posible explicar parcialmente este éxito. Los incas llevaban archivos y una contabilidad muy precisa gracias a un sistema muy elaborado de cordeles con nudos. Este dispositivo llamado guipo o quipu (una palabra inca que significa «nudo») consistía en un cordel principal de, aproximadamente, dos pies de largo, al que estaban anudadas diversas cuerdas multicolores, más finas, reunidas en varios grupos y unidas a intervalos regulares por diferentes clases de nudos.

Estos quipus abarcaban funciones muy variadas; el color de las cuerdas, el número y la posición relativa de los nudos, el grosor de las agrupaciones obtenidas y su espaciamiento tenían significaciones muy precisas. Servían, por ejemplo, de soporte a la representación de hechos litúrgicos, cronológicos o estadísticos. También servían de calendario y permitían transmitir mensajes. El color de un cordel podía corresponder convencionalmente a un objeto concreto o a una idea abstracta: el blanco expresaba la pureza, la paz o la «plata»; el amarillo, el oro, el sol o la eternidad; el rojo, la sangre, el fuego o la guerra, etc. Pero los quipus se utilizaban sobre todo con fines contables y su sistema era de base decimal.

Sobre una cuerda colgante provista de varios puntos de referencia consecutivos, equidistantes unos de otros, se representaban las nueve unidades simples haciendo todos los nudos que fuesen necesarios a la altura de la primera referencia a partir de la parte inferior de la cuerda. Luego se representaban las nueve decenas haciendo otros tantos nudos a la altura de la segunda referencia, las nueve centenas haciendo lo mismo a la altura de la tercera referencia, y así sucesivamente. De modo que para representar, por ejemplo, el número 3.643, se efectuaban tres nudos a la altura de la primera referencia, cuatro nudos a la altura de la segunda, seis nudos a la altura de la tercera y tres a la altura de la cuarta.



Estos cordeles con nudos, cuidadosamente conservados para memorizar los resultados de los recuentos, constituían un valioso instrumento estadístico en todos los sectores de la vida del imperio: recuento de las diferentes capas de población; registro de nacimientos, bodas y defunciones; registro de los hombres en edad de llevar armas; recuentos relacionados con asuntos militares o con los tributos impuestos a los pueblos sojuzgados; evaluación de las cosechas; contabilización de los animales muertos en las inmensas batidas anuales; inventario de los recursos materiales; cuentas de las cantidades de materias brutas distribuidas a los obreros del imperio; facturas de entrega; establecimiento de archivos presupuestarios o de la base tributaria para alguna unidad administrativa, etc.

Es cierto que la administración inca estaba notablemente organizada. En cada ciudad, pueblo o distrito del imperio, unos funcionarios llamados quipucamayocs (o

«guardianes de nudos») estaban encargados de confeccionar quipus y de interpretarlos en cualquier ocasión. Ellos eran quienes proporcionaban al gobierno las informaciones requeridas. Anualmente procedían al inventario de los productos cosechados en la región o al recuento de la población, los resultados se consignaban en quipus y esos registros eran transmitidos a la administración central que, de este modo, mantenía un importante acopio de informaciones estadísticas.

El quipu era, a la vez, tan sencillo y tan valioso que su uso ha persistido durante mucho tiempo en Perú, Bolivia y Ecuador. Al parecer, a mediados del siglo pasado, principalmente en las altiplanicies peruanas, los pastores seguían utilizando quipus para consignar el número de animales que estaban a su cargo. En un primer haz de cuerdas blancas hacían el inventario del ganado ovino o caprino, poniendo normalmente a los borregos en la primera rama, los corderos en la segunda, las cabras en la tercera, las cabritillas en la cuarta, las ovejas en la quinta, etc. Luego, en un segundo haz de cuerdas verdes, hacían el inventario del ganado bovino poniendo los toros en la primera, las vacas lecheras en la segunda, las vacas estériles en la tercera y después los terneros por edad y por sexo..., y así sucesivamente

En la actualidad, los indios de Bolivia y del Perú utilizan todavía un sistema análogo: el chimpu, descendiente directo del quipu. Un solo cordel representa las unidades (como en el quipu, se hacen nueve nudos); las decenas se representan mediante otros tantos nudos efectuados sobre dos cordeles juntos, las centenas sobre tres cordeles, los miles sobre cuatro y así sucesivamente. En el chimpu, el número de cordeles en los que se hacen dichos nudos corresponde, pues, a un orden decimal: seis nudos, por ejemplo, representan en ese dispositivo el valor 6, 60, 600 ó 6 000, según hayan sido hechos sobre uno, dos, tres o cuatro cuerdecillas a la vez.

Estos sistemas tan notables no son, sin embargo, patrimonio exclusivo de los incas ni de las poblaciones de América del Sur. Desde la más remota antigüedad y en diferentes lugares, encontramos el empleo de los cordeles con nudos.

Heródoto (485-425 antes de J. C.) cuenta, por ejemplo, cómo Darío I, rey de Persia (522-486 antes de J. C), durante una de sus expediciones militares confió a soldados griegos aliados la guarda de un puente de importancia estratégica vital para su retaguardia. Les envió una correa con sesenta nudos y les ordenó deshacer un nudo cada día, diciéndoles:

Si al deshacer el último nudo aún no he vuelto, marchad a vuestros barcos y regresad a casa.

En la Palestina del siglo II de la era cristiana, que estaba por aquel entonces bajo dominio romano, los publicanos (recaudadores de impuestos de la época) utilizaban como registro un gran cable formado, probablemente, por varias cuerdas ensambladas. Además, a cada contribuyente se le daba un recibo que consistía en un cordel anudado de una forma especial.

Entre los árabes, los cordeles con nudos también han servido durante mucho tiempo, no sólo como procedimiento de numeración concreta, sino también para los contratos y los recibos o como sistema de archivos administrativos. Además, la propia lengua árabe lo refleja: aqd, que significa literalmente «el nudo», también quiere decir «contrato», así como todo tipo de números constituido por los productos de las nueve unidades por una potencia de diez (vanos autores árabes aluden al nudo de las decenas, al nudo de las centenas, al nudo de los miles, etc.).

También los chinos utilizaron durante mucho tiempo sistemas análogos de recuento, contabilidad y archivo en épocas en las que todavía no se conocía la escritura o estaba insuficientemente extendida. «En las épocas más remotas, se gobernaba a los hombres mediante el sistema de cordeles con nudos», afirma el Yi-King («Libro de las Mutaciones»), obra clásica cuya redacción probablemente se remonta a la primera mitad del primer milenio antes de J. C. Según la tradición, fue el semilegendario emperador Shen Nong (uno de aquellos a quienes se atribuye la creación de las bases de la civilización china) quien elaboró el sistema de contabilidad con cordeles anudados y quien contribuyó a la difusión de dicho método.

En nuestros días, este uso no ha desaparecido del todo en el Extremo Oriente. Todavía persiste, principalmente en las islas Riu-Kiu (entre Taiwan y el archipiélago japonés). En la isla de Yaeyama, no hace mucho, seguían calculando y consignando el producto de las cosechas mediante procedimientos análogos. Cada contribuyente recibía, a modo de «advertencia» de su recaudador de impuestos, un cordel anudado que indicaba de una forma determinada el importe del impuesto que todavía quedaba por pagar. En algunos lugares de la isla de Okinawa los obreros siguen hoy en día contando sus jornadas de trabajo y las cantidades que les adeudan utilizando un procedimiento similar con cuerdas de paja.

En la región de Shuri, los prestamistas siguen registrando sus operaciones en largas cuerdas de corteza o de junco que parten por la mitad atando otra cuerda en el centro.

Encontramos esta misma práctica entre ciertos pueblos siberianos (los Vogules, los Ostiaks, los Tungusos, los Yakustos, etc.), en las islas Carolinas (cerca de Tahití), en las islas Hawai, así como en África occidental (principalmente entre los Yebu y los Yoruba de Nigeria).

Algunos indios de América del Norte también anudaban fibras vegetales para contar o descontar cosas, animales o personas, medir el paso del tiempo, o incluso para conservar de forma duradera el recuerdo de alguna enumeración o algún recuento. Procedimiento que ha podido ser observado, por ejemplo, entre los Apaches y los Zum de Nuevo México, entre los Yakima del estado de Washington, los Walapai y los Havasupai de Arizona, los Miwok y los Maidu de California, etc.

Por último, los molineros alemanes todavía utilizaban a finales del siglo pasado un sistema de ese tipo para registrar los resultados de sus diferentes transacciones con los panaderos de las ciudades y del campo.

Un método prehistórico: la muesca

Pero el procedimiento de los cordeles con nudos no es el único que ha respondido a la necesidad de memorizar los números. El método con más testimonios universales en la historia de la «contabilidad» y también uno de los más antiguos, es el de las muescas en un trozo de hueso o de madera, que ya le había permitido al hombre salir muchas veces del paso cuando todavía no sabía contar de forma abstracta.

Los primeros testimonios arqueológicos conocidos de esta práctica datan del periodo al que los prehistoriadores designan habitualmente con el nombre de Auriñaciense (35 000 a 20 000 años antes de J. C). Son más o menos contemporáneos del hombre de Cromagnon. Se trata de una gran cantidad de huesos, que llevan cada uno varias series de muescas regularmente espaciadas, hallados en su mayoría en la Europa Occidental.

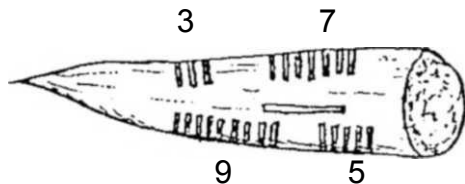
Entre ellos, hay un radio de lobo con cincuenta y cinco muescas repartidas en dos series de grupos de cinco. Los arqueólogos lo descubrieron en 1937 en Dolni Vestonice, en Checoslovaquia, entre sedimentos de unos treinta mil años de antigüedad. La utilidad de estas muescas sigue siendo un enigma, pero no cabe la menor duda de que este hueso (cuyas muescas fueron grabadas intencionadamente y sin obedecer a ninguna preocupación estética) es uno de los documentos aritméticos más antiguos de que disponemos. Nos llega incluso a indicar muy claramente que en esta época el ser humano ya había llegado no sólo a concebir números abstractos, sino también a descomponerlos según el principio de la base. Si no, ¿por qué se molestaron en distribuir estas muescas de forma tan perfectamente regular, cuando la práctica de la muesca considerada tan sólo desde el punto de vista del emparejamiento, no habría dado más que una serie continua de trazos?

El hombre que utilizó ese hueso fue tal vez un gran cazador. Cuando mataba un animal, hacía una marca sobre un hueso. Para cada tipo de animal ponía diferente marca, una para los ciervos, otro para los bisontes, etc. De esta manera hacía el balance de su situación alimentaria. Pero para no tener que volver a contar cada vez todas las muescas correspondientes, empezó a distribuirlas en grupos de cinco, como los dedos de la mano:

1 2 3 4 5	6 7 8 9 10	11 ... 15	16 ... 20
1 mano	2 manos	3 manos	4 manos

De este modo elaboró una auténtica notación gráfica sobre la base cinco de los primeros números naturales.

También es sumamente interesante un objeto que actualmente se conserva en el museo de Aquitania de Burdeos, hallado hace algunas décadas en Brassempouy en Dordoña, en un yacimiento que data del Magdaleniense (19 000 a 12 000 a. de J. C). Se trata de un punzón de madera de reno con una muesca longitudinal intercalada entre dos series de muescas transversales regularmente espaciadas, repartidas cada una en dos grupos bien diferenciados (3 y 7 trazos en un lado, 5 y 9 en el otro). Además, la muesca longitudinal, visiblemente más cercana a la serie 3-7, parece formar una «llave», en cierta forma un guión, entre el grupo de los nueve y el de los cinco trazos.



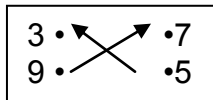
¿De qué se trata? ¿Era tan sólo un simple instrumento, un arma o una herramienta a la que habría llenado de muescas sólo para impedir que se le escurriese de la mano? Esta explicación parece poco probable. Además, ¿para qué serviría entonces el trazo longitudinal que con seguridad no estaba allí por azar? Y si así fuere, ¿por qué algunos instrumentos análogos de la Prehistoria, incluidos los de épocas posteriores, no solían tener este tipo de muesca?

En realidad, este punzón también denota alguna actividad relacionada directa o indirectamente con la aritmética.

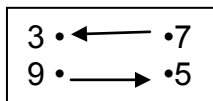
Merced a la disposición de los números 3, 5, 7 y 9 a la importancia que se le ha atribuido en numerosos documentos análogos de esta época, se puede elaborar una primera explicación.

Podría pensarse que el primer trazo longitudinal representaba la unidad y que los trazos transversales correspondían a los otros números impares, que son números primos, con excepción de 9, cuadrado de 3.

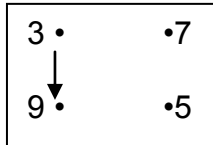
Según esto, este punzón habría sido una especie de «instrumento aritmético» que ofrece una representación gráfica de los primeros números impares, así como una colocación de dichos números que permite encontrar rápidamente algunas propiedades elementales, como por ejemplo:



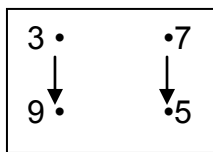
$$9 - 7 = 5 - 3 = 2$$



$$7 - 3 = 9 - 5 = (9 + 5) - (7 + 3) = 4$$



$$3 \times 3 = 9$$



$$3 + 9 = 5 + 7 = 12, \text{ etc.}$$

Pero la práctica de la muesca en tanto que soporte material de la representación y de la memorización de los números, también es una prefiguración de la contabilidad.

Este lejano antepasado nuestro, propietario del punzón, tal vez lo haya utilizado más bien para contar hombres, animales o cosas.

Este objeto podría haber sido utilizado por un creador de herramientas de la época para establecer un balance de sus utensilios de trabajo:

- 3 buriles-raspadores y 7 cuchillos (de piedra)
- 9 rascadores y 5 taladradores (de hueso)

(el trazo longitudinal que forma la llave entre los cinco y los nueve trazos podría haber simbolizado para este hombre, la naturaleza ósea de las dos últimas herramientas).

O si se tratara de un guerrero haciendo balance de sus armas:

- 3 navajas y 7 punzones
- 9 azagayas de bisel simple y 5 azagayas de base hendida

También pudo haber servido para registrar la cantidad y la especie de las piezas cobradas por un cazador para una comunidad:

- 3 bisontes y 7 búfalos
- 9 renos y 5 ciervos

O incluso para establecer el balance de las reservas alimentarias del momento.

También nos podemos imaginar a un pastor utilizando esta práctica para anotar el número de animales que tiene a su cargo, y poniendo por ejemplo el ganado ovino o caprino a un lado y los bóvidos a otro.

O también a un mensajero que empleara ese punzón tallado para transmitir a una tribu vecina un mensaje de este tipo: «Dentro de 3 lunas y 7 días, os proporcionaremos 9 cestos de alimentos y cinco animales para pieles». Podemos pensar igualmente en un «recibo» o una «factura de entrega», o incluso en la contabilidad de un intercambio o de un reparto...

Por supuesto, esto son sólo hipótesis, pues el auténtico significado de esos trazos sigue siendo un enigma para los exegetas. De hecho la utilidad exacta de estas muescas seguirá siendo eternamente desconocida, porque en este tipo de notación, las cosas o los seres directamente implicados en la operación están sólo indicados por sus cantidades respectivas y no por signos específicos que permitan determinar su naturaleza.

En esta fase, la humanidad no conocía todavía la escritura. Pero el dueño del punzón y sus contemporáneos y antecesores, al concretar de este modo la enumeración de algún tipo de unidades habían inventado los primeros rudimentos de la contabilidad escrita: en realidad lo que hacían eran cifras en el sistema de notación numérica más rudimentario de la historia.

La contabilidad de los iletrados

Técnica primitiva y sin futuro, se pensará. Primitiva lo era, por supuesto, pero nada de que no tenía futuro. Ha llegado hasta nosotros casi sin alteración, a través

de miles de años de evolución, de historia y de civilizaciones. Sin saberlo, nuestros antepasados de hace más de treinta mil años realizaron una invención que iba a batir uno de los récords de longevidad de todos los tiempos. Ni siquiera la rueda es tan antigua. Sólo el fuego puede rivalizar con ella.

Muchas de esas muescas encontradas en las paredes rocosas de las cuevas prehistóricas junto a las siluetas de animales no dejan duda alguna sobre su función contable, y en la época moderna la técnica apenas ha cambiado.

Cerca de Los Ángeles, no hace mucho, los obreros indios llevaban la cuenta de su tiempo de trabajo grabando en un trozo de madera una muesca delgada por cada día, una muesca más gruesa por cada semana y una cruz por cada quincena de trabajo realizado.

Durante el siglo pasado, los vaqueros de América utilizaban el mismo sistema haciendo una muesca en su «Colt» por cada bisonte muerto, como también hacían los temibles «cazadores de recompensas» por cada bandido capturado o abatido. Y el padre de la famosa Calamity Jane, también en el Oeste americano, anotaba así el número de «jóvenes casaderas» de su pueblo.

En Indochina hace apenas un centenar de años, se utilizaba corrientemente el mismo procedimiento, como lo atestigua este extracto del relato del explorador J. Harmand sobre una población de Laos en 1879:

En el camino, a algunos pasos de la entrada de un pequeño sendero, veo una gran barrera de bambúes y árboles caídos, adornada de hexágonos y ramos de hierbas; encima del sendero se balanceaba una pequeña tablilla, que tenía en cada uno de sus bordes una serie de muescas regulares, unas grandes y otras pequeñas. A la derecha, una serie de doce muescas pequeñas, una de cuatro grandes y otra de doce pequeñas. La traducción es la siguiente: De aquí a doce días, cualquier hombre que se atreva a traspasar nuestra barrera será nuestro prisionero o bien nos pagará un tributo de cuatro búfalos y doce ticales. A la izquierda, hay ocho grandes muescas, once medianas y nueve pequeñas, lo que significa: Nuestro pueblo tiene ocho hombres, once mujeres y nueve niños.

Hace sólo unas generaciones, los pastores alpinos y húngaros, así como los pastores celtas, toscanos y dálmatas, solían anotar el número de cabezas de sus rebaños grabando tantos trazos, muescas o cruces en palos o tablillas de madera como cabezas. Pero algunos habían afinado y perfeccionado el método: lo habían adaptado perfectamente a las realidades a las que están sometidos los pastores del mundo entero.

En determinados lugares de los Alpes suizos y austriacos, los pastores registraban así el número de animales que estaban a su cargo, siguiendo distintas categorías, y reservando a cada una, una tablilla cuidadosamente esculpida y marcada con una palabra (en lengua alemana) o con un signo característico; por ejemplo:

- _ la mención *Küo* («vaca») o el signo Δ para las vacas;
- _ la palabra *Schaf* («oveja») o el signo \times para las ovejas;
- _ la palabra *Geis* («cabra») o el signo \times para las cabras; etc.

Asimismo dichos pastores llevaban varias cuentas paralelas al mismo tiempo. Empezaban separando el inventario de los bovinos del de los ovinos o caprinos. Ensartaban pues en una primera tira las tallas relativas a los bueyes, vacas y toros, y en otra tira las que daban cuenta de los borregos, cabras y ovejas. Después se ocupaban de diferenciar a los animales según su edad y su sexo, separando por ejemplo los borregos, las ovejas, los corderitos y las corderitas. Después separaban a los animales estériles de los que daban leche, etc. En resumen, habían elaborado un auténtico sistema de contabilidad.

El impuesto llamado «talla» que los señores y los reyes de Francia cobraban antaño a sus siervos y pecheros, llevaba este nombre simplemente porque los recaudadores acostumbraban a marcar sobre una talla de madera lo que les daba cada contribuyente.

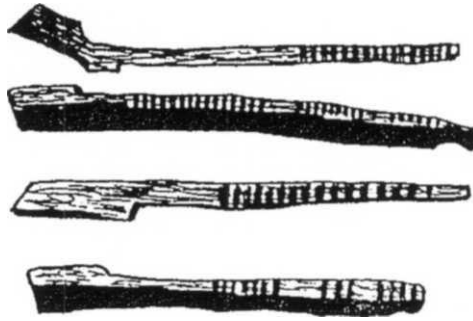
Curiosamente, este mismo sistema seguía sirviendo a comienzos del siglo XIX en Inglaterra para certificar el pago de los impuestos o también para contabilizar las entradas y salidas de dinero. En los palos tallados, las muescas más o menos profundas, representaban una libra, diez libras, cien libras, etc. o también submúltiplos de esta unidad monetaria. Y hace sólo ciento cincuenta años, el muy solemne ministerio de Hacienda británico llevaba todavía sus archivos de esta forma.

Sin duda fue esto lo que llevó a Charles Dickens (1812-1870) a formular una violenta crítica contra la burocracia de la época y a redactar un panfleto titulado la Reforma administrativa:

«Hace algunos siglos, escribía, se introdujo en el Ministerio de Hacienda una forma salvaje de contabilidad que se hacía con muescas en palos de madera, y se llevaban las cuentas más o menos como llevaba su calendario Robinson Crusoe en su isla. Nacían y morían sin cesar contables, tenedores de libros, actuarios y la rutina oficial seguía aferrada a los palos tallados como si fuesen los pilares de la

Constitución: las cuentas de Hacienda seguían llevándose sobre unos pedazos de madera de olmo llamados *tallies*.

Bajo el reinado de Jorge II, empezó a soplar un espíritu revolucionario: se examinó si, puesto que había plumas, tinta, papel, pizarras, lápices, habían de seguir empecinados en esa obsoleta costumbre, en vez de adoptar un sistema moderno. Pero la burocracia se obstinó en su rutina, y los palos no fueron abolidos hasta 1826.

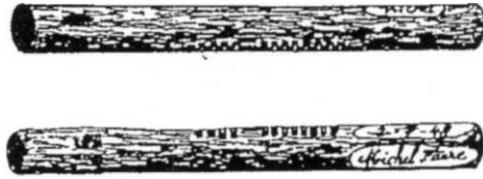


Tallas inglesas del siglo XIII

En 1834, se dieron cuenta de que había grandes montones de palos y se preguntaron qué podrían hacer con esos viejos pedazos de madera podridos, desgastados y comidos por los gusanos. Los llevaron a Westminster y alguna persona inteligente pensó que lo mejor que se podía hacer era distribuirlos entre los pobres de los alrededores para leña. Sin embargo, como nunca habían servido para nada, la rutina burocrática exigió que siguieran sin servir para nada y mandaron quemarlos en secreto. Corrió el rumor de que los habían quemado en una estufa de la Cámara de los Lores. La estufa, atestada de esos viejos palos, quemó la madera del artesonado, y el incendio se propagó a la Cámara de los Comunes; ambos palacios quedaron reducidos a cenizas. Encargaron a los arquitectos que construyeran otros, ¡y actualmente vamos por el segundo millón de gastos!»

He aquí el famoso conservadurismo británico, ironizarán algunos. Pero entonces, ¿qué pensar de los franceses y de los demás europeos?

A comienzos del siglo pasado, en Francia, en Suiza, Alemania y en los países escandinavos, esos mismos palos hacían las veces de nuestros libros de cuentas y de nuestros documentos escritos y en los mercados públicos servían como garantías para los contratos o para certificar la entrega de mercancías: El Código civil, establecido en 1804 bajo Napoleón I, especifica en su artículo 1 333 que Las tallas correspondientes a sus muestras dan fe entre las personas que pueden así comprobar detalladamente los suministros que envían o reciben.

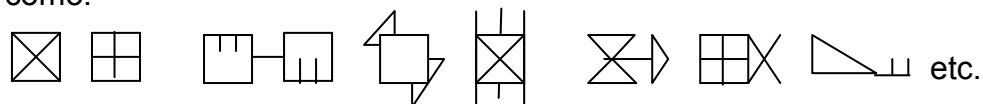


Tallas francesas de los panaderos rurales, tal como se empleaban en las aldeas.

Además, hasta comienzos del siglo XX en Francia, e incluso hace menos (yo mismo lo he visto hace apenas algunos años en un pueblecito situado cerca de Dijon) se empleaba ese mismo método en las panaderías de pueblo, cuando vendían el pan a crédito. El panadero cogía un pedazo de madera de aproximadamente veinte centímetros de largo y lo partía longitudinalmente en dos. A continuación, yuxtaponía las dos tablillas de madera y, en el corte entre ambas, hacía con una sierra o con un cuchillo tantas muescas, trazos o cruces como hogazas de pan entregaba al parroquiano. Daba la mitad de la talla a este último y se quedaba con la otra en la panadería, después la ensartaba en una tira con otros palos análogos, tras haber inscrito el nombre del cliente.

La cuenta y el pago se llevaban a cabo en una fecha fija (una vez al mes o cada quince días, por ejemplo) por lo que el control era sencillo. Además, en estas condiciones no podía haber reclamación alguna: ambas mitades tenían las mismas muescas, con la misma forma, idéntico tamaño y en el mismo sitio. El cliente, evidentemente, no podía eliminar ninguna, ni el panadero añadirla. Si este último se hubiese atrevido a hacerlo, con sólo comparar ambos pedazos se hubiera descubierto el fraude. Una forma insospechada de recibo, de factura o de «papel de calco» (por así decirlo), pero también una tarjeta de crédito de madera casi tan segura y eficaz como las tarjetas magnéticas de nuestros días.

En los siglos XVII y XVIII, esta misma contabilidad pueblerina estaba en vigor en la Rusia zarista, así como en los ámbitos germano y escandinavo, sobre todo para los préstamos de dinero. En dos tablillas de madera se hacían simultáneamente tantos trazos, muescas o cruces como unidades monetarias correspondientes tenía la cantidad de dinero prestada. Cada una de las dos partes se quedaba con una e inscribía en ella su marca de propiedad a modo de firma (era un signo convencional, algo así como:



que se escogía ya de forma permanente para designar a una persona determinada de la comunidad). Luego, uno o dos testigos ponían su propia marca sobre las dos tablillas a la vez, certificando así la conformidad y la integridad de la transacción.

Después de esto las dos partes intercambiaban sus tallas respectivas. Estas tenían para ellos el mismo valor jurídico que para nosotros tienen los más sólidos contratos de préstamo por escrito: era imposible que ninguna de las dos partes pudieran modificar fraudulentamente el importe del capital comprometido, pues la indicación de éste en «cifras» talladas era rigurosamente idéntica en ambas tablillas; era imposible que el deudor pudiera negar su deuda, ya que había grabado su marca de propiedad en la talla que ahora estaba en poder del acreedor.

Como lo explica Lucien Greschel, la persistencia de la práctica de la muesca numérica hasta la época moderna se aclara y se justifica en esas condiciones:

«En su aspecto estrictamente material la talla se emplea para contar porque es mejor para memorizar que los dedos cuando se trata de conservar los resultados parciales sucesivos de una operación relativamente importante; ésta es la razón de ser de su creación, de su primitivo empleo. Pero una vez utilizada, la talla demuestra tener otras aplicaciones: funciona, por así decirlo, como una memoria. De hecho, puede no sólo conservar resultados parciales hasta el momento en que se obtiene el resultado final (lo que nos hace retroceder a tiempos en que los hombres ignoraban la aritmética); sino que también puede conservar dicho resultado final y este último uso, este nuevo empleo, es el que se ha perpetuado hasta nuestros días, pero ahora con una función de orden económico, y no ya simplemente, materialmente, aritmético».

Y en este nuevo empleo, el uso de la marca de propiedad ha sido completamente indispensable. En efecto, este signo simbolizaba un nombre propio y caracterizaba por lo tanto al individuo al que iba asociado y podía representarle jurídicamente en cualquier circunstancia ante cualquier parte contratante o conciudadano; podía servir de «sello» en cualquier ocasión. Determinadas leyes vigentes en la época de Luis XIV castigaban por robo a quienquiera que pusiera su marca sobre algo ajeno con la intención de apropiárselo por ese procedimiento y por abuso de confianza a cualquier persona que pusiese la marca de otro con fines fraudulentos.

Símbolo convencional, no sólo creador de derechos, sino también generador de obligaciones, la marca de propiedad (cuya invención se remonta probablemente a épocas anteriores al descubrimiento de la escritura) es uno de los precursores de nuestras firmas actuales. Y cuando decimos firmar, hacemos alusión al muy antiguo uso de las cruces o signos análogos autógrafos, puesto que este verbo deriva del latín *signare* que significa precisamente: «poner una cruz, un signo»

Ahora comprenderemos perfectamente por qué la marca de propiedad ha sido durante mucho tiempo la firma tradicional de los iletrados junto con la práctica de la

muesca numérica que, a su vez, constituye desde tiempo inmemorial la contabilidad de los que no saben leer ni escribir.

De los guijarros a los cálculos

Hay otro método concreto, del que también hay testimonios universales, que ha desempeñado un papel todavía más importante en la historia de la aritmética y de la contabilidad: es el de los «montones de guijarros» (o agrupaciones de palitos, conchas, frutos secos, etc.).

Sin embargo, este método es uno de los más primitivos, porque al igual que la práctica más rudimentaria de la muesca, marca por así decirlo «el grado cero» de cualquier técnica numérica: también proporciona un sistema de «contabilidad silenciosa», que no requiere memoria alguna ni conocimiento abstracto de los números y que sólo utiliza el principio de la correspondencia unidad por unidad.

Pero en cuanto el hombre empezó a contar de manera abstracta, según el principio de la base, este método resultó ser lo suficientemente maleable como para permitir todo tipo de progresos.

En Kenia, llevar anillos alrededor del cuello y de los brazos es, entre las mujeres Masai, un signo de distinción y de riqueza, porque cada anillo simboliza la posesión de un buey o de una vaca.

No hace mucho, en algunos pueblos africanos todavía se contaban así las jóvenes casaderas (o también los jóvenes aptos para llevar armas). En cuanto cumplían la edad requerida, las jóvenes daban un anillito a la «casamentera» del pueblo, que lo ensartaba en una tira con otros objetos semejantes. Luego, un poco antes de la ceremonia, cada futura esposa recuperaba su anillo, y los que quedaban permitían calcular fácilmente el «número de jóvenes casaderas» del momento.

En Abisinia (la actual Etiopía), los guerreros hacían lo mismo cuando salían de expedición: al salir, cada soldado dejaba un guijarro en un montón, y a la vuelta, cada superviviente se llevaba uno. Gracias a los guijarros sobrantes, se podía conocer el número exacto de las pérdidas sufridas en combate.

Esto es precisamente lo que se ve al principio de la película de Eisenstein, Iván el Terrible, que narra la historia de Iván IV Vassilievitch, zar de Rusia del siglo XVI: antes de partir a asediar la ciudad de Kazan, cada soldado del ejército imperial dejaba una piececita metálica en una bandeja...

Este método ha sido tan importante en la historia de la aritmética que son los guijarros los que realmente han permitido al hombre iniciarse en el arte del cálculo. Y cuando decimos «cálculo» la propia palabra nos remite a ese procedimiento que proviene de la noche de los tiempos, ya que en latín, *calculus* significa «piedra pequeña» Etimología que también encontramos en las lenguas griega y árabe; por ejemplo, en la primera, *pséphos*, significa a la vez «número» y «una piedra» y en la otra, la palabra *haswa* que quiere decir «guijarro», tiene el mismo radical que *hisa* cuyo significado es «enumeración» o «estadística»

Los guijarros en particular, originaron los ábacos y los marcadores con bolas, esos instrumentos inventados por el hombre cuando buscaba un modo práctico de efectuar cálculos cada vez más complicados, y que ha sido tan utilizado en la época en que todavía no existía el cálculo escrito mediante las cifras «árabes».

Algunos guerreros de Madagascar, aun no hace mucho tiempo, tenían una costumbre muy práctica para calcular sus tropas. Hacían que los soldados desfilasen en «fila india» por un paso muy estrecho. Conforme iba saliendo ponían un guijarro en una zanja. Al pasar el décimo soldado, sustituían los diez guijarros por uno que depositaban en una segunda fila reservada a las decenas. Después seguían apilando guijarros en la primera zanja hasta que pasaba el vigésimo hombre, y entonces colocaban un segundo guijarro en la segunda zanja. Cuando ya en esta había diez piedrecillas, se habían contado cien soldados y las sustituían por otro guijarro que colocaban en una tercera zanja reservada esta vez a las centenas. Y así sucesivamente hasta llegar al último guerrero. Cuando llegaban a 456 soldados por ejemplo, había seis guijarros en la primera zanja, cinco en la segunda, y cuatro en la tercera.

Sin saberlo, los Malgaches habían inventado el uso del ábaco. Otros pueblos tuvieron la idea de sustituir esas columnas por tiras de metal o de madera dispuestas paralelamente y cada piedra por una bola perforada que podía moverse libremente a lo largo de cada una de las tiras; así fue como inventaron el marcador con bolas.

Las tablas de cálculos

Entre los pueblos occidentales, los ábacos más corrientes eran unas tablas o tablillas, en las que previamente se habían trazado varias líneas o columnas paralelas, que separaban los diferentes órdenes de numeración. Para representar números y para efectuar operaciones, se colocaban guijarros o fichas que valían cada uno una unidad simple. Los griegos llamaban a estas piezas *psephoi* y los romanos *calculi*.

En el ábaco de la Roma antigua, cada columna o fila simbolizaba por lo general una de las potencias de diez. Yendo de derecha a izquierda, la primera columna correspondía a las unidades, la siguiente a las decenas, la tercera a las centenas, la cuarta a los millares y así sucesivamente. Para representar un número determinado, bastaba con colocar en las diversas columnas de que se tratase tantas fichas idénticas como unidades había en cada orden correspondiente: por ejemplo para el número 5 693, cinco fichas en el cuarta, seis en la tercera, nueve en la segunda y tres en la primera.

A veces, cada columna estaba dividida en dos partes: abajo, una ficha designaba una unidad del orden decimal correspondiente, y, en la parte superior de la misma columna, valía la mitad de una unidad del orden inmediatamente superior (5 para la parte superior de la primera columna de la derecha, 50 para la de la siguiente, 500 para la de la tercera, y así sucesivamente)

Gracias a esas divisiones y merced a un sutil juego de las fichas (añadiendo, quitando o llevando una o vanas fichas de una columna a otra), se conseguían realizar los cálculos.

De este modo, para sumar un número a otro ya representado, se le hacía figurar a su vez en el ábaco, después se «leía» el resultado obtenido tras haber procedido a las reducciones necesarias. Si en una columna el número de fichas llegaba a la decena o la superaba, se sustituían entonces diez fichas de éstas por una sola en la columna inmediatamente situada a la izquierda (es decir, en la que correspondía al orden inmediatamente superior). Las restas se efectuaban según un procedimiento parecido, y las multiplicaciones, haciendo la suma de varios productos parciales.

Los griegos emplearon en la Antigüedad unos procedimientos análogos que tuvieron gran aceptación en el Occidente latino desde la Edad Media hasta una época relativamente reciente.

El historiador griego Polibio (210-128 a. J. C.) lo mencionaba poniendo estas palabras en boca de Solón: “Quienes viven en la Corte de los reyes son exactamente como fichas en la tabla de contar. Es el calculador quien hace que valgan un khalkos o un talento”.

Como sabemos que el talento era la unidad más fuerte del sistema monetario griego y el khalkos la más débil, comprendemos mucho mejor esta metáfora.

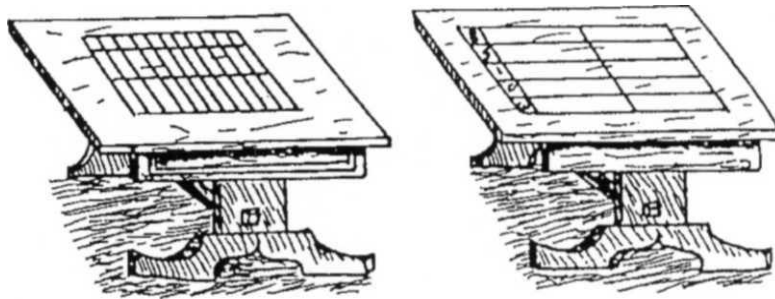
Numerosos autores europeos del Renacimiento y del siglo XVII también se hicieron eco de este tipo de dispositivo de cálculo figurado.

Georges de Brébeuf (1618-1661) parafraseando a Polibio dice:

*Les courtisans sont des jetons
Leur valeur dépend de leur place:
Dans la faveur, des millions
Et des zéros dans la disgrâce*

Así como estas palabras de Madame de Sévigné:

Hemos podido comprobar, gracias a estas fichas tan buenas, que tendría quinientas treinta mil libras a mi favor, contando todas mis pequeñas herencias.



Tablas de fichas europeas (Renacimiento).

Estas tablas de contar facilitaban la práctica de la suma o de la resta, pero no servían apenas para las multiplicaciones, ni para las divisiones, ni con mayor motivo, para resolver problemas más complejos.

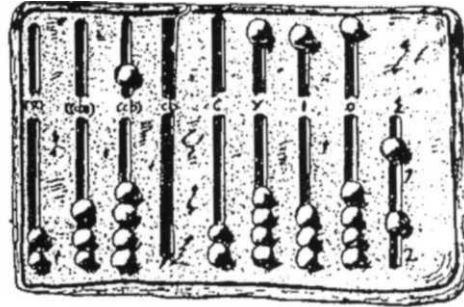
Las operaciones aritméticas, tal como se practican con ese tipo de dispositivo, no tenían muchos puntos en común con las operaciones modernas del mismo nombre. La multiplicación, por ejemplo, se reducía a una suma de varios productos parciales o también a una serie de duplicaciones de números, y la división a una sucesión de repartos en partes iguales.

La práctica del cálculo con ábaco era pues muy lenta y suponía por parte de los aritméticos un aprendizaje preliminar largo y laborioso.

La primera calculadora portátil

Al mismo tiempo que su «modelo de oficina», algunos romanos de la antigüedad han utilizado una auténtica «calculadora portátil». Su invención es sin duda anterior a la era cristiana.

Como prueba tenemos un bajorrelieve de un sarcófago romano del siglo I que nos muestra a un joven *calculator* (nombre dado a los que llevaban las cuentas de las casas patricias importantes) de pie frente a su maestro efectuando operaciones aritméticas con ayuda de un instrumento de ese tipo.



Abaco romano portátil.

Este abaco portátil consistía en una pequeña tablilla metálica, provista de cierto número de ranuras paralelas, a través de las cuales se deslizaban unos botones móviles del mismo tamaño.

Cada ranura correspondía generalmente a un orden decimal. Excepto las dos primeras de la derecha que se reservaban para las fracciones del as (mas exactamente para las onzas o docenas de esta unidad aritmética, monetaria o ponderal, así como para la mitad, la cuarta y la tercera parte de la onza).

Yendo de derecha a izquierda, la tercera ranura correspondía a las unidades simples (o, para los cálculos monetarios o ponderales, a los ases), la siguiente, a las decenas, la quinta a las centenas, la sexta a los miles, y así sucesivamente. Además, cada ranura correspondiente a un orden de enteros estaba subdividida en dos piezas distintas: una, situada abajo, contenía cuatro botones que valían cada uno una unidad del orden decimal correspondiente; la otra, más corta y situada arriba, sólo contenía un botón con un valor cinco veces mayor.

Con esta clase de instrumento las representaciones numéricas se hacían con bastante facilidad.

Se trataba pues de una «calculadora» totalmente análoga a los famosos marcadores con bolas que siguen ocupando un lugar importante en Extremo Oriente y en algunos países del Este.

Gracias a un «tacto» muy elaborado y que responde a reglas muy precisas, esta calculadora portátil (una de las primeras de la historia) permitía, a quienes sabían utilizarla, efectuar rápidamente y con sencillez diversas operaciones aritméticas.

Cabe preguntarse por qué los pueblos occidentales de la Edad Media, herederos directos de la civilización romana, prefirieron las antiguas tablas de calcular a este instrumento mucho mejor concebido y con más prestaciones. Seguiremos sin saberlo. Es probable que fuera un invento de determinada escuela de calculadores, y que hubiera desaparecido al mismo tiempo que ella, poco antes de la caída del Imperio Romano.

Un instrumento con muchas prestaciones: el marcador con bolas

En la China popular, el *suan pan* (nombre chino del marcador con bolas) sigue siendo en nuestros días de uso casi universal. Lo encontramos tanto en manos del vendedor ambulante, que no sabe ni leer ni escribir, como en las del comerciante, el contable, el banquero, el hotelero, el matemático o el astrónomo. El manejo de este instrumento de calcular, con varios siglos de antigüedad, está tan anclado en las tradiciones del Extremo Oriente que incluso los chinos y los vietnamitas «occidentalizados» de Bangkok, Singapur, Taiwan, Polinesia, Europa y América continúan generalmente haciendo todos sus cálculos mediante el marcador.



Comerciante japonés efectuando operaciones con ayuda de un soroban. Ilustración de una con ayuda del marcador. Obra japonesa del siglo XVIII.

Es más: los japoneses, que se han «informatizado» considerablemente y que son los competidores más importantes del mercado americano en materia de fabricación de calculadoras, siguen considerando al *soroban* (nombre japonés del marcador) como el principal instrumento de cálculo corriente y como el «caudal» indispensable que todo escolar, comerciante o funcionario debe poseer.

Asimismo, en la U.R.S.S., el *stchoty* (nombre ruso del marcador) reina todavía junto a las modernas cajas registradoras y preside muy a menudo el cálculo de los precios de venta, tanto en las tiendas como en los grandes establecimientos del Estado (hoteles, hipermercados, bancos, etc.).

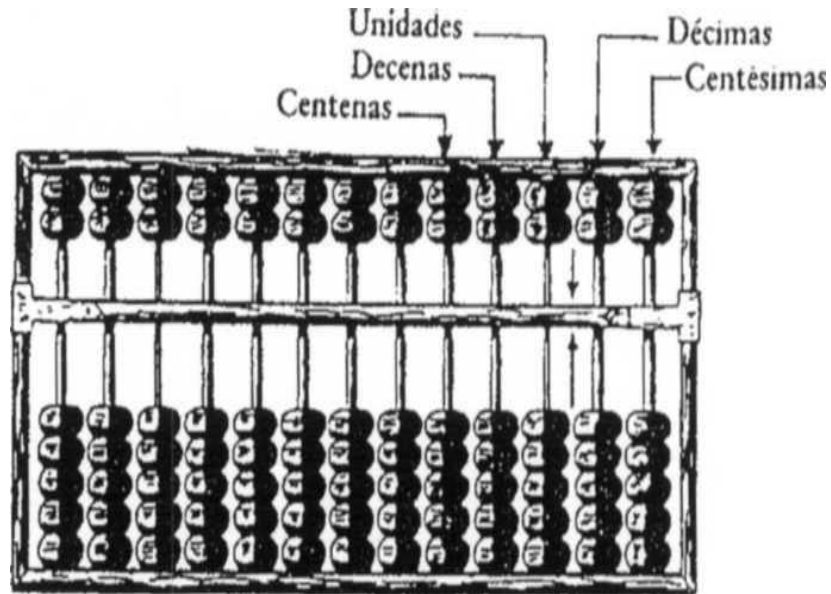
Un amigo mío, durante un viaje a la Unión Soviética, quiso un día cambiar francos franceses por rublos y vio, sorprendido, que el funcionario de la oficina de cambio efectuaba sus cálculos con una calculadora moderna y comprobaba después los resultados con un marcador.

Es cierto que, de todos los dispositivos de cálculo figurado empleados por los pueblos a través de la historia, el marcador es prácticamente el único que ofrece la ventaja de un manejo relativamente sencillo y rápido para todas las operaciones aritméticas. Para quienes saben utilizarlo, es un auxiliar muy útil para efectuar simples sumas o restas de números compuestos por varias cifras, o incluso para resolver problemas más complicados con multiplicaciones, divisiones, así como para extraer raíces cuadradas o cúbicas.

Los occidentales se quedan generalmente estupefactos al comprobar con qué habilidad, quienes han aprendido a usarlos, pueden efectuar, en un tiempo récord, cálculos a veces muy complicados.

Incluso llegó a haber en Japón un auténtico torneo, que enfrentó al japonés Kiyoshi Matsuzaki, campeón de *soroban* de la Oficina de Ahorros del Ministerio de Correos (lo que es mucho, sabiendo lo difíciles que son las competiciones japonesas), al americano Thomas Nathan Woods, soldado de segunda clase de la 240. Sección financiera del Cuartel General de las Fuerzas Armadas USA en Japón, que había sido nombrado «el mas experto operador de calculadoras eléctricas del ejército americano en Japón». Tuvo lugar en noviembre de 1945, recién acabada la Segunda Guerra Mundial. Los hombres del general MacArthur se esforzaban en demostrar a los japoneses vencidos la superioridad de los métodos modernos de origen occidental.

El partido se desarrolló en cinco tiempos que progresivamente iban teniendo operaciones aritméticas más complicadas. Y, ¿saben ustedes quién ganó 4 a 1 y con varios errores por parte del vencido? ¡El japonés con el marcador!



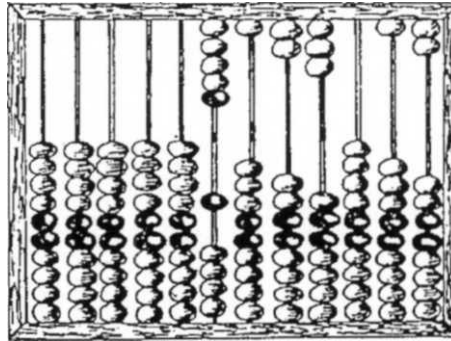
Marcador con bolas chino

En China, este prodigioso instrumento se presenta generalmente bajo la forma de un bastidor rectangular de madera dura. Está compuesto por determinado número de pinchos sobre los que hay ensartadas siete bolas móviles de madera (o de cristal) que a veces son ligeramente aplanadas. Las bolas pueden acercarse indistintamente a una barra transversal que divide al marco en dos partes, de forma que dos de esas bolas están siempre en la parte de arriba y las otras cinco en la de abajo. Cada tira de dicho instrumento corresponde a un orden decimal, y se sobreentiende que un pincho situado a la izquierda de otro posee un valor diez veces superior a este último.

Lógicamente, el número de tiras que, en los marcadores corrientes, oscila entre ocho y doce, puede llegar a quince, veinte, treinta o incluso más, según las necesidades del calculador. Porque cuanto mayor sea el número de pinchos, más importantes podrán ser los números que se manejen en el instrumento: un marcador con quince tiras, por ejemplo, tendrá una capacidad numérica igual a 10^{15} — i, es decir, *¡a mil billones de unidades menos una!*

Por lo general, los usuarios del marcador chino no empiezan por los dos primeros pinchos (de derecha a izquierda). Prefieren reservarlos para las fracciones decimales del primer y segundo orden, es decir para las décimas y las centésimas de la unidad. En dicho caso, la tercera tira corresponde a las unidades simples, la siguiente a las decenas, la quinta a las centenas, y así sucesivamente.

El marcador ruso es ligeramente distinto al *suan pan* chino. Cada tira contiene diez bolas, de las que dos (la quinta y la sexta) son de distinto color (lo que permite al calculador distinguir fácilmente los números del 1 al 10). Para representar un número dado, basta con hacer resbalar en cada pincho, hacia la parte superior del marco, tantas bolas como sea necesario.



Marcador con bolas ruso

Por el contrario, en cada tira del marcador chino, una bola de la parte inferior tiene valor de unidad, mientras que cada una de las dos bolas situadas encima de la barra central vale cinco unidades del orden decimal correspondiente. Por lo tanto, en este instrumento, todas las representaciones numéricas se hacen llevando las bolas de cada tira de que se trate hacia la barra transversal. ¿Queremos indicar el número tres? No hay más que subir tres bolas de la parte inferior del pincho de las unidades.

Asimismo, si queremos indicar el número nueve, hay que bajar la bola superior de esta misma tira y subir cuatro bolas de la parte inferior correspondiente. Supongamos ahora que tenemos que indicar el número 57,39. Para ello, primero subimos cuatro bolas inferiores del pincho de las centésimas (primera tira a la derecha) y bajamos una bola superior de esta misma tira (= 3 décimas). Luego subimos dos bolas inferiores de la tira de las unidades simples (la tercera) y bajamos de ésta una bola superior (= (2 + 5) = 7 unidades). Por último, bajamos de la tira de las decenas (es decir, de la cuarta) una bola de la parte superior (= 5 decenas). Lo que efectivamente nos da un total de:

$$(4 + 5) \frac{1}{100} + 3 \frac{1}{10} + (2 + 5) + 5 \times 10 = 57,39$$

CENTESIMAS 1.ª tira de la derecha		9
DECIMAS 2.ª tira		3
UNIDADES 3.ª tira		7
DECENAS 4.ª tira		5
Resultado		57,39

Procediendo de este modo, pero empezando por la tercera tira, obtendríamos la representación del número 5,739. Y si quisiéramos indicar el número 573,900 bastaría por empezar por la quinta tira (la de las centenas).

La representación de los números en el marcador chino es pues muy sencilla. En cuanto a la práctica de las operaciones aritméticas en este tipo de instrumento, no es mucho más complicada: basta con saber de memoria las tablas de sumar y multiplicar de los números de 1 a 9.

Este tipo de auxiliar de cálculo presenta no obstante algunos inconvenientes: requiere un aprendizaje bastante largo, un entrenamiento asiduo, un «tacto» muy preciso, así como una estabilidad impecable en el soporte. Además, el menor error - una vez descubierto- obliga a rehacer todos los cálculos, puesto que los resultados intermedios desaparecen a medida que se desarrollan las operaciones (productos parciales en las multiplicaciones, restos también parciales en las divisiones). Pero esto no hace que el instrumento sea menos ingenioso.

No obstante, pensándolo bien, no podemos dejar de plantearnos una pregunta referida a la concepción misma del marcador chino. En efecto, acabamos de ver que en cada tira, nueve unidades del correspondiente orden decimal están representadas por una única bola superior que vale cinco y por cuatro bolas inferiores complementarias. Cinco bolas (una arriba y cuatro abajo) bastan, pues, ampliamente para representar en cada pincho las nueve unidades sucesivas correspondientes. Entonces, ¿por qué cada tira del marcador chino tiene siete bolas que valen quince en total? La razón es que para hacer una suma, una multiplicación, una resta o una división, a veces es útil retener momentáneamente en «memoria», en un mismo pincho, un resultado parcial superior a 9.

Desde mediados del siglo pasado, los *soroban* japoneses (de cuyo origen chino no cabe la menor duda) perdieron poco a poco la segunda bola superior. Y a partir de la Segunda Guerra Mundial, perdieron definitivamente la quinta bola redundante de la parte inferior de cada tira. Pero esta transformación exigió de los marcadores japoneses una preparación más larga y más difícil y la adquisición de un tacto mucho más elaborado y más preciso que el de los usuarios del *man pan* chino.

El marcador japonés de la postguerra, que ya había alcanzado su perfección, señala el final de una evolución que durante mucho tiempo fue independiente de la historia de las numeraciones escritas: la de los auxiliares de cálculo surgidos de la técnica operacional mediante guijarros.

La invención de las cifras

En la historia de la humanidad se han producido dos acontecimientos tan revolucionarios como el dominio del fuego, el desarrollo de la agricultura o la eclosión del urbanismo y de la tecnología. Nos referimos a la invención de la escritura y al del cero y de las llamadas cifras "árabes", pues, como las otras, estas invenciones han cambiado por completo la existencia de los seres humanos.

La escritura no ha sido sólo inventada para responder a las necesidades de representación visual y de memorización del pensamiento (experimentadas por cualquier individuo que viva en un grupo social avanzado), sino también, y principalmente, para anotar el lenguaje articulado.

En efecto, la escritura es un notable medio de expresión y de comunicación duraderas, que ofrece a cada usuario la posibilidad de mantener un testimonio permanente de una o varias palabras ausentes. Es, como decía Voltaire, la pintura de la voz.

Pero la escritura es mucho más que un simple instrumento. «Al reproducir la palabra muda, no sólo la conserva, sino que además plasma el pensamiento que, hasta ahí, no era más que mera posibilidad. Los trazos más sencillos dibujados por el hombre en la piedra o en el papel no son sólo un medio, sino que también encierran y resucitan su pensamiento en todo momento. La escritura, por encima de una forma de inmovilización del lenguaje, es un nuevo lenguaje, mudo desde luego, pero que al transcribir el pensamiento lo disciplina y organiza. La escritura no sólo es un procedimiento destinado a fijar la palabra y un medio de expresión permanente, sino que también da directamente acceso al mundo de las ideas; reproduce el lenguaje articulado y permite además aprehender el pensamiento y hacerle atravesar el espacio y el tiempo (Ch. Higounet).

Esta invención ha hecho posible que en la actualidad poseamos infinidad de datos sobre determinadas culturas enterradas en la noche de los tiempos, y que la palabra o el pensamiento —extinguidos para siempre— de algunos de nuestros predecesores nos hayan llegado a través de cientos o miles de años de historia y de civilizaciones.

En cuanto a la segunda invención, ha sido hecha para permitir una notación perfectamente coherente de todos los números, y para que cualquiera (incluso las mentes menos dotadas para la aritmética) pueda efectuar todo tipo de cálculos sin recurrir a auxiliares como la mano, el marcador o la tabla de calcular. El cero y nuestras cifras modernas figuran, al igual que la escritura, entre las más poderosas

herramientas intelectuales de que dispone hoy el hombre. Gracias a esos descubrimientos se han podido realizar algunos cálculos que durante milenios fueron irrealizables y desde ese momento quedó abierto el camino para el desarrollo de las matemáticas, de las técnicas y de todas las demás ciencias.

Pero, por supuesto, este descubrimiento fundamental no surgió de repente cual un presente ofrecido por un dios civilizador o un héroe. Tiene un origen y una larga historia. Apareció poco a poco, tras vanos milenios plagados de ensayos y tanteos, de fulgurantes avances y estancamientos, e incluso de retrocesos y de revoluciones. Todo ha transcurrido como si, a lo largo de los siglos y a través de las distintas civilizaciones, la humanidad hubiera experimentado con las diferentes soluciones al problema de la representación y del manejo de los números, antes de seleccionar aquella que resultase ser la más perfecta y eficaz posible.

Esta historia empezó hace algo más de cinco mil años en algunas sociedades avanzadas y en plena expansión que se vieron obligadas a realizar operaciones económicas demasiado numerosas y variadas como para confiarlas únicamente a la memoria humana. Estas sociedades, que habían utilizado procedimientos concretos y arcaicos y que desde hacía algún tiempo necesitaban retener en la memoria de forma duradera los recuentos, comprendieron que era necesario encontrar un método totalmente distinto. Y para ello, se les ocurrió representar los números mediante signos gráficos: inventaron las cifras.

Los predecesores de la contabilidad escrita

Una vez más, los guijarros han desempeñado un papel importantísimo en esta historia.

Cuando se adquirió el uso de la base diez, por ejemplo, se cogieron guijarros de dimensiones variadas y según su tamaño se les atribuyeron distintos órdenes de unidad: una piedrecilla para la unidad, un guijarro algo mayor para la decena, otro mucho mayor para la centena, y un guijarro aún mayor para el millar, y así sucesivamente. Seguidamente, para representar los números intermedios se limitaron a los guijarros-patronos que fuesen necesarios, por ejemplo, para el número 486, cuatro grandes, ocho medianos y seis pequeños.

Era un método práctico, pero todavía insuficientemente adaptado, porque no siempre es fácil encontrar guijarros de tamaños y formas regulares.

Por tanto, el sistema se fue perfeccionando. En lugar de coger guijarros, algunos pueblos utilizaron tierra blanda. Para representar los distintos órdenes de unidades de sus sistemas de numeración, modelaron pequeños objetos de tamaños

y formas geométricas variadas: pequeños conos o bastoncillos de arcilla, para las unidades del primer orden, bolas para las del segundo orden, discos o conos grandes para las del tercer orden, esferas para las del cuarto, etc.

Estas fichas de arcilla (que los especialistas designan normalmente con el nombre latino de *calculi*) han sido halladas en numerosos yacimientos arqueológicos del Cercano Oriente (de Jartum a Jericó y de Turquía a Irán). Corresponden a un período que se extiende desde el IX al 11 milenio antes de nuestra era.

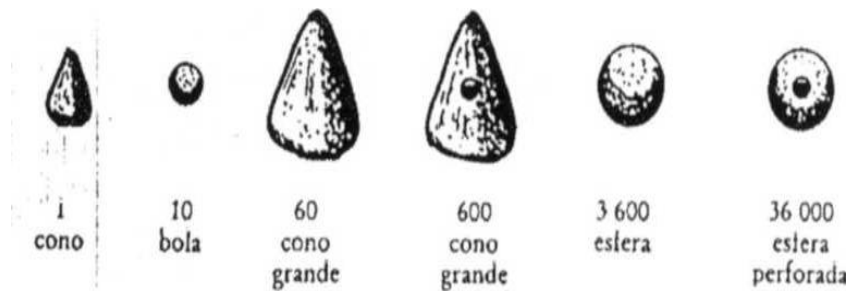
Pero si este sistema ha satisfecho las necesidades numéricas puramente operacionales, esto en modo alguno ha bastado para satisfacer las múltiples necesidades creadas por la creciente industria ganadera y agrícola, por el desarrollo de la artesanía o incluso por los intercambios comerciales cada día más numerosos.

Los responsables de las antiguas civilizaciones sumeria y elamita elaboraron, a mediados del IV milenio antes de J.C., un sistema contable que les permitió superar las dificultades por algún tiempo...

Nos encontramos cerca del golfo arábigo-pérsico, aproximadamente hacia el 3500 antes de J.C., en dos regiones vecinas situadas respectivamente en Irak y en Irán: los países de Sumer y de Elam. Son civilizaciones semejantes pero rivales, avanzadas y ya muy urbanizadas. Los intercambios económicos son cada día más numerosos, y cada vez se experimenta una mayor necesidad de conservar de forma duradera las cuentas, inventarios, ventas, compras y repartos que se llevan a cabo diariamente.

Para ello se utiliza un sistema contable derivado del método de «los guijarros-fichas» al que nos referíamos.

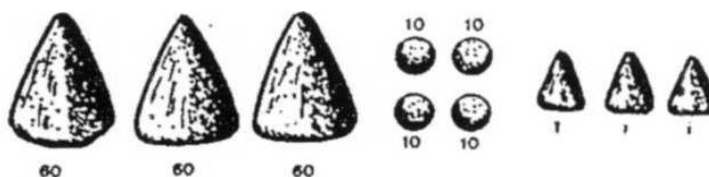
Los Sumerios (que contaban en base sexagesimal, con la decena como unidad auxiliar) representaron:



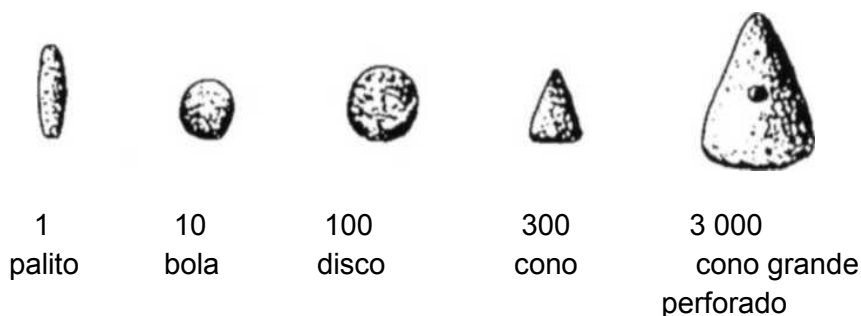
- una unidad simple por un cono pequeño;
- una decena por una bola;
- una sesentena por un cono grande;
- el número 600 (= 60 x 10) por un cono grande perforado;
- el número 3 600 (= 60 x 60 = 60²) por una esfera;
- el número 36 000 (= 60² x 10) por una esfera perforada.

He aquí una idea que ya era abstracta para la época: la multiplicación por diez del valor de una ficha está representado aquí por la perforación de dicho objeto; haciendo una pequeña marca circular (verdadero símbolo gráfico que representa a la bola de la decena) en el cono que vale 60 o en la esfera que vale 3 600, se obtienen las representaciones respectivas de los números 600 (60 x 10) y 36 000 (= 3 600 x 10).

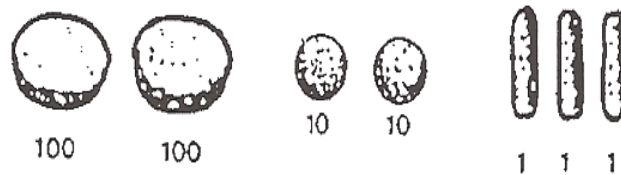
Partiendo de estos *calculi*, se representan los números intermedios reproduciéndolos tantas veces como sea necesario. Para 223, por ejemplo, se toman tres conos grandes, cuatro bolas y tres conos pequeños.



Los elamitas, por su parte, contaban por decenas para los números usuales, y mediante un «compromiso» entre las bases diez y sesenta para las unidades de órdenes superiores. Utilizaban un palito para una unidad simple, una bola para 10, un disco para 100, un cono para 300 (= 60 x 5) y un cono grande perforado para 3 000 (= 300 x 10 = 60 x 5 x 10).



Para representar el número 223, tienen que reproducir dos discos, dos bolas y tres palitos

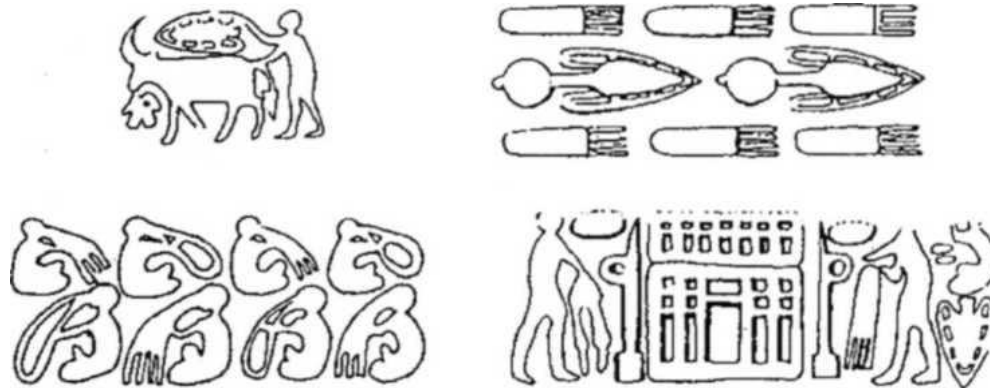


Estas fichas de arcilla de valor convencional (cuyo manejo esta en cierto modo relacionado con el de nuestras monedas actuales o con el de nuestros patrones de peso) son encerradas seguidamente en una bola esférica u ovoide, hueca, en cuya superficie aparecen uno o dos sellos cilíndricos para garantizar su origen y su integridad.



Bola esférica de contabilidad cuya cara externa está cubierta por sellos cilíndricos.
Documento encontrado en Susa (hacia 3500-3300 antes de J. C).

En las regiones de Sumer y de Elam, los hombres de determinada condición social poseían cada uno su propio sello, una especie de pequeño cilindro de piedra, más o menos preciosa, con una imagen simbólica en huecograbado. El sello cilíndrico (cuya invención se remonta hacia el 3500 antes de J.C.) representa a la persona de su poseedor y está vinculado a todas las actividades, económicas o jurídicas, que se relacionen con él. El poseedor de un sello, a modo de firma o marca de propiedad, desenrollando el cilindro en torno a su eje, transfiere lo que está grabado en él a cualquier objeto de arcilla correspondiente a alguna operación o transacción...



Marcas de sellos cilíndricos elamitas (3500-3000 antes de J. C).

Vayámonos a Susa, capital de Elam. Un pastor se dispone a llevar a pastar durante algunos meses a un rebaño de 299 ovejas pertenecientes a un rico ganadero de la región. Antes de salir, el pastor y su patrón se presentan ante un contable de la ciudad, administrador de los bienes del propietario, para contabilizar el número total de ovejas.

El contable procede a contar las cabezas del rebaño, entonces, con su pulgar fabrica una bola de arcilla hueca en forma de esfera de unos siete centímetros de diámetro, es decir apenas un poco mayor que una pelota de tenis. Seguidamente, una vez formada la bola y por la abertura dejada por el pulgar, introduce dos discos de tierra cruda que simbolizan cien ovejas, nueve bolas que corresponden cada una a una decena de animales y nueve palos que a su vez corresponden cada uno a una cabeza de ganado. El contenido total será de: doscientos noventa y nueve unidades.



Después el funcionario cierra la abertura de la bola y, para garantizar el origen del documento contable que acaba de crear, imprime el sello cilíndrico del propietario en la cara externa de dicho documento, convirtiéndolo en algo equivalente a nuestros documentos oficiales. Por último, para autentificarlo, imprime su propio sello. De esta manera, queda excluida cualquier confusión con otras bolas semejantes o cualquier posibilidad de falsificación.

Esquema de una bola contable Intacta tal como puede verse en una fotografía de rayos X.

Terminada esta operación, el contable seca la arcilla y guarda la bola con otros documentos parecidos. Dicha bola, con las fichas que contiene, es tanto para el dueño del rebaño como para el pastor la garantía de la cuenta que acaba de ser efectuada y registrada. Cuando el pastor esté de regreso, este sistema permitirá

comprobar si ha traído todo el rebaño: se romperá la bola, y gracias a los *calculi* correspondientes, la comprobación será muy sencilla...

Nos encontramos ahora en el mercado de la ciudad real de Uruk, capital de Sumer. Tras largas discusiones, un ganadero y un agricultor acaban de cerrar un trato: cambiarán quince bueyes por setecientos noventa y cinco medidas de trigo.

Pero, en ese momento, el ganadero sólo dispone de ocho animales y el agricultor no ha llevado más que 500 sacos de grano. De todos modos realizan el intercambio, pero para que la venta sea equitativa «firmarán» un contrato. El primero se compromete a entregar al segundo siete bueyes más a fin de mes y el otro a facilitarle los 295 sacos que faltan al término de la cosecha.

Para concretar el acuerdo, el ganadero confecciona una bola de arcilla hueca, e introduce en ella siete conos pequeños asociados cada uno a un animal. Luego cierra la bola e imprime su sello cilíndrico en la superficie, a modo de firma.

Por su parte, el agricultor introduce dentro de su saco de arcilla cuatro conos grandes que simbolizan cada uno 60 sacos de trigo, cinco bolas correspondientes cada una a diez de esos sacos y cinco conos pequeños correspondientes a los cinco sacos sobrantes. Luego imprime su sello en la arcilla.

A continuación un testigo pone su «firma» en los dos documentos, certificando así la conformidad y la integridad de la transacción. Tras lo cual, ambos contratantes intercambian sus respectivas bolas y se marchan...

Aunque entonces no se conocía todavía la escritura, este sistema posee para estas gentes el mismo valor jurídico que tienen para nosotros los más senos compromisos escritos.

En aquella época, cuando las ciudades no estaban todavía superpobladas y la economía estaba en sus comienzos, las personas que mantenían relaciones comerciales se reconocían y se diferenciaban ante sus socios por su sello cilíndrico. Asimismo, la naturaleza de una transacción comercial materializada mediante una bola estaba implícitamente indicada por la marca del sello correspondiente: según fuera el motivo impreso se podría identificar al ganadero, agricultor, artesano, ceramista, molinero o panadero de que se tratase. En cuanto a la cantidad de seres u objetos implicados en la operación, quedaba claramente precisada en esos documentos mediante conos, bolas o esferas.

En estas condiciones resulta imposible negar una deuda o modificar fraudulentamente su importe: el acreedor poseía la bola de su deudor con su firma y un número preciso de *calculi*.

El nacimiento de las cifras más antiguas de la historia

No obstante este sistema de contabilidad resulta algo incomodo porque hay que romper la bola cada vez que se quiere conocer su contenido total. En la siguiente etapa de su historia, hacia el año 3300 antes de nuestra era, los contables súmenos y elamitas fueron conscientes de ello.

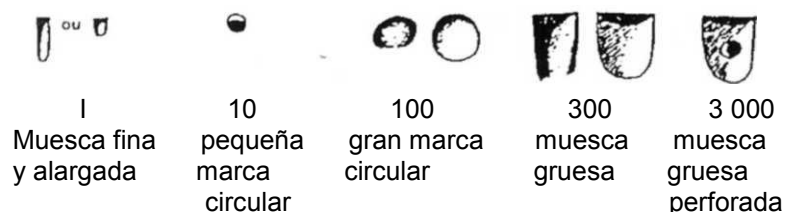
Esto lo hemos sabido gracias a los recientes descubrimientos de la Delegación arqueológica francesa en Irán (D. A. F. I.) en la cantera de la Acrópolis de Susa donde han sido halladas, en su conjunto, las etapas de esta evolución.

En esta segunda etapa, a los contables se les ocurrió simbolizar las fichas encerradas en las bolas mediante una serie de incisiones de diferentes formas grabadas en la parte externa de cada bola. Los súmenos crearon los siguientes símbolos:

- el cono pequeño para la unidad, mediante una muesca fina;
- la bola para la decena, mediante una pequeña marca circular;
- el cono grande de la sesentena, mediante una muesca gruesa;
- el cono grande perforado que vale 600, mediante una muesca gruesa con una pequeña marca circular;
- la esfera por valor de 3 600 mediante una gran marca circular;
- la esfera perforada que representa al número 36 000 mediante una gran marca circular provista de otra pequeña.



Los elamitas simbolizan el palo que representa a la unidad mediante una muesca más o menos alargada, la bola de la decena mediante una pequeña marca circular, el disco de la centena mediante una gran marca circular, el cono por valor de 300 mediante una muesca gruesa y el cono grande perforado que vale 3 000 mediante una muesca gruesa provista de una pequeña marca circular.

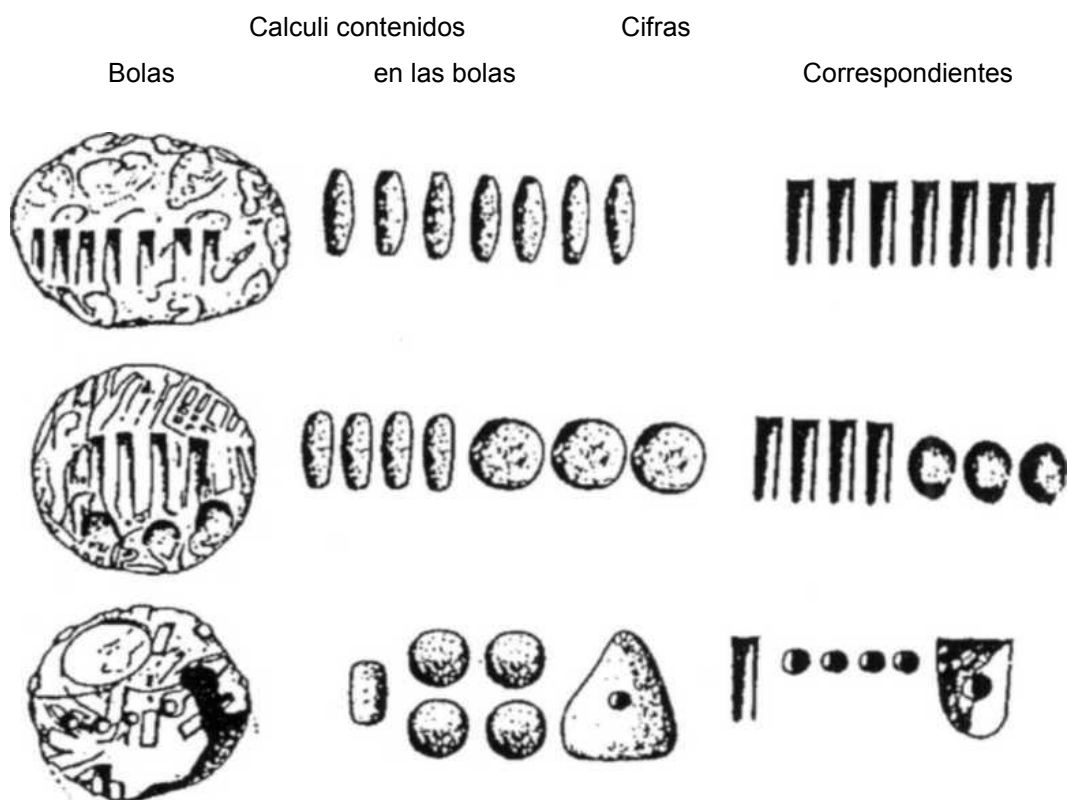


Es como una especie de «resumen» o más bien una simbolización gráfica del contenido de cada documento contable.

Por ejemplo, una bola elamita con tres discos y cuatro palitos (es decir un total de $3 \times 100 + 4 = 304$ unidades) llevará ahora por fuera, junto a la marca de los sellos cilíndricos, tres grandes marcas circulares y cuatro muescas finas.

A partir de ese momento, ya no será necesario romper la bola para llevar a cabo una comprobación o hacer un inventario. Bastará con «leer» las informaciones en la superficie de los documentos. Los sellos cilíndricos indican el origen de la bola, al tiempo que garantizan su autenticidad mientras que las incisiones señalan el número de seres u objetos implicados en la operación.

Estas incisiones son auténticos signos numéricos porque cada una es un símbolo gráfico que representa un número. Constituyen ya un verdadero sistema de numeración escrita: el nacimiento de las cifras más antiguas de la historia.



Bolas elamitas con sus contenidos y cifras (hacia el 3300 antes de J.C.)

Pero entonces, ¿por qué seguir utilizando esas fichas numéricas, introduciéndolas en las bolas, cuando es tan sencillo representar sus valores mediante incisiones en la arcilla?

Esto es lo que se preguntaban los contables mesopotamios y elamitas, que rápidamente tomaron conciencia de que ambos sistemas eran redundantes. Desde aproximadamente el año 3250 a. de J.C. se suprimieron los *calculi* y las bolas huecas fueron sustituidas por tablillas de arcilla, que primero tuvieron una forma toscamente redondeada u oblonga (a imitación de las bolas esféricas u ovoides) para irse haciendo progresivamente más fina y rectangular.

Los contables inventan la escritura

No obstante, estas tablillas contables no llevan todavía signos de escritura y los datos correspondientes son, como en las bolas, exclusivamente simbólicos y numéricos.



Paneles de arcilla con datos estrictamente numéricos (hacia el 3250 antes de J.C.).

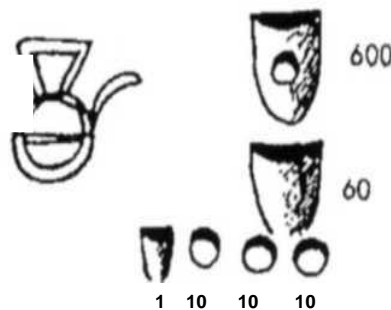
Las cosas implicadas en las operaciones sólo están designadas por sus cantidades respectivas, pero no por signos específicos que permitan determinar su naturaleza. Además la operación en sí misma no figura en absoluto: nunca sabremos si se trata de una operación de venta, una compra, un contrato matrimonial, un reparto o simplemente el inventario de los bienes de algún propietario.

En cuanto a los propios contratantes, jamás sabremos ni su nombre, ni su función, ni su lugar de trabajo, ni siquiera cuántos eran. Sólo los individuos implicados en la operación en el momento podían comprender por entero el documento correspondiente.

En la siguiente etapa las cosas se van concretando algo más y pronto se producirá una innovación que provocará grandes cambios tanto en Elam como en Mesopotamia.

Hacia el año 3200 antes de J.C. van apareciendo poco a poco nuevos signos en las tablillas junto a las cifras sumerias o elamitas, mientras que los sellos cilíndricos van desapareciendo progresivamente.

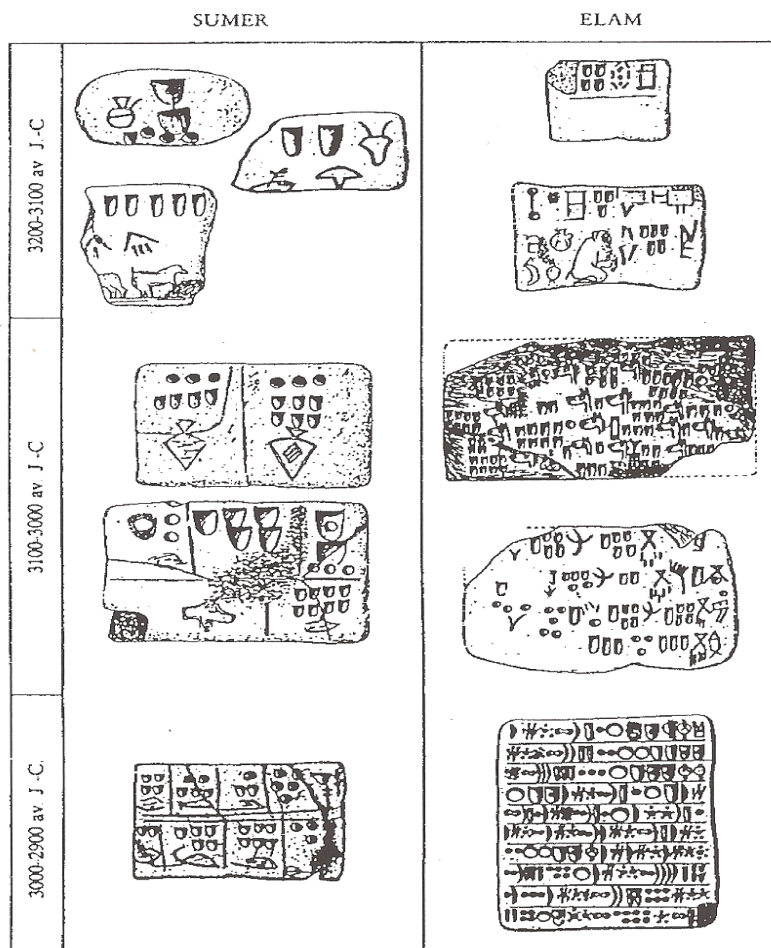
Ejemplo: 691 cántaros



Esta etapa señala el nacimiento de la contabilidad escrita, ya que dichos signos (dibujos más o menos esquemáticos que representan seres u objetos de todo tipo) están destinados a precisar la naturaleza de los productos o mercancías implicados durante alguna transacción. Sin embargo, al principio, el sistema todavía es muy rudimentario, pues los documentos sólo contienen un tipo de enumeración a la vez: se confecciona una tablilla para anotar el resultado del recuento de 23 jabalíes, por ejemplo, otra para 187 borregos y otra para 567 sacos de trigo, etc.

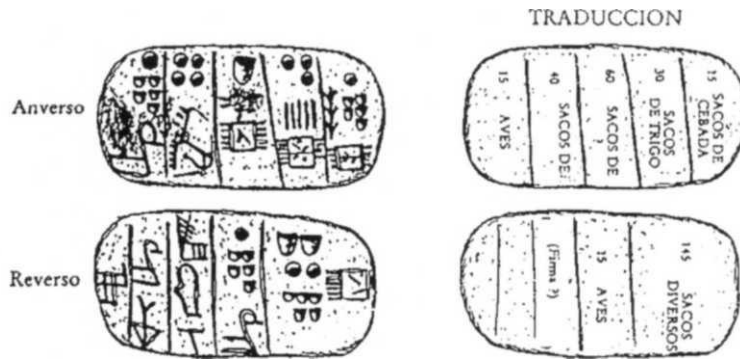
Pero hacia el 3100 antes de J.C., las transacciones económicas y las operaciones de distribuciones de bienes de consumo se multiplican y diversifican considerablemente, hasta el punto de que los inventarios y recuentos son muy numerosos y variados en cada operación. También los dibujos y las cifras correspondientes ocupan en las tablillas, desde esta época, una superficie cada vez más extensa. En un mismo panel de arcilla, se consigna ya, por ejemplo, un inventario de équidos diferenciando las categorías: sementales con las crines hacia atrás, yeguas de crines caídas y potros sin crines. En la misma tablilla aparece también el resumen de una operación de contabilidad agrícola distinguiendo los lotes y las especies; o el recuento de las cabezas de un rebaño con todos los detalles pertinentes (borregos, borregos cebados, corderos, corderillos, ovejas, cabras, cabritos, cabritas, o cabritos casi adultos...).

En Elam, las diversas enumeraciones se disponen en vanas líneas horizontales y se leen de derecha a izquierda. Pero los contables sumerios prefirieron disponerlos en casillas consecutivas delimitadas, en cada tablilla, por una o varias bandas horizontales, que a su vez están cortadas por trazos verticales. Además inventaron la factura: a partir de ahora, se escribe en ambas caras de cada tablilla, consignando en el «anverso» los detalles de una operación de contabilidad, y en el «reverso» el total y los «títulos» correspondientes.¹



Los documentos escritos más antiguos de la historia (3100-1900 antes de J.C.).

¹ Los especialistas han logrado descifrar las cifras sumerias, desaparecidas hace casi cuatro mil años, al descubrir la costumbre de los escribas súmerios de consignar en el reverso de sus tablillas el total de los recuentos o inventarios correspondientes. Al comprobar, por ejemplo, que en el anverso de una tablilla, había diez muescas finas repartidas aquí y allá, y en el reverso, una única marca circular de pequeñas dimensiones, y al ver corroborado esto por un número de muescas y marcas lo suficientemente numeroso, comprendieron que la muesca fina designaba la unidad y que la marca circular simbolizaba la decena. Yo mismo, al observar una costumbre parecida entre los escribas del país de Elam, y haciendo comprobaciones metódicas sobre los totales facilitados por multitud de facturas elamitas actualmente conservadas en el Museo del Louvre y en Teherán, llegué a descifrar los principales signos de la numeración de esta civilización.

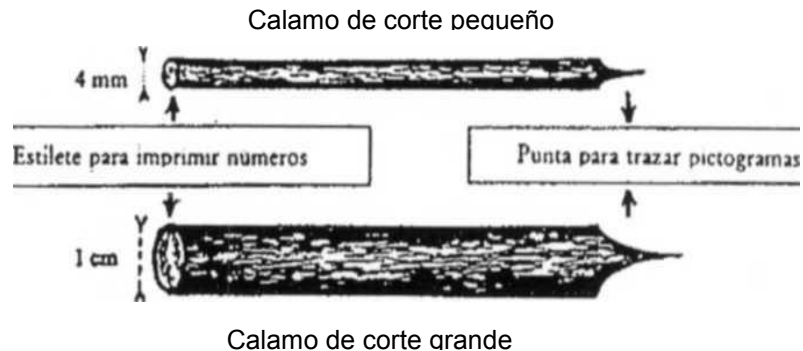


Factura sumeria descubierta en Uruk (hacia el 2850 a. C.).

La idea fue tomando cuerpo y perfeccionándose poco a poco, y el nuevo sistema demostró ser de gran utilidad.

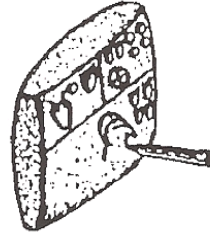
En Uruk, en el año 2850 a.C. se está realizando una petición de matrimonio, y el padre de la joven acaba de ponerse de acuerdo con el padre del futuro esposo sobre el «precio de la novia». Tras la ceremonia, el primero recibirá del segundo 15 sacos de cebada, 30 sacos de trigo, 60 sacos de judías, 40 sacos de lentejas y 15 aves. Pero, como la memoria humana a veces falla, y para evitar ulteriores reclamaciones, los dos hombres acuden a una de las autoridades de la ciudad para que tome nota del contrato como es debido y legalizar el compromiso.

Después de conocer todos los elementos del contrato matrimonial, el notario confecciona una tablilla de arcilla más o menos rectangular, y seguidamente toma sus «herramientas para grabar»



Los primeros utensilios para escribir de los escribas sumerios

Trazado con punta en arcilla blanda de los pictogramas de la escritura sumeria arcaica. ▶



Para escribir el contrato, el notario utiliza dos barras de marfil de diferente diámetro, uno de cuyos extremos es puntiagudo y el otro una especie de estilete cilíndrico. Las puntas servirán para realizar los trazos o también para dibujar pictogramas en la arcilla húmeda de las tablillas. Los «cálamos de corte circular» se emplearán para realizar las cifras por presión sobre un ángulo dado en relación con la superficie de la tablilla. El trazo que se obtenga sobre la arcilla blanda, según la inclinación que se dé al estilete, será una muesca o una marca circular cuya dimensión variará evidentemente en función del diámetro del cálamo empleado:

- una muesca fina o gruesa, según se apoye el estilete pequeño o el grande sobre un ángulo de “30” a 45”;
- y una huella circular de pequeño o gran diámetro hundiendo el cálamo adecuado perpendicularmente a la superficie.

			CALAMO DE CORTE PEQUEÑO	Muesca fina
				Marca circular pequeña
			CALAMO DE CORTE GRANDE	Muesca gruesa
				Marca circular grande

Impresión sobre arcilla blanda de los diferentes signos de la numeración sumeria arcaica.

Luego, el funcionario, cogiendo la tablilla oblicuamente a lo ancho, traza cuatro trazos verticales sobre la arcilla todavía húmeda. Configura así cinco casillas sobre la tablilla: una para cada uno de los bienes de consumo a que se refiere el

contrato. Abajo, en la primera casilla de la derecha, dibuja un «saco de cebada», un «saco de trigo» en la segunda, un «saco de judías» en la siguiente, un «saco de lentejas» en la cuarta y por último el pictograma de un «ave» en la última. Después especifica las cantidades correspondientes: encima de la primera casilla, imprime una pequeña marca circular que simboliza el número 10 y cinco muescas finas que valen cada una de ellas una unidad, señalando así el total de sacos de cebada; en la segunda, 30 mediante tres marcas circulares; en la tercera, señala el número 60 mediante una muesca gruesa; y así sucesivamente.

Sobre el reverso de la tablilla, indica seguidamente el «resumen», es decir, el total del inventario notificado en el anverso, o sea: «145 sacos diversos» y «15 aves». Una vez terminada esta operación, los dos hombres firman debajo de la tablilla pero ya no imprimen como antes un sello cilíndrico sino que trazan con el punzón verdaderos signos convencionales que los caracterizan respectivamente. Después se marchan tras haber dado el documento al notario, quien lo conserva en sus archivos.



Pictogramas de la escritura sumeria arcaica

El sistema pictográfico, junto a los signos de numeración, responde muy bien a las necesidades económicas y jurídicas del momento.

Sin embargo, estos dibujos aún no son más que «imágenes signos» cuya función es la de significar lo que se representa visualmente. Todavía no se trata de escritura en el sentido estricto de la palabra.

Pero en la etapa siguiente, estos signos tienen un valor pictórico más amplio. Ya no están limitados a su significación visual directa. Pueden representar también acciones o ideas parejas. Es lo que se llama ideografía. Así pues, la imagen de una pierna humana además del significado de «pierna» tiene también el de «andar», «ir», «estar de pie», «correr» ó «huir». Asimismo, la imagen del disco solar también puede significar el sol, el día, el calor o la luz. La mano puede indicar tanto la idea de coger, como la de dar o recibir. El arado puede ser empleado tanto para expresar los verbos «labrar», «sembrar» o «trabajar la tierra» como para significar «quien maneja el arado», el «labrador» o el «agricultor»

En su calidad de ideogramas, estos signos gráficos incluyen interpretaciones sujetas a todas las variantes que pueden darse en los giros lingüísticos.

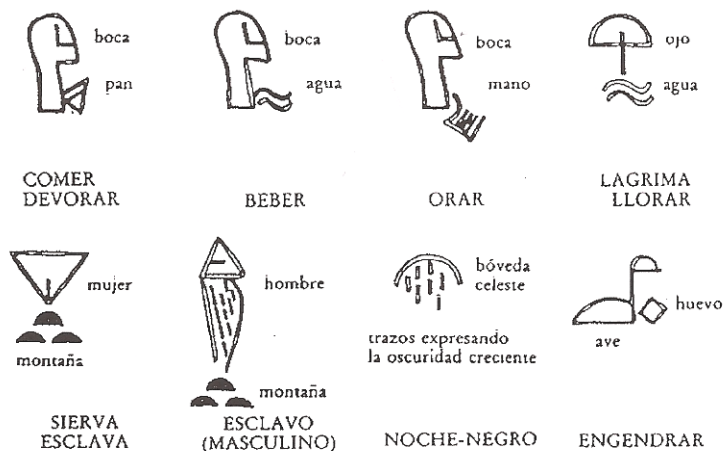
El contenido de las imágenes-signos se ve enriquecido por el uso —ya antiguo— del simbolismo de las convenciones sociales. Dos trazos paralelos traducen la idea de amigo o amistad, y dos trazos cruzados la de enemistad u hostilidad. La mujer está representada por el dibujo del triángulo púbico y el verbo fecundar por el de un pene.

También se amplían las posibilidades de significación de los dibujos combinando dos o varios para representar ideas nuevas o conceptos difícilmente representables. El grupo Boca + Pan, señala la idea de «comer», el conjunto Boca + Agua la de «beber», y el grupo Boca + Mano la de la «oración» (según el ritual sumerio) y el conjunto Ojo + Agua la de la «lágrima». Asimismo un «huevo» junto a un «ave» sirve para sugerir la idea de «engendrar» y unos trazos bajo un semicírculo la de la «oscuridad que cae de la bóveda celeste» (y por extensión, la de la «noche»).

Por último, en ese país de llanura baja en donde la montaña es sinónimo de «país extranjero» el grupo Mujer + Montaña no sirve para señalar a la «montañesa», ni siquiera a la «extranjera», sino a la «mujer traída del extranjero», como botín de guerra, dicho de otro modo, a «la esclava del sexo femenino».

Pero en esa fase, los signos todavía no expresan los sonidos del lenguaje articulado. Estamos, por decirlo así, en la prehistoria de la escritura.

No obstante, esta etapa es la última antes del descubrimiento de la escritura propiamente dicha.



Algunos ejemplos de composiciones evocadoras (o «conglomerados lógicos»), empleados por la escritura sumeria arcaica.

A partir del 2800-2700 a.C., el sistema pictográfico sumerio y su homólogo elamita realizan los pasos decisivos en el sentido de la claridad, la precisión y la universalidad: se les relaciona con la lengua hablada, el medio más perfecto de analizar y comunicar lo real. Y para ello, se tiene la idea de utilizar las imágenes-signos, no ya por su valor pictórico o ideográfico sino más bien por su valor fonético relacionado con la lengua sumeria (o elamita).

Ocurre un poco como en los jeroglíficos de nuestros pasatiempos: la imagen de un dado (en francés, *dé*) seguida de la de una torre (en francés, *tour*), por ejemplo, no está relacionada ni con el juego cúbico ni con la construcción; esta sucesión, expresa más bien la palabra francesa *détour* (rodeo).

En las tablillas sumerias, la imagen de horno, por ejemplo, ya no está empleada para significar exactamente un «horno», sino para expresar el sonido NE, pues la palabra sumeria para indicar ese objeto es precisamente NE. Asimismo, la imagen de la flecha cuyo nombre es TI en esa lengua, a partir de ahora se utiliza para expresar el sonido TI; y como en sumerio la «vida» también se dice TI, el mismo objeto servirá pues para representarla fonéticamente.

Se ha hecho un progreso considerable: el sistema permite anotar diversas particularidades gramaticales (pronombres, artículos, prefijos, sufijos, etc.) de los verbos, nombres y frases, así como todo tipo de matices y precisiones difíciles, por no decir imposibles, de señalar de otra manera.

Acaba de nacer la escritura por primera vez en la Historia, y posiblemente han sido los contables quienes, para responder a necesidades fundamentalmente económicas, la inventaron.

Procedente del sistema de los *calculi* y de las bolas de arcilla, la transcripción gráfica de los números ha precedido a la del lenguaje articulado. Dicho de otro modo, las cifras se inventaron mucho antes que la escritura.

Pero en esa primera etapa, dicha invención no sirvió para hacer operaciones aritméticas; las cifras sólo fueron utilizadas para memorizar cantidades y recuentos, pues los cálculos se realizaban en aquella época de una manera concreta.

Una división con cuarenta y seis siglos de antigüedad

Nos encontramos en el año 2650, aproximadamente, antes de Jesucristo, en la ciudad sumeria de Shuruppak (hoy día Fara, en Irak).

En la escuela de escribas y contables, el maestro acaba de dar a sus alumnos una lección sobre la manera de efectuar las divisiones. Al pasar a la lección práctica les plantea el problema siguiente:

Varios hombres se han repartido un “granero” de cebada habiendo recibido cada uno 7 síla de cebada. Díganme cuántos hombres hay en ese grupo y cuánta cebada ha quedado después de dicha distribución.

La «síla» y el «granero» son unidades sumerias de medida de capacidad. La primera equivale aproximadamente a 0,842 litros nuestros actuales, y la segunda vale 1.152.000 síla (es decir, alrededor de 969.984 litros).

Se trata de distribuir 1.152.000 síla de cebada entre cierto número (que hay que determinar) de personas, dando a cada una un saco de 7 síla de cebada. Para ello hay que dividir 1.152.000 entre 7: el número de hombres de que se trate nos lo proporcionará el cociente y el excedente de síla de cebada, el resto.

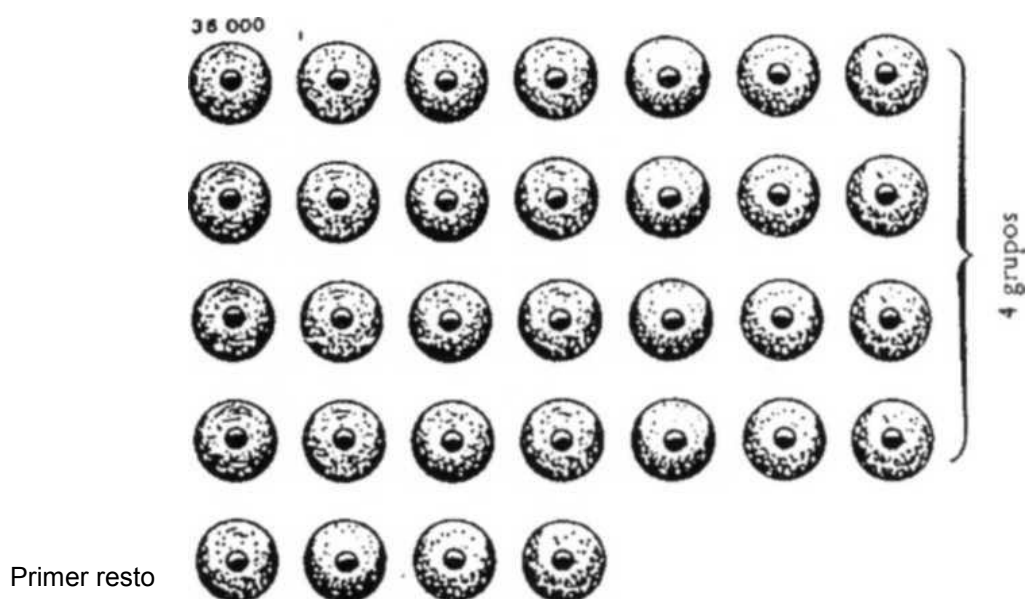
En aquella época, para efectuar las sumas, sustracciones, multiplicaciones o divisiones, los mesopotamios seguían utilizando los viejos *calculi* de antaño, esas «fichas» de arcilla con incisiones y formas geométricas que simbolizan los diferentes órdenes de unidad de la numeración sumeria. Este procedimiento concreto, periclitado hace ya mucho tiempo en el sistema de registro de los documentos contables procedentes de operaciones económicas o administrativas, seguía siendo sin embargo el preferido para las operaciones aritméticas porque las cifras sumerias nunca permitieron la práctica de un «cálculo escrito»

En el presente caso, el método consiste en hacer intervenir sucesivamente esferas perforadas, esferas, conos, conos perforados, etc., y en «amonedar» cada vez cualquier agrupación de fichas cuyo número sea inferior al divisor.

He aquí cómo resolvieron el problema los alumnos: como el dividendo y el divisor de la operación eran iguales respectivamente a 1.152.000 (= 32 X 36 000) y a 7, primeramente han considerado 32 esferas perforadas por valor de 36 000 unidades cada una y las han distribuido en grupos de 7.

Y como el cociente de esta división es igual a 4 (corresponde a los cuatro grupos de 7 esferas perforadas), entonces han llegado a la conclusión de que 4 veces 36 000 personas ya habían recibido su parte, es decir 7 síla.

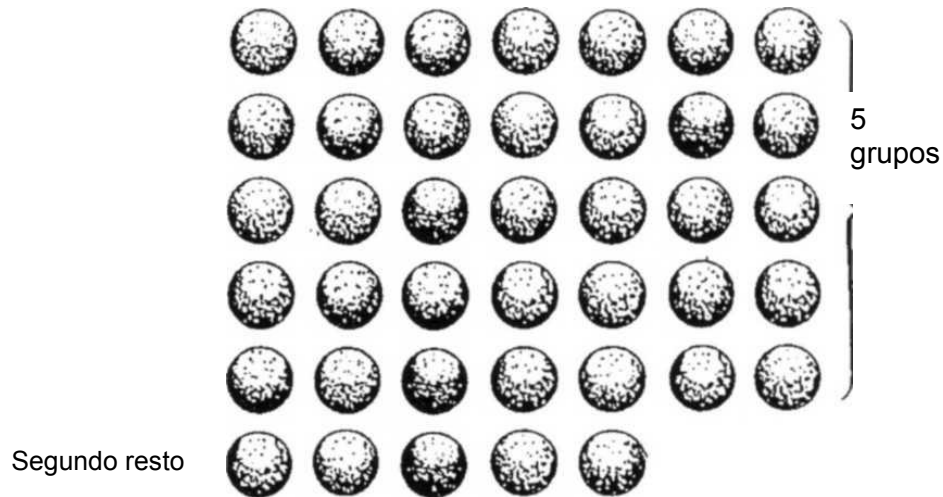
Pero, al acabar este primer reparto, quedan 4 esferas perforadas. Por tanto quedaban 4 X 36 000 síla de cebada por distribuir.



Para poder proseguir la operación ha habido que convertir ese resto en múltiplos de 3 600 (el orden de unidades inmediatamente inferior en el sistema sumerio), puesto que ha sido imposible dividirlo directamente por 7 de esta forma.

Cada esfera perforada de «36 000» equivale a diez esferas simples de «3 600», por tanto han «hecho moneda» con las 4 esferas perforadas que constituyen el primer resto, tomando 40 esferas. Después las han repartido como se indica más arriba en grupos de 7:

3600

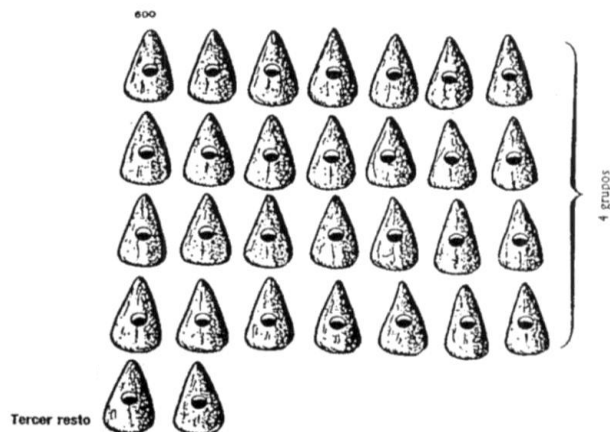


Al encontrar que esos grupos son 5, han deducido que 5 veces 3 600 hombres de más, habían recibido su parte.

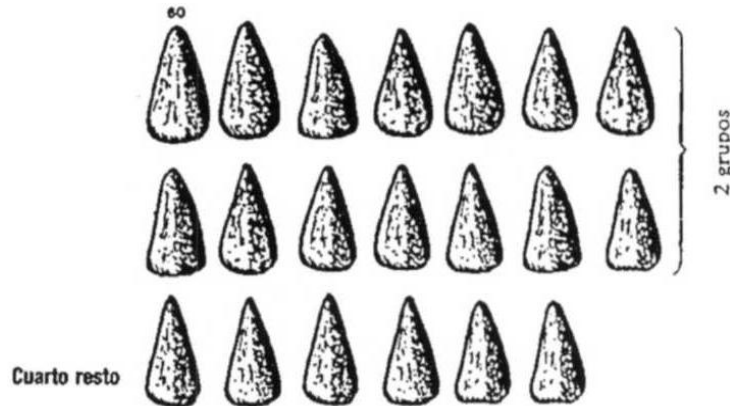
Pero este segundo reparto les ha dado un nuevo resto: quedan sin distribuir 5 esferas que corresponden a 5 x 3 600 síla de cebada y las han convertido al orden inmediatamente inferior (el de los múltiplos de 600).

Cada esfera de «3 600» vale seis conos perforados de «600», por tanto han «hecho moneda» con ese resto considerando $5 \times 6 = 30$ conos perforados, que han repartido en grupos de 7:

Al final de esta tercera división parcial, se han obtenido 4 grupos de 7 conos perforados: por tanto, 4 veces 600 personas de más habían recibido su parte. Pero han quedado dos fichas de esta categoría.

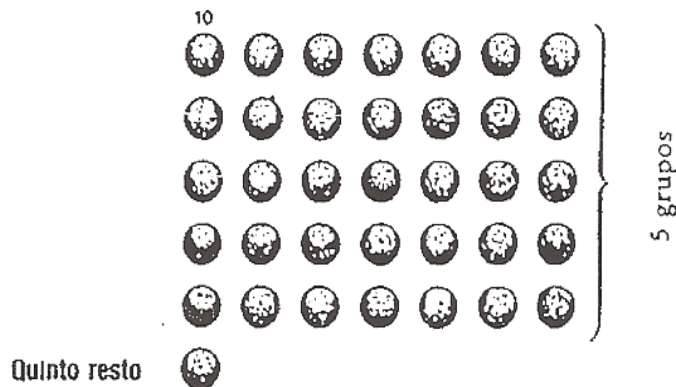


Siguiendo el mismo procedimiento han convertido los dos conos perforados que quedaban (que correspondían a 2×600 síla de cebada sin distribuir todavía) en $2 \times 10 = 20$ conos simples, por valor de 60 unidades cada uno, luego los han dispuesto en grupos de 7:



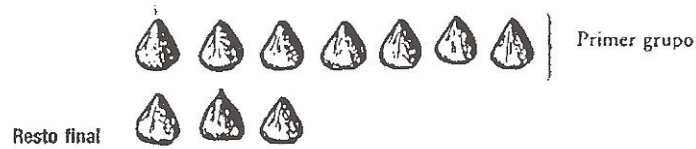
Como el número de grupos de 7 que se pueden formar con esos veinte conos es igual a dos, al finalizar esta cuarta división parcial han sido servidas 2×60 personas de más. El resto de la división parcial han sido servidas 2×60 personas de más. El resto de la división en este caso, ha sido seis conos de «60».

Entonces, los han convertido, a su vez, en $6 \times 6 = 36$ bolas por valor de 10 unidades cada una y las han repartido en grupos de 7:



Entonces, han obtenido 5 grupos (hay 5×10 hombres de mas en el reparto) con un resto de sólo una bola.

Ya sólo les ha quedado convertir esa bola en 10 pequeños conos con valor de unidad y, luego, restar 7 de 10 para acabar la operación:

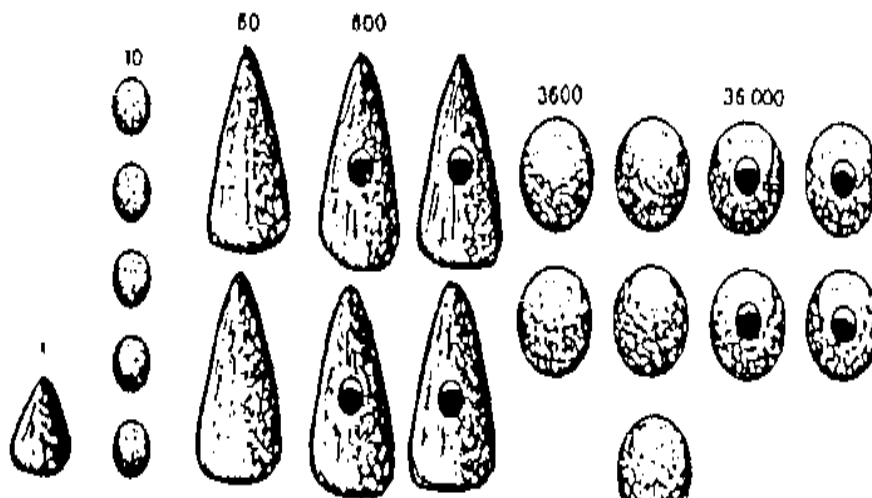


Al acabar esta sexta división parcial, la última persona relacionada con la operación ha cobrado su parte (el cociente correspondiente es igual a 1) y han quedado 3 síla de cebada que ya no es posible distribuir, distribuir.

El cociente final de la división (es decir el número total de personas que han cobrado 7 síla de cebada a partir de 1.152.000 síla de cebada) ha sido obtenido añadiendo sucesivamente:

- los 4 x 36 000 encontrados en la primera etapa (pág. 144);
- los 5 x 3 600 encontrados en la segunda (pág. 145);
- los 4 x 600 encontrados en la tercera (pág. 146);
- los 2 x 60 encontrados en la cuarta (pág. 146);
- los 5 x 10 encontrados en la quinta (pág. anterior);
- 1 a la persona determinada en la última etapa (pág. anterior).

Concretamente, el número buscado ha sido obtenido guardando 4 esferas perforadas en la primera división parcial, después 5 esferas en la segunda, 4 conos perforados en la tercera, 2 conos en la cuarta, 5 bolas en la quinta y un cono pequeño en la última; resultado: 164.571.



Resultado de la división

Para poder recordar de forma duradera esta operación los alumnos han consignado por escrito los datos y los resultados sobre una tablilla de arcilla dividida en dos registros asimismo subdivididos en varias casillas.

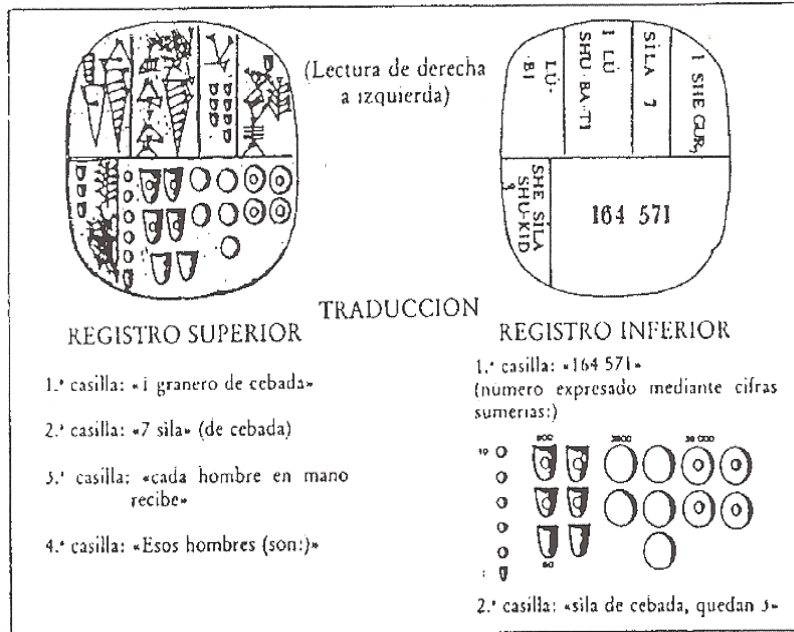
En el registro superior, de derecha a izquierda, marcaron en la primera casilla una muesca fina que significaba «uno» y un signo de escritura que quiere decir «granero de cebada». En la segunda casilla indicaron el signo del síla y luego el número 7. En la tercera casilla reprodujeron dos signos, uno que quería decir «cada hombre» y otro algo así como «en mano recibe».

Por último, en la última casilla del cuadro superior marcaron la frase: «Estos hombres son» Representaron así los datos del problema: Un granero de cebada; 7 síla; cada hombre en mano recibe; esos hombres son.

Después, en la primera casilla del registro inferior de la tablilla representaron el cociente de la división mediante cifras sumerias, reproduciendo para ello:

- 4 grandes marcas circulares provistas cada una de una marca pequeña (réplica inmediata de las cuatro esferas perforadas de «36 000»);
- 5 grandes marcas circulares (que recordaban las cinco esferas de «3 600»);
- 4 muescas gruesas provistas cada una de una pequeña marca circular (que simbolizan los cuatro conos perforados de «600»);
- 2 muescas gruesas (recuerdo de los dos conos de «60»);
- 5 pequeñas marcas circulares (que corresponden a las 5 bolos de «10»);
- Y una muesca fina (que recuerda al cono pequeño de la unidad). En cuanto al resto de la división indicaron en la segunda casilla la frase: «3 síla de cebada, quedan»,

La tablilla que acabamos de «reconstruir» existe en la realidad: está actualmente conservada en el Museo Arqueológico de Estambul y proviene de las excavaciones de Shuruppak. Esta tablilla, que se remonta al 2650 a.C., aproximadamente, constituye el testimonio arqueológico más antiguo conocido de la práctica de una división y nos da una prueba más del alto grado intelectual que los aritméticos del país de Sumer llegaron a alcanzar en aquella época.



Pero si bien este documento (que podía haber correspondido a una especie de «página escolar» o a un documento administrativo que resumiera una operación de distribución de granos) nos da las características de la división aritmética, por el contrario, no nos proporciona ninguna indicación sobre la técnica empleada. La reconstrucción anterior (que me parece más que probable) permite hacerse una idea de los procedimientos de cálculo empleados por los contables súmeros y elamitas de la época. Subraya el carácter estático de las cifras sumerias o elamitas, que no fueron signos operacionales sino abreviaturas destinadas a expresar por escrito los resultados de un cálculo efectuado previamente según un método concreto...

Las cifras en la época de los faraones

Los egipcios también inventaron una escritura y un sistema de numeración escrita. Esto ocurrió alrededor del año 3000 antes de J.C., es decir, casi al mismo tiempo que en Elam y Mesopotamia.

Pero no vayamos a creer que tomaron prestados a los súmeros (o a los elamitas) sus cifras y sus pictogramas para forjar sus propios sistemas.

Los «jeroglíficos» egipcios han sido todos sacados de la flora y de la fauna del Nilo y los instrumentos o utensilios que esta escritura ha «copiado» se utilizaban en Egipto al menos desde principios del IV milenio antes de nuestra era. Los pictogramas y la forma de los dibujos también varían considerablemente de un

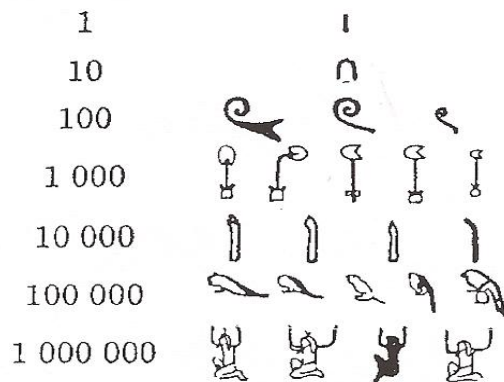
sistema a otro desde la época arcaica e incluso para signos que se supone representaban las mismas cosas.



La numeración jeroglífica egipcia también es diferente a la de los sumerios. No sólo en un plano gráfico sino también desde un punto de vista matemático: la primera está basada en una base estrictamente decimal mientras que la otra lo está en una base sexagesimal.

Los soportes materiales empleados también son diferentes. Los sumerios realizan sus cifras y sus signos de escritura imprimiéndolos o trazándolos casi exclusivamente sobre paneles de arcilla, mientras que los egipcios reproducen los suyos grabándolos o esculpiéndolos por medio de un cincel y un martillo sobre monumentos de piedra, o trazándolos sobre pedazos de roca, trozos de cerámica u hojas de papiros con un junco con la punta aplastada y mojado en una materia colorante.

Las cifras de los jeroglíficos egipcios han nacido *in situ* y son producto exclusivo de la civilización egipcia.



Las cifras jeroglíficas egipcias.

En realidad los egipcios, en los albores del III milenio antes de nuestra era, también estaban en condiciones iniciales psicológicas, sociológicas y económicas completamente favorables a la invención de las cifras y de la escritura².

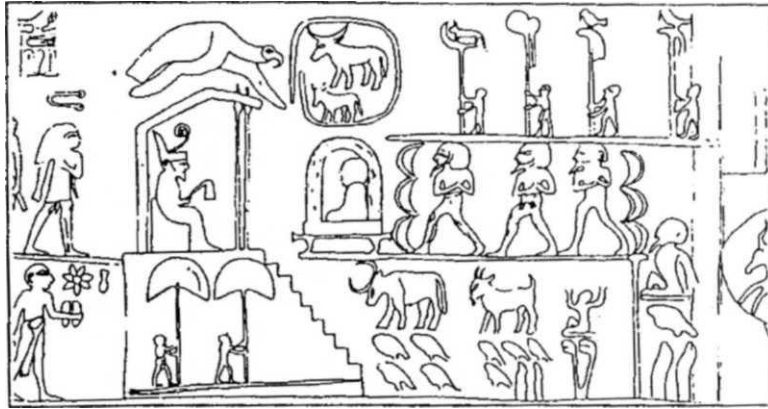
En realidad, esta civilización estaba ya muy avanzada, fuertemente urbanizada y en plena expansión hacia el año 3000 antes de J.C Por razones estrictamente utilitarias, motivadas en particular por necesidades de tipo administrativo y comercial, fue poco a poco cobrando conciencia de las limitadas posibilidades del hombre-memoria y del «agotamiento» de su cultura exclusivamente oral. Esta civilización, que necesitaba cada vez más memorizar el pensamiento y la palabra, así como recordar de forma duradera los números, comprende desde ese momento que necesita una organización del trabajo totalmente distinta. Y como la necesidad crea el órgano, para superar la dificultad descubre la idea de lo escrito y la de la notación gráfica de los números.

Desde su aparición, la numeración egipcia permitió la representación de números que podían llegar hasta el millón e incluso superarlo: poseía un jeroglífico especial para indicar la unidad y cada una de las 6 potencias de 10 siguientes (10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 y 1 000 000).

La cifra de la unidad es un pequeño trazo vertical. La de la decena es un signo en forma de asa parecido a una herradura de caballo dispuesta como una especie de «U» mayúscula invertida. La centena está representada por una espiral más o menos enrollada, como la que se puede realizar con una cuerda. El millar está representado por una flor de loto con su tallo, la decena de mil por el dibujo de un dedo levantado y ligeramente inclinado, la centena de mil por una rana o un renacuajo con el rabo caído y el millón por un hombre arrodillado con los brazos levantados al cielo (pág. anterior).

En Hierakónpolis (antiguísima ciudad situada en la orilla izquierda del Nilo, a 100 kms., aproximadamente, de la primera catarata) se ha encontrado una maza que contiene cierto número de datos. Esta constituye uno de los más antiguos testimonios arqueológicos conocidos de la escritura y de la numeración jeroglífica egipcias. Había pertenecido a Narmer, rey que unificó el Bajo y el Alto Egipto hacia el año 2900 antes de J.C.

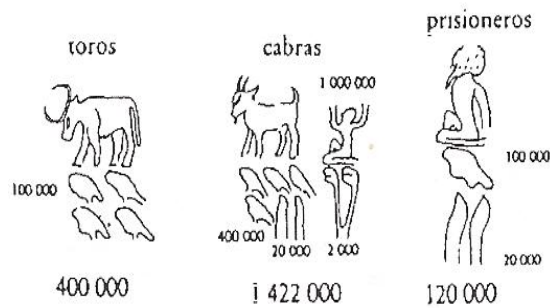
² Por ejemplo, se sabe que los chinos, los cretenses, los representantes de la civilización del Indo y los pueblos precolombinos de América Central (mayas, aztecas, etc.) se han encontrado igualmente, pero en otras épocas, en condiciones semejantes a las de los sumerios y que han realizado los mismos descubrimientos independientemente de toda influencia exterior.



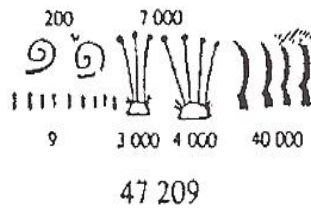
Maza del rey Narmer (principios del III Milenio a. C.).

Además del nombre de Narmer, que está inscrito en ella fonéticamente, esta maza incluye representaciones numéricas que corresponden al importe del botín en cabezas de ganado y al número de prisioneros que se suponía que dicho soberano había traído de sus victoriosas expediciones. Enumeración (probablemente fantástica y exagerada, para glorificar al rey Narmer) cuya cuenta está hecha de la manera siguiente:

«400 000 toros, | 422 000 cabras, 1200 prisioneros»



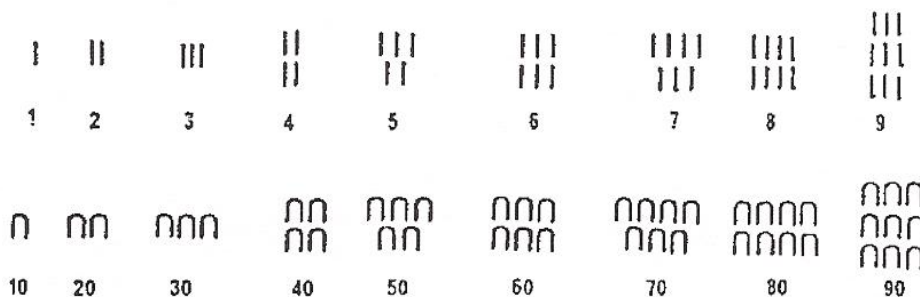
Otro ejemplo nos lo ofrece una estatua encontrada también en Hierakónpolis y que se remota al año 2800 antes de J.C. aproximadamente. Dicha estatua, erigida en honor de un rey llamado Khasekhemen, da la escritura siguiente para el número 47.209 de enemigos matados por ese soberano:



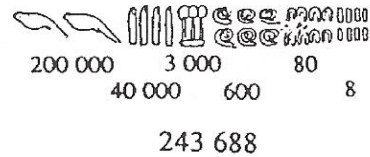
Para representar un número los egipcios se limitaban a repetir la cifra de cada clase decimal tantas veces como fuera necesario. Para ello procedían en el orden de los valores decrecientes a partir de la cifra de mayor potencia de diez contenida en dicho número: empezaban reproduciendo las unidades del orden decimal más elevado, luego las del orden inmediatamente inferior y así sucesivamente hasta las unidades simples.

Al principio, esta representación ha sido arcaica, tanto los dibujos como las agrupaciones de las cifras eran bastante primitivas en su conjunto (obsérvese en la figura anterior, la representación del dedo que valía 10 000 y la de la flor de loto que valía 1 000; también hay que notar el alineamiento de las nueve barras de unidades así como el agrupamiento de las cifras del millar).

Pero a partir del siglo XXVII antes de J.C. el dibujo de estos jeroglíficos se irá haciendo más minucioso y más regular, y para evitar la acumulación sobre una misma línea de vanas cifras de una misma clase de unidades y para facilitar también al lector la suma de los valores correspondientes, se formarán muy frecuentemente dos o tres líneas superpuestas de pequeños grupos de dos, tres o cuatro signos idénticos.



Para el número 243 688, por ejemplo, a partir de ahora se reproducirán en este orden y según la disposición siguiente: dos veces la cifra de 100 000, cuatro veces la de 10 000, tres veces la de 1 000, seis veces la de 100, ocho veces la de 10 y ocho veces la de 1:



← Extracto de los anales de Tutmès III(1490-1436 antes de J.C.) que enumera el botín del año 29 del reinado de este faraón.
Bajorrelieve en gres procedente de Karnak

Esta notación numérica no ha sido en el fondo más que una manera de traducir por escrito el resultado de un método concreto de enumeración. Método que los egipcios emplearon sin duda en las épocas arcaicas y que debía de consistir en representar un número dado por alineamiento o por acumulación de todos los patrones que hiciesen falta (piedras, conchas, bolas, palos, discos, anillos, correspondientes cada uno de ellos a un orden de unidad de un sistema de numeración).

Pero, contrariamente a las cifras sumerias cuyo grafismo denota claramente su origen material, los signos de esta numeración escrita no permiten en absoluto imaginar los objetos concretos que les han precedido en el arte del cálculo figurado de las épocas anteriores a la invención de la escritura.

¿Por qué los números 1 000 y 100 000 por ejemplo, han sido representados respectivamente por una flor de loto y un renacuajo? ¿Sería que concretamente en aquella época se contaba mediante esas flores y esas ranas? Esto parece poco probable.

¿Por qué razón la espiral y el dedo humano han sido escogidos para representar la centena y la decena de mil? ¿Y por qué al hombre arrodillado con los brazos levantados al cielo se le ha atribuido el valor de un millón? Preguntas todas estas que la arqueología de momento no ha sabido responder.

A mi entender, el origen gráfico de las cifras egipcias ha sido mucho más complejo que el de las cifras sumerias o elamitas. Los inventores de esta numeración recurrieron sin duda a vanos principios a la vez.

A este respecto las siguientes hipótesis me parecen plausibles, aunque no dispongo de ninguna prueba formal.

El origen de la cifra 1 podría haber sido «natural»: la barra vertical es el símbolo gráfico más elemental que pueda imaginar el ser humano para representar la unidad. Los hombres prehistóricos ya la utilizaban hace más de treinta mil años en sus huesos tallados y sabemos que gran cantidad de pueblos le han atribuido este valor a través de la historia.

También se puede pensar que esta cifra, junto con la de la decena (el signo en forma de *asa*), ha constituido en la escritura jeroglífica egipcia el vestigio de una de esas antiguas enumeraciones concretas a las que acabamos de referirnos. El primero podría haber correspondido a la simbolización gráfica de un palito, sin duda empleado antaño para el valor de una unidad simple. En cuanto al segundo, podría haber sido el dibujo del cordón que antaño debió de servir para atar dichos palitos y formar un paquete de 10 unidades; dibujo que la escritura egipcia estilizó hasta llegar a esa especie de «U» mayúscula invertida.

En lo que respecta a las cifras 100 y 1 000 (la espiral y la flor de loto) se puede pensar que sus inventores recurrieron a lo que se podría llamar «préstamos fonéticos».

Para poder comprenderlo no me parece inútil destacar uno de los principios fundamentales de la escritura egipcia.

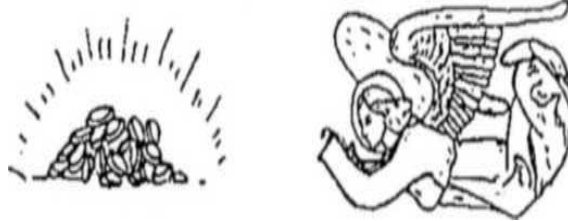
Imaginémonos que los francófonos estuviesen forzados a emplear solamente un sistema de imágenes-signos para transcribir las palabras de su lengua.

Para representar la palabra *orange* (naranja), por ejemplo, la primera idea sería la de dibujar este fruto. Decimos entonces que dicha palabra está representada por un pictograma.

Pero, si bien esta representación visual evoca directamente la idea, sin embargo presenta el inconveniente de ser independiente de la lengua en que se pronuncia. Además, dicho sistema no permite expresar ideas abstractas o acciones ni formar frases como ocurre con la lengua hablada.

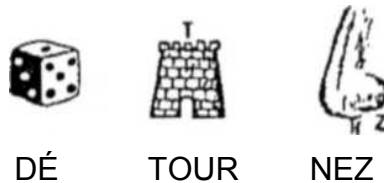
Pero en una segunda fase se nos ocurre lo siguiente: en lugar de utilizar las imágenes por su sentido pictórico completo vamos a emplearlas por su valor fonético. La imagen de un hombre corriendo por ejemplo, ya no será empleada para significar visualmente lo que representa sino para expresar el sonido «Corre». Y el de una haya expresará el mismo sonido «Haya». Para representar la palabra francesa

orange bastará con reproducir una imagen que evoque la idea de *or* (oro) y acompañarla de la de *ange* (ángel):



Al pronunciar esta sucesión de imágenes obtendremos el sonido de *Or-ange* que evocará a nuestro oído lo que intentábamos expresar fonéticamente.

Así, para escribir el verbo francés *détourner* (desviar) nos bastara con descomponerlo en tres elementos fonéticos y dibujar sucesivamente un *dé* (dado), una *tour* (torre) y un *nez* (nariz):



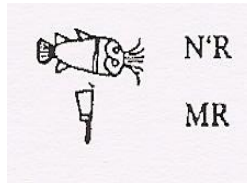
Al leer el conjunto obtendremos el sonido *DE-TOUR-NEZ*³ completamente análogo al verbo de que se trata.

Las pictografías arcaicas llegaron a la fase del fonetismo por este procedimiento y merecieron el nombre de «escritura». Como estas últimas no permitían la transcripción del discurso hablado y no dependían de una lengua determinada, se resolvió el problema inventando el principio de préstamo fonético más conocido con el nombre de jeroglífico; se han descompuesto las palabras abstractas en tantos elementos como se podían representar mediante seres u objetos y cuya pronunciación en una lengua determinada reproducía aproximadamente las mismas articulaciones que dichas palabras.

³ En francés la gran mayoría de las consonantes finales no se pronuncian, como en este caso.

Esto es lo que hicieron los egipcios con las palabras de su propia lengua cuando inventaron su escritura jeroglífica.

Lo veremos, por ejemplo, en la maza del rey Narmer. El nombre de este rey, que en egipcio se decía N'R-MR se ha escrito yuxtaponiendo el jeroglífico del pez (que se decía N'R) a la imagen de la tijera que se pronunciaba MR).



Cabe suponer que, en su origen, las palabras egipcias para decir «espiral» y «flor de loto» correspondían respectivamente a los mismos sonidos que «cien» y «mil» y que al querer representar gráficamente estos dos nombres se adoptaron entonces la imagen del espiral y la de la flor de loto para sus sonidos respectivos, independientemente de su sentido visual directo.

En muchos otros pueblos se han producido casos parecidos. En la antigua escritura china, por ejemplo, el número 1 000 tenía la misma representación gráfica que el hombre. Sus nombres respectivos probablemente se pronunciaban de la misma manera en la época arcaica.

Por su parte, el jeroglífico de la decena de mil (que representa precisamente un dedo levantado y ligeramente inclinado) podría haber constituido una supervivencia del recuento manual que los egipcios empleaban desde la época más remota y que permitía contar hasta 9 999 gracias a las diferentes posturas de los dedos

La cifra para 100 000 podría tener su origen en una razón puramente simbólica: evoca el «croar» de los renacuajos en el Nilo y la gran fecundidad primaveral de dichos batracios.

En cuanto al jeroglífico del millón, su origen podría haber sido de orden psicológico. Los egiptólogos que descifraron por primera vez este ideograma creyeron que se trataba de un hombre asustado por la enorme importancia del número que tenía que expresar. En realidad ese jeroglífico (que no sólo designaba el valor del millón, sino que también poseía el sentido de «millones de años» o de «eternidad») representaba, ante todo, a los ojos de los egipcios, un genio que sostenía la bóveda celeste. En su origen, en esta imagen-signo hubo probablemente

un hombre (posiblemente un sacerdote o un astrónomo) que contemplaba las estrellas del firmamento y tomaba entonces conciencia de su proliferación.




Cálculos a la sombra de las pirámides

Estamos en el año 2000 a.C. en las tierras de un cultivador de cereales de la región de Menfis. Al acabar la cosecha, un funcionario del fisco acude a su casa para controlar la situación de la producción y fijar el importe de la tasa anual. Este último encarga a algunos obreros que midan el grano y que lo embalen en sacos por *celemines*. La cosecha de ese año ha dado dos tipos de trigo: almidonero y menor, así como cebada vulgar.

Para no equivocarse sobre la variedad de cereales, los obreros reparten el trigo almidonero en hileras de 12 sacos, el trigo menor en hileras de 15 y la cebada en grupos de 19 sacos. Estos grupos corresponden respectivamente a los números 128, 84 y 369. Al acabar esta operación, el funcionario coge un pedazo de roca que le va a servir de «borrador» y realiza algunos cálculos mediante cifras jeroglíficas.

A pesar del rudimentario carácter de su numeración escrita los egipcios han sabido realizar desde hace mucho tiempo operaciones aritméticas con sus cifras. La suma y la resta no presentan ninguna dificultad: por ejemplo, para la primera basta con yuxtaponer o sobreponer las representaciones cifradas de los números que hay que sumar y después agrupar (mentalmente) las cifras idénticas, sustituyendo cada 10 signos de una categoría por la cifra de la clase decimal inmediatamente superior.

Para sumar los números 1 729 y 696, por ejemplo, primero se sobreponen, como veremos ahora, las representaciones correspondientes. Seguidamente se agrupan mentalmente las barras verticales, las asas, las espirales y las flores de loto. Después se sustituyen cada 10 trazos por un asa, 10 asas por una espiral, 10 espirales por una flor de loto, y así sucesivamente. Una vez acabado todo esto se obtiene el resultado de la operación:

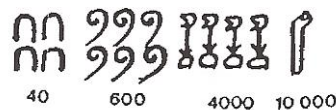
1729	
+ 696	
= 2425	

Los egipcios también saben obtener inmediatamente el resultado de la multiplicación o de la división de un número por diez: les basta con sustituir, en la escritura del número de que se trate, cada símbolo por la cifra de su décuplo en el primer caso y por la de su décima parte en el segundo.

Multiplicado por 10, el número (= 1 464):



queda automáticamente sustituido por el siguiente (= 14 640):



Pero para multiplicar y dividir los demás números los egipcios proceden de otra manera: como sólo saben multiplicar y dividir directamente por dos, generalmente hacen duplicaciones sucesivas, es decir, senes de multiplicaciones por 2...

Volvamos con el «recaudador de impuestos», que en este momento está estableciendo el número total de sacos de trigo almidonero multiplicando 128 por 12. Para ello procede de la manera siguiente:

Con sus cifras jeroglíficas inscribe el multiplicador 12 en la columna de la derecha y a su lado, en la columna de la izquierda, el número 1, seguidamente duplica sucesivamente cada uno de los dos números hasta que en la columna de la izquierda aparezca el multiplicando 128. El número 1 536 que corresponde a 128 en la columna de la derecha,, constituye el resultado de esta operación: $128 \times 12 = 1536$.

Para determinar el número de sacos de trigo menor multiplica 84 por 15 y dispone su operación como hizo anteriormente:

En la columna de la derecha inscribe el multiplicador 15 y, a su lado, en la columna de la izquierda, el número 1. Seguidamente duplica sucesivamente cada uno de los números. Pero como el multiplicando 84 esta vez no aparece en la columna de la izquierda, prosigue la duplicación hasta que obtiene el número mayor contenido en ese multiplicando. Se detiene en el 64, en la columna de la izquierda, y

busca en éste los números cuya suma sea igual a 84. Después señala mediante un pequeño trazo los números que ha ido seleccionando (aquí serían los números 64, 16 y 4), y con una barra oblicua los correspondientes en la columna de la derecha (es decir 960, 240 y 60):

1	15
2	30
- 4	60 /
8	120
-16	240 /
32	480
-64	960 /

Sumando los números marcados con la barra oblicua obtiene el resultado:

$$84 \times 15 = 960 + 240 + 60 = 1\ 260.$$

Por último, para determinar el número de sacos de cebada multiplica 369 por 19 y para ello procede de la misma manera, escribiendo el multiplicador 19 en la columna de la derecha y, a su lado, en la columna de la izquierda, el número 1. Seguidamente duplica sucesivamente ambos números. Pero se detiene en el 256, en la columna de la izquierda, porque la duplicación siguiente daría 512 que sería superior al multiplicando 369:

- 1	19
2	38
4	76
8	152
- 16	304
- 32	608
- 64	216
128	2432
- 256	4864

Seguidamente busca en esa misma columna los números cuya suma dé el multiplicando 369, los números que consigue son 256, 64, 32, 16 y 1 y la suma de los números correspondientes de la columna de la derecha le da entonces el resultado que busca:

$$369 \times 19 = 4\ 864 + 1\ 216 + 608 + 304 + 19 = 7\ 011.$$

La cosecha ha dado 1 536 sacos de trigo almidonero, 1 260 sacos de trigo menor y 7 011 sacos de cebada. El funcionario redondea el primer resultado hasta 1 530 y el tercero hasta 7 010 y como tiene que recoger el décimo del producto total de esta cosecha, fija el impuesto en: 153 sacos de trigo almidonero, 126 sacos de trigo menor y 701 sacos de cebada.

La multiplicación egipcia es pues relativamente simple y puede hacerse sin tener que recurrir a las tablas de multiplicar.

La división también se hace por duplicaciones consecutivas pero el procedimiento se efectúa en sentido inverso.

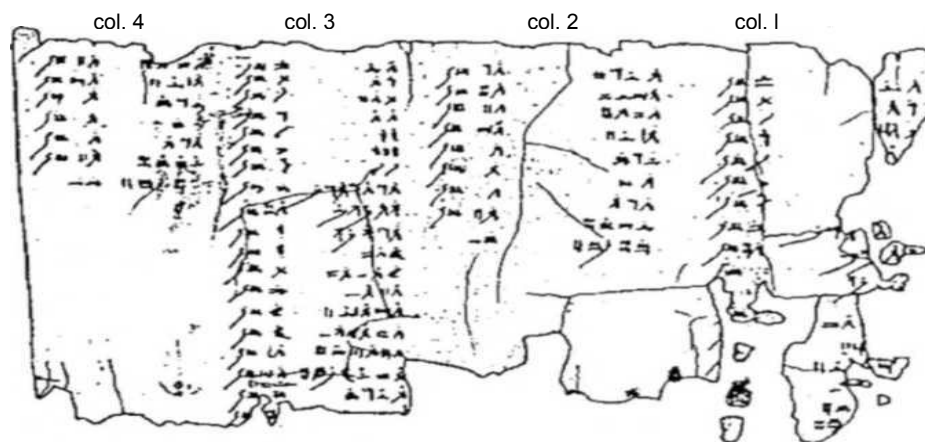
Cerca de Tebas, en el Valle de los Reyes, en la época del faraón Ramsés II (1290-1224 a.C.), unos profanadores de tumbas desvalijaron la tumba real de un soberano de la dinastía precedente. Se llevaron diademas, pendientes, dagas, broches, dijes, etc., todos ellos de oro con vidrio incrustado.

El número de objetos que se llevaron era de 1 476 y el jefe de los ladrones propuso repartir el botín con sus once hombres. Tomó un pedazo de arcilla e hizo la división de 1 476 entre 12. La operación la planteó como si tuviera que hacer una multiplicación por 12 escribiendo el número 1 en la columna de la izquierda y 12, el divisor, en la columna de la derecha; después duplicó sucesivamente cada uno de estos números:

1	12	—
2	24	—
4	48	
8	96	—
16	192	—
32	384	—
64	768	—

Pero se detuvo en 768, en la columna de la derecha, porque la duplicación siguiente daría un número superior al dividendo 1 476. Al llegar aquí buscó en la columna de la derecha (y no en la de la izquierda) los números que sumados darían ese dividendo. Consiguió los números 768, 384, 192, 96, 24 y 12 (cuya suma es precisamente 1 476) y puso junto a ellos una raya horizontal. Al sumar los números correspondientes de la columna de la izquierda (es decir 64, 32, 16, 8, 2, 1) obtuvo con bastante facilidad el resultado de su división:

$$1\ 476 \div 12 = 64 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 123$$



Un manuscrito matemático (cuero, redactado en caracteres hieráticos egipcios. Se trata de una tabla de conversión de fracciones en sumas de fracciones con numerador igual a 1, que los escribas calculadores empleaban frecuentemente en sus diferentes operaciones aritméticas.

Cada ladrón consiguió entonces 123 objetos preciosos y el grupo se dispersó. Naturalmente este método sólo puede aplicarse cuando el dividendo es un múltiplo del divisor. Pero cuando la división no es exacta, los egipcios recurren a las fracciones de número según unos procedimientos que sería demasiado complicado explicar aquí.

Los métodos de cálculo cifrado del Egipto de los faraones también tuvieron el mérito de evitar que los calculadores hubieran de recurrir a la memoria: para multiplicar o dividir bastaba con sumar y multiplicar por dos. Sin embargo, les faltó agilidad y unidad y fueron lentos y muy complejos en comparación con nuestros métodos actuales.

Las hermanas de la numeración egipcia

Once o doce siglos después del Egipto faraónico, otra civilización muy avanzada se encontró situada en condiciones iniciales favorables para la invención de las cifras y de la escritura. Es aquella que se desarrolló en la isla de Creta entre 2200 y 1400 aproximadamente antes de nuestra era y a la que los arqueólogos llaman la civilización *minoica* (con el nombre del legendario rey Minos, primer soberano de la isla, según la mitología griega).

A principios del 11 milenio antes de la era cristiana, los cretenses experimentaron una transformación radical de su modo de vida tradicional en un marco social y político nuevo, revelado por la amplitud de las construcciones de esa época y en particular por la impresionante construcción de los primeros palacios fortificados de Cnoso, Festo y Malía.

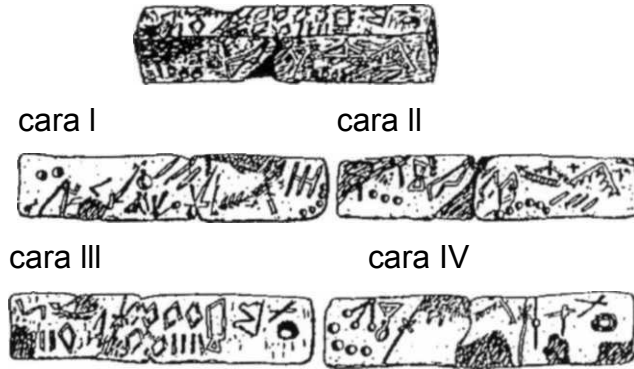
La artesanía (fabricación de joyas, objetos de arte, cerámicas, armas, etc.) tuvo un esplendor considerable. El comercio se hizo muy floreciente y el desarrollo de las riquezas creció sin cesar. A partir de ese momento los inventarios, recuentos, notas de entrega, las operaciones económicas y las distribuciones de víveres y de suministros se hicieron cada día más numerosas.

Por lo tanto fue cada vez mayor la necesidad de memorizar los números y de fijarlos. Para responder a tales necesidades los responsables de la administración «burocratizada» (que sin duda nació en los primeros palacios de esta civilización) inventaron una escritura y un sistema de numeración escrita hacia el año 2000 a.C.

Los cretenses van a dar sucesivamente tres tipos bien diferenciados de escritura:

- la llamada jeroglífica, cuyos signos serán imágenes más o menos realistas que representan seres u objetos de todo tipo;
- la llamada lineal A, derivada de la primera, pero cuyos signos son dibujos mucho más esquemáticos.
- y por último la llamada lineal B, que procede de una reelaboración de la anterior y que sirve para anotar, no la lengua minoica, sino un dialecto griego arcaico (el *micénico*).

La primera será empleada casi exclusivamente en los palacios desde el año 2000 hasta el año 1600 aproximadamente a J.C



Diversas caras escritas de una barra de arcilla que contiene signos y cifras de la escritura jeroglífica cretense. Palacio de Cnoso, 1.^a mitad del II milenio a..C).

La segunda aparece en Creta entre 1700 y 1400 antes de nuestra era y se extendió tanto entre los medios administrativos y religiosos como entre los particulares.

En cuanto a la última, la utilizaron entre 1350 y 1200 a. de J.C, después de la desaparición definitiva de la civilización minoica y a raíz de la invasión de la isla por los micenios. No sólo se difundió en Creta sino también en el continente helénico. Lo sabemos gracias a las excavaciones arqueológicas que se realizaron a finales de siglo pasado en Cnoso, Malía, Festo y Hagia Tríaada, así como en los emplazamientos griegos de Micenas, Tirinto y Pilo. Durante este período, como lo atestiguan numerosas barras y tablillas de arcilla contables que se descubrieron en dichos emplazamientos, la notación numérica cretense experimentó también algunas modificaciones. Pero éstas no consiguieron modificar la estructura matemática porque sólo afectaron a las grafías de las cifras correspondientes. Hay que destacar que este sistema era totalmente semejante a la numeración egipcia porque, como ella, se basaba en una base estrictamente decimal y sólo atribuía una cifra particular a la unidad y a cada una de las potencias de diez.



Al principio los cretenses representaron:

- el número 1 mediante un arco pequeño de círculo orientado de forma vanada;
- el número 10 mediante una pequeña marca circular análoga a la cifra sumeria o elamita del mismo valor;
- el número 100 mediante un gran trazo oblicuo; —el número 1 000 mediante un rombo.

Pero por alguna razón todavía oscura sustituyeron poco a poco estos signos por otras cifras. A partir del año 1700 a. de J.C, sustituyeron progresivamente la antigua cifra de la unidad por un pequeño trazo vertical, la marca circular, que valía diez, por un trazo horizontal, el gran trazo oblicuo de la centena por un círculo y el rombo del millar por una figura circular con algún rasgo particular.

Después, los micenios conservaron estos signos, pero introdujeron una cifra suplementaria para 10 000. El signo correspondiente lo forjaron según una combinación multiplicativa, deduciéndolo de la cifra para 1 000, añadiendo en su centro un trazo horizontal que simbolizaba una decena.

	1	10	100	1 000	10 000
Sistema jeroglífico primera mitad del II milenio antes de J.C.	∩	•	/	◊	?
	∩		/		
	∩		/		
	∩		/		
Sistema «lineal A» de 1700 aproximadamente hacia 1400 antes de J.C.	∩	•	○	○	?
	∩	—	○	○	
Sistema «lineal B» 1350 aproximadamente 1200 antes de J.C.	∩	—	○	○	○

← Las cifras cretenses

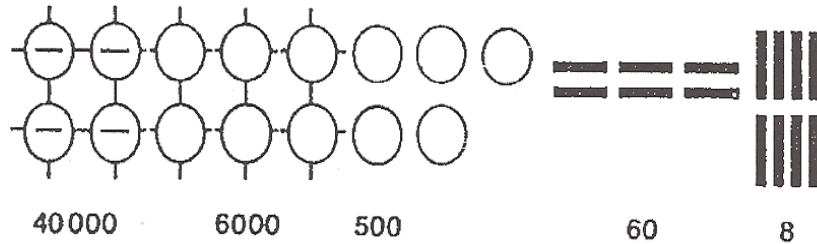
Sistema «jeroglífico»

∩	∩∩	∩∩∩	∩∩∩∩	∩∩∩∩∩	∩∩∩∩∩∩	∩∩∩∩∩∩∩	∩∩∩∩∩∩∩∩	∩∩∩∩∩∩∩∩∩
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Sistemas «lineales»

∩	∩∩	∩∩∩	∩∩∩∩	∩∩∩∩∩	∩∩∩∩∩∩	∩∩∩∩∩∩∩	∩∩∩∩∩∩∩∩	∩∩∩∩∩∩∩∩∩
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Representaciones cretenses de los nueve primeros números.



Representación del número 46 568 en el sistema lineal.

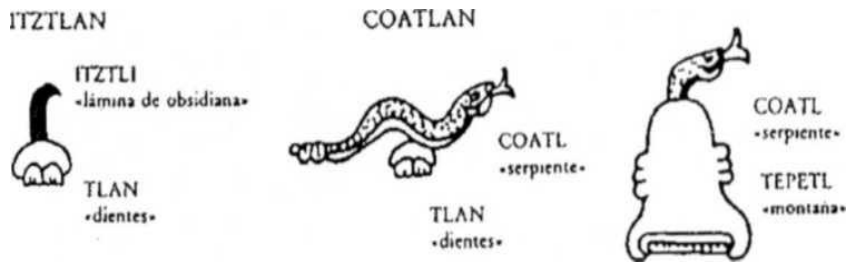
Pero dejando de lado estas modificaciones gráficas, el principio de la numeración cretense ha permanecido idéntico. Partiendo de las cifras de alguna de las series, los números intermedios siempre se han expresado repitiéndose cuantas veces fuera necesario. Además, la escritura de cada número se hizo generalmente en el orden de los valores decrecientes a partir de la cifra que representaba la mayor potencia de diez. Dejando de lado las grafías de las cifras, esta notación numérica era idéntica a la numeración jeroglífica egipcia.

En la otra punta del mundo, pero treinta y cinco siglos después, la civilización azteca llegó a los mismos resultados. Esta civilización se desarrolló en México entre los siglos XIV y XVI de nuestra era, antes de la llegada de los conquistadores españoles. En condiciones iniciales totalmente análogas a las de los minoicos, también se dieron una escritura y un sistema de cifras.

Lo sabemos gracias a cierto número de manuscritos que los especialistas llaman *codex* y que en su mayor parte han sido redactados después de la conquista española. Uno de los más notables de estos documentos es el denominado *Codex Mendoza* (nombre del primer Virrey de Nueva España, don Antonio de Mendoza, que ordeno a los escribas indígenas que resumieran la historia y la vida cotidiana de los aztecas y transcribieran los registros de los tributos recogidos por el Imperio en aquella época entre las ciudades sojuzgadas por la guerra, acompañando cada uno de los detalles correspondientes con un comentario en lengua española).

La escritura azteca era figurativa: sus caracteres consistían en dibujos realistas que reproducían seres u objetos de todo tipo. No obstante, constituyó una especie de compromiso entre una notación ideográfica y una notación fonética. Algunos de sus signos tenían la misión de representar ideas o de significar visualmente lo que representaban y otros anotaban sonidos de la lengua azteca según un principio parecido al de los jeroglíficos de nuestros pasatiempos. El nombre de la ciudad de *Itztlán* estaba representado por el dibujo de una «lámina de ob-

sidiana» (que expresaba la palabra *Itzli*) seguido del de un «diente» (que se decía *tlán*); asimismo, el nombre de la ciudad de *Coatlán* se representaba mediante el jeroglífico de la «serpiente» (*coatl*) y del «diente» (*tlán*); etc.



A su vez, la numeración azteca era de base 20 y sólo poseía 4 cifras:

será 4 cifras:

- un punto o un redondel para la unidad;
- una especie de hacha para la veintena;
- una pluma para el número 400 (= 20²);
- y un saco lleno de grano para 8.000 (= 20³).



Una página del «Codex Mendoza» en la que se enumera el tributo que siete ciudades mexicanas debían proporcionar a los notables de la ciudad de Tenochtitlán.

Los funcionarios del imperio azteca expresaban por escrito los resultados de sus inventarios y recuentos, reproduciendo cada cifra tantas veces como fuera necesario junto a los pictogramas apropiados.

El escriba que redactó el *Codex Mendoza* consignó así el tributo que las ciudades mexicanas conquistadas por el ejército azteca debían entregar una, dos o cuatro veces al año a los señores de la ciudad de Tenochtitlán, capital del Imperio, situada en el México actual. La página que reproducimos enumera de la manera siguiente el tributo que debía recogerse una vez al año en las siete ciudades de una misma provincia:

1.º En la columna de la izquierda, los nombres de las siete ciudades de que se trata, representados cada uno por una combinación de dibujos que se lee según el siguiente jeroglífico:

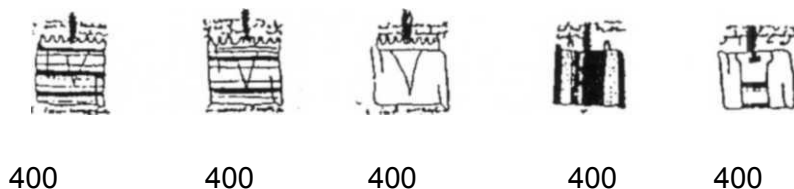


2.º En la primera línea de arriba



un lote de 400 capas de tejido cuadrículado negro y blanco; '
 un lote de 400 capas de tejido ricamente trabajado en rojo y blanco (que llevaban los señores de Tenochtitlán);
 un lote de 400 taparrabos;
 dos lotes de 400 capas grandes de color blanco de 4 «brazas» (unidad de longitud representada mediante los dedos).

3.º En la segunda línea:



dos lotes de 400 capas rayadas de naranja y blanco de 8 «brazas» cada una;

un lote de 400 capas grandes de color blanco de 8 «brazas» cada una; un lote de 400 capas multicolores de 2 «brazas» cada una; un lote de 400 túnicas y faldas de mujer.

4.º En la tercera línea:



tres lotes de 80 capas de colores ricamente trabajadas (que llevaban los dignatarios de la capital);

dos lotes de 400 sacos de pimienta (una de cuyas aplicaciones consistía en servir de castigo a los jóvenes infractores de las normas).

5.º En la cuarta línea:

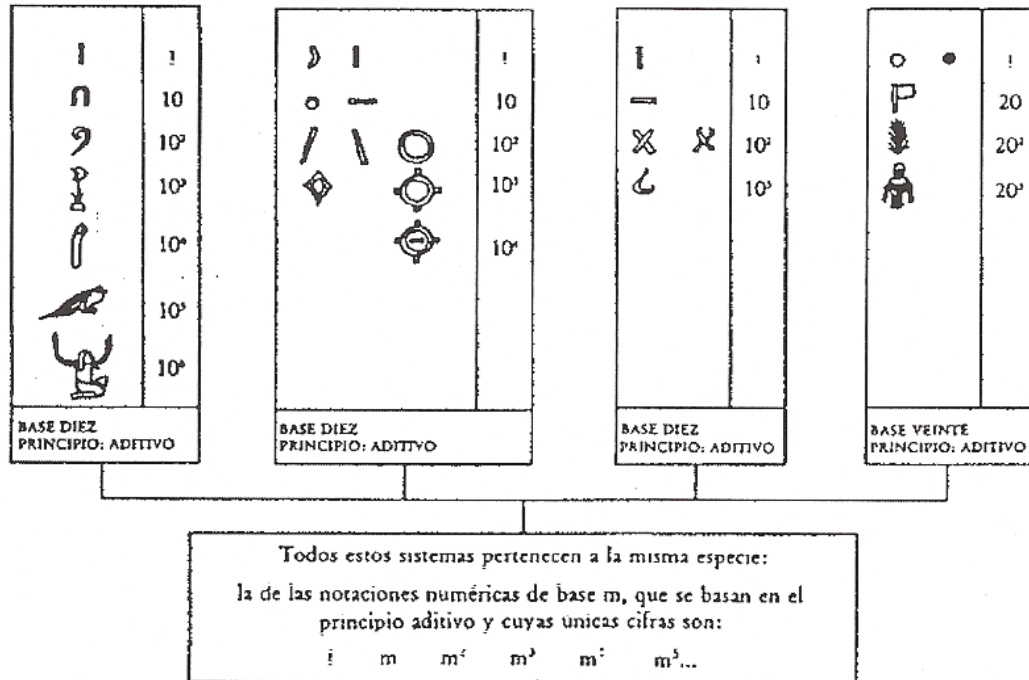


2 trajes de ceremonia, 20 sacos de plumón blanco y dos hileras de perlas de jade.

6.º Y en la última línea:



2 escudos, una hilera de turquesas y dos platos ricamente incrustados con turquesas...



Los sistemas egipcio, cretense, hetita y azteca: numeraciones hermanas.

La numeración azteca presenta una indudable identidad intelectual con el sistema numeral egipcio. Porque como él se basaba en el principio aditivo (regla según la cual el valor de una representación cifrada se obtiene sumando los valores de las cifras que contiene) y sólo atribuía algún signo especial a la unidad y a cada una de las potencias de su base. La única diferencia con el sistema egipcio reside en el dibujo de las cifras y en que su base era vigesimal en lugar de ser decimal.

Llama la atención ver como unos hombres tan alejados en el tiempo y en el espacio, han utilizado algunas veces los mismos caminos para llegar a resultados completamente similares en sus investigaciones y tanteos. Pero sería absurdo pensar que estos pueblos han podido copiarse entre sí: como se ha visto, simplemente estaban en unas condiciones iniciales rigurosamente idénticas. Esto explica que sociedades que nunca han estado en contacto, hayan llegado simultáneamente o en épocas diferentes, a resultados similares: la conquista del fuego, el descubrimiento de los números, el florecimiento del urbanismo y de la tecnología, el desarrollo de la agricultura, el trabajo y aleación de los metales, la invención de la rueda o del arado.