Ecuaciones Logarítmicas y Exponenciales

Resolver las ecuaciones:

1. $\log(3x+1) - \log x = 1 + \log x$
2. $2^{2x-1} + 2^{x+2} - 1 = 0$

Solución:

1. $$\log(3x+1) - \log x = 1 + \log x \Longrightarrow \log(3x+1) = \log 10 + 2\log x$$

$$\log(3x+1) = \log(10x^2) \Longrightarrow 10x^2 - 3x - 1 = 0 \Longrightarrow \ x = \frac{1}{2}, \ \ x = -\frac{1}{5}$$

De las dos soluciones hay una que no es posible ya que no existen logaritmos de números negativos, es decir, de las dos soluciones la única posible es $x = \frac{1}{2}$

2. $$2^{2x-1} + 2^{x+2} - 1 = 0 \Longrightarrow \frac{2^{2x}}{2} + 2^x 2^2 - 1 = 0 \Longrightarrow 2^{2x} + 8 \cdot 2^x - 2 = 0$$

Haciendo el cambio de variables $u = 2^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$u^2 + 8u - 2 = 0 \Longrightarrow u = 0,2426406871, \ \ u = -8,242640687$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u = 0,2426406871 = 2^x \Longrightarrow \log 0,2426406871 = \log 2^x \Longrightarrow$$

$$x \log 2 = \log 0,2426406871 \Longrightarrow$$

$$x = \frac{\log 0,2426406871}{\log 2} = -2,242640687$$

En el otro caso, $u = -8,242640687 = 2^x$ no es posible obtener solución.

Resolver las ecuaciones:

1. $\log(3x+1) - \log x = 1 + \log(1-x)$
2. $2^{2x-1} + 2^{x+3} - 1 = 0$

Solución:

1. $$\log(3x+1) - \log x = 1 + \log(1-x) \Longrightarrow \log(3x+1) = \log 10 + \log(1-x) + \log x$$

$$\log(3x+1) = \log(10x(1-x)) \Longrightarrow 10x^2 - 7x + 1 = 0 \Longrightarrow \ x = \frac{1}{2}, \ \ x = \frac{1}{5}$$

2. $$2^{2x-1} + 2^{x+3} - 1 = 0 \Longrightarrow \frac{2^{2x}}{2} + 2^x \cdot 2^3 - 1 = 0 \Longrightarrow 2^{2x} + 16 \cdot 2^x - 2 = 0$$

Haciendo el cambio de variables $u = 2^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$u^2 + 16u - 2 = 0 \Longrightarrow u = -16,12403840, \ \ u = 0,1240384046$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u = 0,1240384046 = 2^x \Longrightarrow \log 0,1240384046 = \log 2^x \Longrightarrow$$

$$x \log 2 = \log 0,1240384046 \Longrightarrow$$

$$x = \frac{\log 0,1240384046}{\log 2} = -3,011141219$$

En el otro caso, $u = -16,12403840 = 2^x$ no es posible obtener solución.

Resolver las ecuaciones:

1. $\log(3x^2 - 2) = 1 + \log(x-1)$
2. $2^{2x-1} + 2^{x+1} - 2 = 0$

Solución:

1. $\log(3x^2-2) = 1+\log(x-1) \Longrightarrow \log(3x^2-2) = \log 10 + \log(x-1)$

$$\log(3x^2-2) = \log(10(x-1)) \Longrightarrow 3x^2-10x+8=0 \Longrightarrow \; x=2, \;\; x=\frac{4}{3}$$

2. $2^{2x-1}+2^{x+1}-2=0 \Longrightarrow \dfrac{2^{2x}}{2}+2\cdot 2^x-2=0 \Longrightarrow 2^{2x}+4\cdot 2^x-4=0$

   Haciendo el cambio de variables $u=2^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$u^2+4u-4=0 \Longrightarrow u=0,8284271247, \;\; u=-4,828427124$$

   Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u=0,8284271247=2^x \Longrightarrow \log 0,8284271247 = \log 2^x \Longrightarrow$$

$$x\log 2 = \log 0,8284271247 \Longrightarrow$$

$$x=\frac{\log 0,8284271247}{\log 2} = -0,2715533031$$

   En el otro caso, $u=-4,828427124=2^x$ no es posible obtener solución.

Calcular:

1. $\log(x^2+2)-\log x = 1$
2. $4^{x-1}+2^x-1=0$

Solución:

1. $\log(x^2+2)-\log x = 1 \Longrightarrow x=0,2041684766, \;\; x=9,795831523$
2. $4^{x-1}+2^x-1=0 \Longrightarrow x=-0,2715533031$

Resolver las ecuaciones:

1. $\log(x-1)-\log(x+1)=1-\log x$
2. $\log x+1=\log x^2$
3. $3^{2x-1}+3^{x+1}-2=0$
4. $3^{x+1}+3^{x-1}-1=0$

Solución:

1. $\log(x-1)-\log(x+1)=1-\log x \Longrightarrow \log\dfrac{x-1}{x+1}=\log\dfrac{10}{x}$

$$\frac{x-1}{x+1}=\frac{10}{x} \Longrightarrow x^2-11x-10=0 \Longrightarrow$$
$$x=11,84428877, \;\; x=-0,8442887702$$

   De las dos soluciones hay una que no es posible ya que no existen logaritmos de números negativos, es decir, de las dos soluciones la única posible es $x=11,84428877$

2. $\log x+1=\log x^2 \Longrightarrow \log 10x = \log x^2 \Longrightarrow 10x=x^2 \Longrightarrow x=0, \;\; x=10$

   De las dos soluciones hay una que no es posible ya que no existen logaritmos del cero, es decir, de las dos soluciones la única posible es $x=10$

3. $3^{2x-1}+3^{x+1}-2=0 \Longrightarrow \dfrac{3^{2x}}{3}+3\cdot 3^x-2=0 \Longrightarrow 3^{2x}+9\cdot 3^x-6=0$

   Haciendo el cambio de variables $u=2^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$u^2+9u-6=0 \Longrightarrow u=0,6234753829, \;\; u=-9,623475382$$

   Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u=0,6234753829=3^x \Longrightarrow \log 0,6234753829=\log 3^x \Longrightarrow$$

$$x\log 3 = \log 0,6234753829 \Longrightarrow$$

$$x = \frac{\log 0,6234753829}{\log 3} = -0,4300388787$$

En el otro caso, $u = -9,623475382 = 3^x$ no es posible obtener solución.

4. $$3^{x+1} + 3^{x-1} - 1 = 0 \Longrightarrow 3\cdot 3^x + \frac{3^x}{3} - 1 = 0 \Longrightarrow 10\cdot 3^x - 3 = 0 \Longrightarrow$$

$$3^x = 0,3 \Longrightarrow \log 3^x = \log 0,3 \Longrightarrow x\log 3 = \log 0,3 \Longrightarrow$$

$$x = \frac{\log 0,3}{\log 3} = -1,095903274$$

Resolver las ecuaciones:

1. $\log(x-1) - \log(x+1) = 1 - \log x$
2. $3^{2x-1} + 3^{x+1} - 2 = 0$

Solución:

1. $$\log(x-1) - \log(x+1) = 1 - \log x \Longrightarrow \log\frac{x-1}{x+1} = \log\frac{10}{x}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{10}{x} \Longrightarrow x^2 - 11x - 10 = 0 \Longrightarrow$$
$$x = 11,84428877, \quad x = -0,8442887702$$

De las dos soluciones hay una que no es posible ya que no existen logaritmos de números negativos, es decir, de las dos soluciones la única posible es $x = 11,84428877$

2. $3^{2x-1} + 3^{x+1} - 2 = 0 \Longrightarrow \dfrac{3^{2x}}{3} + 3\cdot 3^x - 2 = 0 \Longrightarrow 3^{2x} + 9\cdot 3^x - 6 = 0$

Haciendo el cambio de variables $u = 2^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$u^2 + 9u - 6 = 0 \Longrightarrow u = 0,6234753829, \quad u = -9,623475382$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u = 0,6234753829 = 3^x \Longrightarrow \log 0,6234753829 = \log 3^x \Longrightarrow$$

$$x\log 3 = \log 0,6234753829 \Longrightarrow$$

$$x = \frac{\log 0,6234753829}{\log 3} = -0,4300388787$$

En el otro caso, $u = -9,623475382 = 3^x$ no es posible obtener solución.

Resolver:

1. $\log(1+x) - \log(1-x) = 2$
2. $3^{2x} - 2\cdot 3^x + 1 = 0$

Solución:

1. $\log(1+x) - \log(1-x) = 2 \Longrightarrow \log\dfrac{1+x}{1-x} = \log 100 \Longrightarrow$

$1 + x = 100(1-x) \Longrightarrow x = \dfrac{99}{101}$

2. $3^{2x} - 2\cdot 3^x + 1 = 0$ haciendo $t = 3^x$ tenemos que:

$t^2 - 2t + 1 = 0 \Longrightarrow t = 1$, deshaciendo el cambio de variable tenemos:

$t = 3^x = 1 \Longrightarrow x = 0$

Resolver las siguientes ecuaciones

1. $\log(x^2-2)+1=\log(x+1)+\log(x-1)$
2. $3^{2x-1}+3^{x+1}-1=0$

Solución:

1. $$\log(x^2-2)+1=\log(x+1)+\log(x-1)$$

$$\log(x^2-2)+\log 10=\log(x+1)+\log(x-1)$$

$$\log 10(x^2-2)=\log(x^2-1)\Longrightarrow 10x^2-20=x^2-1\Longrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{19}}{3}$$

La solución negativa no es válida, ya que no existen logaritmos de números negativos y, por tanto, $x=\dfrac{\sqrt{19}}{3}$.

2. $$3^{2x-1}+3^{x+1}-1=0\Longrightarrow\frac{(3^x)^2}{3}+3\cdot 3^x-1=0$$

Si hacemos $t=3^x$ nos queda

$$\frac{t^2}{3}+3t-1=0\Longrightarrow t^2+9t-3=0\Longrightarrow t=0,321825;\ \ t=-9,321825$$

Deshaciendo el cambio de variable tendremos:

$$\left\{\begin{array}{ll} 3^x & =0,321825\Longrightarrow\log 3^x=\log 0,321825\Longrightarrow x\log 3=\log 0,321825\Longrightarrow\\ & \Longrightarrow x=\dfrac{\log 0,321825}{\log 3}=-1,03198\\ & \\ 3^x & =-9,321825\ \text{ no tiene solución}\end{array}\right.$$

Resolver:

1. $\log(5x+1)-\log x=1-\log(1-x)$
2. $2^{2x-1}-2^{x+1}+2=0$
3. $$\left\{\begin{array}{rrr} 2^{x-1}+ & 3^{y+1}= & 3\\ 2^{x+1}- & 3^{y-1}= & 1\end{array}\right.$$

Solución:

1. $$\frac{5x+1}{x}=\frac{10}{1-x}\Longrightarrow 5x^2+6x-1=0\Longrightarrow$$
$$x=-1,348331477,\ \ x=0,1483314773$$

La solución negativa no es válida.

2. $$\frac{t^2}{2}-2t+2=0\Longrightarrow t=2\Longrightarrow x=1$$

3. $$\left\{\begin{array}{rrr} u/2+ & 3v= & 3\\ 2u- & v/3= & 1\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} u=24/37\\ v=33/37\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-0,2712129366\\ y=-0,04522777025\end{array}\right.$$