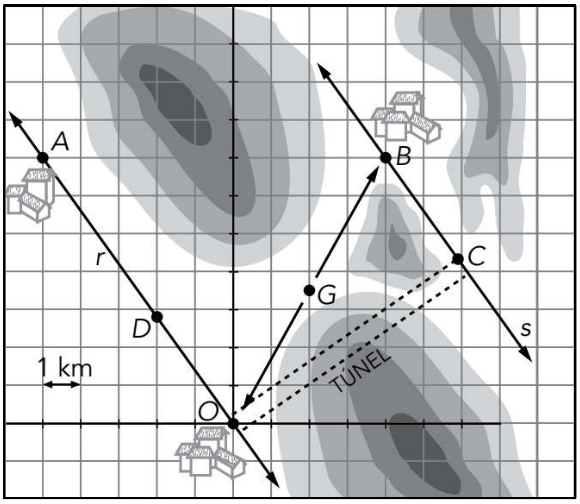
	Nombre:	**S O L U C I O N E S**		3ª Evaluación	Nota
	Curso:		Examen XIII		
	Fecha:		Vectores y Rectas		

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización de hasta el 25 % de la nota.

En una zona de montaña, como puedes ver en el plano de la derecha, las autoridades quieren proyectar un nuevo sistema de carreteras. Pretenden construir dos tramos paralelos de autovía por los valles de la zona.

Los topógrafos han elaborado un mapa orográfico sobre unos ejes coordenados para facilitar los cálculos de los ingenieros.

Sofía está en el equipo de planificación y os enseña el mapa para que la ayudéis con los cálculos. El centro del sistema de coordenadas lo han puesto en una localidad cercana.



Escala 1:1000

1. "Vamos a ver, chicos. Según el plano, ¿cuáles son las coordenadas de O y de A?, una vez que las hayáis calculado, ¿Cuáles son las ecuaciones paramétricas de la carretera r?"

Si nos fijamos en el plano, las coordenadas de los puntos O y A son, O(0,0) y A(−5,7)

Además, nos piden las ecuaciones paramétricas de la recta r (carretera r), y sabemos que, para ello necesitamos un punto y un vector:

$$r:\begin{cases} P\left(p_x,p_y\right) \\ \vec{r}=\left(r_x,r_y\right) \end{cases} \xrightarrow{\text{Las ecuaciones Paramétricas de una recta, vienen dadas por:}} r:\begin{cases} x=p_x+\lambda\cdot r_x \\ y=p_y+\lambda\cdot r_y \end{cases}$$

Calculamos el vector director de la recta r con la ayuda de los puntos O y A.:

$$\vec{r}=\overline{OA}=A-O=(-5,7) \quad\rightarrow\quad \vec{r}=(-5,7)$$

Pues con el punto O(0,0) y con el vector $\vec{r}=(-5,7)$, ya podemos escribir las ecuaciones paramétricas:

$$r:\begin{cases} x=p_x+\lambda\cdot r_x \\ y=p_y+\lambda\cdot r_y \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} x=0-5\lambda \\ y=0+7\lambda \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} x=-5\lambda \\ y=7\lambda \end{cases}$$

Por tanto: O(0,0), A(−5,7) y $r:\begin{cases} x=-5\lambda \\ y=7\lambda \end{cases} \rightarrow r:7x+5y=0$

2. "Supongo que ahora os resultará más fácil decirme cuál es la ecuación general de la autovía **s** que pasa por B".

Del enunciado sabemos que las rectas r y s son paralelas, así que, con el vector director de r y el punto B, puedo calcular dicha ecuación:

$$s:\begin{cases} B(4,7) \\ \vec{r}=(-5,7) \end{cases} \xrightarrow{\text{Escribimos la Ec General Ax+By+c=0 con el vector (-B,A)}} 7x+5y+c=0 \xrightarrow{\text{Calculamos C sustutuyendo el punto B(4,7) en la recta}} 7\cdot 4+5\cdot 7+c=0$$

De donde:

$$7\cdot 4+5\cdot 7+c=0 \quad \rightarrow \quad 28+35+c=0 \quad \rightarrow \quad c=-63$$

Por tanto, la recta s, tiene por ecuación general: $s: 7x+5y-63=0$

3. "Acaban de decirme que quieren construir un nuevo ramal entre O y B con una gasolinera, G, en su punto medio. Tenemos que calcular la ecuación continua de este nuevo ramal, las coordenadas de G y la distancia de la gasolinera hasta B (mirad la escala del plano)".

Sabemos que la ecuación continua de una recta viene dada por la expresión: $\frac{x-p_x}{v_x}=\frac{y-p_y}{v_y}$ donde

P(P_x,P_y) es un punto de la recta y $\vec{v}=(v_x,v_y)$ su vector director.

Con los puntos O y B(4,7), podemos sacar un vector y con un punto y 1 vector podemos escribir la ecuación de la recta:

$$t:\begin{cases} B(4,7) \\ \vec{r}=(4,7) \end{cases} \xrightarrow{\text{Escribimos la Ec Continua}} \frac{x-4}{4}=\frac{x-7}{7}$$

O lo que es lo mismo: recta OB: $\frac{x}{4}=\frac{x}{7}$

Como el punto G está en el punto medio del segmento $\overline{OB}$, basta con calcularlo:

$$G(G_x,G_y)=\left(\frac{O_x+B_x}{2},\frac{O_y+B_y}{2}\right) \rightarrow (G_x,G_y)=\left(\frac{0+4}{2},\frac{0+7}{2}\right) \rightarrow G\left(2,\frac{7}{2}\right)$$

La distancia de la gasolinera G al punto B, es la mitad del módulo del vector $\overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{OB}=B-O=(4,7) \rightarrow \overrightarrow{OB}=(4,7) \rightarrow \left\|\overrightarrow{OB}\right\|=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$$

Así que la distancia de la gasolinera a B es de :

$$d_{G\to B}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OB}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{65} \rightarrow d_{G\to B}=4{,}03\ Km$$

Por tanto, la distancia de la gasolinera al punto B es de aproximadamente 4 km

4. "Los ingenieros quieren construir un túnel que una las autovías **r** y **s**, y que sea perpendicular a ambas. Una de las entradas debe estar en O. ¿Qué ecuación tendrá?, ¿Cuánto será su pendiente?, ¿Qué coordenadas tendrá la otra salida del túnel, C?"

Como el túnel es perpendicular a las rectas r y s, la ecuación de dicho túnel será perpendicular a ambas y para ellos basta con cambiar las coordenadas y cambiarle el signo a una de ellas: $túnel: 5x-7y=0$ puesto que pasa por el origen O.

Como nos piden su pendiente, escribiré su ecuación en forma explícita:

$$y=\frac{5}{7}x \qquad \text{cuya pendiente es:} \qquad m=\frac{5}{7}$$

Para calcular las coordenadas de C basta con resolver el sistema formado por la recta s y el túnel:

$$\begin{cases} s: 7x+5y-63=0 \\ túnel: 5x-7y=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Por reducción:}} \begin{cases} 7x+5y=63 \\ 5x-7y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 49x+35y=441 \\ 25x-35y=0 \end{cases} \rightarrow 74x=441$$

De donde despejando x:

$$x=\frac{441}{74}$$

Calculamos y mediante:

$$5x-7y=0 \quad \rightarrow \quad 5\cdot\frac{441}{74}-7y=0 \quad \rightarrow \quad \frac{2205}{74}=7y \quad \rightarrow \quad y=\frac{315}{74}$$

Por tanto, las coordenadas del punto C son: $C\left(\frac{441}{74},\frac{315}{74}\right)$

5. "He oído rumores de que en un futuro no muy lejano quieren construir una electro-gasolinera en la carretera **s** en el punto X, de forma que los puntos AOBX formen un paralelogramo. ¿En qué punto de la recta **s** estará la gasolinera? ¿Cuántas hectáreas de superficie tiene ese paralelogramo?

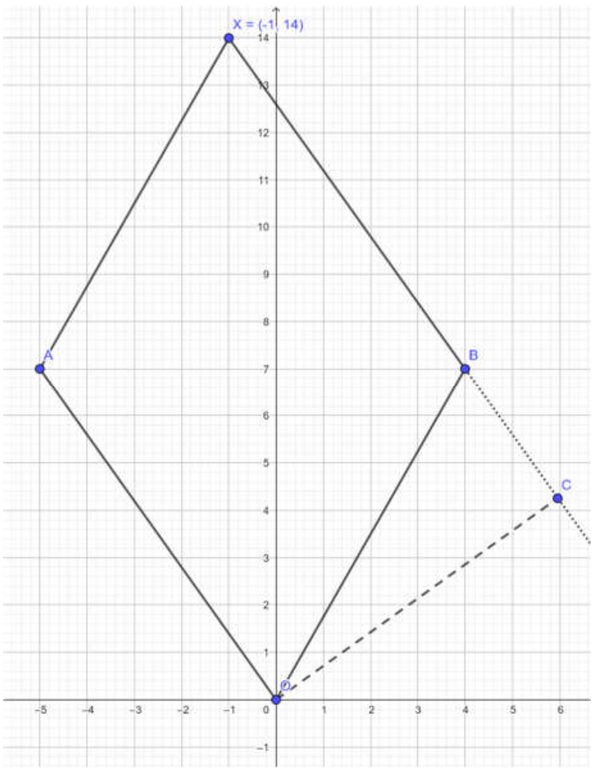
Como se forma un paralelogramo, tiene que ocurrir que los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{BX}$ sean iguales, por tanto, si llamamos al punto X(x,y) tenemos:

$$\overrightarrow{OA}=A-O=(-5,7) \qquad \overrightarrow{BX}=x-B=(x,y)-(4,7)=(x-4,y-7)$$

Y como son iguales:

$$(-5,7)=(x-4,y-7) \quad \rightarrow \quad \begin{cases}-5=x-4\\ 7=y-7\end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}x=-1\\ y=14\end{cases} \quad \rightarrow \quad X(-1,14)$$

Para calcular la superficie del paralelogramo, nos ayudaremos con un dibujo:



Sabemos que el área de un paralelogramo viene dada por el producto de su base por su altura, y, si nos fijamos, la base es el segmento OA y la altura el segmento OC.

Así que calculamos los módulos de los vectores:

$$\overrightarrow{OA}=(-5,7) \quad \rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{OA}\right\|=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}$$

$$\overrightarrow{OC}=\left(\frac{441}{74},\frac{315}{74}\right) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{OC}\right\|=\sqrt{\frac{293706}{5476}}=\frac{63}{74}\sqrt{74}$$

Y su área será:

$$A=base \ x \ altura=\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{OC}\right\|=\sqrt{74}\cdot\frac{63}{74}\cdot\sqrt{74}=63 \ km^2$$

Por tanto, el área del paralelogramo es de 6.300 Ha