Nombre:		3ª Evaluación	Nota
Curso:		Examen XII	
Fecha:		Trigonometría	

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización del 25% de la nota

1.– Dado un ángulo α del cuarto cuadrante cuya $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (2 + 0,5 puntos)

a) Calcula el valor exacto de las restantes razones trigonométricas del ángulo α (las 5) (1,5 puntos)

Sabemos que la tangente de un ángulo viene dada por el cociente entre su seno y su coseno:

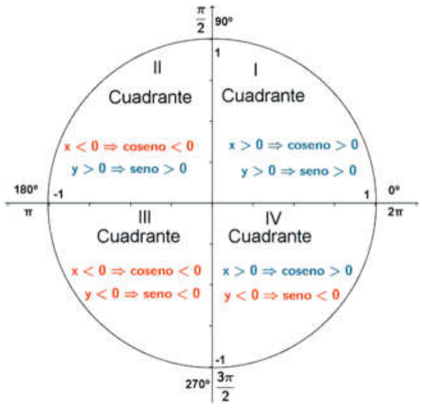
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \quad\to\quad \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad\to\quad \operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\cos\alpha$$

Con esta relación entre ambas, y sustituyendo en la identidad fundamental de la trigonometría:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad\to\quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \quad\to\quad \frac{1}{3}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad\to\quad \frac{4}{3}\cos^2\alpha = 1$$

Llegamos a:

$$\frac{4}{3}\cos^2\alpha = 1 \quad\xrightarrow{\text{De donde}}\quad \cos^2\alpha = \frac{3}{4} \quad\to\quad \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Como estamos en el cuarto cuadrante, usando el criterio de signos de las razones trigonométricas, sabemos que el coseno es positivo, por tanto:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Y ahora calculamos el seno:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad\to\quad \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad\leftarrow\quad \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

Otra vez con el criterio de signos, el seno valdrá: $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2}$

Conocidas las razones trigonométricas principales, podemos calcular las inversas:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

Por tanto, las razones pedidas del ángulo α son:

$\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2}$	$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{cosec}\alpha = -2$	$\sec\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cot\alpha = -\sqrt{3}$

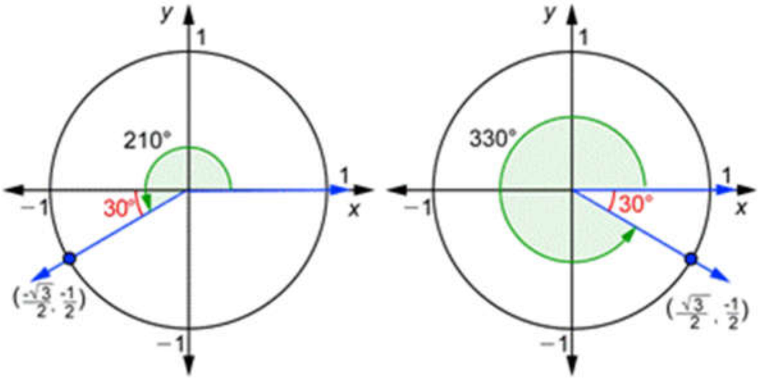
b) Da el valor de un ángulo de otro cuadrante que tenga exactamente el mismo seno que α. (0,5 puntos)

Sabemos que en el cuarto cuadrante el seno es negativo, $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{1}{2}$, así que, en el otro cuadrante donde tiene exactamente el mismo valor es en el tercero, donde también es negativo.

Así que el ángulo buscado estará en el tercer cuadrante.

El ángulo original del 4° cuadrante es de 330° porque el ángulo de seno –½ se corresponde con el ángulo de –30° que en realidad es el de 330°.

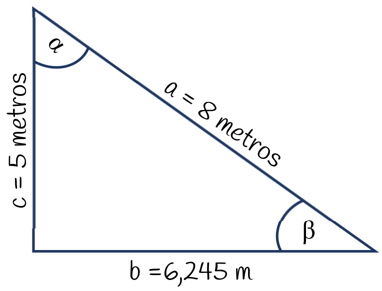
En el tercer cuadrante el ángulo será de 180 + 30 =210°



Por tanto, el ángulo de otro cuadrante con el mismo seno es el ángulo de 210° o de 7π/6.

El ángulo pedido es: $\beta = \dfrac{7}{6}\pi$

2.– De un triángulo rectángulo se sabe que la hipotenusa mide 8 m y que uno de sus catetos mide 5 m. Calcula todos sus ángulos y lados, además de su área. (2 + 0,5 puntos)



Como es un triángulo rectángulo y conocemos dos de sus lados, por el Teorema de Pitágoras, calculamos el cateto restante:

$$a^2 = b^2 + c^2 \;\rightarrow\; b^2 = a^2 - c^2 \;\rightarrow\; b = \sqrt{a^2 - c^2} \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; b = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{64 - 25} = \sqrt{39} \;\rightarrow\; b = \sqrt{39}$$

Y conocidos los 3 lados, vamos a calcular ahora los ángulos α y β:

Para calcular el ángulo α, usaremos el coseno: $\rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\text{Cateto Contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{5}{8} \rightarrow \cos\alpha = \dfrac{5}{8}$

Y conocido el coseno, calculamos el ángulo α mediante la función Arco:

$$\text{Si } \cos\alpha = \frac{5}{8} \;\rightarrow\; \alpha = \text{Arccos}\left(\frac{5}{8}\right) = 51^\circ\ 19'\ 4{,}13'' \;\rightarrow\; \alpha = 51^\circ\ 19'\ 4{,}13''$$

Como es rectángulo el ángulo A es recto, y el ángulo β será 90 – α.

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 51^\circ\ 19'\ 4{,}13'' = 38^\circ\ 40'\ 55{,}87'' \;\rightarrow\; \beta = 38^\circ\ 40'\ 55{,}87''$$

Y el área, la calculamos haciendo el semiproducto de la base por la altura:

$$A = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{5 \cdot \sqrt{39}}{2} \;\rightarrow\; A = 15{,}61\ m^2$$

Por tanto, a=8 m; b=6,245 m y c=5 m; α=51° 19' 4,13"; β=38° 40' 55,87" y A=90°

3.– Demuestra paso a paso y razonando las siguientes identidades trigonométricas: (1 + 1,5 puntos)

a) $\cos^4 x - \text{sen}^4 x = 2\cdot\cos^2 x - 1$ b) $\dfrac{\text{sen}x\cdot\cos x}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x} = \dfrac{\tan x}{1-\tan^2 x}$

$$\text{a) } \cos^4 x - \text{sen}^4 x = 2\cdot\cos^2 x - 1 \xrightarrow{\text{Desarrollamos la Id. Notable}} \left(\cos^2 x - \text{sen}^2 x\right)\cdot\underbrace{\left(\cos^2 x + \text{sen}^2 x\right)}_{\substack{\text{Id. fund. de la Trigonometría} \\ \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1}} = \left(\cos^2 x - \text{sen}^2 x\right)\cdot(1) =$$

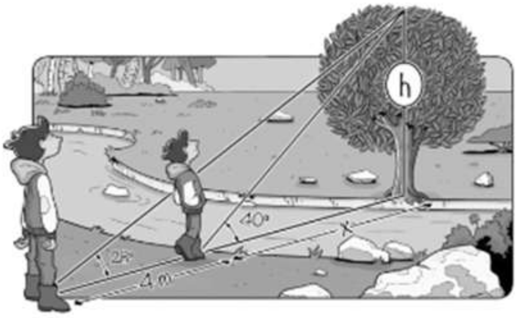
$$= \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos^2 x - \left(1-\cos^2 x\right) = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2\cos^2 x - 1 \rightarrow \text{C.q.d.}$$

$$\text{b) } \frac{\text{sen}x\cdot\cos x}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x} = \frac{\tan x}{1-\tan^2 x} \rightarrow \frac{\text{sen}x\cdot\cos x}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x} \underset{\substack{\text{Sacamos factor} \\ \text{común } \cos^2 x}}{=} \frac{\text{sen}x\cdot\cos x}{\cos^2 x\left(1-\dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)} \underset{\substack{\text{Subimos el} \\ \cos^2 x}}{=}$$

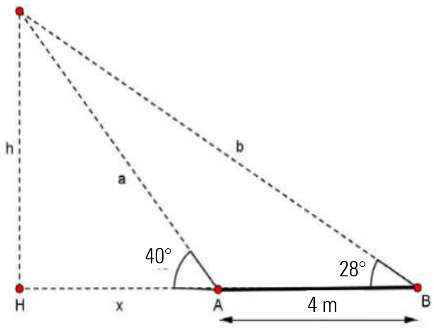
$$= \frac{\dfrac{\text{sen}x\cdot\cos x}{\cos^2 x}}{\left(1-\dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)} \underset{\text{Simplificamos}}{=} \frac{\dfrac{\text{sen}x\cdot\cancel{\cos x}}{\cos^{\cancel{2}} x}}{1-\dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}} \underset{\substack{\text{Cambiamos} \\ \frac{\text{sen}}{\cos}=\tan}}{=} \frac{\dfrac{\text{sen}x}{\cos x}}{1-\tan^2 x} = \frac{\tan x}{1-\tan^2 x} \rightarrow \text{C.q.d.}$$

4.– Resuelve paso a paso y de forma razonada uno de los dos siguientes problemas: (2 + 0,5 puntos)

a) Desde la orilla de un río vemos un gran árbol en la otra orilla bajo un ángulo de 40°, y si se retroceden 4 m, se ve bajo un ángulo de 28°. Calcula, primero la altura del árbol y después la anchura del río.



Si nos ayudamos de un croquis obtenemos el dibujo de la izquierda, donde hemos llamado h a la altura del árbol y x a la anchura del rio.



La razón trigonométrica que relaciona los catetos opuestos y los catetos contiguos es la tangente, así que:

En el triángulo pequeño: $\tan 40° = \dfrac{h}{x}$

Mientras que en el triángulo grande: $\tan 28° = \dfrac{h}{x+4}$

Con ambas ecuaciones, formamos un sistema de ecuaciones lineales: $\left\{\begin{array}{l} \tan 40° = \dfrac{h}{x} \\ \tan 28° = \dfrac{h}{x+4} \end{array}\right.$

Como nos piden calcular primero h, vamos a despejar x en la primera ecuación:

$$\text{De } \tan 40° = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{\tan 40°}$$

Para después sustituirla en la segunda:

$$\text{En } \tan 28° = \frac{h}{x+4} \rightarrow \tan 28° = \frac{h}{\frac{h}{\tan 40°}+4} \xrightarrow{\text{Operando un poco}} \tan 28° = \frac{h}{\frac{h}{\tan 40°}+\frac{4\cdot\tan 40°}{\tan 40°}} \rightarrow$$

$$\tan 28° = \frac{h}{\frac{h+4\tan 40°}{\tan 40°}} \rightarrow \tan 28° = \frac{h\cdot\tan 40°}{h+4\tan 40°} \xrightarrow{\text{Operando}} (h+4\tan 40°)\tan 28° = h\cdot\tan 40° \rightarrow$$

$$\rightarrow h\cdot\tan 28° + 4\cdot\tan 40°\cdot\tan 28° = h\cdot\tan 40° \xrightarrow{\text{Agrupando}} h\cdot\tan 40° - h\cdot\tan 28° = 4\cdot\tan 40°\cdot\tan 28° \rightarrow$$

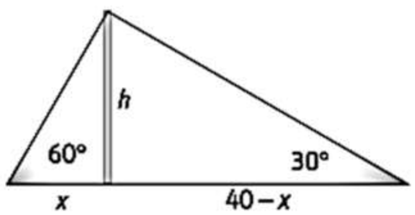
$$\xrightarrow{\text{Sacamos factor común h}} h\cdot(\tan 40° - \tan 28°) = 4\cdot\tan 40°\cdot\tan 28° \xrightarrow{\text{Despejamos h}} h = \frac{4\cdot\tan 40°\cdot\tan 28°}{\tan 40° - \tan 28°} = 5{,}806\ m$$

$$\rightarrow h = 5{,}806\ m \quad \rightarrow \quad \text{El árbol mide 5,81 metros}$$

Y para calcular la anchura del río x, la calcularemos de: $\tan 40° = \frac{h}{x}$, por tanto:

$$\tan 40° = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{\tan 40°} = \frac{5{,}8057}{\tan 40°} \rightarrow x = 6{,}919\ m \rightarrow \text{La anchura del río es de 6,92 metros}$$

b) Para que una antena permanezca vertical se le han colocado dos anclajes en el suelo a ambos lados y alineados con su base. La distancia entre los anclajes es de 40 m y si se observa la parte más alta de la antena desde cada uno de ellos, los ángulos de elevación son de 30° y 60°, respectivamente. Halla primero la altura de la antena y después las distancias que la separan de los anclajes.



Si nos ayudamos de un croquis obtenemos el dibujo de la izquierda.

Donde hemos llamado h a la altura de la antena, x a la distancia de un anclaje a la antena y 40–x al otro.

Como la razón trigonométrica que relaciona los catetos opuestos y los catetos contiguos es la tangente, tenemos que:

En el triángulo de la izquierda: $\tan 60° = \frac{h}{x}$ y en el triángulo de la derecha: $\tan 30° = \frac{h}{40-x}$

Con ambas ecuaciones, formamos un sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} \tan 60° = \frac{h}{x} \\ \tan 30° = \frac{h}{40-x} \end{cases}$

Como nos piden calcular primero h, vamos a despejar x en la primera ecuación:

$$\text{De } \tan 60° = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{\tan 60°}$$

Para después sustituirla en la segunda:

$$\text{En } \tan 30° = \frac{h}{40-x} \rightarrow \tan 30° = \frac{h}{40-\frac{h}{\tan 60°}} \xrightarrow{\text{Operando un poco}} \tan 30° = \frac{h}{\frac{40\cdot\tan 60°}{\tan 60°}-\frac{h}{\tan 60°}} \rightarrow$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{\frac{40\cdot\tan 60^\circ - h}{\tan 60^\circ}} \rightarrow \tan 30^\circ = \frac{h\cdot\tan 60^\circ}{40\cdot\tan 60^\circ - h} \xrightarrow{\text{Operando}} (40\tan 60^\circ - h)\tan 30^\circ = h\cdot\tan 60^\circ \rightarrow$$

$$\rightarrow 40\cdot\tan 60^\circ\cdot\tan 30^\circ - h\cdot\tan 30^\circ = h\cdot\tan 60^\circ \xrightarrow{\text{Agrupando}} h\cdot\tan 60^\circ + h\cdot\tan 30^\circ = 40\cdot\tan 60^\circ\cdot\tan 30^\circ \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{Sacamos factor}\\ \text{común h}}} h\cdot(\tan 60^\circ + \tan 30^\circ) = 40\cdot\tan 60^\circ\cdot\tan 30^\circ \xrightarrow{\substack{\text{Despejamos}\\ h}} h = \frac{40\cdot\tan 60^\circ\cdot\tan 30^\circ}{\tan 60^\circ + \tan 30^\circ} = 10\sqrt{3}\ m$$

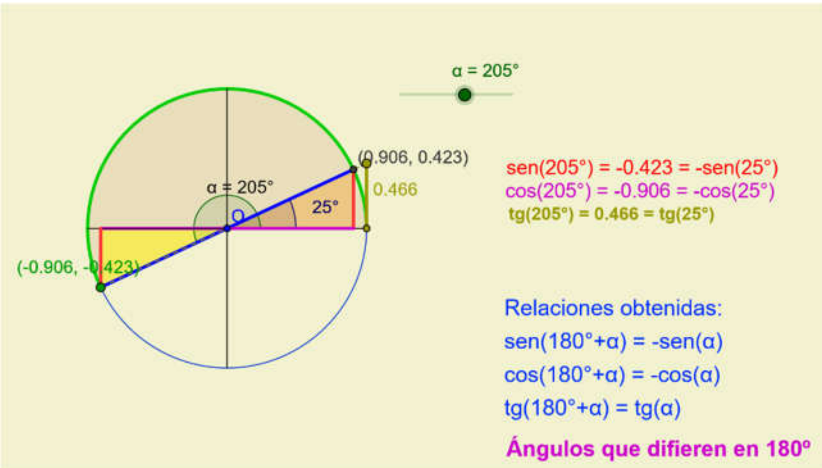
$$\rightarrow h = 17{,}32\ m \rightarrow \text{La antena mide 17,32 metros}$$

Y para calcular las longitudes de la antena a los anclajes, lo haremos con: $\tan 60^\circ = \frac{h}{x}$, por tanto:

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{\tan 60^\circ} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10 \rightarrow x = 10\ m$$

Por tanto, la distancia a uno de los anclajes es 10 metros y la otra 30.

B.- Si sabemos que **sen 25° = 0,4226**; ¿cuáles son las razones trigonométricas de un ángulo cuya amplitud es 205°?



Como podemos observar en la figura, los valores del ángulo de 25 y de 205 coinciden en valor absoluto, y solo tenemos que ajustar los signos con la ayuda de un dibujo:

$$sen(205^\circ) = -sen(25^\circ) = -0{,}4226$$

$$\cos(205^\circ) = -\cos(25^\circ) = -0{,}9063$$

$$\tan(205^\circ) = \tan(25^\circ) = 0{,}4663$$