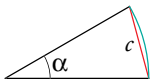
7 Trigonometría

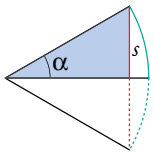
Hace más de 3 000 años, babilonios y egipcios utilizaron la semejanza y rudimentos de trigonometría para medir campos, realizar construcciones, e incluso para la astronomía y la navegación... Estos conocimientos pasaron a Grecia, donde cabe destacar a dos grandes astrónomos (pues trigonometría y astronomía van de la mano):

Hiparco de Nicea (180-125 a.C.), considerado el "padre de la astronomía", consolidó el sistema sexagesimal para la medida de ángulos. Teniendo en cuenta que la esencia de la trigonometría es sustituir medidas angulares por medidas lineales, elaboró unas tablas en las que asociaba la medida de cada ángulo con la longitud de la cuerda correspondiente.



Ptolomeo de Alejandría (85-165) amplió y mejoró la obra de Hiparco y escribió un enorme tratado de astronomía de trece libros, al que se acabó llamando el *Almagesto, (el más grande)*.

Los indios, durante los siglos IV y V, desarrollaron una trigonometría con un enfoque distinto al de los griegos: asociaron a cada ángulo la longitud de la semicuerda del ángulo doble (lo que posteriormente se llamaría *seno* del ángulo), consiguiendo así trabajar con triángulos rectángulos, más fáciles de manejar.



Los árabes (siglos IX-X) se inspiraron en el *Almagesto* de Ptolomeo pero utilizaron las tablas de los senos de los indios, las ampliaron con otras medidas y las mejoraron. Su trigonometría, bien fundamentada y muy práctica, se extendió por Europa a partir del siglo XII.

DEBERÁS RECORDAR

- Cuándo son semejantes dos triángulos rectángulos.
- Cómo utilizar las sombras para medir ciertas longitudes inaccesibles.

© GRUPO ANAYA, S.A., Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

1 Razones trigonométricas de un ángulo agudo

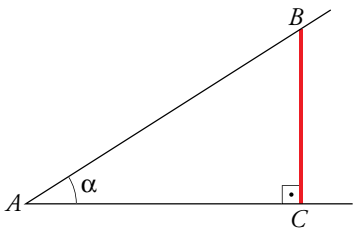
Recuerda

Razón. Se llama razón entre dos números a su cociente.

Vamos a estudiar todas las posibles razones entre dos de los lados de un triángulo rectángulo.

Definiciones

Sobre un ángulo agudo, α, construimos un triángulo rectángulo, ABC. Damos las siguientes definiciones con sus correspondientes abreviaturas:



seno de α = $\dfrac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$ $\quad sen\ \alpha = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

coseno de α = $\dfrac{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$ $\quad cos\ \alpha = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

tangente de α = $\dfrac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}$ $\quad tg\ \alpha = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

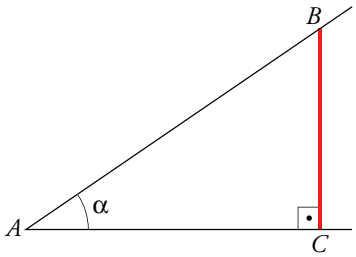
Estas relaciones se llaman **razones trigonométricas** del ángulo α.

Para designar ángulos, se suelen utilizar letras griegas como:

α	alfa
β	beta
γ	gamma
ϕ	fi

Cálculo gráfico (aproximado) de las razones trigonométricas de un ángulo

La propia definición nos proporciona un método para calcular las razones trigonométricas de un ángulo agudo:



Se dibuja el ángulo. Desde un punto, B, de uno de los lados se traza una perpendicular al otro lado. De este modo se forma un triángulo rectángulo ABC. Se miden los lados:

$$\overline{AC} = 41 \text{ mm}, \quad \overline{BC} = 28 \text{ mm}, \quad \overline{AB} = 50 \text{ mm}$$

Ahora, con estos datos, calculamos las razones trigonométricas:

$$sen\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{28}{50} = 0{,}56 \qquad cos\ \alpha = \frac{41}{50} = 0{,}82 \qquad tg\ \alpha = \frac{28}{41} = 0{,}68$$

Podríamos medir el ángulo con el transportador. Obtendríamos $\alpha = 34°$. Por tanto:

$$sen\ 34° = 0{,}56 \qquad cos\ 34° = 0{,}82 \qquad tg\ 34° = 0{,}68$$

Las medidas efectuadas son aproximadas. Por tanto, las relaciones finales también lo son.

No lo olvides

Las razones trigonométricas dependen del ángulo pero no del triángulo.

Actividades

1 Dibuja sobre un ángulo como el anterior, 34°, un triánguo rectángulo mucho más grande. Halla sus razones trigonométricas y observa que obtienes, aproximadamente, los mismos valores.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.° B ESO. Material fotocopiable autorizado.

2 Relaciones trigonométricas fundamentales

Notación

En lugar de $(sen\ \alpha)^2$ se suele poner $sen^2\ \alpha$. Del mismo modo:

$(cos\ \alpha)^2 = cos^2\ \alpha$ y $(tg\ \alpha)^2 = tg^2\ \alpha$

A pesar de la costumbre, y para evitar confusiones, utilizaremos durante este curso la expresión con paréntesis.

Los valores de *sen*, *cos* y *tg* de un mismo ángulo no son independientes, sino que están relacionados, de tal modo que *conociendo uno de ellos, podemos calcular los otros dos*. Las relaciones que los ligan son las siguientes (se las suele llamar **relaciones fundamentales**):

$$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \quad [I] \qquad \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha \quad [II]$$

Estas igualdades son fáciles de demostrar:

[I] $(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2 = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = 1$

pues por el teorema de Pitágoras se cumple que $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$.

[II] $\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} : \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = tg\ \alpha$

En los siguientes ejercicios resueltos vemos cómo, conocida una razón trigonométrica de un ángulo, se pueden calcular las otras dos.

Ejercicios resueltos

1. Sabiendo que *cos* α = 0,63, calcular *s* = *sen* α y *t* = *tg* α.

Mediante la igualdad I, conocido *sen* α obtenemos *cos* α, y viceversa.

$s^2 + 0{,}63^2 = 1 \rightarrow s^2 = 1 - 0{,}63^2 = 0{,}6031 \rightarrow s = \sqrt{0{,}6031} = 0{,}777$

(Solo tomamos la raíz positiva, porque *sen* α ha de ser positivo).

$t = \frac{0{,}777}{0{,}63} = 1{,}23$ *Solución:* $sen\ \alpha = 0{,}777$ $tg\ \alpha = 1{,}23$

2. Sabiendo que *tg* α = 2, calcular *s* = *sen* α y *c* = *cos* α.

Mediante las igualdades I y II, conocida *tg* α se obtienen, resolviendo un sistema de ecuaciones, los valores de *sen* α y *cos* α:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{s}{c} = 2 \\ s^2 + c^2 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} s = 2c \\ (2c)^2 + c^2 = 1 \rightarrow 4c^2 + c^2 = 1 \rightarrow 5c^2 = 1 \end{array}$$

$c^2 = \frac{1}{5} \xrightarrow[\text{la raíz positiva}]{\text{solo tomamos}} c = \frac{1}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{racionalizando}} c = \frac{\sqrt{5}}{5};\ s = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Solución: $sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0{,}894$ $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0{,}447$

Actividades

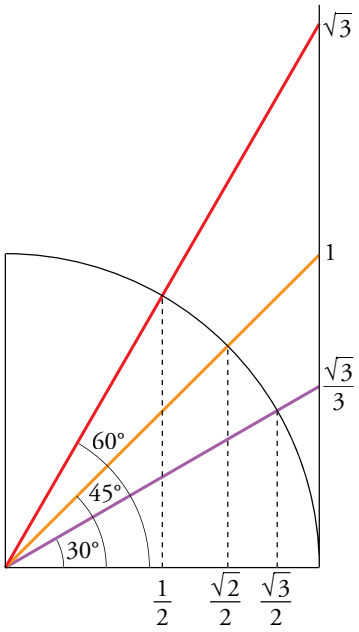
1 *sen* 37° = 0,6. Calcula *cos* 37° y *tg* 37°.

2 *tg* 28° = 0,53. Calcula *sen* 28° y *cos* 28°.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.° B ESO. Material fotocopiable autorizado.

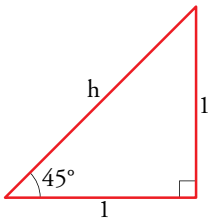
Razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°

Los triángulos rectángulos cuyos ángulos agudos son 45°, 30° o 60° aparecen con mucha frecuencia, por lo que resultan especialmente interesantes en geometría. Vamos a hallar las razones trigonométricas de estos ángulos.



	sen	cos	tg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Razones trigonométricas de 45°

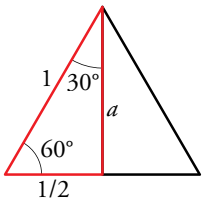


La hipotenusa de este triángulo rectángulo isósceles mide:

$h = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Por tanto:

$$sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad tg\ 45° = 1$$

Razones trigonométricas de 30° y de 60°



Calculamos la altura de este triángulo equilátero:

$$a = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto:

$$sen\ 30° = \frac{1}{2} \qquad cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad tg\ 30° = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 60° = \frac{1}{2} \qquad tg\ 60° = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

Actividades

3 Teniendo en cuenta que $tg\ 45° = 1$, deduce el valor de $sen\ 45°$ y de $cos\ 45°$ mediante las relaciones fundamentales.

4 Teniendo en cuenta que $sen\ 30° = 1/2$, halla el valor de $cos\ 30°$ y de $tg\ 30°$ mediante las relaciones fundamentales.

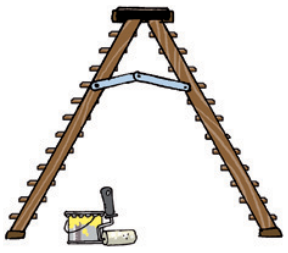
5 Completa en tu cuaderno la siguiente tabla:

sen α	0,94		4/5			
cos α		0,82			√3/2	
tg α				3,5		1

En las operaciones donde aparezcan radicales, trabaja con ellos; no utilices su expresión decimal.

6 Un carpintero quiere construir una escalera de tijera, cuyos brazos, una vez abiertos, formen un ángulo de 60°.

Para que la altura de la escalera, estando abierta, sea de 2 metros, ¿qué longitud deberá tener cada brazo?



7 Calcula el seno y la tangente de un ángulo cuyo coseno vale 0,8.

8 Calcula el seno y el coseno de un ángulo cuya tangente vale 0,7.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

3 Utilización de la calculadora en trigonometría

Teclas trigonométricas

Para el cálculo y el manejo de las razones trigonométricas, hasta ahora solo hemos utilizado las operaciones aritméticas de la calculadora: [+] [−] [×] [÷] y [√].

En este apartado vamos a aprender a manejar las teclas específicamente trigonométricas.

Las calculadoras científicas nos dan directamente el valor del seno, del coseno o de la tangente de cualquier ángulo. También nos dicen cuál es el ángulo del que conocemos el valor de una de sus razones trigonométricas.

Veamos, paso a paso, cómo se recurre a la calculadora para trabajar en trigonometría.

Selección del modo DEG (grados sexagesimales)

Las calculadoras manejan tres unidades de medida de ángulos:

- Grados sexagesimales (DEG). Son los que utilizamos normalmente.
- Grados centesimales (GRA). Un ángulo recto tiene 100 grados centesimales. Nunca usaremos esta unidad de medida.
- Radianes (RAD). Esta unidad de medida de ángulos está relacionada con el estudio funcional de las razones trigonométricas (funciones trigonométricas). A partir del curso próximo se usará con frecuencia.

En este curso utilizaremos, exclusivamente, los grados sexagesimales. Por tanto, selecciona en la calculadora el modo DEG, a partir de la tecla [MODE] o [SETUP], según el modelo de calculadora.

Anotar un ángulo. Tecla [° ′ ″]

Para escribir el ángulo 38° 25' 36'', se procede así:

38 [° ′ ″] 25 [° ′ ″] 36 [° ′ ″] 38.42666667 [SHIFT] [° ′ ″] 38°25°36

Se anota el ángulo en forma decimal — Se expresa el ángulo en forma sexagesimal

En las CALCULADORAS DE PANTALLA DESCRIPTIVA se procede del mismo modo:

38 [° ′ ″] 25 [° ′ ″] 36 [° ′ ″] [=] → 38°25°36° / 38°25'36"

Cálculo de una razón trigonométrica. Teclas [sin] [cos] [tan]

Para calcular *sen* (47° 25'), se procede así:

[sin] 47 [° ′ ″] 25 [° ′ ″] 47.41666667 [=] 0.736293951 21

Es decir, *sen* 47° 25' = 0,736

Análogamente, se procede con coseno, [cos], y tangente, [tan].

Funciones inversas: $\sin^{-1}$ ([SHIFT] [sin]), $\cos^{-1}$ ([SHIFT] [cos]), $\tan^{-1}$ ([SHIFT] [tan])

¿Cuál es el ángulo cuyo seno vale 0,5? Sabemos que es 30°. La forma de preguntárselo a la calculadora es esta:

[SHIFT] [sin] 0,5 [=] 30

Análogamente:

cos α = 0,56 → ¿α? → [SHIFT] [cos] 0,56 [=] [SHIFT] [° ′ ″] 55°56°39.13

tg α = 3 → ¿α? → [SHIFT] [tan] 3 [=] [SHIFT] [° ′ ″] 71°33°54.18

Entrénate

Obtén las siguientes razones trigonométricas y escribe en tu cuaderno los resultados redondeando a las milésimas.

a) *sen* 86° b) *cos* 59°

c) *tg* 22° d) *sen* 15° 25' 43''

e) *cos* 59° 27' f) *tg* 86° 52'

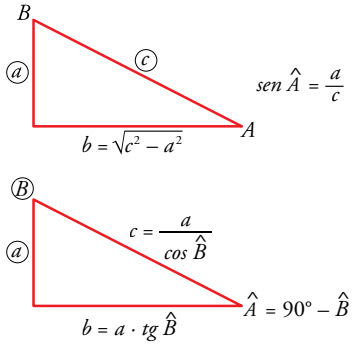
g) *sen* 10° 30'' (atención, 10° 0' 30'')

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

4 Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo es hallar uno o más elementos desconocidos (lados o ángulos) a partir de algunos elementos conocidos.

Las razones trigonométricas nos permiten resolver cualquier tipo de triángulo rectángulo.



Conocidos dos lados

- El tercer lado se obtiene mediante el teorema de Pitágoras.
- Cada uno de los ángulos agudos se halla a partir de la razón trigonométrica que lo relaciona con los dos lados conocidos.

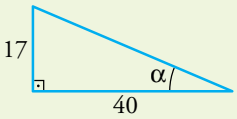
Conocidos un lado y un ángulo

- Otro lado se halla mediante la razón trigonométrica que lo relaciona con el lado y el ángulo conocidos.
- El otro ángulo agudo es complementario del que conocemos.

Ejercicios resueltos

1. Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 17 cm y 40 cm. Hallar los ángulos del triángulo.

1.



El ángulo α se relaciona con los dos catetos mediante su tangente: $tg\ \alpha = \frac{17}{40} = 0{,}425$

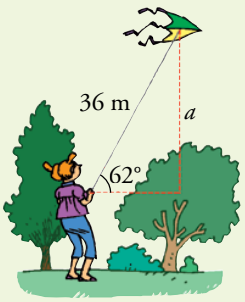
Hallamos con la calculadora el ángulo cuya tangente es 0,425:

SHIFT tan 0,425 = SHIFT °'" 23°1°31.77. Es decir, $\alpha = 23° 1' 32''$.

El otro ángulo es su complementario: $90° - 23° 1' 32'' = 66° 58' 28''$

2. Iris está haciendo volar su cometa. Ha soltado 36 m de hilo y mide el ángulo que forma la cuerda con la horizontal: 62°. ¿A qué altura se encuentra la cometa sabiendo que la mano de Iris que sostiene la cuerda está a 83 cm del suelo?

2.



a es la altura de la cometa por encima de la mano de Iris.

a es el cateto opuesto al ángulo de 62°. El seno es la razón trigonométrica que la relaciona con la hipotenusa:

$$sen\ 62° = \frac{a}{36} \rightarrow a = 36 \cdot sen\ 62° = 31{,}79 \text{ m}$$

La cometa está a una altura de 31,79 + 0,83 = 32,62 m.

Actividades

1 En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide 27° y la hipotenusa 46 m. Halla los dos catetos.

2 ¿Cuánto mide la apotema de un pentágono regular de lado $l = 10$ cm?

3 Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 48 cm y 71 cm. Calcula, en grados y minutos, los dos ángulos agudos.

4 En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide 37°, y el cateto opuesto, 87 m. Halla el otro cateto y la hipotenusa.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.° B ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

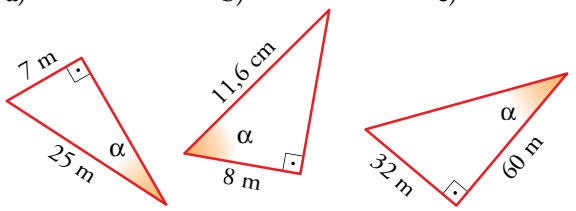
Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

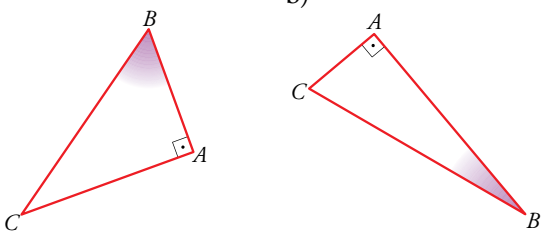
1 ▼▽▽ Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de estos triángulos:

a) b) c)



2 ▼▽▽ Midiendo los lados, halla las razones trigonométricas de $\hat{B}$ en cada caso:

a) b)



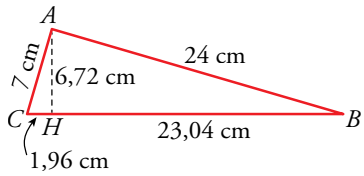
3 ▼▽▽ Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{A} = 90°$):

a) $b = 56$ cm; $a = 62{,}3$ cm

b) $b = 33{,}6$ cm; $c = 4{,}5$ cm

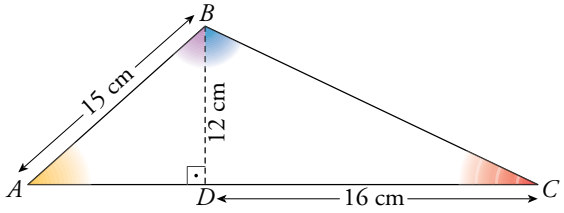
c) $c = 16$ cm; $a = 36$ cm

4 ▼▽▽ Comprueba, con el teorema de Pitágoras, que los triángulos ABC y AHB son rectángulos.



Halla en cada uno las razones trigonométricas de $\hat{B}$ y compara los resultados. ¿Qué observas?

5 ▼▼▽ Calcula las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$, $\widehat{ABD}$ y $\widehat{CBD}$.



Relaciones fundamentales

6 ▼▽▽ Si $sen\ \alpha = 0{,}28$, calcula $cos\ \alpha$ y $tg\ \alpha$ utilizando las relaciones fundamentales ($\alpha < 90°$).

7 ▼▽▽ Halla el valor exacto (con radicales) de $sen\ \alpha$ y $tg\ \alpha$ sabiendo que $cos\ \alpha = 2/3$ ($\alpha < 90°$).

8 ▼▼▽ Si $tg\ \alpha = \sqrt{5}$, calcula $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$ ($\alpha < 90°$).

9 ▼▼▽ Calcula y completa esta tabla en tu cuaderno, con valores aproximados:

sen α	0,92		
cos α			0,12
tg α		0,75	

10 ▼▼▽ Calcula el valor exacto (utilizando radicales) de las razones trigonométricas que faltan en la tabla siguiente ($\alpha < 90°$). Hazlo en tu cuaderno.

sen α	2/3		
cos α		$\sqrt{2}/3$	
tg α			2

Calculadora

11 ▼▽▽ Completa en tu cuaderno la tabla siguiente, utilizando la calculadora:

α	15°	55° 20'	72° 25' 40''	85,5°
sen α				
cos α				
tg α				

12 ▼▽▽ Halla el ángulo α en cada caso. Exprésalo en grados, minutos y segundos.

a) $sen\ \alpha = 0{,}58$ b) $cos\ \alpha = 0{,}75$ c) $tg\ \alpha = 2{,}5$

d) $sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ e) $cos\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ f) $tg\ \alpha = 3\sqrt{2}$

13 ▼▽▽ Halla, con la calculadora, las otras razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de los casos siguientes:

a) $sen\ \alpha = 0{,}23$ b) $cos\ \alpha = 0{,}74$ c) $tg\ \alpha = 1{,}75$

d) $sen\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e) $tg\ \alpha = \sqrt{3}$ f) $cos\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.° B ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Aplica lo aprendido

14 ▼▽▽ Halla la medida de los lados y los ángulos desconocidos en los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{A} = 90°$):

a) $b = 7$ cm $\quad c = 18$ cm

b) $a = 25$ cm $\quad b = 7$ cm

c) $b = 18$ cm $\quad \hat{B} = 40°$

d) $c = 12{,}7$ cm $\quad \hat{B} = 65°$

e) $a = 35$ cm $\quad \hat{C} = 36°$

15 ▼▽▽ Cuando los rayos del sol forman 40° con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 m. ¿Cuál es su altura?

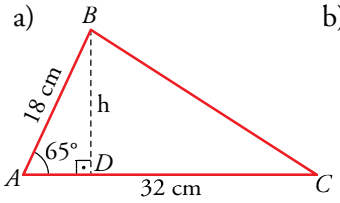
16 ▼▽▽ En un triángulo isósceles, su lado desigual mide 18 m, y su altura, 10 m. Calcula sus ángulos.

17 ▼▼▽ Calcula el perímetro y el área de un triángulo isósceles en el que el ángulo desigual mide 72° y la medida del lado opuesto a ese ángulo es de 16 m.

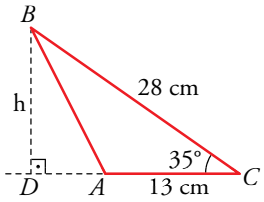
18 ▼▼▽ Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de 50°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?

19 ▼▼▽ Calcula la altura, h, y el área de los siguientes triángulos:

a)

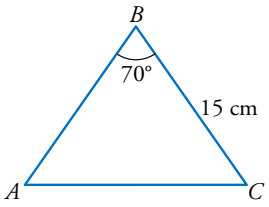


b)

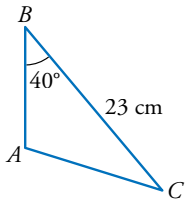


20 ▼▼▽ Calcula la altura sobre el lado AB en los siguientes triángulos:

a)

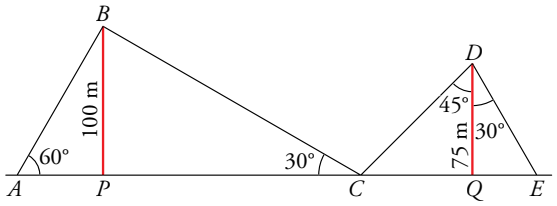


b)



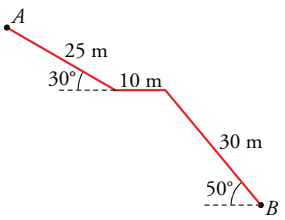
21 ▼▼▽ Para medir la altura de un árbol, nos situamos a 20 m de su base y observamos, desde el suelo, su parte más alta bajo un ángulo de 50°. ¿Cuánto mide el árbol?

22 ▼▼▽ Dos antenas de radio están sujetas al suelo por cables tal como indica la figura.



Calcula la longitud de cada uno de los tramos de cable y la distancia AE.

23 ▼▼▽ Una escalera, por la que se accede a un túnel, tiene la forma y las dimensiones de la figura.



Calcula la profundidad del punto B.

Autoevaluación

¿Dominas las razones trigonométricas de un ángulo agudo y sabes utilizarlas para calcular lados y ángulos? ¿Conoces las relaciones entre ellas?

1 a) Si $cos\ \alpha = 0{,}52$, calcula $sen\ \alpha$ y $tg\ \alpha$.

b) Si $tg\ \beta = \frac{12}{5}$, calcula $sen\ \beta$ y $cos\ \beta$.

La calculadora científica es un instrumento básico en trigonometría. ¿Sabes manejarla con eficacia?

2 Si $sen\ \alpha = 0{,}35$, ¿cuánto mide α? Halla las otras razones trigonométricas de α con ayuda de la calculadora.

¿Sabes resolver triángulos rectángulos a partir de un lado y un ángulo o de dos lados?

3 En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide 50°, y la hipotenusa, 16 cm. Resuelve el triángulo.

4 Una escalera de 3 m está apoyada en una pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a 1,2 m de la pared?

5 En un triángulo isósceles, cada uno de los ángulos iguales mide 70° y su altura es de 12 cm. Halla la medida de los lados del triángulo.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.° B ESO. Material fotocopiable autorizado.

8 Geometría analítica

Con la invención de la Geometría Analítica se pone de manifiesto, una vez más, que las grandes creaciones humanas son fruto de una época, de un momento histórico cuyas circunstancias lo propician. Solo falta el personaje genial que lo lleve a efecto. En este caso fueron dos franceses, Descartes y Fermat, quienes la desarrollaron independiente y casi simultáneamente.

René Descartes (1596-1650), filósofo y matemático, en su obra *El discurso del Método* incluyó una parte final llamada "Geometría" en la que se detalla cómo se aplica el álgebra a la resolución de algunos problemas geométricos con la ayuda de un sistema de coordenadas. *Coordenadas cartesianas* se llamaron, pues en aquella época los textos científicos se escribían en latín y Descartes latinizó su nombre: *Cartesius*.

Pierre de Fermat (1601-1655), abogado, político y matemático por afición, desarrolló un sistema similar al de Descartes: aplicó los métodos algebraicos al tratamiento de figuras geométricas representadas en unos ejes de coordenadas rectangulares. Esto lo describió en 1636, un año antes que Descartes, pero no fue publicado hasta después de su muerte, por lo que su obra no ejerció tanta influencia como la de aquel. Por eso es frecuente atribuir solo a Descartes la invención de la Geometría Analítica, olvidando la contribución de Fermat que, incluso, llegó un poco antes.

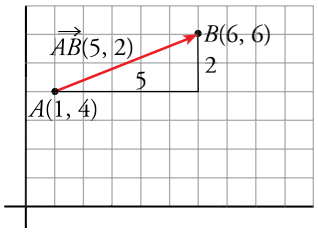
La utilización de los vectores en la geometría (los físicos ya los usaban hacía tiempo) llegó en el siglo XIX por medio de **Gauss, Möbius** y **Bellavilis.**

DEBERÁS RECORDAR

- Algunas propiedades de los paralelogramos.
- Algunas formas de la ecuación de una recta.
- Sistemas de ecuaciones lineales con y sin solución.

© GRUPO ANAYA, S.A., Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

1 Vectores en el plano



En un sistema de ejes cartesianos, cada punto se describe mediante sus coordenadas: $A(1, 4)$, $B(6, 6)$.

La flecha que va de A a B se llama **vector** y se representa por $\overrightarrow{AB}$. Es el vector de **origen** A y **extremo** B.

Al vector $\overrightarrow{AB}$ podríamos describirlo así: desde A avanzamos 5 unidades en el sentido de las X y subimos dos unidades en el sentido de las Y.

Eso se dice más brevemente así: las **coordenadas** de $\overrightarrow{AB}$ son (5, 2).

O, mejor, así ..... $\overrightarrow{AB} = (5, 2)$.

O, simplemente, así .... $\overrightarrow{AB}(5, 2)$.

Las coordenadas de un vector se obtienen restando las coordenadas de su origen a las de su extremo:

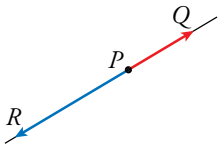
$$B(6, 6),\ A(1, 4) \quad \overrightarrow{AB} = (6, 6) - (1, 4) = (5, 2)$$

Módulo de un vector, $\overrightarrow{AB}$, es la distancia de A a B. Se designa así: $|\overrightarrow{AB}|$. Si las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ son (x, y), entonces $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dirección de un vector es la de la recta en la que se encuentra y la de todas sus paralelas.

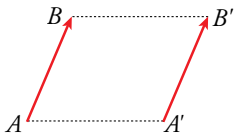
Cada dirección admite dos **sentidos** opuestos.

Por ejemplo, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son vectores de sentidos opuestos.

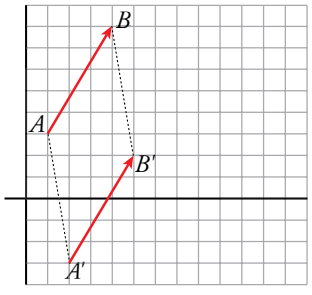


Igualdad de vectores

Dos vectores iguales $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ situados en rectas distintas (y, por tanto, paralelas) determinan un paralelogramo $ABB'A'$.



Dos **vectores** son **iguales** cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. En tal caso, tienen las mismas coordenadas.



Ejercicio resuelto

***A*(1, 3), *B*(4, 8), *A'*(2, –3), *B'*(5, 2). Comprobar que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'B'}$ son iguales.**

Representándolos, observamos que tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Pero también podemos comprobarlo mediante sus coordenadas:

Coordenadas de $\overrightarrow{AB}$: $(4, 8) - (1, 3) = (3, 5)$ $\quad \overrightarrow{AB}(3, 5)$

Coordenadas de $\overrightarrow{A'B'}$: $(5, 2) - (2, -3) = (3, 5)$ $\quad \overrightarrow{A'B'}(3, 5)$

$\Big\}\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$

Actividades

1 Representa los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, siendo $A(1, 1)$, $B(-2, 7)$, $C(6, 0)$, $D(3, 6)$ y observa que son iguales. Comprueba que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ hallando sus coordenadas. Calcula su módulo.

2 Tenemos tres puntos de coordenadas:

$$A(3, -1),\ B(4, 6),\ C(0, 0)$$

Halla las coordenadas del punto D para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean iguales.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

2 Operaciones con vectores

Notación

Los vectores se designan también mediante una letra minúscula con una flechita encima. Para ello, se suelen utilizar las letras $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, y, si se necesitan más, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.

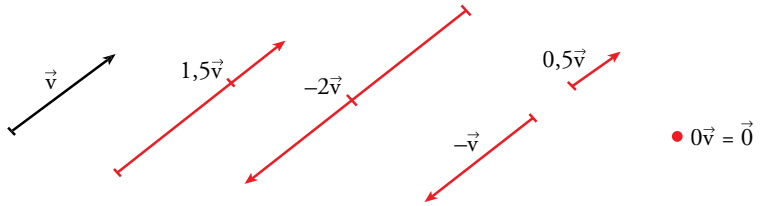
Producto de un vector por un número

El producto de un número k por un vector $\vec{v}$ es otro vector $k\vec{v}$ que tiene:

- Módulo: igual al producto del módulo de $\vec{v}$ por el valor absoluto de k:

$$|k\vec{v}| = |k|\,|\vec{v}|$$

- Dirección: la misma que $\vec{v}$.
- Sentido: el mismo que el de $\vec{v}$ o su opuesto, según k sea positivo o negativo, respectivamente.



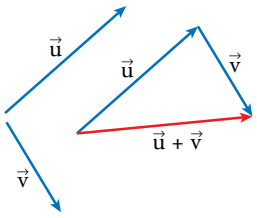
El producto $0\vec{v}$ es igual al **vector cero,** $\vec{0}$. Es un vector cuyo origen y extremo coinciden y, por tanto, su módulo es cero. Carece de dirección.

El vector $-1\vec{v}$ se designa por $-\vec{v}$ y se llama **opuesto** de $\vec{v}$.

Las **coordenadas** del vector $k\vec{v}$ se obtienen multiplicando por k las coordenadas de $\vec{v}$. Las coordenadas de $\vec{0}$ son (0, 0). Las coordenadas de $-\vec{v}$ son las opuestas de las coordenadas de $\vec{v}$.

Suma de vectores

Para **sumar** dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se procede del siguiente modo: se sitúa $\vec{v}$ a continuación de $\vec{u}$, de manera que el origen de $\vec{v}$ coincida con el extremo de $\vec{u}$. La suma $\vec{u} + \vec{v}$ es el vector cuyo origen es el de $\vec{u}$ y extremo el de $\vec{v}$.



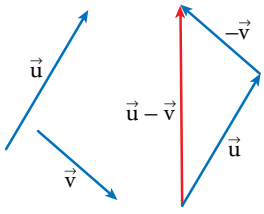
Las **coordenadas** del vector $\vec{u} + \vec{v}$ se obtienen sumando las coordenadas de $\vec{u}$ con las de $\vec{v}$. Por ejemplo:

$$\vec{u}(7, -3)\ ,\ \vec{v}(4, 5) \rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (7 + 4, -3 + 5) = (11, 2)$$

Resta de vectores

Para **restar** dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se le suma a $\vec{u}$ el opuesto de $\vec{v}$:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$



Las **coordenadas** del vector $\vec{u} - \vec{v}$ se obtienen restándole a las coordenadas de $\vec{u}$ las de $\vec{v}$. Por ejemplo:

$$\vec{u}(7, -3),\ \vec{v}(4, 5) \rightarrow \vec{u} - \vec{v} = (7 - 4, -3 - 5) = (3, -8)$$

Entrénate

1 a) Representa los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, siendo $A(1, 3)$, $B(4, 5)$, $C(6, -2)$. Halla sus coordenadas.

b) Representa $\vec{u} + \vec{v}$ y halla sus coordenadas.

c) Representa $3\vec{u}$, $-2\vec{u}$ y $0\vec{v}$ y halla sus coordenadas.

d) Representa y halla las coordenadas del vector $3\vec{u} - 4\vec{v}$.

2 Representa y halla las coordenadas de los vectores:

$\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{p} = \vec{u} - \vec{v}$ y

$\vec{q} = -\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$,

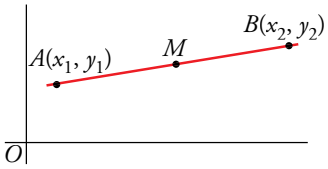
siendo $\vec{u}(3, -1)$ y $\vec{v}(-4, 2)$.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

3 Punto medio de un segmento y puntos alineados

Punto simétrico

Si M es el punto medio de AB, se dice que B es el **simétrico** de A respecto de M.



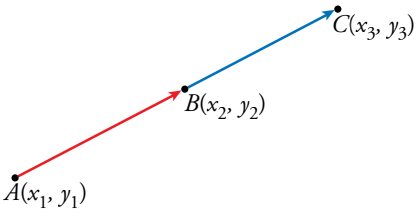
Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces las coordenadas del punto medio del segmento AB son:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Las coordenadas del punto medio de un segmento son la semisuma de las coordenadas de sus extremos.

Por ejemplo, el punto medio del segmento de extremos $A(-2, 1)$ y $B(4, 3)$ es $M = \left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{1 + 3}{2}\right) = (1, 2)$.

Comprobación de que tres puntos están alineados



Los puntos A, B y C están alineados siempre que los vectores

$$\vec{AB} \text{ y } \vec{BC}$$

tengan la misma dirección, y esto ocurre si sus coordenadas son proporcionales.

Notación

El símbolo // puesto entre dos vectores denota que son paralelos; es decir, que tienen la misma dirección.

A, B y C están alineados si $\vec{AB} \,//\, \vec{BC}$; es decir, si las coordenadas del vector $(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$ son proporcionales a las de $(x_3 - x_2,\ y_3 - y_2)$.

Ejercicio resuelto

Comprobar si los puntos $A(2, -1)$, $B(6, 1)$, $C(8, 2)$ están alineados.

$\vec{AB} = (6 - 2, 1 - (-1)) = (4, 2)$
$\vec{BC} = (8 - 6, 2 - 1) = (2, 1)$
} Las coordenadas son proporcionales, pues $2 \cdot (2, 1) = (4, 2)$.

Por tanto, $\vec{AB} \,//\, \vec{BC}$ y los puntos están alineados.

Actividades

1 Halla las coordenadas del punto medio de los siguientes segmentos:

a) $A(-2, 5)$, $B(4, 1)$ b) $P(7, -3)$, $Q(-5, 1)$

c) $R(1, 4)$, $S(7, 2)$ d) $A(-3, 5)$, $B(4, 0)$

2 Si conocemos el punto medio del segmento AB, $M(4, 4)$, y uno de los extremos es $A(7, 2)$, ¿cuáles son las coordenadas de B?

3 Halla las coordenadas del punto simétrico de A respecto de P en los siguientes casos:

a) $A(4, -1)$, $P(-7, 2)$

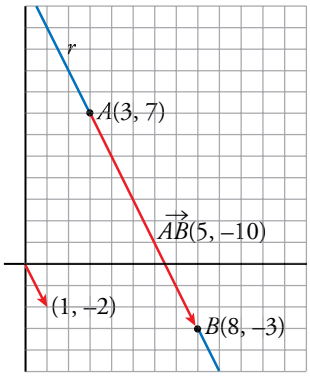
b) $A(2, 4)$, $P(5, -1)$

4 Comprueba si $R(2, 7)$, $S(5, -1)$ y $T(15, -25)$ están alineados.

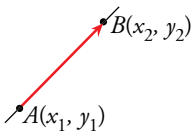
5 Averigua el valor de a para que los puntos $R(2, 7)$, $S(5, -1)$ y $Q(a, -25)$ estén alineados.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

4 Ecuaciones de rectas. Paralelismo y perpendicularidad



Una recta queda determinada por dos puntos. A partir de ellos, como ya sabemos, se obtiene la pendiente, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, y, con ellos, la ecuación de la recta: $y = y_1 + m(x - x_1)$



El vector $\vec{AB}$ que une los dos puntos se llama **vector dirección** de la recta.

Por ejemplo, la recta r que pasa por $A(3, 7)$ y $B(8, -3)$ tiene como vector dirección a $\vec{AB}(5, -10)$ o cualquier otro vector paralelo a él, como el $(1, -2)$. La pendiente de esta recta es: $m = \frac{-3 - 7}{8 - 3} = \frac{-10}{5} = -2$

Su ecuación es: $y = 7 - 2(x - 3)$; es decir, $y = -2x + 13$

Recuerda

La pendiente de una recta dada por su ecuación es el coeficiente de la x cuando la y está despejada.

Vector dirección de una recta es cualquier vector paralelo a ella. Si A y B son puntos de la recta, $\vec{AB}$ es un vector dirección de ella.

Si $\vec{d}(a, b)$ es un vector dirección de r, su pendiente es: $m = \frac{b}{a}$

Ejercicios resueltos

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A(-2, 3)$ y $B(6, 7)$.

1. Un vector dirección es $\vec{AB}(8, 4)$. Otro vector dirección: $\vec{d}(2, 1)$

Pendiente: $m = \frac{1}{2}$. Ecuación: $y = 3 + \frac{1}{2}(x + 2) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 4$

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(5, -3)$ y tiene por vector dirección $\vec{d}(3, 2)$.

2. Su pendiente es: $m = \frac{2}{3}$ Su ecuación es: $y = -3 + \frac{2}{3}(x - 5)$

3. Hallar la ecuación de la recta paralela a r: $2x + 5y - 4 = 0$ que pasa por:

a) $(0, 0)$ b) $(4, -3)$

3. Puesto que la rectas que nos piden son paralelas a r (tienen su misma pendiente), empezamos hallando la pendiente de r. Para ello, despejamos la y y nos fijamos en el coeficiente de la x:

$2x + 5y - 4 = 0 \rightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$ Pendiente: $m = -\frac{2}{5}$

a) Pasa por $(0, 0)$ y su pendiente es $-\frac{2}{5} \rightarrow y = -\frac{2}{5}x$

b) Pasa por $(4, -3)$ y su pendiente es $-\frac{2}{5} \rightarrow y = -3 - \frac{2}{5}(x - 4)$

Actividades

1 Halla la ecuación de la recta que pasa por:

a) $A(1, 3)$, $B(5, 5)$ b) $A(1, 6)$, $B(8, -2)$

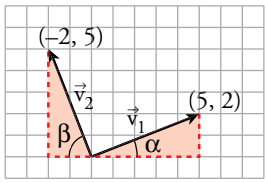
2 Halla la ecuación de la recta que pasa por $(7, -5)$ y tiene por vector dirección $(7, -4)$.

3 Halla la recta paralela a $5x - 6y + 14 = 0$ que pasa por $(0, -3)$.

4 Halla la recta paralela a $5y - 10 = 0$ que pasa por $(2, 4)$.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

Vector perpendicular a otro



Los vectores $\vec{v}_1(5, 2)$ y $\vec{v}_2(-2, 5)$ son perpendiculares. Se justifica observando, en la gráfica del margen, que los dos triángulos sombreados son iguales y, por tanto, $\alpha + \beta = 90°$. En general:

Los vectores de coordenadas (a, b) y $(-b, a)$ son perpendiculares.

Recta perpendicular a otra

Un vector dirección de una recta r_1 es $\vec{d}_1 = (a, b)$.

Si r_2 es perpendicular a r_1, un vector dirección de r_2 es $\vec{d}_2 = (-b, a)$.

Las pendientes de r_1 y r_2 son, respectivamente, $m_1 = \frac{b}{a}$ y $m_2 = \frac{-a}{b}$.

El producto de sus pendientes es -1: $m_1 \cdot m_2 = \frac{b}{a} \cdot \frac{-a}{b} = -1$

Las pendientes, m_1 y m_2, de dos rectas perpendiculares se relacionan así:

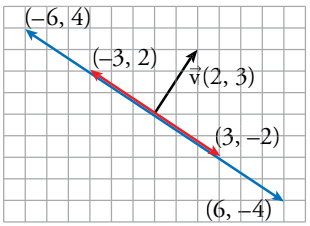
$$m_1 \cdot m_2 = -1 \text{ o, lo que es lo mismo, } m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Ejercicios resueltos

1. Hallar la ecuación de la recta r que pasa por $A(4, 7)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(3, -5)$.

El vector $\vec{d}(5, 3)$ es perpendicular a $\vec{v}$ y, por tanto, es un vector dirección de r. La pendiente de r es $m = \frac{3}{5}$. Su ecuación es:

$$y = 7 + \frac{3}{5}(x - 4) \rightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{23}{5}$$



2. Obtener varios vectores perpendiculares a $\vec{v}(2, 3)$.

$(-3, 2)$ es perpendicular a $\vec{v}$. También lo son $(3, -2)$, $(-6, 4)$, $(6, -4)$...

3. Dar la ecuación de la recta r, perpendicular a s: $5x - 3y + 15 = 0$, que pasa por $(-7, 2)$.

Pendiente de s: $y = \frac{5}{3}x + 5 \rightarrow m_1 = \frac{5}{3}$

Pendiente de r: $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{3}{5}$

Ecuación de r: $y = 2 - \frac{3}{5}(x + 7) \rightarrow y = -\frac{3}{5}x - \frac{11}{5}$

Actividades

5 Da tres vectores perpendiculares a $(-6, 1)$.

6 Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(2, -5)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(5, 7)$.

7 La recta r pasa por $(3, 0)$, y la recta s, por $(-5, 3)$. Ambas son perpendiculares a $4x + 2y - 7 = 0$.

Halla sus ecuaciones.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

5 Rectas paralelas a los ejes coordenados

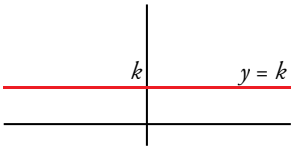
No lo olvides

Vector dirección de la recta $y = k$ es $(a, 0)$.

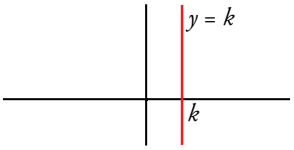
Vector dirección de la recta $x = k$ es $(0, a)$.

Rectas paralelas al eje X

Como sabes, la función constante, $y = k$, se representa mediante una recta paralela al eje X y, por tanto, de pendiente 0. Vectores dirección de estas rectas son $(a, 0)$ para cualquier valor de a distinto de 0.



Rectas paralelas al eje Y



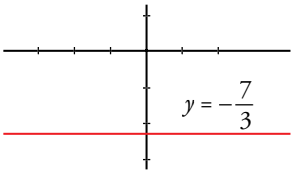
Análogamente, las ecuaciones $x = k$ se representan mediante rectas paralelas al eje Y. (Sin embargo, estas rectas no son la representación de funciones, porque a un valor de x, el k, le corresponden más de uno –¡todos!– los valores de Y).

Vectores dirección de las rectas $x = k$ son $(0, a)$ para $a \neq 0$.

Ejercicios resueltos

1. Dar varios vectores paralelos y varios perpendiculares a la recta de ecuación $3y + 7 = 0$. Representarla.

$3y + 7 = 0 \rightarrow y = -\frac{7}{3}$

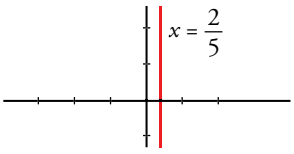


Vectores paralelos: (1, 0), (2, 0), (–1, 0), ...

Vectores perpendiculares: (0, 1), (0, 2), (0, –1), ...

2. Representar la recta $5x - 2 = 0$ y dar varios vectores paralelos y varios perpendiculares a ella.

$5x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{5}$

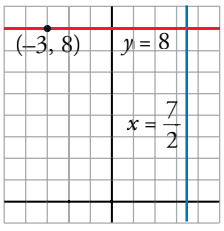


Vectores paralelos: (0, 1), (0, 2), (0, –1), ...

Vectores perpendiculares: (1, 0), (2, 0), (–1, 0), ...

3. Dar la ecuación de la recta r, perpendicular a $2x - 7 = 0$, que pasa por $(-3, 8)$.

$2x - 7 = 0 \rightarrow x = \frac{7}{2}$ es paralela al eje Y.



Por tanto, la recta r es paralela al eje X: $y = k$.

Como r pasa por $(-3, 8)$, su ecuación es $y = 8$.

Actividades

1 Representa r y s y da tres vectores paralelos y tres perpendiculares a ellas:

r: $5x - 7 = 0$ $\quad$ s: $3 + 4y = 0$

2 Las rectas r y s pasan por el punto $(5, -3)$. r es paralela a $5y + 17 = 0$, y s es perpendicular a ella. Representa r y s y da sus ecuaciones.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

6 Posiciones relativas de dos rectas

Gráficamente, dos rectas pueden cortarse o no. Si no se cortan, son paralelas.

Pero si las rectas vienen dadas por sus ecuaciones, es posible que se dé un tercer caso: que sean la misma recta y, al mostrar distinto aspecto algebraico, no se aprecie a simple vista.

Para averiguar la posición relativa de dos rectas dadas por sus ecuaciones, se resuelve el sistema formado por ellas.

Ejercicio resuelto

Estudiar la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) r**:** $5x - 4y + 10 = 0$

s**:** $y = 2x + 1$

b) r **pasa por (2, –1) y (8, 2).**

s **pasa por (2, 5) y su pendiente es –1.**

c) r **pasa por (3, 8) y (8, 3).**

s**:** $x + y = 11$

d) r **pasa por (2, 4) y (4, 7).**

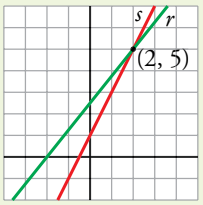
s**:** $y = \frac{3}{2}x - 2$

a) $\begin{cases} 5x - 4y + 10 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \rightarrow 5x - 4(2x + 1) + 10 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 5x - 8x - 4 + 10 = 0 \rightarrow -3x + 6 = 0 \rightarrow x = 2$

$y = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \rightarrow y = 5$

Las rectas se cortan en el punto (2, 5).

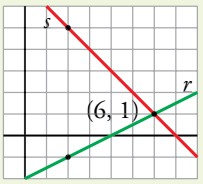


b) Un vector dirección de r es (8, 2) – (2, –1) = (6, 3) // (2, 1). Su pendiente es, por tanto, $m = 1/2$.

r: $y = -1 + \frac{1}{2}(x - 2) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2$

s: $y = -(x - 2) + 5$

$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ y = -x + 7 \end{cases}$ Resolviendo el sistema se obtiene el punto de corte, (6, 1).



c) Un vector dirección de r es (8, 3) – (3, 8) = (5, –5) // (1, –1). Su pendiente es, por tanto, $m = -1$.

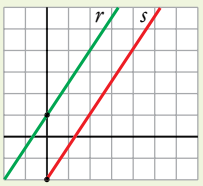
r: $y = 8 - (x - 3) \rightarrow y = -x + 11 \rightarrow x + y = 11$

r y s son la misma recta.

d) Un vector dirección de r es (4, 7) – (2, 4) = (2, 3). Pendiente, $m = 3/2$.

r: $y = 4 + \frac{3}{2}(x - 2) \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 1$

r es paralela a s porque tienen la misma pendiente, 3/2, pero distintas ordenadas en el origen: 1 y –2, respectivamente.



Actividades

1 Di la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) r: $8x + 2y - 14 = 0$, s: $5x - y - 20 = 0$

b) r: $3x - 2y - 14 = 0$

s: pasa por (1, –2) y por (10, 1).

c) r: pasa por (–1, 4) y (7, –2).

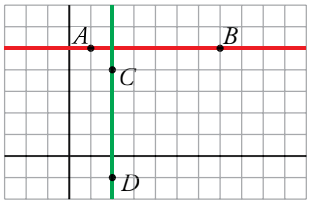
s: $3x + 4y = 0$

d) r: pasa por (2, –1) y (8, 2).

s: su pendiente es $\frac{1}{2}$ y pasa por (0, –2).

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

7 Distancia entre dos puntos

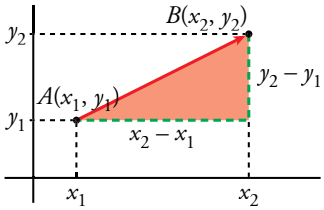


Si dos puntos tienen la misma abscisa o la misma ordenada, hallar su distancia es muy fácil. Por ejemplo, en el gráfico:

$dist(A, B) = 6$; $dist(C, D) = 5$ (basta con contar cuadritos)

O bien, mediante sus coordenadas: $dist[(3, -1), (3, 11)] = 11 - (-1) = 12$

$dist[(4, 7), (1, 7)] = 4 - 1 = 3$



Para dos puntos cualesquiera, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, su distancia se obtiene hallando el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$dist(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esta fórmula también es válida si los puntos tienen la misma abscisa o la misma ordenada.

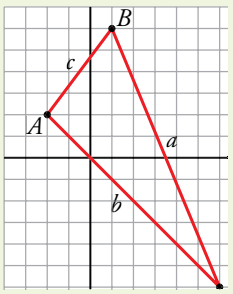
Ejercicios resueltos

1. Calcular los lados del triángulo de vértices $A(-2, 2)$, $B(1, 6)$, $C(6, -6)$.

1. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1 + 2)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(6 - 1)^2 + (-6 - 6)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(6 + 2)^2 + (-6 - 2)^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 11{,}31$



2. a) Hallar las longitudes de los lados del cuadrilatero cuyos vértices son $A(2, 1)$, $B(4, 6)$, $C(-1, 4)$ y $D(-3, -1)$.

b) Probar que es un rombo.

c) Calcular su área.

2. a) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(4 - 2)^2 + (6 - 1)^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1 - 4)^2 + (4 - 6)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-3 + 1)^2 + (-1 - 4)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

b) Comparamos las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$:

$\overrightarrow{AB} = (4, 6) - (2, 1) = (2, 5)$ $\quad \overrightarrow{DC} = (-1, 4) - (-3, -1) = (2, 5)$

El cuadrilátero tiene los lados iguales y paralelos dos a dos. Es un rombo.

c) Calculamos su diagonales:

$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{18}$; $\quad d' = |\overrightarrow{DB}| = \sqrt{(4 + 3)^2 + (6 + 1)^2} = \sqrt{98}$

$$\text{Área} = \frac{d \cdot d'}{2} = \frac{\sqrt{18} \cdot \sqrt{98}}{2} = \frac{42}{2} = 21 \text{ u}^2$$

Actividades

1 Halla la distancia entre A y B.

a) $A(-7, 4)$, $B(6, 4)$ b) $A(3, 4)$, $B(3, 9)$

c) $A(-5, 11)$, $B(0, -1)$ d) $A(4, -6)$, $B(7, 4)$

2 Aplica el teorema de Pitágoras para comprobar que el triángulo de vértices $A(-2, 3)$, $B(3, 1)$ y $C(5, 6)$ es rectángulo. ¿Es también isósceles?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

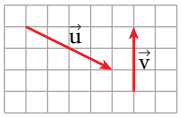
Practica

Vectores y puntos

1 ▼▽▽ Dados los puntos $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$, $C(5, 2)$ y $D(3, -4)$ halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$.

2 ▼▽▽ Con origen en el punto $A(3, -3)$, dibuja los vectores $\overrightarrow{AB}(-3, 2)$, $\overrightarrow{AC}(5, 1)$ y $\overrightarrow{AD}(1/2, -4)$. ¿Cuáles serán las coordenadas de los puntos B, C y D?

3 ▼▽▽ a) Di cuáles son las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



b) Dibuja los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ y di cuáles son sus coordenadas.

4 ▼▽▽ Dados los vectores $\vec{u}(4, -2)$ y $\vec{v}(-2, -1)$:

a) Representa los vectores $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$; $\frac{1}{2}\vec{u}$ y $-3\vec{v}$ y halla sus coordenadas.

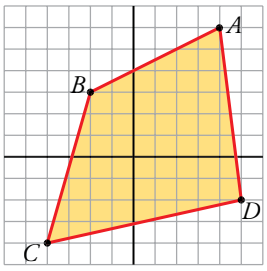
b) Calcula las coordenadas de este vector:

$$\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$$

5 ▼▽▽ a) Representa los puntos $A(-3, 0)$, $B(0, 4)$, $C(4, 4)$ y $D(1, 0)$ y halla el punto medio de AC y de BD.

b) Halla las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ y comprueba que son las mismas.

6 ▼▽▽ Calcula las coordenadas de los puntos medios de los lados y de las diagonales del cuadrilátero $ABCD$.



7 ▼▽▽ Si $M(-3, 5)$ es el punto medio del segmento AB, halla el punto B en cada uno de los siguientes casos:

a) $A(-1, 5)$ b) $A(6, -4)$ c) $A(-4, -7)$

8 ▼▽▽ Halla, en cada caso, el punto simétrico de $A(-3, -5)$ respecto de:

a) $P(-2, 0)$ b) $Q(2, -3)$ c) $O(0, 0)$

Rectas

9 ▼▽▽ Escribe la ecuación de las siguientes rectas:

a) Pasa por $(-4, 2)$ y su pendiente es $\frac{1}{2}$.

b) Pasa por $(1, 3)$ y su pendiente es -2.

c) Pasa por $(5, -1)$ y su pendiente es 0.

10 ▼▽▽ Da, en cada caso, un vector dirección, la pendiente y la ecuación de la recta que pasa por A y B:

a) $A(-1, 0)$, $B(0, 3)$

b) $A(0, -2)$, $B(5, -2)$

c) $A(-2, 3)$, $B(4, -1)$

11 ▼▽▽ Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por $P(-4, 3)$ y tiene por vector dirección $\vec{d}$:

a) $\vec{d}(2, -1)$ b) $\vec{d}(-1, -3)$ c) $\vec{d}(2, 0)$

12 ▼▽▽ Halla la ecuación de las siguientes rectas:

a) Paralela a $y = -2x + 3$ y pasa por $(4, 5)$.

b) Paralela a $2x - 4y + 3 = 0$ y pasa por $(4, 0)$.

c) Paralela a $3x + 2y - 6 = 0$ y pasa por $(0, -3)$.

13 ▼▽▽ Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por $P(3, -2)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}$:

a) $\vec{v}(2, 1)$ b) $\vec{v}(-5, 4)$ c) $\vec{v}(-1, 0)$

14 ▼▽▽ Escribe la ecuación de la recta perpendicular a r y que pasa por el punto P en los siguientes casos:

a) r: $y = -2x + 3$; $P(-3, 2)$

b) r: $3x - 2y + 1 = 0$; $P(4, -1)$

c) r: $x = 3$; $P(0, 4)$

15 ▼▽▽ Halla el punto de intersección de las rectas r y s en los casos siguientes:

a) $\begin{cases} r: 3x - 5y + 17 = 0 \\ s: 7x + 3y - 63 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: 3x - 2y + 9 = 0 \\ s: \ x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$

16 ▼▽▽ Representa las rectas $3x + 6 = 0$ y $2y - 5 = 0$ y halla su punto de intersección.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

Distancias

17 ▼▽▽ Calcula la distancia entre P y Q:

a) $P(3, 5)$, $Q(3, -7)$ b) $P(-8, 3)$, $Q(-6, 1)$

c) $P(0, -3)$, $Q(-5, 1)$ d) $P(-3, 0)$, $Q(15, 0)$

18 ▼▽▽ a) Halla el punto medio del segmento de extremos $A(-2, 0)$, $B(6, 4)$.

b) Comprueba que la distancia del punto medio a cada uno de los extremos es la misma.

19 ▼▽▽ Comprueba que el triángulo de vértices $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$, $C(7, 4)$ es isósceles. ¿Cuáles son los lados iguales?

20 ▼▽▽ Comprueba, mediante el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices $A(-2, -1)$, $B(3, 1)$, $C(1, 6)$ es rectángulo.

Aplica lo aprendido

21 ▼▽▽ Averigua el valor de k para que se cumpla:

$$\left(\frac{6}{5}, -2\right) = k(-3, 5)$$

22 ▼▼▽ Dados los vectores $\vec{u}(3, 2)$, $\vec{v}(x, 5)$ y $\vec{w}(8, y)$, calcula x e y para que se verifique: $2\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$

23 ▼▼▽ Dados los vectores $\vec{u}(5, -3)$, $\vec{v}(1, 3)$ y $\vec{w}(2, 0)$, calcula el valor de m y n para que se verifique:

$$\vec{u} = m\vec{v} + n\vec{w}$$

24 ▼▽▽ Comprueba, en cada caso, que los puntos dados están alineados:

a) $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(19, 8)$

b) $P(-2, -3)$, $Q(2, 0)$, $R(-26, -21)$

25 ▼▽▽ Calcula m para que los puntos $R(5, -2)$, $S(-1, 1)$ y $T(2, m)$ estén alineados.

26 ▼▽▽ Comprueba si los puntos $A(18, 15)$ y $B(-43, -5)$ pertenecen a la recta $x - 3y + 27 = 0$.

27 ▼▽▽ Escribe la ecuación de una recta perpendicular a r y que pase por $(4, -3)$ en los siguientes casos:

a) r: $2x + 7 = 0$ b) r: $-y + 4 = 0$

28 ▼▽▽ Estudia si las rectas r y s son paralelas o perpendiculares:

r: $3x - 5y + 15 = 0$ s: pasa por $(-2, -3)$ y $(8, 3)$.

29 ▼▽▽ Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $\begin{cases} r: 2x - 5y + 3 = 0 \\ s: P(3, 1),\ Q(-2, 3) \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: 5x - 4y + 8 = 0 \\ s: A(4, 7),\ B(0, 2) \end{cases}$

30 ▼▼▽ Halla la ecuación de la recta perpendicular a AB en su punto medio, siendo $A(-5, 3)$ y $B(2, 7)$.

31 ▼▽▽ Comprueba que el cuadrilátero de vértices $A(1, 5)$, $B(5, 1)$, $C(-4, -3)$ y $D(-8, 1)$ es un paralelogramo. Para ello, prueba que los puntos medios de sus diagonales coinciden.

Autoevaluación

¿Sabes hallar el punto medio de un segmento y el simétrico de un punto respecto de otro? ¿Y comprobar si tres puntos están alineados?

1 Representa los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 7)$ y $D(-2, 5)$ y comprueba analíticamente que el punto medio de AC coincide con el punto medio de BD.

2 Halla el simétrico de $P(-7, -15)$ respecto de $M(2, 0)$.

3 Comprueba si los puntos $A(1, -5)$, $B(3, 0)$ y $C(6, 6)$ están alineados.

¿Sabes calcular la distancia entre dos puntos?

4 Calcula la longitud de los lados del triángulo de vértices $A(-4, 1)$, $B(6, 3)$ y $C(-2, -3)$.

¿Obtienes con soltura la ecuación de una recta dada de diferentes formas?

5 Obtén la ecuación de las rectas r y s tales que:

r pasa por $(-3, 2)$ y es perpendicular a $8x - 3y + 6 = 0$.

s pasa por $(9, -5/2)$ y es paralela a $2x + y - 7 = 0$.

¿Reconoces, sin representarlas, si dos rectas son paralelas o perpendiculares?

6 Estudia la posición relativa de estas rectas:

r: $2x + y - 2 = 0$ s: $x + \frac{1}{2}y = 1$

¿Obtienes con agilidad el punto de corte de dos rectas?

7 Halla el punto de intersección de las siguientes rectas:

$3x + 8y - 7 = 0$ y $4x + 2y - 31 = 0$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

9 Estadística

En el desarrollo histórico de la Estadística se pueden distinguir tres grandes etapas.

Censos. Desde la Antigüedad y hasta el siglo XVI. Solo se realizan recogidas de datos y, a lo sumo, una exposición ordenada y clara de estos.

Análisis de datos. Abarca los siglos XVII, XVIII y XIX. Se supera lo meramente descriptivo y los datos pasan a ser analizados científicamente con el fin de extraer conclusiones.

Se suele considerar que esta etapa comienza con los trabajos de **John Graunt** (s. XVII), quien utilizó archivos parroquiales para realizar un profundo estudio de los nacimientos y las defunciones en Londres durante 30 años: anotó el sexo de cada nacido, las enfermedades de los fallecidos y otras muchas variables. Con ello pudo extraer conclusiones válidas para el futuro e inauguró, así, la Estadística Demográfica.

Algo más tarde, el profesor **Neumann** (s. XVII) comenzó a utilizar métodos con los que elaboró estadísticas muy minuciosas y así, por ejemplo, consiguió demostrar la falsedad de la creencia popular de que en los años terminados en 7 morían más personas. Sus métodos sirvieron de base para elaborar las tablas de mortalidad utilizadas por las compañías de seguros.

También es destacable el trabajo de **Quételet** (s. XIX), el primero en aplicar la estadística a las Ciencias Sociales, para lo que se valió de la probabilidad.

Estadística inferencial. Se inicia a finales del XIX. La esencia de esta rama de la Estadística es que a partir de una muestra se extraen conclusiones válidas para toda una población. Para ello, se echa mano de la alta matemática. Son figuras destacadas en este campo **Ronald Fisher** y **Karl Pearson.**

DEBERÁS RECORDAR

- Algunos conceptos básicos de estadística: población, muestra, variable, ...

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

1 Dos ramas de la estadística

La estadística tiene por objeto el desarrollo de técnicas para el conocimiento numérico de un conjunto de datos empíricos (recogidos mediante experimentos o encuestas). Según el colectivo a partir del cual se obtenga la información y el objetivo que se persiga a la hora de analizar esos datos, la estadística se llama descriptiva o inferencial.

Recuerda

Población. Es el conjunto de todos los elementos cuyo conocimiento nos interesa y que serán objeto de nuestro estudio.

Muestra es un subconjunto extraído de la población, cuyo estudio sirve para inferir características de toda la población.

Individuo es cada uno de los elementos que forman la población o la muestra.

Caracteres son los aspectos que deseamos estudiar en los individuos de una población. Cada carácter puede tomar distintos valores o modalidades.

Una **variable estadística** recorre todos los valores de un cierto carácter.

Las variables estadísticas pueden ser:

Cuantitativas si toman valores numéricos.

- **discretas:** solo toman valores aislados.
- **continuas:** pueden tomar cualquier valor de un intervalo.

Cualitativas si toman valores no numéricos.

Estadística descriptiva

La **estadística descriptiva** trata de describir y analizar algunos caracteres de los individuos de un grupo dado (población) sin extraer conclusiones para un grupo mayor.

Para este estudio, se dan los siguientes pasos:

1. Selección de los caracteres que interesa estudiar.
2. Análisis de cada carácter: diseño y realización de una encuesta o de un experimento y recogida de datos.
3. Clasificación y organización de los resultados en tablas de frecuencias.
4. Elaboración de gráficos, si conviene para divulgarlos a un público amplio (no expertos).
5. Obtención de **parámetros:** valores numéricos que resumen la información obtenida.

▼ **EJEMPLO**

Supongamos que por orden del rector, un funcionario de una universidad organiza, tabula, representa gráficamente y obtiene parámetros de algunos caracteres de todos los alumnos (por ejemplo: edades, resultados académicos) para compararlos con estudios similares hechos en años anteriores. Este estudio es **estadística descriptiva,** pues se realiza sobre la totalidad de la población.

Estadística inferencial

La **estadística inferencial** trabaja con muestras y pretende, a partir de ellas, "inferir" características de toda la población. Es decir, se pretende tomar como generales propiedades que solo se han verificado para casos particulares. En ese proceso hay que operar con mucha cautela: ¿Cómo se elige la muestra? ¿Qué grado de confianza se puede tener en el resultado obtenido?

▼ **EJEMPLO**

Una editorial realiza una encuesta a 387 alumnos de una universidad sobre sus preferencias en la lectura, con el fin de extraer consecuencias válidas para todos los universitarios. Esto es **estadística inferencial,** pues, a partir de una muestra, se desea obtener información sobre algún aspecto de la población.

Se estudia el corportamiento de una variable en una MUESTRA.

↓

Se INFIERE el comportamiento de esa variable en la POBLACIÓN.

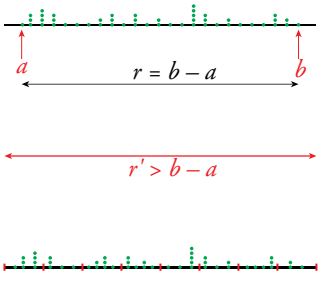
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

2 Tablas de frecuencias

Tras la recogida de datos, la elaboración de una tabla de frecuencias es el siguiente paso. Cuando la variable toma pocos valores, la elaboración de la tabla es sumamente sencilla. No hay más que hacer el recuento de los resultados.

Tabla con datos agrupados

Cuando en una distribución estadística el número de valores que toma la variable es muy grande, conviene elaborar una tabla de frecuencias agrupándolos en intervalos. Para ello:



1. Se localizan los valores extremos, a y b, y se halla su diferencia, $r = b - a$ (recorrido).
2. Se decide el número de intervalos que se quiere formar, teniendo en cuenta la cantidad de datos que se poseen. El número de intervalos no debe ser inferior a 6 ni superior a 15.
3. Se toma un intervalo, r', de longitud algo mayor que el recorrido r y que sea múltiplo del número de intervalos, con objeto de que estos tengan una longitud entera.
4. Se forman los intervalos, de modo que el extremo inferior del primero sea algo menor que a y el extremo superior del último sea algo mayor que b. Es deseable que los extremos de los intervalos no coincidan con ninguno de los datos. Para ello, conviene que los extremos de los intervalos tengan una cifra decimal más que los datos.

El punto medio de cada intervalo se llama **marca de clase.** Es el valor que representa a todo el intervalo para el cálculo de algunos parámetros.

No lo olvides

Cuando se elabora una tabla con datos agrupados, se pierde algo de información (pues en ella se ignora cada valor concreto, que se difumina dentro de un intervalo). A cambio, se gana en claridad y eficacia.

Ejercicio resuelto

Elaborar una tabla de frecuencias con las estaturas de 40 adolescentes:

168	160	167	175	175
167	168	158	149	160
178	166	158	163	171
162	165	163	156	174
160	165	154	163	165
161	162	166	163	159
170	165	150	167	164
165	173	164	169	170

1. Valores extremos: $a = 149$, $b = 178$. Recorrido: $r = 178 - 149 = 29$.
2. Tomaremos solo 6 intervalos. Un múltiplo de 6 mayor que 29 y próximo a él es 30. Longitud de cada intervalo: 5.
3. Formamos los intervalos comenzando por un número algo menor que $a = 149$ y terminando en un número algo mayor que $b = 178$.
4. Repartimos los datos en los intervalos:

INTERVALOS	148,5-153,5	153,5-158,5	158,5-163,5	163,5-168,5	168,5-173,5	173,5-178,5
M. DE CLASE	151	156	161	166	171	176
FRECUENCIAS	2	4	11	14	5	4

Actividades

1 Reparte los cuarenta datos del ejercicio resuelto anterior en 10 intervalos con el mismo recorrido total.

2 Reparte los cuarenta datos del ejercicio resuelto anterior en 8 intervalos. Para ello, toma $r' = 32$.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

3 Parámetros estadísticos: $\bar{x}$ y σ

x_i	f_i
x_1	f_1
x_2	f_2
.	.
.	.
.	.
x_n	f_n

La tabla de frecuencias de la izquierda **puede corresponder** a:

- Una distribución de datos aislados que toma los valores $x_1,\ x_2,\ \dots\ x_n$.
- Una distribución de datos agrupados en intervalos, de los cuales $x_1,\ x_2,\ \dots\ x_n$ son las marcas de clase.

En el primer caso, la tabla refleja exactamente la distribución real. En el segundo, la tabla es una buena aproximación a la realidad.

Recordemos cómo se obtienen los **parámetros** a partir de una tabla:

PUNTUACIONES EN UN TEST

x_i	f_i	$f_i x_i$
0	12	0
1	31	31
2	86	172
3	92	276
4	48	192
5	19	95
	288	766

Media: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

$\Sigma f_i x_i \rightarrow$ suma de todos los datos

$\Sigma f_i = N \rightarrow$ n.º total de individuos

Por ejemplo, en la distribución que tenemos en el margen:

$\Sigma f_i = 288$. Hay 288 individuos (que han realizado el test).

$\Sigma f_i x_i = 766$. Es la suma de las puntuaciones de todos los individuos.

La media es $\bar{x} = 766/288 = 2{,}66$.

Varianza: $Var = \dfrac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$ o bien $Var = \dfrac{\Sigma f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$

Las dos expresiones coinciden.

— En la primera de ellas, se ve claro el significado de la varianza: promedio de los cuadrados de las desviaciones a la media.

— La segunda es más cómoda para los cálculos, como se puede apreciar en el ejemplo (tabla del margen):

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	12	0	0
1	31	31	31
2	86	172	344
3	92	276	828
4	48	192	768
5	19	95	475
	288	766	2446

$$Var = \frac{2446}{288} - 2{,}66^2 = 1{,}42$$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{varianza}$

La desviación típica es un parámetro más razonable que la varianza, pues se expresa en la misma magnitud que los datos y que la media (por ejemplo, si los datos vienen en centímetros, la desviación típica viene en centímetros; sin embargo, la varianza se daría en centímetros cuadrados).

En el ejemplo: $\sigma = \sqrt{1{,}42} = 1{,}19$

Coeficiente de variación: C.V. $= \dfrac{\sigma}{\bar{x}}$

El coeficiente de variación sirve para comparar las dispersiones de población heterogéneas, pues indica la *variación relativa*.

En el ejemplo: C.V. $= \dfrac{1{,}19}{2{,}66} = 0{,}447$. O bien 44,7%.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicio resuelto

Calcular $\bar{x}$, σ y C.V. en la siguiente distribución:

DISTRIBUCIÓN DE PESOS (EN kg)	
INTERVALOS	FRECUENCIAS
42,5-53,5	4
53,5-64,5	19
64,5-75,5	86
75,5-86,5	72
86,5-97,5	41
97,5-108,5	7

Empezamos sustituyendo los intervalos por sus marcas de clase:

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
48	4	192	9 216
59	19	1 121	66 139
70	86	6 020	421 400
81	72	5 832	472 392
92	41	3 772	347 024
103	7	721	74 263
	229	17 658	1 390 434

$N = \Sigma f_i = 229$

$\Sigma f_i x_i = 17\,658$

$\Sigma f_i x_i^2 = 1\,390\,434$

Los números de la 3.ª columna, $f_i x_i$, se obtienen multiplicando los números de las columnas anteriores $(x_i \cdot f_i = f_i x_i)$. Por ejemplo, $59 \cdot 19 = 1\,121$.

Análogamente, los de la 4.ª columna se obtienen multiplicando los de la 1.ª por los de la 3.ª $(x_i \cdot f_i x_i = f_i x_i^2)$. Por ejemplo, $59 \cdot 1\,121 = 66\,139$.

Con las sumas de las columnas de la tabla, obtenemos los parámetros:

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{17\,658}{229} = 77{,}1$ kg

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\dfrac{1\,390\,434}{229} - 77{,}1^2} = 11{,}2$ kg

COEF. DE VARIACIÓN: $\text{C.V.} = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{11{,}2}{77{,}1} = 0{,}145 = 14{,}5\%$

CON CALCULADORA

1. Preparamos la calculadora para que trabaje en el **MODO SD.**
2. Borramos los datos que pudiera haber acumulados de otras ocasiones: [INV] [AC]
3. Introducimos los datos:
   48 [×] 4 [DATA]
   59 [×] 19 [DATA]
   …
   103 [×] 7 [DATA]
4. Resultados obtenidos:
   - N.º DE INDIVIDUOS Σf_i [n] → 229
   - SUMA DE VALORES $\Sigma f_i x_i$ [Σx] → 17658
   - SUMA DE CUADRADOS $\Sigma f_i x_i^2$ [Σx²] → 1390434
   - MEDIA $\bar{x}$ [x̄] → 77.10917031
   - DESV. TÍPICA σ [σn] → 11.22230132

Actividades

1 Halla, manualmente y con calculadora, $\bar{x}$, σ y C.V. en la tabla obtenida en el ejercicio resuelto de la página 97:

x_i	151	156	161	166	171	176
f_i	2	4	11	14	5	4

2 Halla, manualmente y con calculadora, $\bar{x}$, σ y C.V. en la distribución de los ejercicios 1 y 2 de la página 97.

Compara los resultados entre sí y con los del ejercicio 1 de esta página.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

4 Medidas de posición

Mediana

Me

Si los individuos de una población están colocados en orden creciente según la variable que estudiamos, el que ocupa el valor central se llama individuo mediano, y su valor, la **mediana.** La mediana, *Me*, está situada de modo que antes de ella está el 50% de la población, y detrás, el otro 50%.

Por ejemplo: 6, 7, 7, 7, **8**, 9, 10, 12, 15 → mediana: $Me = 8$

Si el número de individuos es par, la mediana es el valor medio de los dos centrales. Por ejemplo: 6, 7, 7, 7, **8**, **9**, 10, 12, 15, 16 → $Me = 8{,}5$

Cuartiles

Q_1 *Me* Q_3

Si en lugar de partir la totalidad de los individuos en dos mitades, lo hacemos en cuatro partes iguales (todas ellas con el mismo número de individuos), los dos nuevos puntos de separación se llaman **cuartiles.**

Cuartil inferior, Q_1, es un valor de la variable que deja por debajo de él al 25% de la población, y por encima, al 75%.

El **cuartil superior,** Q_3, deja debajo al 75% y encima al 25%.

Se designan por Q_1 y Q_3, porque la mediana sería el Q_2.

Ten en cuenta

En general, las cosas no son tan fáciles como en este ejemplo. Obsérvalo en el ejercicio resuelto.

Por ejemplo, en la distribución

$$\underbrace{1, 2, 2}_{25\%} \;,\; \underbrace{3, 4, 5}_{25\%} \;,\; \underbrace{5, 5, 6}_{25\%} \;,\; \underbrace{8, 9, 10}_{25\%}$$

Q_1 *Me* Q_3

estos parámetros toman los valores siguientes: $Q_1 = 2{,}5$; $Me = 5$; $Q_3 = 7$

Mediana y cuartiles se llaman **medidas de posición.**

Ejercicio resuelto

Calcular *Me*, Q_1 y Q_3 en la distribución:

1 1 2 3 4 4 5 5 5

5 6 7 7 7 8 9 10

Hay 17 individuos. $17/2 = 8{,}5$ → La *Me* es el valor del individuo 9.°, $Me = 5$.

$17/4 = 4{,}25$ → (5.° lugar) $Q_1 = 4$

$17 \cdot (3/4) = 12{,}75$ → (13.° lugar) $Q_3 = 7$

Actividades

1 Calcula *Me*, Q_1 y Q_3 en la siguiente distribución, cuyos datos están dados ordenadamente:

0 0 1 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5

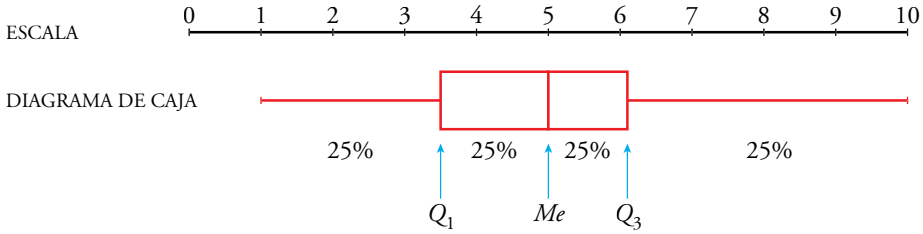
5 6 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 8 9 9 9 9 9 9 9 10 10

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.° B ESO. Material fotocopiable autorizado.

5 Diagramas de caja

Este diagrama se llama también de **caja y bigotes.**

Observa la siguiente forma de representar distribuciones estadísticas.



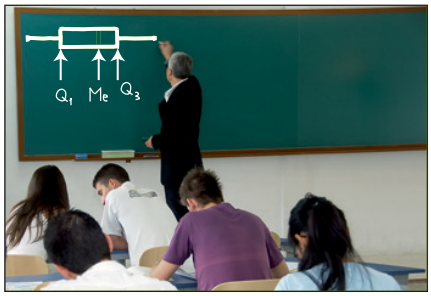
La gráfica corresponde a la distribución de notas en un cierto examen. En la parte alta se ha puesto la escala sobre la que se mueve la variable. Debajo se pone el diagrama propiamente dicho, que consiste en lo siguiente:

— La población total se parte en cuatro trozos, cada uno de ellos con el 25% de los individuos, previamente ordenados de menor a mayor.

— El 50% de los valores centrales se destacan mediante un rectángulo **(caja).**

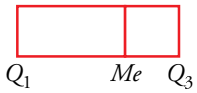
— Los valores extremos (el 25% de los menores y el 25% de los mayores) se representan mediante sendos segmentos **(bigotes).**

Los puntos que separan los cuatro trozos son, obviamente, los cuartiles y la mediana (Q_1, Me, Q_3).

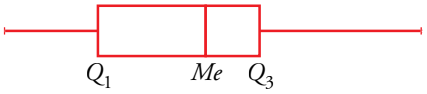


Los **diagramas de caja** (o caja y bigotes) se construyen del siguiente modo:

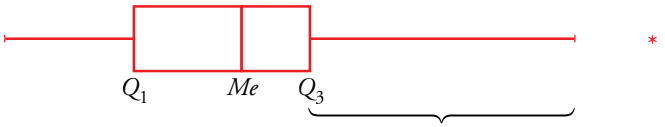
- La caja abarca el intervalo Q_1, Q_3 (llamado recorrido intercuartílico) y en ella se señala expresamente el valor de la mediana, Me.



- Los bigotes se trazan hasta abarcar la totalidad de los individuos, con la condición de que cada lado no se alargue más de una vez y media la longitud de la caja.



- Si uno (o más) de los individuos quedara por debajo o por arriba de esa longitud, el correspondiente lado del bigote se dibujaría con esa limitación y se añadiría, mediante asterisco, el individuo en el lugar que le corresponda. Por ejemplo:



La longitud de este lado del bigote es 1,5 veces la de la caja. En este lado no está incluido el individuo extremo que se representa mediante un asterisco.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

Problemas resueltos

1. **Representar, mediante un diagrama de caja, la siguiente distribución.**

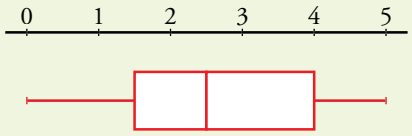
0 0 0 1 1 1 1 1 1 1
2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
3 3 3 3 3 3 3 3 3 4
4 4 4 4 4 4 4 5 5 5

1. Tenemos 40 individuos.

40 : 2 = 20 → La mediana será el valor intermedio entre los individuos 20.° y 21.°. Esto es: $Me = 2{,}5$.

40 : 4 = 10 → El cuartil inferior será el valor intermedio entre los individuos 10.° y 11.°: $Q_1 = 1{,}5$.

Y, de la misma manera: $Q_3 = 4$.



La longitud de la caja es 4 – 1,5 = 2,5. Los bigotes recogen al resto de la distribución. No hay individuo excepcionales.

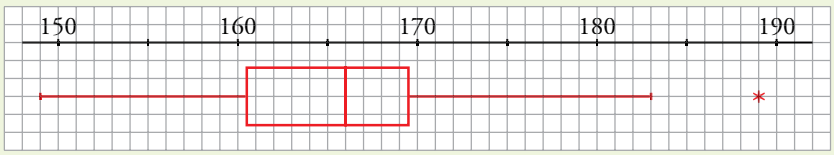
2. **Las estaturas de los 40 alumnos y alumnas de una clase son, dadas ordenadamente:**

149 150 154 156 157
158 159 160 160 160
161 162 162 163 163
163 163 164 165 166
166 166 167 167 167
168 168 168 169 169
170 170 170 171 172
173 174 175 175 189

Representar la distribución mediante un diagrama de caja.

2. Puesto que el número de individuos es múltiplo de cuatro, Q_1, Me y Q_3 serán los valores que hay entre los individuos 10.° y 11.°, entre 20.° y 21.°, entre 30.° y 31.°, respectivamente. Es decir,

$Q_1 = 160{,}5$ $\quad$ $Me = 166$ $\quad$ $Q_3 = 169{,}5$



La longitud de la caja es 169,5 – 160,5 = 9.

Una vez y media esta longitud es 1,5 · 9 = 13,5.

El altísimo estudiante que mide 189 cm se separa del extremo superior de la caja 189 – 169,5 = 19,5. Esa distancia es mayor que una vez y media la longitud de la caja. Por eso, hemos puesto a la derecha un bigote de longitud 13,5 y hemos añadido un asterisco que señala la situación del individuo excepcional.

Actividades

1 Representa mediante diagramas de caja y bigotes las siguientes distribuciones:

a) 1 1 2 3 4 4 5 5
5 6 7 7 7 8 9 10

b) 1 2 2 3 3 3 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5
5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 6 6 6 7 7
7 7 7 7 7 7 8 8 8 8 9 9 10 10

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.° B ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Tablas de frecuencias

1 ▼▽▽ En una maternidad se han tomado los pesos (en kilogramos) de 50 recién nacidos:

2,8	3,2	3,8	2,5	2,7	3,7	1,9	2,6	3,5	2,3
3,0	2,6	1,8	3,3	2,9	2,1	3,4	2,8	3,1	3,9
2,9	3,5	3,0	3,1	2,2	3,4	2,5	1,9	3,0	2,9
2,4	3,4	2,0	2,6	3,1	2,3	3,5	2,9	3,0	2,7
2,9	2,8	2,7	3,1	3,0	3,1	2,8	2,6	2,9	3,3

a) ¿Cuál es la variable y de qué tipo es?

b) Construye una tabla con los datos agrupados en 6 intervalos de 1,65 a 4,05.

c) Representa gráficamente esta distribución.

2 ▼▽▽ A un grupo de 30 personas se les ha tomado el número de pulsaciones por minuto (ritmo cardíaco) obteniéndose los siguientes resultados:

87	85	61	51	64	75	80	70	69	82
80	79	82	74	92	76	72	73	63	65
67	71	88	76	68	73	70	76	71	86

Representa gráficamente esta distribución agrupando los datos en 6 intervalos (desde 50,5 a 92,5).

Media, desviación típica y C.V.

Halla la media, la desviación típica y el coeficiente de variación en las siguientes distribuciones:

3 ▼▽▽

x_i	f_i
0	12
1	9
2	7
3	6
4	3
5	3

4 ▼▽▽

x_i	f_i
0	1
1	5
2	6
3	7
4	4
5	4
6	3

5 ▼▽▽

INTERVALO	f_i
1,65-2,05	4
2,05-2,45	5
2,45-2,85	13
2,85-3,25	17
3,25-3,65	8
3,65-4,05	3

6 ▼▽▽

INTERVALO	f_i
50,5-57,5	1
57,5-64,5	3
64,5-71,5	8
71,5-78,5	8
78,5-85,5	6
85,5-92,5	4

7 ▼▽▽ Los gastos mensuales de una empresa A tienen una media de 100 000 euros y una desviación típica de 12 500 euros. En otra empresa B, la media es 15 000 euros, y la desviación típica, 2 500 euros. Calcula el coeficiente de variación y di cuál de las dos tiene más variación relativa.

Medidas de posición

8 ▼▽▽ La mediana y los cuartiles de la distribución de "Aptitud para la música" (escala 1-100) en un colectivo de personas son $Q_1 = 31$, $Me = 46$ y $Q_3 = 67$.

Copia y completa las siguientes afirmaciones:

a) El 75% tiene una aptitud superior o igual a ____.

b) El 25% tiene una aptitud superior o igual a ____.

c) El ____% tiene una aptitud igual o menor a 46 puntos.

d) El ____% tiene una aptitud superior o igual a 46 e inferior o igual a 67.

e) El ____% tiene una aptitud superior o igual a 31 e inferior o igual a 67.

9 ▼▽▽ La altura, en centímetros, de un grupo de alumnos y alumnas de una misma clase es:

150169 171 172 172 175 181

182183 177 179 176 184 158

Calcula la mediana y los cuartiles y explica el significado de estos parámetros.

10 ▼▽▽ Calcula la mediana y los cuartiles de la siguiente distribución:

x_i	0	1	2	3	4	5
f_i	12	9	7	6	3	3

11 ▼▽▽ Halla la mediana, los cuartiles y el percentil 60 en cada una de las siguientes distribuciones, correspondientes a las notas obtenidas en un test que han hecho dos grupos de estudiantes:

A: 25 – 22 – 27 – 30 – 23 – 22 – 31 – 18

24 – 25 – 32 – 35 – 20 – 28 – 30

B: 27 – 32 – 19 – 22 – 25 – 30 – 21

29 – 23 – 31 – 21 – 20 – 18 – 27

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Diagramas de caja

Haz el diagrama de caja correspondiente a las siguientes distribuciones.

12 ▼▽▽ La del ejercicio 8.

13 ▼▽▽ La del ejercicio 9.

14 ▼▽▽ La A y la B del ejercicio 10.

Muestreo

15 ▼▽▽ Se quieren realizar los siguientes estudios:

I. Tipo de transporte que utilizan los vecinos de un barrio para acudir a su trabajo.

II. Estudios que piensan seguir los alumnos y las alumnas de un centro escolar al terminar la ESO.

III. Edad de las personas que han visto una obra de teatro en una ciudad.

IV. Número de horas diarias que ven la televisión los niños y las niñas de tu comunidad autónoma con edades comprendidas entre 5 y 10 años.

a) Di en cada uno de estos casos cuál es la población.

b) ¿En cuáles de ellos es necesario recurrir a una muestra? ¿Por qué?

16 ▼▽▽ Para hacer un sondeo electoral en un pueblo de 400 electores, aproximadamente, se va a elegir una muestra de 200 individuos. Di si te parece válido cada uno de los siguientes modos de seleccionarlos y explica por qué.

a) Se le pregunta al alcalde, que conoce a todo el pueblo, qué individuos le parecen más representativos.

b) Se eligen 200 personas al azar entre las que acuden a la verbena el día del patrón.

c) Se seleccionan al azar en la guía telefónica y se les encuesta por teléfono.

d) Se acude a las listas electorales y se seleccionan al azar 200 de ellos.

Aplica lo aprendido

17 ▼▽▽ En una urbanización de 25 familias se ha observado la variable "número de coches que tiene la familia" y se han obtenido los siguientes datos:

0 1 2 3 1 0 1 2 3 1
0 1 1 1 4 0 1 1 1 4
3 2 2 1 1

a) Construye la tabla de frecuencias.

b) Haz el diagrama de barras.

c) Calcula la media y la desviación típica.

d) Halla la mediana y los cuartiles.

e) Dibuja el diagrama de caja.

Autoevaluación

¿Conoces los parámetros estadísticos $\bar{x}$, σ y C.V.? ¿Los sabes calcular e interpetar?

1 La edad de los visitantes de una exposición está recogida en la siguiente tabla:

EDAD	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)	[55, 65)	[65, 75]
N.º DE VIS.	63	95	189	243	175	105

a) Representa los datos en un gráfico adecuado.

b) Halla $\bar{x}$, σ y C.V.

2 Los beneficios, en millones de euros, de dos empresas en seis años consecutivos han sido los siguientes:

A	5,9	2,5	7,4	8,1	4,8	3,7
B	4,5	3,8	5,7	3,5	5,5	4,6

¿Cuál de las dos empresas tiene mayor variación?

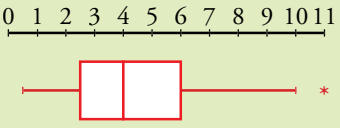
¿Conoces las medidas de posición, mediana, cuartiles y percentiles? ¿Los sabes calcular e interpretar? ¿Sabes utilizarlos para construir o interpretar un diagrama de caja?

3 Halla la mediana y los cuartiles de la siguiente distribución:

0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 4 4 4 4 6 8

Haz el correspondiente diagrama de caja.

4 Indica por qué el diagrama de caja siguiente es incorrecto:



© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

10 Cálculo de probabilidades

Históricamente, el interés por la probabilidad comienza con los juegos de azar. **Cardano,** algebrista italiano del siglo XVI, fue un jugador empedernido en algunas épocas de su vida. Esta pasión le hizo ser conocedor de trucos y fullerías. Acabó escribiendo un libro sobre el juego, en el que, por primera vez, se teoriza sobre las probabilidades.

Fue otro jugador en el siglo XVII, el caballero de Meré, quien indujo, sin saberlo, a que los matemáticos **Pascal** y **Fermat** mantuvieran una fructífera correspondencia: en sus cartas, proponían soluciones a algunos problemas sobre juegos planteados por Meré (al tirar cuatro dados, ¿qué es más ventajoso, apostar por "algún 6" o por "ningún 6"?), y elucubraban sobre otras situaciones probabilísticas. Así nació, con estos dos genios, la base de la teoría de las probabilidades.

Ni Pascal ni Fermat publicaron sus conclusiones, pero sí lo hizo **Huygens** en 1657, en un breve libro titulado *Sobre los razonamientos en los juegos de azar.*

En 1713, **Jacques Bernouilli** recogió lo escrito por Huygens, lo amplió y completó, construyendo así el primer libro importante sobre la teoría de las probabilidades: *Arte de la conjetura.*

Laplace, en 1812, publicó *Teoría analítica de las probabilidades,* donde recogió y organizó multitud de resultados que había ido obteniendo y difundiendo desde hacía 40 años. Se trata de la mayor aportación de la historia a esta teoría. Pocos años después publicó *Ensayo filosófico de las probabilidades,* destinado a los no expertos. De este libro es la siguiente frase:

La teoría de las probabilidades es solo sentido común expresado con números.

DEBERÁS RECORDAR

- Qué son los sucesos.
- Qué experiencias son regulares y cuáles son irregulares.

© GRUPO ANAYA, S.A., Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

1 Probabilidades en experiencias simples

Experiencias irregulares

Para calcular la probabilidad de un suceso correspondiente a una experiencia irregular (una chincheta, o un dado cargado, o extraer una bola de una bolsa cuya composición ignoramos…) no queda más remedio que experimentar. Es decir, repetir la experiencia muchas veces, averiguar la frecuencia relativa de ese suceso y asignarle ese valor (aproximado) a la probabilidad. Cuantas más veces hagamos la experiencia, más fiable será el valor asignado.

Por ejemplo, si en una bolsa hay bolas de cinco colores (●, ●, ●, ○ y ●) y realizamos 100 veces la experiencia de extraer, mirar, anotar y devolver a la bolsa, obteniendo los siguientes resultados:

$$f(●) = 34,\quad f(●) = 23,\quad f(●) = 21,\quad f(○) = 8,\quad f(●) = 14$$

les asignaríamos los siguientes valores a las probabilidades:

$$P[●] \approx fr(●) = 0{,}34;\quad P[●] \approx fr(●) = 0{,}23;\quad P[●] \approx fr(●) = 0{,}21;$$

$$P[○] \approx fr(○) = 0{,}08;\quad P[●] \approx fr(●) = 0{,}14$$

Experiencias regulares. Ley de Laplace

Si la experiencia aleatoria se realiza con un instrumento regular (dado correcto, baraja completa…), entra en juego la ley de Laplace. Recordémosla:

- Si el espacio muestral tiene n casos y la experiencia es *regular*, entonces todos ellos tienen la misma probabilidad, $1/n$.
- Si un suceso tiene k casos, entonces su probabilidad es k/n.

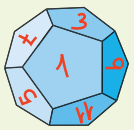
$$P[S] = \frac{\text{número de casos favorables a } S}{\text{número total de casos posibles}}$$

Por ejemplo, en una bolsa hay 40 bolas idénticas salvo en el color. De ellas, 15 son rojas. Entonces, al extraer una bola al azar:

$$P[\text{Roja}] = \frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

Problemas resueltos

1. Lanzamos un dado con forma de dodecaedro perfecto, con las caras numeradas del 1 al 12. Calcular:



a) P[8]

b) P[menor que 3]

c) P[impar]

d) P[número primo]

e) P[mayor que 4 pero menor que 8]

1. a) $P[8] = \frac{1}{12}$. Hay 12 casos, y el "8" es uno de ellos.

b) Solo 1 y 2 son menores que 3 $\rightarrow$ $P[\text{menor que } 3] = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

c) Hay 6 números impares menores que 12 $\rightarrow$ $P[\text{impar}] = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

d) 2, 3, 5, 7, 11 son primos $\rightarrow$ $P[\text{número primo}] = \frac{5}{12}$

e) $P[\{5, 6, 7\}] = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

2. Con un molde se han fabricado varios miles de dados. Sospechamos que son incorrectos. ¿Cómo procedemos para averiguar si son o no correctos? En caso de que no lo sean, ¿cómo evaluaremos la probabilidad de cada cara?

2. Podemos suponer que todos los dados son idénticos. Experimentamos con varios efectuando, en total, 1 000 lanzamientos. Estos son los resultados:

	1	2	3	4	5	6
f	154	123	236	105	201	181
fr	0,154	0,123	0,236	0,105	0,201	0,181

Observamos que algunas de las frecuencias relativas se diferencian demasiado del valor 1/6 = 0,166…

Puesto que el número de experimentaciones (1 000) es suficientemente grande, podemos concluir que el dado es defectuoso. Tomaremos las frecuencias relativas de las distintas caras como valores aproximados de sus respectivas probabilidades.

3. Lanzamos dos dados correctos y anotamos las diferencias de las puntuaciones.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) ¿Qué probabilidad tiene cada caso?

c) Hallar la probabilidad del suceso "la diferencia es mayor que 3".

3.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	0	1	2	3	4	5
⚁	1	0	1	2	3	4
⚂	2	1	0	1	2	3
⚃	3	2	1	0	1	2
⚄	4	3	2	1	0	1
⚅	5	4	3	2	1	0

A partir de la tabla de la izquierda, construimos la distribución siguiente:

DIFERENCIAS	0	1	2	3	4	5
N.º DE VECES	6	10	8	6	4	2
PROBABILIDAD	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

a) y b) En la tabla anterior aparece el espacio muestral, $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, con las probabilidades asociadas a cada caso.

c) P[Diferencia mayor que 3] = $P[\{4, 5\}] = 4/36 + 2/36 = 6/36 = 1/6$

4. Un juego de cartas solo distingue estas posibilidades:

FIGURA (sota, caballo o rey), AS, MENOR QUE 6 (2, 3, 4, 5), MAYOR QUE 5 (6, 7).

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Di la probabilidad en cada caso.

c) ¿Cuál es la probabilidad de "no FIGURA"?

4. Hay 40 cartas. La probabilidad de cada una es 1/40.

a) En este juego, el espacio muestral es E = {"FIGURA", "AS", "< 6", "> 5"}.

b) Hay 3 figuras en cada palo ⟶ P[FIGURA] = 12/40 = 3/10 = 0,3

Hay 4 ases en la baraja ⟶ P[AS] = 4/40 = 1/10 = 0,1

Hay 4 números < 6 en cada palo → P[< 6] = 16/40 = 2/5 = 0,4

Hay 2 números > 5 en cada palo → P[> 5] = 8/40 = 1/5 = 0,2

c) P[no FIGURA] = 1 − P[FIGURA] = 1 − 0,3 = 0,7

Actividades

1 Lanzamos un dado con forma de octaedro, con sus caras numeradas del 1 al 8. Evalúa estas probabilidades:

a) P[múltiplo de 3]

b) P[menor que 5]

c) P[número primo]

d) P[no múltiplo de 3]

2 Lanzamos dos dados y anotamos *la menor de las puntuaciones*.

a) Escribe el espacio muestral y asígnale probabilidad a cada uno de los casos.

b) Halla la probabilidad del suceso "la menor puntuación es menor que 4" = "< 4".

c) Halla P[no < 4].

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

2 Probabilidades en experiencias compuestas

Recuerda

Las siguientes experiencias:

a) *extraer tres cartas de una baraja,*

b) *lanzar cinco dados,*

se pueden considerar como experiencias compuestas de otras simples:

a) *Extraer una carta de una baraja, después otra, y después otra.*

b) *Lanzar un dado, y otro… y otro.*

Las experiencias simples que forman una experiencia compuesta pueden ser **dependientes** o **independientes.**

Dos o más experiencias aleatorias se llaman **independientes** cuando el resultado de cada una de ellas no depende del resultado de las demás.

Por ejemplo, el lanzamiento de dos dados puede considerarse como composición de dos pruebas (un dado y otro dado) independientes, pues el resultado de cada dado no influye en el otro.

Dos o más experiencias aleatorias se llaman **dependientes** cuando el resultado de cada una de ellas influye en las probabilidades de las siguientes.

Por ejemplo, extraer dos cartas de una baraja (una carta seguida de otra carta) es la composición de dos pruebas *dependientes*, pues el resultado de la primera influye en las probabilidades de los sucesos de la segunda:

La 1.ª es AS.
Quedan 3 ASES en 39 cartas.

La 1.ª no es AS.
Quedan 4 ASES en 39 cartas.

1.ª extracción	quedan	2.ª extracción
AS	39 cartas, 3 ASES	$P[\text{AS}] = 3/39$
NO AS	39 cartas, 4 ASES	$P[\text{AS}] = 4/39$

Como vemos, las probabilidades de los sucesos en la 2.ª extracción *dependen* de lo que ocurrió en la 1.ª.

Extracciones con o sin reemplazamiento

"Extraemos una bola de esta bolsa y, después, otra". Falta un dato: ¿la que hemos extraído la echamos de nuevo a la bolsa antes de la 2.ª extracción o no?

— "Sacamos una bola, la miramos, la devolvemos a la bolsa, removemos y volvemos a sacar", lo resumimos así: "sacamos dos bolas **con reemplazamiento**".

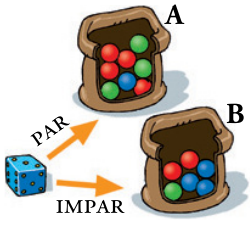
— "Sacamos una bola, la miramos y sacamos otra" se resume así: "sacamos dos bolas **sin reemplazamiento**".

En el primer caso, las experiencias son independientes. En el segundo, dependientes.

Actividades

1

Lanzamos un dado y, después, sacamos una bola de la bolsa. Estas dos experiencias, ¿son dependientes o independientes?

2 

Lanzamos un dado. Si sale par, extraemos una bola de la bolsa A. Si sale impar, de la B. Las experiencias, ¿son dependientes o independientes?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

3 Composición de experiencias independientes

Es más sencillo calcular las probabilidades de los sucesos compuestos descomponiéndolos en sucesos simples.

Experiencias independientes

El resultado de cada experiencia **no influye** en el resultado de la siguiente.

Cuando varias experiencias aleatorias son independientes, la probabilidad de que ocurra S_1 en la primera, S_2 en la segunda, etc., es:

$$P[S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } \ldots] = P[S_1] \cdot P[S_2] \cdot \ldots$$

Problemas resueltos

1. **Lanzamos dos dados, uno rojo (R) y otro verde (V). Hallar estas probabilidades:**

a) 3 en R y 5 en V

b) 5 en R y 3 en V

c) un 3 y un 5

d) PAR en R y > 2 en V

"PAR" = {2, 4, 6}

"> 2" = {3, 4, 5, 6}

1. a) $P[3 \text{ en R y } 5 \text{ en V}] = P[3] \cdot P[5] = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

b) $P[5 \text{ en R y } 3 \text{ en V}] = P[5] \cdot P[3] = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

c) $P[\text{un 3 y un 5}] = P[3 \text{ en R y } 5 \text{ en V}] + P[5 \text{ en R y } 3 \text{ en V}] =$

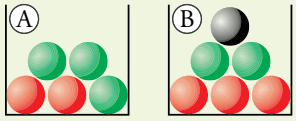
$$= \left(\frac{1}{36}\right) + \left(\frac{1}{36}\right) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

d) $P[\text{PAR en R y} > 2 \text{ en V}] = P[\text{PAR}] \cdot P[> 2] =$

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1
1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

2. **Sacamos una bola de A y una bola de B. Calcular:**



a) P[● y ●]

b) P[● y ●]

c) P[● y ●]

d) P[una de ellas ● y otra ●]

e) P[la segunda ●]

2. a) $P[\bullet \text{ y } \bullet] = P[1.^{\text{a}} \bullet] \cdot P[2.^{\text{a}} \bullet] = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

b) $P[\bullet \text{ y } \bullet] = P[1.^{\text{a}} \bullet] \cdot P[2.^{\text{a}} \bullet] = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

c) $P[\bullet \text{ y } \bullet] = P[1.^{\text{a}} \bullet] \cdot P[2.^{\text{a}} \bullet] = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

d) $P[\text{una de ellas } \bullet \text{ y otra } \bullet] = P[\bullet \text{ y } \bullet] + P[\bullet \text{ y } \bullet] = \frac{4}{30} + \frac{9}{30} = \frac{13}{30}$

e) $P[\text{la } 2.^{\text{a}} \bullet] = P[\text{cualquier cosa la } 1.^{\text{a}}] \cdot P[\text{la } 2.^{\text{a}} \bullet] = 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

Actividades

1 Se extraen 3 cartas con reemplazamiento. Halla:

a) P[AS en 1.ª y FIGURA en 2.ª y 3.ª] b) P[3 ASES]

c) P[un AS y dos FIGURAS] d) P[ningún AS]

2 Se lanzan 5 monedas. Halla la probabilidad de:

a) 5 caras b) alguna cruz

3 Lanzamos 3 monedas. Calcula:

a) P[tres caras] b) P[ninguna cara] c) P[alguna cara]

4 Se lanzan dos monedas y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en ambas monedas y seis en el dado? ¿Cuál, la de obtener cruz en las monedas y par en el dado?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

4 Composición de experiencias dependientes

Experiencias dependientes

El resultado de cada experiencia influye en las probabilidades de las siguientes.

Si dos sucesos S_1 y S_2 corresponden a pruebas dependientes, la probabilidad de que ocurra S_1 en la 1.ª y S_2 en la 2.ª es:

$$P[S_1 \text{ y } S_2] = P[S_1] \cdot P[S_2 \text{ en la 2.ª} / S_1 \text{ en la 1.ª}] = P[S_1] \cdot P[S_2 / S_1]$$

La expresión $P[S_2 / S_1]$ se llama **probabilidad condicionada:** probabilidad de S_2 **condicionada** a que ocurra S_1.

Para tres sucesos dependientes:

$$P[S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } S_3] = P[S_1] \cdot P[S_2 / S_1] \cdot P[S_3 / S_1 \text{ y } S_2]$$

La probabilidad condicionada $P[S_3 / S_1 \text{ y } S_2]$ significa "probabilidad de que ocurra S_3 supuesto que ocurrieron S_1 y S_2".

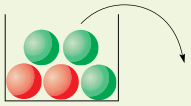
Problema resuelto

De una urna con 3 bolas verdes y 2 rojas, extraemos dos bolas. Calcular la probabilidad de que:

a) Ambas sean verdes.

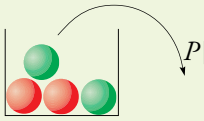
b) La 1.ª sea roja y la 2.ª verde.

c) Las dos sean rojas.

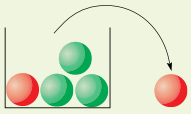


$P[\text{●}] = \frac{3}{5}$

Si la 1.ª es ●



$P[\text{● en este caso}] = \frac{2}{4}$



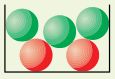
Si la 1.ª es ●, quedan cuatro: 1 ● y 3 ●

a) Imaginemos una gran cantidad de gente. Cada uno de ellos tiene una urna con 3 bolas verdes y 2 bolas rojas. Son sometidos a dos pruebas:

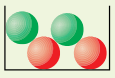
1.ª prueba: Han de extraer bola verde. (La dejan fuera).

2.ª prueba: Han de volver a extraer verde.

Averigüemos qué proporción de gente supera cada prueba y, en consecuencia, qué proporción supera las dos.

PRIMERA EXTRACCIÓN  $P[\text{●}] = 3/5$. Por término medio, 3 de cada 5 individuos extraen bola verde y superan la 1.ª prueba.

Ahora, la composición de la urna se modifica dependiendo del resultado de la primera prueba. Como estamos siguiendo la pista a los que extraen bola verde, estos tienen ahora una urna con 2 bolas verdes y 2 bolas rojas. Veamos *qué proporción de ellos* supera la 2.ª prueba.

SEGUNDA EXTRACCIÓN  $P[\text{●}] = 2/4$. Por término medio, 2 de cada 4 de los que superan la 1.ª prueba superan también la 2.ª.

Proporción de individuos que superan ambas pruebas: $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$. Es decir:

$$P[\text{● y ●}] = P[\text{● la 1.ª}] \cdot P[\text{● la 2.ª} / \text{● la 1.ª}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Estas pruebas son **dependientes,** porque el resultado de la primera influye en la segunda.

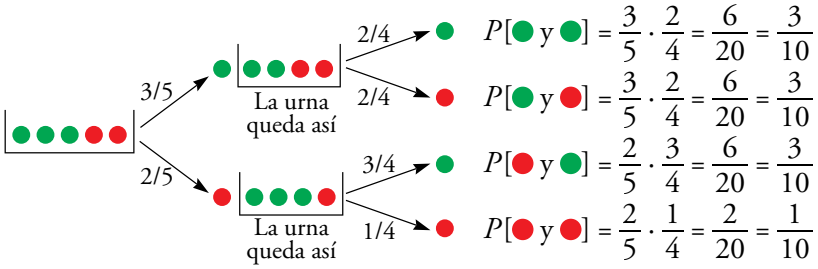
b) $P[\text{● y ●}] = P[\text{● la 1.ª}] \cdot P[\text{● la 2.ª} / \text{● la 1.ª}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

c) $P[\text{● y ●}] = P[\text{● la 1.ª}] \cdot P[\text{● la 2.ª} / \text{● la 1.ª}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

Descripción de la experiencia mediante un diagrama en árbol

La experiencia de la página anterior se puede describir sistemáticamente, y de forma muy clara, mediante un **diagrama en árbol:**



Recuerda

Significado de algunas probabilidades:

$\frac{2}{5} = P[\bullet \text{ en la } 1.^{\text{a}}]$

$\frac{3}{4} = P[\bullet \text{ en } 2.^{\text{a}} \text{ / } \bullet \text{ en } 1.^{\text{a}}]$

Observa

Si en la 1.ª sale AS, quedan 3 ASES en 39 cartas. Por tanto:

$P[\text{AS en } 2.^{\text{a}} \text{ / AS en } 1.^{\text{a}}] = \frac{3}{39}$

Análogamente:

$P[\text{AS en } 3.^{\text{a}} \text{ / AS en } 1.^{\text{a}} \text{ y } 2.^{\text{a}}] = \frac{2}{38}$

Problema resuelto

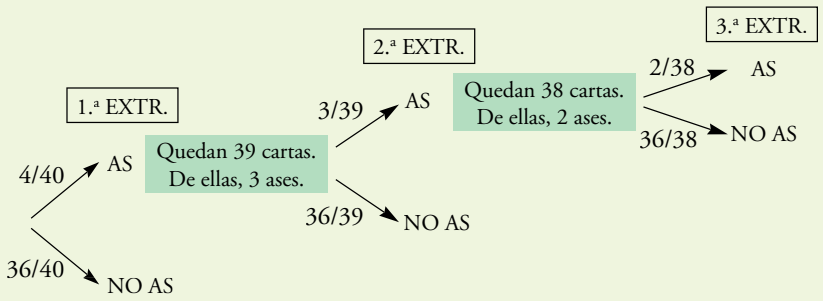
Extraemos tres cartas de una baraja española. Hallar la probabilidad de obtener tres ASES.

$P[3 \text{ ASES}] = P[\text{AS en } 1.^{\text{a}} \text{ y AS en } 2.^{\text{a}} \text{ y AS en } 3.^{\text{a}}] =$

$= P[\text{AS en } 1.^{\text{a}}] \cdot P[\text{AS en } 2.^{\text{a}} \text{ / AS en } 1.^{\text{a}}] \cdot P[\text{AS en } 3.^{\text{a}} \text{ / AS en } 1.^{\text{a}} \text{ y } 2.^{\text{a}}] =$

$= \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38}$

Lo describimos en un diagrama en árbol:



$P[3 \text{ ASES}] = P[\text{AS y AS y AS}] = P[\text{AS}] \cdot P[\text{AS en } 2.^{\text{a}} \text{ / AS en } 1.^{\text{a}}] \cdot$

$\cdot P[\text{AS en } 3.^{\text{a}} \text{ / AS en } 1.^{\text{a}} \text{ y } 2.^{\text{a}}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2\,470}$

Actividades

1 Extraemos dos cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea un REY y la segunda un AS?

2 Copia y completa el diagrama en árbol del problema resuelto de esta página y sobre él halla P [NINGÚN AS].

3 Una urna contiene 5 bolas negras y 3 blancas. Extraemos tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean blancas? ¿Y negras?

4 Se extraen, una tras otra, 3 cartas de una baraja. ¿Cuál es la probabilidad de obtener BASTOS las tres veces?

a) Supón que se extraen con reemplazamiento.

b) Supón que se extraen sin reemplazamiento.

5 Una urna A tiene tres bolas blancas y una negra. Otra B tiene una bola negra. Sacamos una bola de A y la echamos en B. Removemos y sacamos una bola de B. ¿Cuál es la probabilidad de que esta sea blanca?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Experiencias simples

1 ▼▽▽ En la lotería primitiva se extraen bolas numeradas del 1 al 49. Calcula la probabilidad de que la primera bola extraída sea un número…:

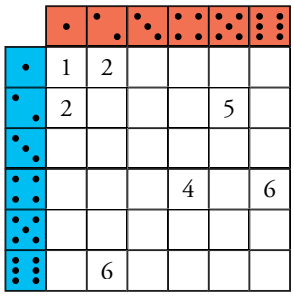
a) … de una sola cifra. b) … múltiplo de 7.

c) … mayor que 25.

2 ▼▽▽ Se extrae una carta de una baraja española. Di cuál es la probabilidad de que sea:

a) REY O AS. b) FIGURA Y OROS. c) NO SEA ESPADAS.

3 ▼▽▽ Lanzamos dos dados y anotamos la puntuación mayor (si coinciden, la de uno de ellos).



a) Completa en tu cuaderno la tabla y di las probabilidades de los seis sucesos elementales 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

b) Halla la probabilidad de los sucesos:

A: n.° par, B: n.° menor que 4.

Experiencias compuestas

4 ▼▽▽ a) Tenemos dos barajas de 40 cartas. Sacamos una carta de cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figuras (sota, caballo o rey)?

b) Tenemos una baraja de 40 cartas. Sacamos dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean un 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figura?

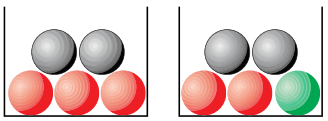
5 ▼▽▽ Lanzamos tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres puntuaciones sean menores que 5?

6 ▼▽▽ Sacamos una bola de cada urna. Calcula la probabilidad de que:

a) Ambas sean rojas.

b) Ambas sean negras.

c) Alguna sea verde.



7 ▼▽▽ Una urna tiene 3 bolas rojas y 2 verdes. Extraemos dos. Calcula P[2 rojas] y P[2 verdes].

Aplica lo aprendido

8 ▼▼▽ Una urna contiene 100 bolas numeradas así:

00, 01, 02, …, 99

Llamamos x a la cifra de las decenas e y a la cifra de las unidades del número que tiene cada bola. Se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) $x = 3$ b) $y = 3$ c) $x \neq 7$ d) $x > 5$

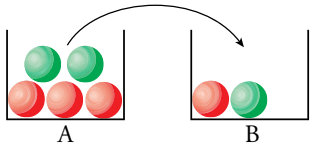
e) $x + y = 9$ f) $x < 3$ g) $y > 7$ h) $y < 7$

9 ▼▽▽ Después de tirar muchas veces un modelo de chinchetas, sabemos que la probabilidad de que una cualquiera caiga con la punta hacia arriba es 0,38.

Si tiramos dos chinchetas, ¿cuál será la probabilidad de que las dos caigan de distinta forma?

10 ▼▽▽ En un laboratorio se somete un nuevo medicamento a tres controles. La probabilidad de pasar el primero es 0,89, la de pasar el segundo es 0,93 y la de pasar el tercero es 0,85. ¿Cuál es la probabilidad de que el nuevo producto pase las tres pruebas?

11 ▼▼▽ Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una de B. Calcula:

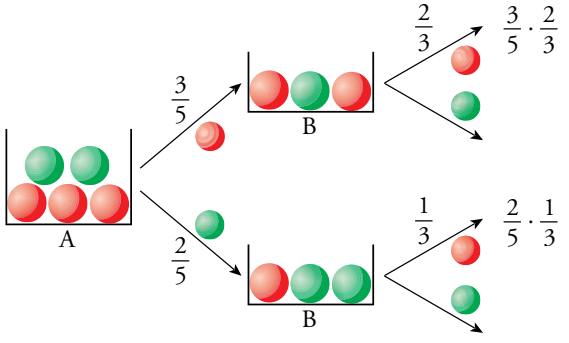


a) P[1.ª roja y 2.ª roja] b) P[1.ª roja y 2.ª verde]

c) P[2.ª roja / 1.ª verde] d) P[2.ª roja / 1.ª roja]

e) P[2.ª roja] f) P[2.ª verde]

☞ *e) Para calcular esta probabilidad, ten en cuenta el siguiente diagrama:*



© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

12 ▼▼▽ En una clase hay 17 chicos y 18 chicas. Elegimos al azar dos alumnos de esa clase.

Calcula la probabilidad de que:

a) Los dos sean chicos.

b) Sean dos chicas.

c) Sean un chico y una chica.

13 ▼▼▽ Tiramos dos dados correctos. Di cuál es la probabilidad de obtener:

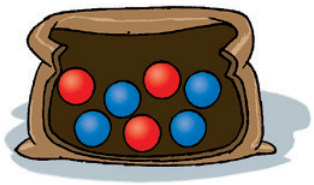
a) En los dos la misma puntuación.

b) Un 6 en alguno de ellos.

c) En uno de ellos, mayor puntuación que en el otro.

14 ▼▼▽ Se extraen dos bolas de esta bolsa.

Calcula la probabilidad de que ambas sean del mismo color.



Resuelve problemas

15 ▼▼▽ En una bolsa hay 4 bolas, dos de ellas están marcadas con un 1 y las otras dos con un 2. Se hacen tres extracciones y se anotan los resultados en orden.

Calcula la probabilidad de que el número formado sea el 121, suponiendo que la experiencia sea:

a) Con reemplazamiento.

b) Sin reemplazamiento.

16 ▼▼▽ Matías y Elena juegan con una moneda. La lanzan tres veces y si sale dos veces cara y una vez cruz o dos veces cruz y una vez cara, gana Matías. Si sale tres veces cara o tres veces cruz, gana Elena.

Calcula la probabilidad que tiene cada uno de ganar.

Autoevaluación

¿Resuelves problemas de probabilidad de experiencias simples y compuestas?

1 Encima de una mesa tenemos estas cuatro cartas de una baraja española:

– Cinco de copas. – As de oros.

– Cuatro de bastos. – Dos de oros.

Sacando al azar otra carta del mazo y fijándonos en su número, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones de las cinco cartas (las cuatro de la mesa y la extraída del mazo) sea 15? ¿Y 16?

2 Lanzamos una moneda y un dado y observamos los resultados obtenidos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener CRUZ y CINCO?

b) ¿Y la de obtener CARA y NÚMERO PAR?

3 Lanzamos dos dados. Calcula la probabilidad de que el producto de las puntuaciones:

a) Sea 5. b) Sea 6. c) Sea 4.

☞ *Haz una tabla con todos los casos posibles.*

4 Tenemos dos bolsas, A y B, con estas bolas:

A: 7 blancas y 3 negras

B: 1 blanca, 2 negras y 7 rojas

Tirando un dado, si sale 1 o 2 extraemos una bola de A. Si sale 3, 4, 5 o 6, extraemos una bola de B. Calcula la probabilidad de extraer bola roja.

5 La urna A tiene 3 bolas rojas y 1 negra, y la B, 3 negras y 1 roja. Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una bola de B. Calcula la probabilidad de que ambas bolas sean rojas.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

11
Combinatoria

"¿De cuántas formas distintas se pueden repartir las tres medallas (oro, plata, bronce) los ocho finalistas de una carrera?" Propuestas como esta son propias de la combinatoria: a partir de una colección finita de objetos, averiguar cuántas agrupaciones hay que cumplan ciertas condiciones.

Problemas de este tipo aparecen en todas las culturas y, en muchos casos, relacionadas con situaciones místicas o cabalísticas, como el *I Ching* chino o la *Cábala* judía.

Summa (1914), de **Luca Paccioli,** es la primera obra impresa donde aparecen problemas de combinatoria.

La combinatoria empezó a fraguarse como ciencia paralelamente a la probabilidad y, por tanto, estuvo ligada a los juegos. Aunque fue **Tartaglia** (algebrista italiano del s. XVI) uno de los pioneros, esta ciencia recibió el mayor impulso a partir de la correspondencia mantenida por los franceses **Pascal** y **Fermat** (s. XVII) sobre situaciones de azar inspiradas en las mesas de juego. Los problemas probabilísticos que de ahí surgen se resuelven mediante un enfoque combinatorio.

Bernouilli (s. XVIII) dedicó, en su *Arte de la conjetura,* algunos capítulos a asentar la teoría de la combinatoria, básica para el cálculo de probabilidades.

El término *combinatoria*, tal como lo usamos actualmente, fue introducido por el alemán Leibniz.

Euler (s. XVIII) enriqueció la combinatoria con nuevas líneas de trabajo. Una de ellas, *los grafos,* comenzó su andadura con la resolución del reto de *los puentes de Königsberg.*

DEBERÁS RECORDAR

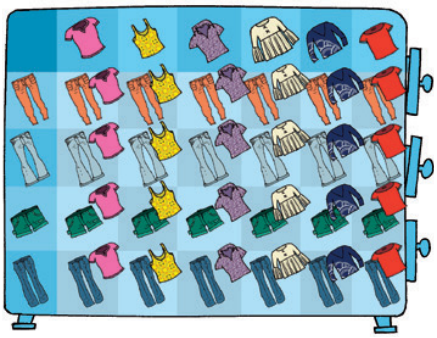
- La utilidad del diagrama en árbol.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

1 En qué consiste la combinatoria

La combinatoria se ocupa de contar agrupaciones realizadas con un determinado criterio. Veamos algunos ejemplos:

1. *Irene tiene 4 pantalones y 6 camisetas. ¿Cuántas indumentarias distintas puede elegir?*



Cada *camiseta* puede ponerse con cada *pantalón*. Por tanto, el número de *indumentarias* es $4 \times 6 = 24$.

2. *Cuatro amigos,* A, B, C, D, *diseñan un campeonato de pimpón, todos contra todos, a un vuelta. ¿Cuántos partidos se han de jugar?*

A - B B - C C - D En total, 6 partidos.

A - C B - D

A - D

3. *¿Cuántos resultados distintos podemos obtener al lanzar un dado de color rojo y otro de color verde?*

Cada resultado del dado rojo se puede emparejar con cada uno de los del dado verde. Por tanto, habrá $6 \times 6 = 36$ resultados.

4. *¿De cuántas formas se pueden sentar 3 amigos* P, Q, R, *en un banco que tiene tres lugares* __ __ __*?*

Hagámoslas:

P Q R P R Q Q P R Q R P R P Q R Q P

Hay seis formas distintas.

Actividades

1 Irene, además de 4 pantalones y 6 camisetas, tiene 3 gorras. ¿Cuántas indumentarias de pantalón-camiseta-gorra puede llevar?

2 ¿Cuántos partidos han de jugar 5 amigos, A, B, C, D, E, para completar un campeonato de pimpón, todos contra todos, a una vuelta?

3 Lanzamos un dado y extraemos una carta de una baraja de 40 cartas. ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener?

4 En una carrera compiten 4 corredores, P, Q, R, S, y se entregan dos copas: una grande al campeón y otra pequeña al segundo. ¿De cuántas formas se puede hacer el reparto?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

2 El diagrama en árbol

Como has podido ver en el apartado anterior, para resolver un problema de combinatoria es fundamental tener muy claro cuáles son las condiciones de las agrupaciones buscadas y proceder con orden y sistema a su formación o a su recuento. Para esta forma de proceder, es sumamente útil el diagrama en árbol. Veamos en qué consiste mediante algunos ejemplos:

QUINIELA	
Mallorca – Deportivo	❑
Betis – Albacete	❑

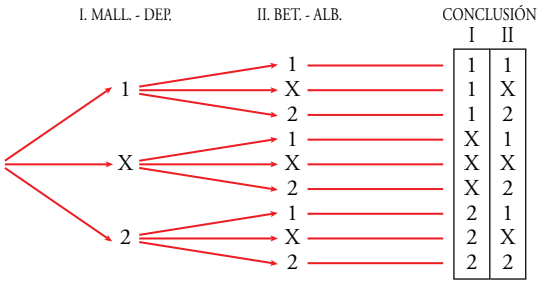
• **Ejemplo 1.** *Se juegan los partidos de ida de las semifinales de la Copa del Rey de fútbol. Son Mallorca-Deportivo y Betis-Albacete. Se confecciona una quiniela con los dos partidos.*

En cada casillero hay que poner 1, X o 2. Para ganar, hay que acertar los dos resultados.

a) ¿Cuántas quinielas hay que rellenar para tener la seguridad de ganar?

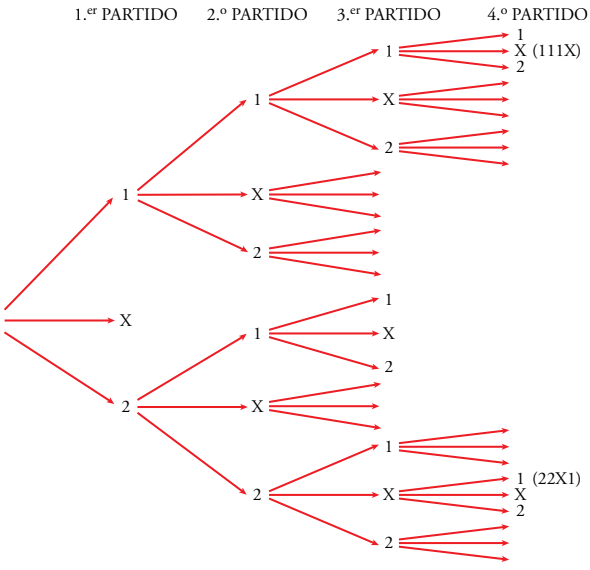
b) ¿Cuántas quinielas habría que haber hecho la semana anterior para acertar los cuatro partidos de vuelta de los cuartos de final de la Copa del Rey?

a): ¿Cuántas quinielas hay que hacer para acertar los dos partidos?



Tres posibilidades para acertar el primer partido. A cada una de esas tres posibilidades le corresponden las tres que se necesitan para acertar el otro partido.

$3 \cdot 3 = 9$ quinielas



El **diagrama en árbol** tiene la ventaja de que permite pensar, paso a paso, en este tipo de problemas en los que las distintas posibilidades se van multiplicando.

Antes de dar cada paso, nos cuestionaremos a cuántas ramas da lugar la nueva situación en la que nos encontramos.

Resolvamos el apartado **b).**

En cada paso, el número de posibilidades se multiplica por 3, pues el resultado de cada partido no depende de los anteriores.

El número de quinielas posibles es:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$$

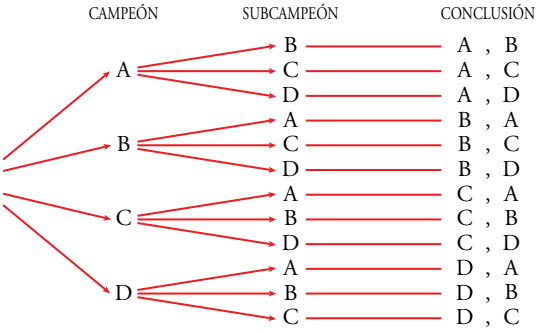
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

• **Ejemplo 2.** *Antonio, Beatriz, Carmen y Darío juegan la fase final de un campeonato de pimpón. Hay una copa para el campeón y una placa para el subcampeón.*

a) ¿De cuántas formas pueden adjudicarse los trofeos?

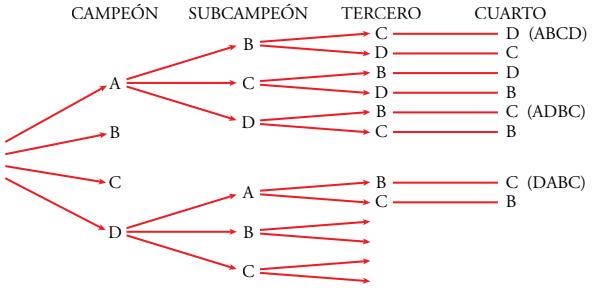
b) ¿Cuántas posibles clasificaciones finales puede haber?

a): ¿De cuántas formas pueden repartirse los dos trofeos?



Hay cuatro posibilidades para el puesto de campeón. Cada una de ellas se puede completar con 3 opciones para el subcampeón.

$4 \cdot 3 = 12$ posibilidades



b): ¿Cuántas posibles clasificaciones finales puede haber?

Hay 4 posibles campeones, pero, una vez fijado el campeón, solo puede haber 3 subcampeones. Y si fijamos al 1.° y al 2.°, solo quedan 2 aspirantes para el 3.er lugar. Conocidos los 1.°, 2.° y 3.°, para el 4.° lugar solo queda un candidato.

El número de posibilidades es:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Con el **diagrama en árbol** se puede pensar paso a paso y permite ver cuáles son las distintas posibilidades que se dan en cada uno de esos pasos.

Si en lugar de pormenorizar todas las posibilidades solo queremos contarlas, podremos dejar el árbol incompleto o, incluso, simplemente imaginarlo:

¿Cuántas flechas hay que poner en primer lugar? ¿Cuántas salen de cada uno de esos resultados?…

Ejercicio resuelto

¿De cuántas formas se pueden repartir 3 medallas entre las 12 participantes de una carrera?

1.er lugar: 12.
2.° lugar: Por cada una de las anteriores, 11.
3.er lugar: Por cada una de las anteriores, 10.

Total:
$12 \times 11 \times 10 =$
$= 1\,320$ posibilidades

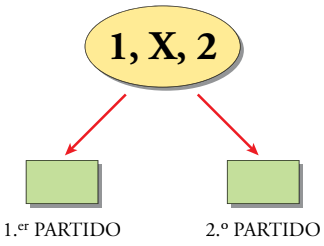
Actividades

1 Alberto, Beatriz y Claudia van a ver a su abuelo. Al irse, este les dice: "Escoged cada uno el libro que queráis de estos", y les muestra 10 libros distintos. ¿De cuántas formas pueden hacer su elección?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.° B ESO. Material fotocopiable autorizado.

3 Variaciones y permutaciones

Algunos de los problemas que se han resuelto en los apartados anteriores tienen aspectos comunes. Los clasificaremos en modelos que podemos tratar teóricamente, es decir, de forma general.



Variaciones con repetición

Vamos a recuperar un problema, resuelto antes, para que nos sirva de modelo.

- *Se juegan dos partidos. ¿Cuántas quinielas hemos de hacer para acertar los dos?*

  Disponemos de tres signos, 1, X, 2. Con ellos hemos de llenar dos lugares. Podemos poner el mismo signo en los dos lugares (es decir, puede repetirse). El número de posibilidades es $3 \cdot 3 = 3^2$.

- *¿Y para acertar cuatro partidos?*

  Con los tres signos, 1, X, 2, hemos de llenar cuatro lugares, pudiendo repetirse una o más veces los signos utilizados.

  El número de posibilidades es $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$.

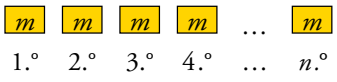
Variaciones con repetición

- Hay m elementos de partida.
- Se forman agrupaciones de n de esos elementos.
- Pueden estar repetidos.
- Importa el orden en que se ponen.

Disponemos de m elementos. Formamos agrupaciones ordenadas ("tiras") de n de ellos, repetidos o no.

A estas agrupaciones se las llama **variaciones con repetición** de m elementos tomados n a n. Al número de ellas se le designa por $VR_{m,\,n}$ (o bien VR_m^n).

$$VR_{m,\,n} = m^n$$



Justificación de la fórmula

En el primer lugar podemos situar cualquiera de los m elementos. En el 2.º lugar, también, sin importar cuál es el que ocupa el 1.º. Y así sucesivamente, cada lugar puede ser ocupado por cualquiera de los m elementos sin importar cuáles son los que ocupan los lugares anteriores. Por tanto, el número de posibilidades es $m \cdot m \cdot \ldots \cdot m$ (n factores) $= m^n$.

Actividades

Resuelve cada enunciado de dos formas:

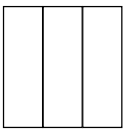
a) Realizando un diagrama en árbol o razonando como si lo realizaras.

b) Reconociendo el modelo de variaciones con repetición y aplicando la fórmula.

1 ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden formar con las cifras impares?

2 Lanzamos un dado 4 veces. Importa el orden en que salen los números. ¿Cuántos resultados distintos pueden darse?

3 Disponemos de 7 colores con los que hemos de pintar las tres franjas adjuntas.



¿Cuántas banderas salen?

Notas: 1. Cada franja hay que llenarla con un solo color.

2. Dos o las tres franjas pueden ser del mismo color.

3. Dos banderas con los mismos colores colocados en distinto orden son distintas.

4 ¿Cuántas quinielas hemos de rellenar para acertar, con seguridad, los 15 resultados?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

Variaciones ordinarias

- *¿De cuántas formas pueden obtener los puestos 1.° y 2.° los cuatro participantes en un torneo?*

  Disponemos de cuatro elementos, A, B, C, D. Para el 1.er lugar, hay 4 opciones. Una vez fijado el primero, para el 2.° lugar, quedan 3 opciones (no hay repetición, ya que el que queda 1.° no puede quedar 2.°).

  El número de posibilidades es $4 \cdot 3 = 12$.

- *¿De cuántas formas se pueden repartir las 3 medallas los 8 finalistas de una carrera?*

  Disponemos de 8 elementos. Hemos de clasificar, ordenadamente, a 3.

  Para el 1.er lugar, hay 8 posibilidades. Fijado el 1.°, hay 7 posibles segundos puestos. Fijados el 1.° y el 2.°, hay 6 posibles terceros puestos.

  Número de posibilidades: $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Variaciones ordinarias

- Hay m elementos de partida.
- Se forman agrupaciones de n de ellos. Obviamente, $n \leq m$.
- No pueden repetirse.
- Importa el orden en que se ponen.

m	$m-1$	$m-2$	…	$m-n+1$
1.°	2.°	3.°	…	n.°

Disponemos de m elementos. Formamos agrupaciones ordenadas ("tiras") de n de ellos, sin que se repita ninguno. A estas agrupaciones se las llama **variaciones ordinarias,** o simplemente, **variaciones** de m elementos tomados n a n. Al número de ellas se le designa por $V_{m,n}$ (o bien V_m^n).

$$V_{m,n} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots}_{n \text{ factores decrecientes}}$$

Permutaciones

- *¿De cuántas formas pueden quedar clasificados los cuatro participantes en un torneo?*

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ formas}$$

- *¿Y los ocho finalistas olímpicos en una carrera?*

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$$

Permutaciones

- Hay m elementos de partida.
- Se toman los m.
- No pueden repetirse.
- Lo único que importa es el orden.

Las distintas formas en que se pueden ordenar los m elementos de un conjunto se llaman **permutaciones.** Su número se designa por P_m (se lee "permutaciones de m elementos") y es igual al número de variaciones de m elementos tomados m a m.

$$P_m = V_{m,m} = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

A este número se le llama m **factorial** y se escribe $m!$

Por ejemplo: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

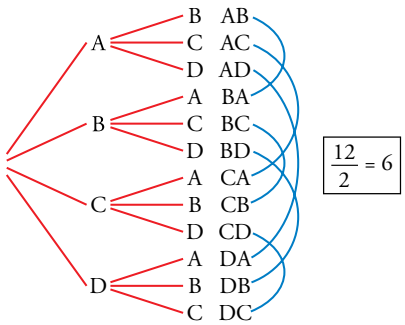
Actividades

5 Enuncia un problema similar al de las banderas de la página anterior que se resuelva mediante variaciones ordinarias y resuélvelo razonadamente (diagrama en árbol) y aplicando la fórmula.

6 En los ejercicios propuestos y resueltos en los dos apartados anteriores, identifica cuáles responden al modelo de variaciones con repetición, de variaciones ordinarias o de permutaciones, y resuélvelos mediante las fórmulas.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.° B ESO. Material fotocopiable autorizado.

4 Cuando no influye el orden



Cada partido está dos veces.

Empecemos poniendo algunos ejemplos que nos sirvan de referencia.

- *Cuatro amigos juegan un campeonato de pimpón por el sistema de liga (todos contra todos) a una sola vuelta. ¿Cuántos partidos jugaron?*

  Si utilizamos un diagrama en árbol para contar el número de partidos, obtendremos $4 \cdot 3 = 12$, pero nos encontraremos con que aparecerá cada partido dos veces: AB y BA, AC y CA, CD y DC…

  Por tanto, el número total de partidos reales se obtiene dividiendo por 2.

  La respuesta es $\frac{12}{2} = 6$.

- *Diez antiguos amigos se citan en un lugar a cierta hora. Al encontrarse, ¿cuántos apretones de manos se dan?*

  Si influyera el orden (A saluda a B, B saluda a A), entonces habría $10 \cdot 9 = 90$ saludos. Como no influye el orden, cada saludo se ha considerado dos veces.

  Por tanto, el número de apretones de mano es $90 : 2 = 45$.

- *En una carrera con 8 corredores se clasifican para la final los tres primeros. ¿De cuántas formas puede efectuarse la clasificación?*

  Si influyera el orden, ¿de cuántas formas distintas pueden asignarse los tres primeros puestos?

  La respuesta es $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

  Teniendo en cuenta que no influye el orden, ¿cuántas veces hemos contado la clasificación de los mismos individuos?

  ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

  Seis formas, tantas como permutaciones de 3 elementos: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

  Por tanto, el número de posibles clasificaciones es $336 : 6 = 56$.

Estrategia

Contar como si influyera el orden y dividir por el número de repeticiones.

La estrategia que se ha utilizado en estos tres problemas es la misma:

Hemos reinterpretado el enunciado como si el orden en que se seleccionan los elementos sí influyera. Después, hemos averiguado el número de veces que se ha contado cada uno de los casos que nos interesan, y hemos dividido por él.

Es importante que adquieras destreza con esta estrategia, porque te ayudará a resolver numerosos problemas.

Actividades

1 En un monte hay 7 puestos de vigilancia contra incendios y cada uno de ellos está unido a los demás por un camino. ¿Cuántos caminos habrá en total?

2 Vicente quiere regalar a su amigo Carlos 3 discos, y los quiere elegir entre los 10 que más le gustan. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

5 Combinaciones

La palabra "combinación"

La "combinatoria" es el arte de "combinar", es decir, de hacer y contar "combinaciones" entre objetos siguiendo ciertas reglas. En este contexto, la palabra *combinación* puede significar "agrupamiento", "selección con ciertos criterios"… Tiene un *significado amplio*.

Pero, a partir de ahora, la palabra **combinación** adquiere un significado muy preciso: el que le damos en esta página.

Por tanto, en adelante, cuando se hable de "combinaciones", deberás fijarte si se refiere a la expresión de siempre, en sentido amplio, o bien a esta otra tan concreta.

Vamos a recuperar algunos problemas resueltos en el apartado anterior que nos sirvan de modelo para el tratamiento teórico de un nuevo tipo de agrupamiento.

- *¿Cuántos partidos han de jugar 4 amigos si deciden enfrentarse cada uno contra todos los demás?*

  Disponemos de 4 elementos, A, B, C, D. Queremos agruparlos de dos en dos, sin que importe el orden. El número de posibilidades se obtiene contándolas como si importara el orden ($4 \cdot 3$) y, después, dividiendo por el número de veces que está repetida cada opción.

  Resultado: $\dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$

- *¿Cuántos apretones de mano se darán 10 amigos que se encuentran?*

  Análogamente, contamos los saludos como si importara el orden (A saluda a B o B saluda a A). Serían $V_{10,\,2} = 10 \cdot 9$. Después, dividimos por 2.

  Resultado: $\dfrac{10 \cdot 9}{2} = 45$

- *En un colectivo de 10 personas, ¿de cuántas formas se pueden elegir los 3 representantes que acudirán a una cierta reunión?*

  Aunque no importa el orden en que salgan elegidos, empecemos contándolos como si importara: $V_{10,\,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8$

  Pero como no influye el orden, cada una de las posibles elecciones la hemos contado 6 veces: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Tantas como formas en que se pueden ordenar estos 3 elementos, es decir:

  $$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ (permutaciones de 3 elementos)}$$

  Por tanto, el número de posibles elecciones es: $\dfrac{V_{10,\,3}}{P_3} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$

Generalicemos estos resultados:

Combinaciones

- Hay m elementos de partida.
- Se forman agrupaciones de n de ellos.
- No pueden estar repetidos.
- No importa el orden.

Disponemos de m elementos. Se llaman **combinaciones** a las distintas agrupaciones que podemos formar tomando n de ellos, sin que importe el orden en que aparezcan y sin que puedan repetirse. Su número se designa por $C_{m,\,n}$ (o bien C_m^n, y se lee "combinaciones de $\boldsymbol{m}$ elementos tomados $\boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{n}$").

$$C_{m,\,n} = \frac{V_{m,\,n}}{P_n} = \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Actividades

1 Tenemos 6 puntos en el espacio de tal modo que no hay tres alineados ni cuatro coplanarios. ¿Cuántas rectas podemos trazar uniendo dos de estos puntos? ¿Cuántos planos que se apoyen en tres de ellos? (ALINEADOS: Sobre la misma línea recta. COPLANARIOS: Sobre el mismo plano).

2 ¿Cuántas posibles mezclas de dos colores, en idénticas cantidades, se pueden hacer con 8 tarros de pintura de distintos colores?

¿Cuántas mezclas de tres colores?

¿Y de cuatro colores?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

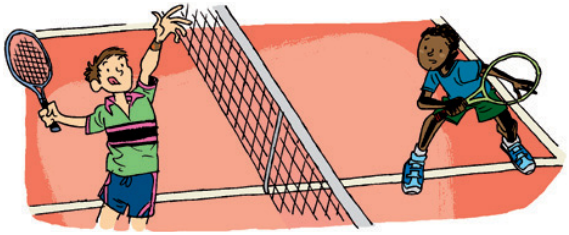
Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Formar agrupaciones

1 ▼▽▽ Dos amigos juegan al tenis y acuerdan que será vencedor el primero que logre ganar dos sets. Escribe todas las formas en que puede desarrollarse el partido.



2 ▼▽▽ a) Forma todos los números de cuatro cifras que se puedan hacer con los dígitos 1 y 2. ¿Cuántos son?

b) ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden hacer con los dígitos 0 y 1?

Ten en cuenta que 01101 = 1 101 no es un número de cinco cifras.

3 ▼▽▽ Si queremos hacer lápices bicolores de doble punta y disponemos de los colores rojo, azul, negro, verde y amarillo, ¿cuántos modelos se pueden formar? Escríbelos todos.

4 ▼▽▽ Si tienes tres pantalones (AZUL, NEGRO, BLANCO) y cuatro camisetas (AZUL, ROJA, VERDE, BLANCA), describe todas las indumentarias que puedes vestir sin que coincidan el color de las dos prendas.

Utilizar las fórmulas

5 ▼▽▽ Calcula:

a) $VR_{4,3}$ b) $VR_{3,4}$ c) $V_{7,3}$ d) P_7

e) $C_{6,4}$ f) $V_{9,5}$ g) $\frac{P_{10}}{P_8}$ h) $C_{10,8}$

6 ▼▽▽ Calcula:

a) $V_{5,2} - C_{5,3}$ b) $\frac{VR_{6,2}}{C_{4,2}}$ c) $\frac{P_4}{V_{4,3}}$

d) $\frac{P_5}{P_3}$ e) $\frac{P_{10}}{P_9}$ f) $\frac{P_{12}}{P_9}$

7 ▼▽▽ Las expresiones $VR_{8,2}$; P_8; $V_{8,2}$; $C_{8,2}$ son las soluciones de los siguientes apartados a), b), c), d), pero no en ese orden. Asigna a cada apartado su solución:

a) Palabras de ocho letras, con o sin sentido, que se pueden hacer con las letras de PELÍCANO.

b) Posibles parejas que se pueden formar para jugar un torneo de ajedrez entre 8 personas.

c) Números de dos cifras que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

d) Posibles formas de dar el primer y segundo premios de un concurso literario con 8 participantes.

8 ▼▽▽ **Ocho problemas muy parecidos.** En cada uno de los siguientes problemas la pregunta es: *¿De cuántas formas se puede hacer?*

a) 3 chicos van a comprarse un polo cada uno a una heladería en la que hay 6 clases de polos.

b) 6 chicos van a comprarse un polo cada uno a una heladería en la que hay 3 clases de polos.

c) Repartir 3 polos distintos entre 6 chicos.

d) Repartir 3 polos iguales entre 6 chicos.

e) Un chico escoge 3 polos entre 6 distintos.

f) Un chico escoge 3 polos entre 6 iguales.

g) Repartir 6 polos distintos entre 6 chicos.

h) Repartir 3 polos de fresa y 3 de vainilla entre 6 chicos.

Sus soluciones son: C_6^3, P_6, VR_6^3, 1, VR_3^6, V_6^3. Están dadas en otro orden y se pueden repetir.

9 ▼▼▽ ¿De cuántas formas pueden repartirse 3 entradas para un concierto de rock entre 6 amigos y amigas sin que ninguno pueda llevarse más de una?

10 ▼▼▽ Para formar un equipo de baloncesto, hacen falta 5 jugadores y el entrenador dispone de 10.

a) ¿Cuántos equipos distintos puede formar?

b) Si elige a dos jugadores y los mantiene fijos, ¿cuántos equipos distintos podrá hacer con los ocho que le quedan?

11 ▼▼▽ Se van a celebrar elecciones en una comunidad de vecinos y hay que elegir al presidente, al secretario y al tesorero. ¿De cuántas maneras se pueden elegir estos tres cargos, si se presentan ocho candidatos?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

12 ▼▼▽ Se van a repartir tres regalos entre seis personas. Calcula de cuántas formas se pueden repartir en cada uno de los siguientes casos:

a) Los regalos son distintos (una bicicleta, unos patines y un chándal) y no puede tocarle más de un regalo a la misma persona.

b) Los regalos son iguales y no puede tocarle más de un regalo a la misma persona.

c) Los regalos son distintos y puede tocarle más de uno a la misma persona.

13 ▼▼▽ Los participantes de un concurso tienen que ordenar a ciegas seis tarjetas en las que está escrita cada una de las letras de la palabra PREMIO.

a) ¿Cuántas ordenaciones distintas pueden salir?

b) Les ofrecen fijar la P en el lugar que le corresponde y reducir el premio a la mitad. ¿Cuántas ordenaciones posibles se pueden obtener de esta forma?

14 ▼▼▽ ¿De cuántas formas pueden sentarse tres personas en un banco de 5 asientos?

¿Y si el banco es de 3 asientos?

15 ▼▽▽ Estás haciendo la maleta para irte de vacaciones y quieres llevarte cuatro de las ocho camisetas que tienes. ¿De cuántas formas las puedes seleccionar?

16 ▼▽▽ El lenguaje de un ordenador se traduce a secuencias de dígitos formados por ceros y unos. Un *byte* es una de estas secuencias y está formado por 8 dígitos.

Por ejemplo: | 0 0 1 0 0 0 1 1 |

¿Cuántos *bytes* diferentes se pueden formar?

Aplica lo aprendido

17 ▼▼▽ El número 75 775 está formado por dos cincos y tres sietes.

¿Cuáles son los números que podemos formar con dos cincos y tres sietes?

18 ▼▽▽ En unos almacenes emplean el siguiente código para marcar los artículos:

- La primera cifra indica la sección correspondiente y es un número entre el 1 y el 9.
- Después, hay tres cifras, cada una de ellas del 0 al 9, que corresponden al número del proveedor.

¿Cuántas marcas distintas se pueden hacer?

19 ▼▼▽ Seis amigos, 3 chicos y 3 chicas, van al cine.

¿De cuántas formas pueden sentarse si quieren estar alternados?

Autoevaluación

¿Conoces los agrupamientos combinatorios clásicos (variaciones, permutaciones, combinaciones), las fórmulas para calcular su número y los aplicas a la resolución de problemas?

1 En un examen, el profesor ha puesto 7 problemas, de los que hay que elegir 5.

¿Cuántas elecciones se puede plantear un alumno?

2 ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden hacer con los dígitos 1, 2 y 3?

3 ¿De cuántas formas podemos elegir al delegado y al subdelegado de un curso en el que hay siete candidatos?

¿Utilizas el diagrama en árbol y otras estrategias para formar o contar agrupaciones siguiendo ciertos criterios?

4 Con las letras de la palabra CASA, ¿cuántas ordenaciones, con o sin sentido, podemos formar? Escríbelas todas.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 4.º B ESO. Material fotocopiable autorizado.