8 Funciones. Características

El concepto de función ha ido evolucionando y perfilándose a lo largo del tiempo. ¿Qué requisitos se le ha ido exigiendo a dicho concepto?

— Una función relaciona dos variables.

— Las funciones describen fenómenos naturales.

— Las relaciones funcionales pueden ser descritas mediante fórmulas (relaciones algebraicas).

— Las funciones pueden ser representadas gráficamente.

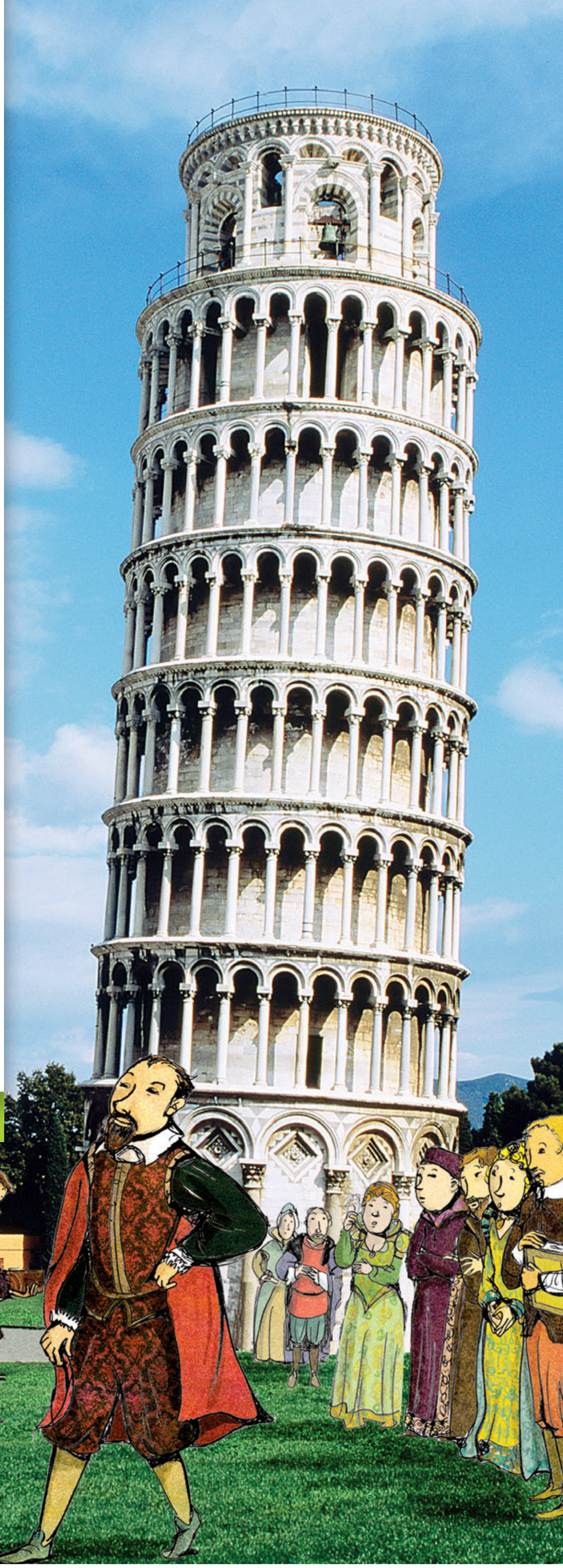
Oresme (matemático francés del siglo XIV) afirmó en 1350 que las leyes de la naturaleza son relaciones de dependencia entre "dos cantidades". Puede considerarse una primera aproximación al concepto de función.

Galileo (finales del siglo XVI) utiliza por primera vez la experimentación cuantitativa (diseña, experimenta, mide, anota) para establecer relaciones numéricas que describan fenómenos naturales.

Descartes (siglo XVII), con su algebrización de la geometría, propicia que las funciones puedan ser representadas gráficamente.

Leibniz, en 1673, utiliza por primera vez la palabra *función* para designar estas relaciones.

Euler, entre 1748 y 1755, fue perfilando el concepto, al que dio precisión y generalidad, admitiendo, finalmente, que una relación entre dos variables puede ser función aunque no haya una expresión analítica que la describa. El propio Euler fue quien aportó la nomenclatura $f(x)$.



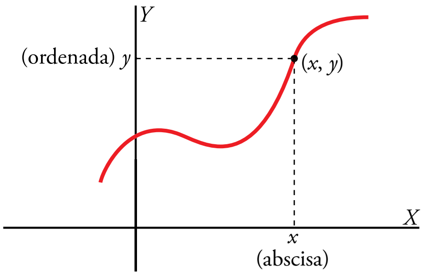
1 Conceptos básicos

Una función liga dos variables numéricas a las que, habitualmente, se las llama x e y:

x es la **variable independiente** $\quad$ y es la **variable dependiente**

La función, que se suele denotar por $y = f(x)$, asocia a cada valor de x **un único** valor de y:

$$x \to y = f(x)$$

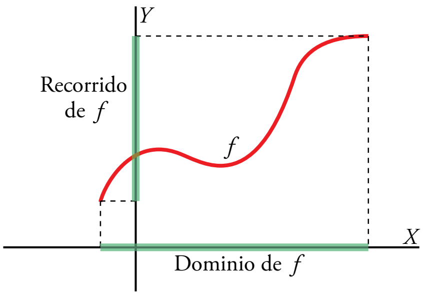


Para visualizar el comportamiento de una función, recurrimos a su representación gráfica: sobre unos ejes cartesianos con sendas escalas, representamos las dos variables:

La x sobre el eje horizontal (eje de **abscisas**).

La y sobre el eje vertical (eje de **ordenadas**).

Cada punto de la gráfica tiene dos **coordenadas,** su abscisa, x, y su ordenada, y.

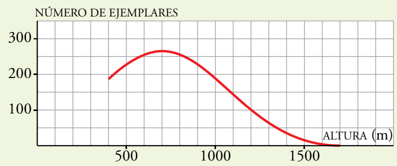


Se llama **dominio de definición** de una función, f, y se designa por *Dom f*, al conjunto de valores de x para los cuales existe la función.

Se llama **recorrido** de f al conjunto de valores que toma la función. Es decir, al conjunto de valores de y para los cuales hay un x tal que $f(x) = y$.

Ejercicio resuelto

En una comarca crece una cierta planta. Analizar la función *n.º medio de ejemplares por hectárea* a distintas *alturas*:



Se ligan dos variables: la *altitud*, a, medida en metros, y el *número medio de ejemplares por ha*, n.

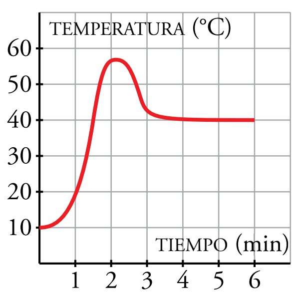
La primera es la variable independiente. La segunda es la variable dependiente.

Para cada valor de a hay un único valor de n. Por tanto, n es una función que depende de a: $n = f(a)$.

El dominio de definición es el intervalo [400, 1 700]. El recorrido es el intervalo [0, 260].

Actividades

1



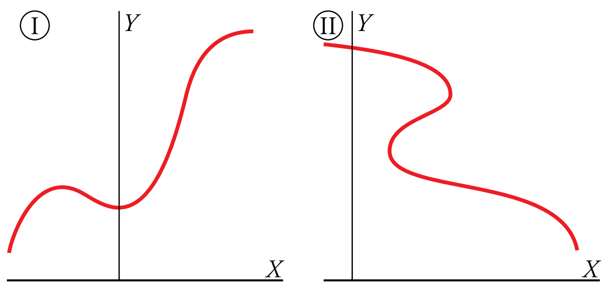
La gráfica describe la temperatura a la que sale el agua de un grifo que está un rato abierto.

a) ¿Cuáles son las dos variables?

b) Explica por qué es una función.

c) ¿Cuáles son el dominio de definición y el recorrido?

2



Una de estas dos gráficas corresponde a una función, y la otra, no. Identifica cada cual, razonadamente.

2 Cómo se nos presentan las funciones

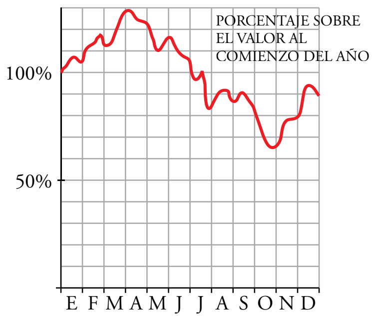
Tanto para el estudio de las matemáticas como para otras ciencias o en la vida cotidiana, nos encontramos frecuentemente con funciones.

Las funciones nos vienen dadas de muy diversas formas: mediante su *gráfica*, por una *tabla de valores*, por una *fórmula* o mediante una *descripción verbal (enunciado)*.

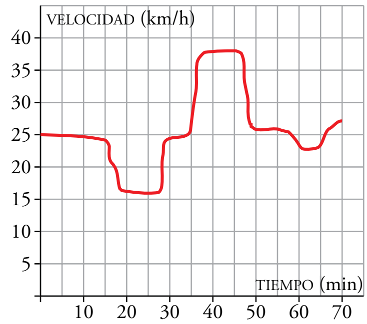
Mediante su expresión gráfica

Las siguientes dos funciones vienen dadas por sus representaciones gráficas:

ÍNDICE DE LA BOLSA EN UN AÑO



VELOCIDAD DE UN CICLISTA EN CADA INSTANTE DE UN RECORRIDO



Observa

La gráfica de una función permite apreciar su comportamiento global con un simple golpe de vista.

Como mejor se puede apreciar el comportamiento global de una función es mediante su **representación gráfica.** Por eso, siempre que pretendamos analizar una función, intentaremos representarla gráficamente, cualquiera que sea la forma en la cual, en principio, nos venga dada.

Mediante un enunciado

Cuando una función viene dada por un enunciado o una descripción (como la que se hace en la siguiente actividad 1 para describir el recorrido de Alberto hasta la escuela), la idea que nos podemos hacer de ella es, casi siempre, cuantitativamente poco precisa.

Actividades

1 Haz una gráfica en la que se vea representado el recorrido de Alberto desde su casa hasta el colegio, en función del tiempo: de casa salió a las 8:30 h y fue seguidito hasta casa de su amigo Íker. Lo esperó un rato sentado en un banco y luego se fueron juntos, muy despacio, hacia el colegio. Cuando ya estaban llegando, se dio cuenta de que se había dejado la cartera en el banco. Volvió corriendo, la recuperó y llegó al colegio a las 9 en punto.

2 Vamos a analizar la gráfica de arriba que describe la velocidad del ciclista:

a) ¿Cuánto tiempo tarda en hacer el recorrido?

b) En los primeros 15 minutos circula en llano. ¿A qué velocidad lo hace? ¿Qué distancia recorre?

c) Entre el minuto 18 y el 27 va cuesta arriba. Di a qué velocidad.

d) Señala un intervalo de 5 minutos en el que marcha cuesta abajo. ¿A qué velocidad lo hace?

Mediante una tabla de valores

Con frecuencia se nos dan los valores de una función mediante una tabla en la cual se obtienen directamente los datos buscados. Sin embargo, en otros casos, como en la tabla siguiente, hay que efectuar complejos cálculos para obtener lo que se busca.

Esta tabla de valores permite calcular lo que cada persona debe pagar a Hacienda un cierto año (cuota íntegra) en función de lo que gana (base liquidable).

BASE LIQUIDABLE HASTA EUROS	CUOTA ÍNTEGRA EUROS	RESTO BASE LIQUIDABLE HASTA EUROS	TIPO APLICABLE %
0	0	4 000	15
4 000	600	10 000	25
14 000	3 000	12 000	28
26 000	6 360	20 000	37
46 000	13 760	en adelante	45

Ejemplo

Alguien que gane 32 500 €:

- Se sitúa en la 4.ª fila.
- Por los primeros 26 000 € paga 6 360 €, y por el resto, el 37%:

  32 500 – 26 000 = 6 500 €

  37% de 6 500 = 6 500 × 0,37 = = 2 405 €

Por tanto, paga 6 500 + 2 405.

Es decir, si gana 32 500 €, ha de pagar 8 905 €.

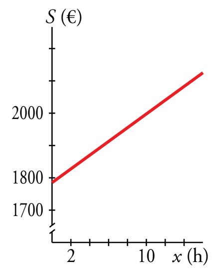
Mediante su expresión analítica o fórmula

La **expresión analítica** es la forma más precisa y operativa de dar una función. Pero requiere un minucioso estudio posterior.

Veamos algunos ejemplos:

▼ EJEMPLO 1

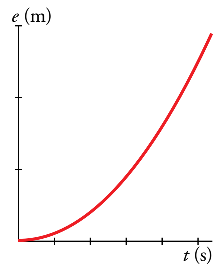
El sueldo, S, de un cierto empleado viene dado en función de las horas extraordinarias trabajadas, x; y se calcula, descontando un 15% de impuestos, mediante la fórmula $S = (2\,100 + 25x) \cdot 0{,}85$.



▼ EJEMPLO 2

Una bola que se deja caer por un plano levemente inclinado lleva una aceleración de 0,2 m/s^2.

La distancia, e, en metros, que recorre en función del tiempo, t, en segundos, viene dada por la fórmula $e = 0{,}1t^2$.



Actividades

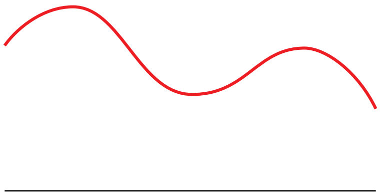
3 Teniendo en cuenta la tabla de arriba, calcula la cuota que corresponde a cada una de las siguientes bases liquidables:

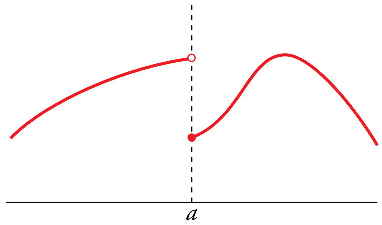
a) 12 640 € b) 25 000 €

4 En el EJEMPLO 1, calcula el sueldo del trabajor un mes en el que hizo 15 horas extraordinarias.

5 En el EJEMPLO 2, calcula la velocidad de la bola a los 5 segundos de ser lanzada.

3 Funciones continuas. Discontinuidades

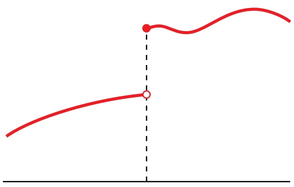




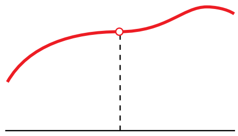
La función de la izquierda es continua en todo su dominio de definición.

La función de la derecha no es continua, porque presenta una discontinuidad en el punto de abscisa *a*.

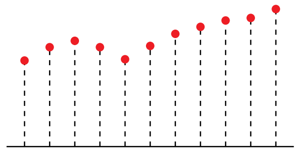
Hay distintos tipos de discontinuidad. Observa algunos:



Hay un salto.



Le falta un punto.



Solo está definida en puntos aislados.

Una función es **continua** cuando no presenta discontinuidades de ningún tipo.

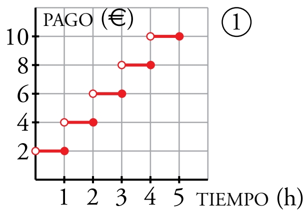
Se puede decir de una función que es **continua en un intervalo** $[a, b]$ si no presenta ninguna discontinuidad en él.

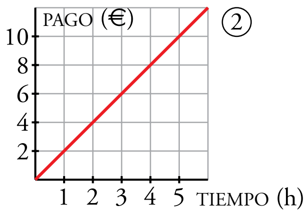
Ejemplos

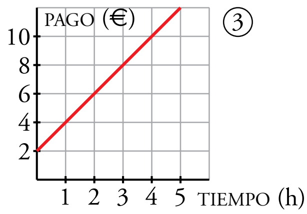
En la página de la izquierda hay tres gráficas continuas. Por ejemplo, la tercera: una pequeña variación en la longitud del péndulo trae como consecuencia una pequeña variación en su periodo.

Sin embargo, en el ejemplo 4 hay un punto de discontinuidad en $d = 2$ cm. Si un objeto estaba a 1,99 cm de la lupa y lo pasamos a 2,01 cm (una pequeña variación en d) el aumento A varía drásticamente.

Hasta hace poco, los aparcamientos cobraban "por horas". Esto quiere decir que solo por entrar ya se pagaba 1 h. Si se estaba 1 h y 10 min se pagaban 2 h. La primera de las tres gráficas siguientes describe esta forma de pago:







Los usuarios prefieren que las tarifas se rijan por la función continua de en medio. Los representantes de los aparcamientos preferirían, si se quiere que la función sea continua, la de la derecha.

Observa

La primera gráfica, discontinua, refleja el pago "por horas" (hora empezada, hora pagada). La segunda consiste en pagar exactamente lo que se gasta. En la tercera, hay un pago inicial (por entrar en el aparcamiento, 2€) y, a continuación, se paga lo que se gasta.

Actividades

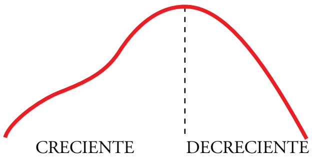
1 a) ¿Cuánto vale aparcar media hora según cada modelo ①, ② y ③?

b) ¿Cuánto dinero cuesta aparcar 1 h 15 min según cada modelo?

c) ¿Y aparcar 4 h y 6 minutos?

d) Propón un modelo de tarifa que sea intermedio entre la preferencia de los usuarios y la de los representantes de los aparcamientos.

4 Crecimiento, máximos y mínimos



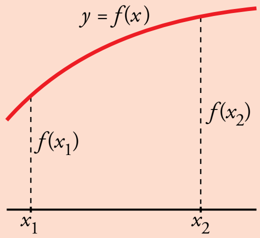
La función f es **creciente** en este tramo porque

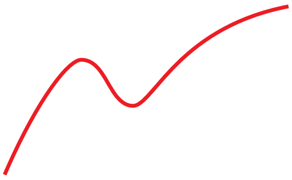
si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

Análogamente, una función es **decreciente** en un intervalo cuando

si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

Una función puede ser creciente en unos intervalos y decreciente en otros.

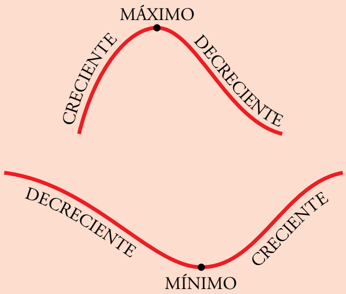




La función puede tomar en otros puntos valores mayores que un máximo relativo y menores que un mínimo relativo.

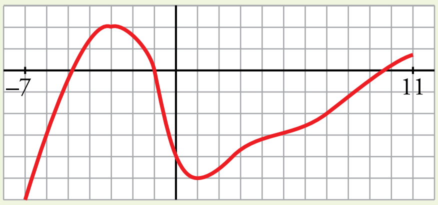
Una función tiene un **máximo relativo** en un punto cuando en él la función toma un valor mayor que en los puntos próximos. En tal caso, la función es creciente hasta el máximo y decreciente a partir de él.

Análogamente, si f tiene un **mínimo relativo** en un punto, es decreciente antes del punto y creciente a partir de él.



Ejercicio resuelto

Decir los intervalos en que es creciente y en los que es decreciente la función dada gráficamente a la derecha. ¿Cuáles son sus máximos y sus mínimos relativos?



La función está definida entre –7 y 11.

Es creciente en los intervalos (–7, –3) y (1, 11).

Es decreciente en el intervalo (–3, 1).

Tiene un máximo relativo en el punto de abscisa –3. Su valor es 2.

Tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa 1. Su valor es –5.

Hay puntos en los que la función toma valores menores que en el mínimo relativo. Por ejemplo, para $x = –7$, la función toma el valor –6.

Ten en cuenta

(–7, 11) ⟶ Intervalo abierto (no incluye los extremos –7 y 11).

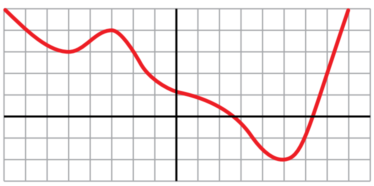
[–7, 11] ⟶ Intervalo cerrado (incluye los extremos –7 y 11).

Actividades

1 De la función de la derecha di:

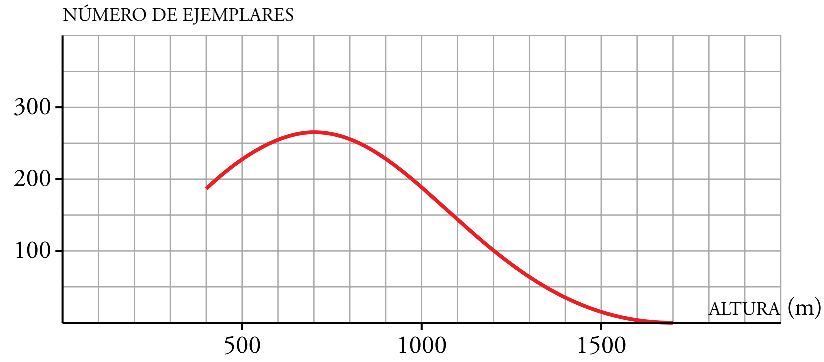
a) En qué intervalos es creciente y en cuáles es decreciente.

b) Cuáles son sus máximos y sus mínimos relativos.



5 Tendencia y periodicidad

Volviendo al ejemplo del ejercicio resuelto de la página 127, estudiamos la *cantidad media de ejemplares por hectárea* que hay de una cierta especie de planta a distintas *alturas*. El resultado se da en la gráfica siguiente:

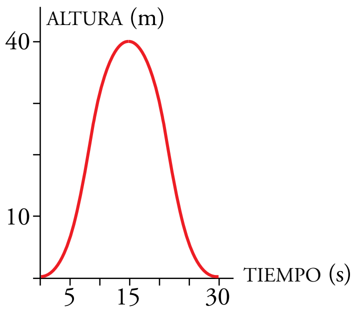


Observamos que, a partir de una cierta altura, cuanto más se sube menos ejemplares se encuentran. Y que, a partir de 1600 m, casi no hay plantas de este tipo. Podemos afirmar que:

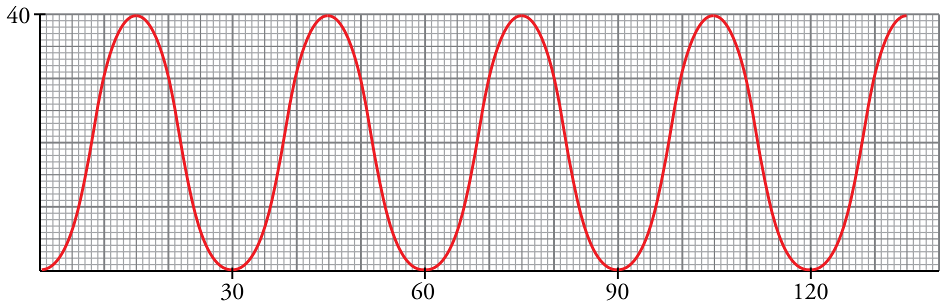
> *Cuando la altura aumenta por encima de los 1600 m, el número de plantas tiende a cero.*

Hay funciones en las que, aunque solo conozcamos un trozo de ellas, podemos predecir cómo se comportarán lejos del intervalo en que han sido estudiadas, porque tienen **ramas** con una **tendencia** muy clara.

Periodicidad



En el margen se ha representado la variación de la altura de un cestillo de una noria cuando esta da una vuelta. Tarda medio minuto (30 segundos), y en ese tiempo sube, llega al punto más alto, baja y llega al suelo. Pero este movimiento se repite una y otra vez. Su representación gráfica es esta:



En esta función, lo que ocurre en el intervalo [0, 30] se repite reiteradamente. Se trata de una *función periódica* de *periodo* 30.

Función periódica es aquella cuyo comportamiento se repite cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. La longitud de ese intervalo se llama **periodo.**

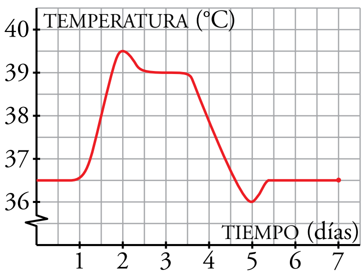
Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Interpretación de gráficas

1 ▼▽▽ Esta es la gráfica de la evolución de la temperatura de un enfermo.



a) ¿Cuánto tiempo estuvo en observación?

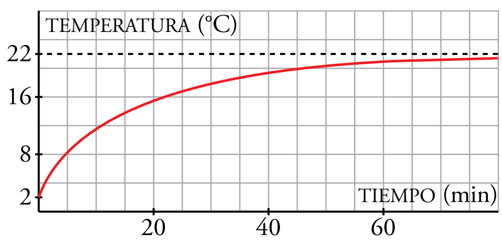
b) ¿En qué día la temperatura alcanza un máximo? ¿Y un mínimo?

c) ¿En qué intervalos de tiempo crece la temperatura y en cuáles decrece?

d) ¿Qué tendencia tiene la temperatura?

e) Elabora un pequeño informe interpretando tus resultados.

2 ▼▽▽ Hemos sacado de la nevera un vaso con agua y lo hemos dejado sobre la mesa de la cocina. Esta gráfica muestra la temperatura del agua en grados centígrados al pasar el tiempo.



a) ¿A qué temperatura está el interior de la nevera?

b) ¿A qué temperatura está la habitación?

c) Imagina que en ese mismo momento sacamos del microondas un vaso con agua a 98 °C y lo dejamos sobre la mesa. Dibuja una gráfica aproximada que muestre la temperatura del agua en este segundo vaso al pasar el tiempo.

Enunciados, fórmulas y tablas

3 ▼▽▽ Representa la función $y = x^3 - 3x + 2$ definida en $[-2, 3]$. Para ello, completa en tu cuaderno:

x	-2	-1	0	1	2	3
y						

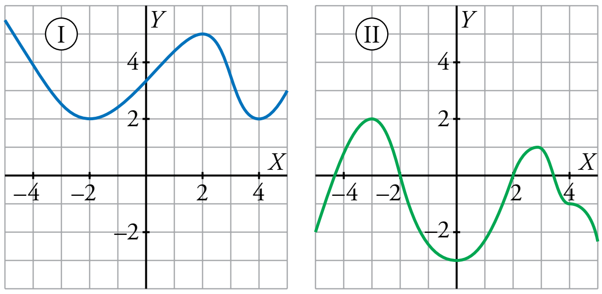
¿Cuál es el recorrido de la función?

Características de una función

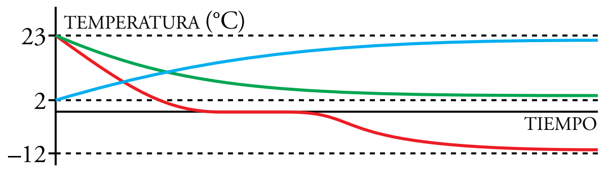
4 ▼▽▽ De cada una de las siguientes funciones di:

a) En qué intervalos crece y en cuáles decrece.

b) Cuáles son sus máximos y sus mínimos relativos.



5 ▼▽▽ Observa las siguientes gráficas de funciones:



a) Relaciona cada curva con uno de estos enunciados.

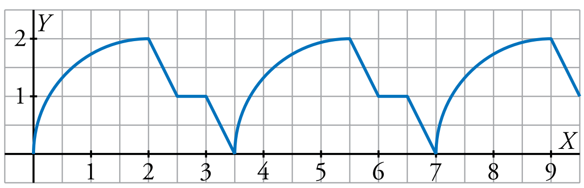
I. Temperatura de un vaso de agua cuando pasa de la mesa a la nevera.

II. Temperatura de un vaso de agua cuando sale de la nevera y se deja en la mesa.

III. Temperatura de un vaso de agua cuando pasa de la mesa al congelador.

b) Determina a qué tiende cada una cuando crece la variable independiente.

6 ▼▽▽ Continúa esta gráfica sabiendo que se trata de una función periódica. Di cuál es su periodo.



7 ▼▼▽ Tres deportistas han estado nadando durante media hora. Su entrenador ha anotado las siguientes distancias recorridas cada 5 minutos:

TIEMPO (min)	5	10	15	20	25	30
DISTANCIA A (m)	95	235	425	650	875	1 100
DISTANCIA B (m)	250	500	750	1 000	1 250	1 500
DISTANCIA C (m)	360	710	1 020	1 300	1 490	1 600

a) Dibuja la gráfica que relaciona la distancia y el tiempo de cada nadador y descríbelas.

b) ¿Ha habido algún adelantamiento durante la media hora?

c) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de cada una de las tres funciones?

8 ▼▼▽ Los coches, una vez que se compran, empiezan a perder valor a un ritmo de un 20% anual.

a) Haz una tabla de valores que dé el valor, en años sucesivos, de un coche que costó 12 000 €.

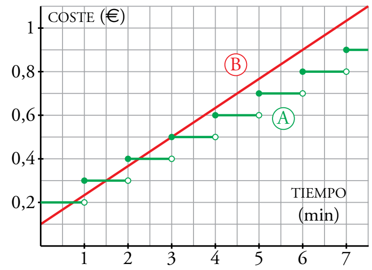
b) Representa gráficamente la función *años transcurridos-valor del coche*.

9 ▼▼▽ Cuando una persona toma 50 g de glucosa en ayunas, su glucemia (% de glucosa en sangre) se eleva, en 1 hora, desde 90 mg/*dl*, nivel normal, hasta 120 mg/*dl*. En las 3 horas siguientes, disminuye hasta valores algo por debajo del nivel normal, y vuelve a la normalidad al cabo de 5 horas.

a) Representa la curva de glucemia de una persona.

b) Di cuál es su máximo, su mínimo y explica su tendencia.

10 ▼▽▽ Dos compañías telefónicas, A y B, tienen diferentes tarifas. Observa las gráficas y contesta:



a) ¿Qué dos variables se relacionan en estas gráficas? ¿Cuál es la independiente? ¿Y la dependiente?

b) Di si cada una de estas funciones es continua. Escribe los puntos de discontinuidad, si los hay.

c) Di cuánto vale una llamada de 3 minutos con cada una de las dos compañías. ¿Y una de media hora?

Autoevaluación

¿Sabes interpretar una función a partir de una gráfica, una fórmula o un enunciado?

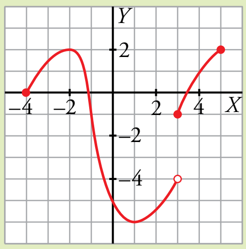
1 Un ciclista hace una excursión a un lugar que dista 30 km de su casa. Al cabo de una hora, cuando ha recorrido 15 km, hace una parada de media hora. Reanuda la marcha con la misma velocidad hasta llegar a su destino, donde descansa otra media hora, y regresa al punto de partida a la misma velocidad que a la ida. Representa la gráfica *tiempo-distancia al punto de partida*.

2 Completa la siguiente tabla en tu cuaderno y dibuja la gráfica de la función definida por la fórmula $y = x^2 - 4x$.

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
y									

¿Reconoces las características de una función?

3 Observa la gráfica y halla:



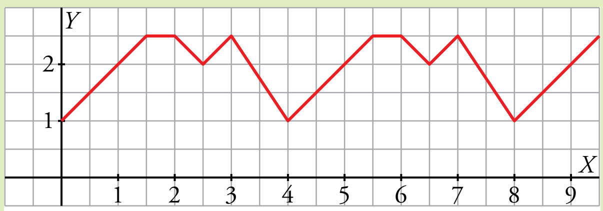
a) Dominio y recorrido.

b) Máximos y mínimos.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Dónde es continua y los puntos de discontinuidad.

4 ▼▼▽ ¿Es periódica esta función? ¿Cuál es su periodo?



Averigua los valores de la función dada por la gráfica anterior en los puntos de abscisas $x = 1$, $x = 3$, $x = 20$, $x = 23$ y $x = 42$.

9 Las funciones lineales

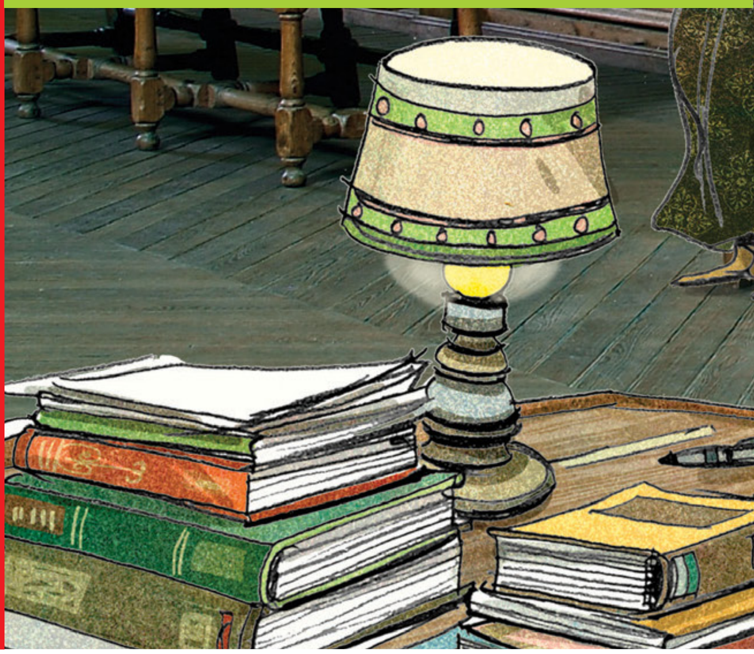
Después de Euler aún siguió, entre los matemáticos, la discusión de qué requisitos eran imprescindibles para definir una función y cuáles no. En 1923 se llegó a la siguiente definición, muy parecida a la que se usa actualmente:

> Se dice que y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un valor de y. Esta correspondencia se indica mediante la ecuación $y = f(x)$.

Pero en esa búsqueda de la precisión, se generaron una serie de funciones estrafalarias que llevaron a **Poincaré,** en el año 1899, a decir:

> "Durante medio siglo hemos visto una masa de funciones extrañas que parecen forzadas a parecerse lo menos posible a las *funciones honestas* que sirven a algún propósito. Antes, cuando se inventaba alguna función, era con alguna meta práctica. Hoy son inventadas con el fin de mostrar que el razonamiento de nuestros antecesores fue erróneo".

En esta unidad, y en la próxima, vamos a dedicarnos a esas *funciones honestas* que propugnaba el gran Poincaré. Esas funciones que sirven para algo más que para construir o desmontar conceptos.



1 Idea de función lineal. Tipos

La ciencia, la técnica, la economía… están plagadas de funciones en las que *las variaciones de las causas influyen proporcionalmente en las variaciones de los efectos.* Todas estas funciones se llaman **lineales** y se representan mediante rectas. Veamos un ejemplo:

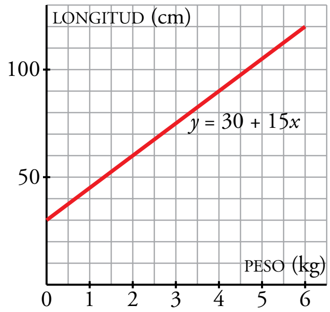
Alargamiento de un muelle

Si de un muelle colgamos distintas pesas, se producen diversos alargamientos. Es decir, la *longitud del muelle* es función del *peso* que se cuelga. Y es interesante destacar que esta función es lineal.

En concreto, supongamos que el muelle sin estirar mide 30 cm y que se alarga 15 cm por cada kilogramo que colguemos. La relación es:

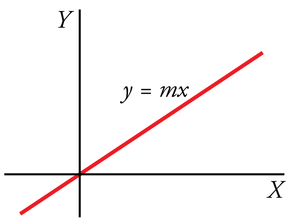
$y = 30 + 15x$ (y: longitud en cm; x: peso en kg)

El dominio de definición de esta función es $[0, 6]$, suponiendo que para pesos de más de 6 kg el muelle se deteriora.



Tipos de funciones lineales

Función de proporcionalidad: $y = mx$



Las funciones de proporcionalidad se representan mediante rectas que pasan por el origen. Describen una proporción entre los valores de las dos variables.

Al número m se le llama pendiente.

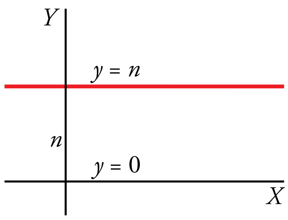
Ejemplo

El espacio recorrido con movimiento uniforme (velocidad constante) en función del tiempo es:

$$e = v \cdot t$$

v es la pendiente de la recta que relaciona e con t.

Función constante: $y = n$



Se representa mediante una recta paralela al eje X. Su pendiente es 0.

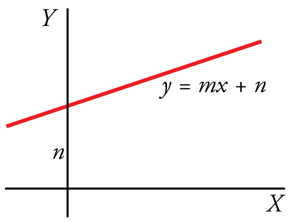
La recta $y = 0$ coincide con el eje X.

En estas rectas, todos los puntos tienen la misma ordenada. Por ejemplo, (2, 5), (6, 5), (11, 5) son puntos de la recta $y = 5$.

Ejemplo

El precio de la comida en algunos restaurantes es constante, no depende de la cantidad que nos sirvamos.

Expresión general: $y = mx + n$

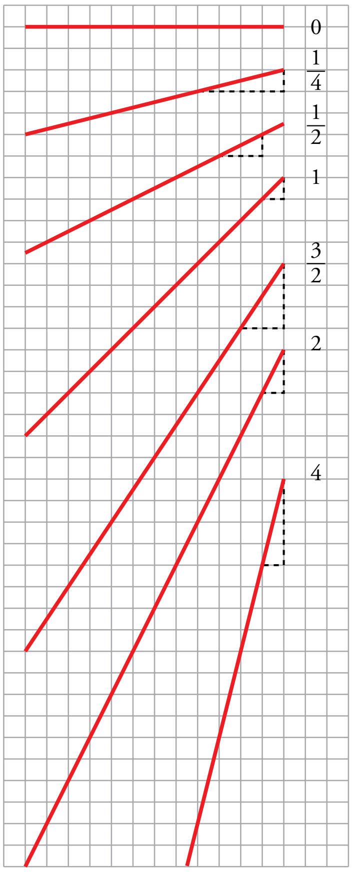


Su representación es una recta de pendiente m que corta al eje Y en el punto $(0, n)$. Al número n se le llama **ordenada en el origen.**

Ejemplo

La longitud de un muelle en función de la fuerza que lo estira.

2 Funciones lineales. Pendiente



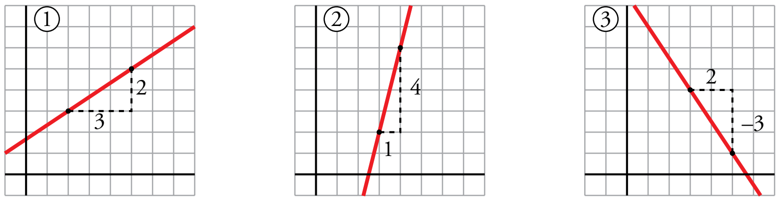
Observa cómo varía el valor de la pendiente al aumentar la inclinación de la recta.

Las funciones lineales, como hemos visto, responden a la ecuación $y = mx + n$, y se representan mediante rectas.

Recuerda que la pendiente de una recta tiene que ver con su inclinación respecto del eje X. Vamos a repasar el significado, la interpretación gráfica y la obtención de la pendiente de una recta.

Pendiente de una recta representada gráficamente

Observa cómo se obtienen las pendientes de las siguientes rectas:



① Cuando x *avanza* 3, y *sube* 2. Pendiente $= \frac{2}{3}$

② Cuando x *avanza* 1, y *sube* 4. Pendiente $= \frac{4}{1} = 4$

③ Cuando x *avanza* 2, y *baja* 3. Pendiente $= -\frac{3}{2}$

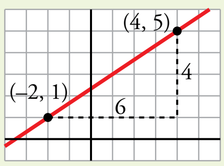
La **pendiente** de una recta es la variación de la y (aumento o disminución) cuando la x aumenta una unidad.

Para hallar la pendiente de una recta mediante su representación gráfica, se señalan dos de sus puntos y se mide la variación de la x y la variación de la y al pasar de un punto al otro. Entonces:

$$\text{Pendiente} = \frac{\text{variación de la } y}{\text{variación de la } x}$$

Ejercicio resuelto

Hallar gráficamente la pendiente de la recta que pasa por los puntos (–2, 1) y (4, 5).



Representamos los puntos y, contando cuadraditos, hallamos:

La variación de la x es 6; la variación de la y es 4.

Por tanto: pendiente $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Podemos observar que, efectivamente, cuando x avanza 3, y sube 2.

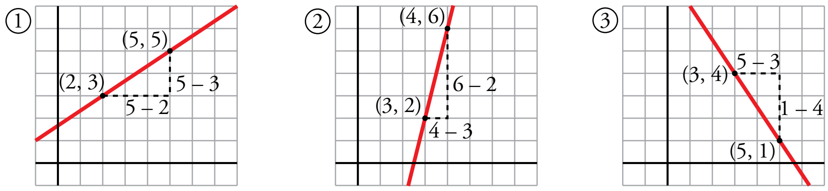
Actividades

1 Halla gráficamente la pendiente de la recta que pasa por (–3, –2) y (5, 4).

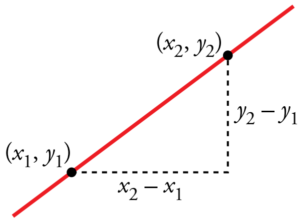
2 Halla gráficamente la pendiente de la recta que pasa por (–2, 6) y (4, 2).

Pendiente de una recta a partir de dos de sus puntos

Observa cómo se realiza numéricamente lo que en la página anterior se ha hecho gráficamente:



$\text{Pendiente} = \dfrac{5-3}{5-2} = \dfrac{2}{3}$ $\quad$ $\text{Pendiente} = \dfrac{6-2}{4-3} = 4$ $\quad$ $\text{Pendiente} = \dfrac{1-4}{5-3} = \dfrac{-3}{2}$



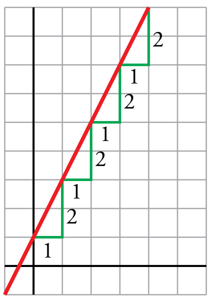
Si conocemos las coordenadas de dos puntos de la recta, $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, para hallar la pendiente, procedemos así:

$$\text{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$y_2 - y_1$ es la variación de la y.

$x_2 - x_1$ es la variación de la x.

Pendiente de una recta dada por su ecuación



La pendiente de una recta dada por su ecuación es el coeficiente de la x cuando está despejada la y.

Por ejemplo, observemos una tabla de valores correspondientes a $y = 2x + 1$:

x	0	1	2	3	4
y	1	3	5	7	9

Advertimos que *cuando la x avanza 1, la y sube 2;* es decir, la pendiente de la recta es 2.

Problemas resueltos

1. Hallar las pendientes de las rectas que pasan por los puntos:

a) $P(-1, 3)$, $Q(4, 13)$

b) $A(7, 4)$, $B(2, -5)$

2. Hallar las pendientes de:

a) $y = 3x$

b) $y = -2x + 1$

c) $2x + 3y - 7 = 0$

1. a) $\text{Pendiente} = \dfrac{13-3}{4-(-1)} = \dfrac{10}{5} = 2$

b) $\text{Pendiente} = \dfrac{-5-4}{2-7} = \dfrac{-9}{-5} = \dfrac{9}{5}$

2. En a) y en b), la pendiente es evidente, pues la y está despejada:

a) $m = 3$ $\quad$ b) $m = -2$

c) Despejamos la y: $3y = 7 - 2x \rightarrow y = \dfrac{7}{3} - \dfrac{2}{3}x \rightarrow m = -\dfrac{2}{3}$

Actividades

3 Halla las pendientes de las rectas que pasan por estos pares de puntos:

a) (3, 1) y (7, 5) $\quad$ b) (3, 5) y (7, –2)

c) (3, –2) y (7, 8) $\quad$ d) (1, –5) y (10, 11)

4 Halla las pendientes de:

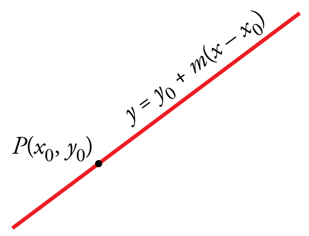
a) $y = -\dfrac{2}{3}x$ $\quad$ b) $y = \dfrac{3x+5}{7}$

c) $4x - 5y + 2 = 0$ $\quad$ d) $-x + 4y + 5 = 0$

3 Ecuación de una recta en la forma punto-pendiente

Atención

Esta fórmula es muy útil. ¡Aprende a usarla!



Con mucha frecuencia hemos de escribir la ecuación de una recta de la cual conocemos un punto y la pendiente. La damos a continuación.

Punto: $P(x_0, y_0)$ Pendiente: m Ecuación: $y = y_0 + m(x - x_0)$

JUSTIFICACIÓN

- $y = y_0 + m(x - x_0)$ es una expresión de 1.^er grado. Por tanto, **es una recta.**
- El coeficiente de la x es m. Por tanto, **su pendiente es m.**
- Si damos a x el valor $x_0 \rightarrow y = y_0 + m(x_0 - x_0) = y_0 + m \cdot 0 = y_0$. Obtenemos $y = y_0$. Si $x = x_0$, entonces $y = y_0$. Es decir, **pasa por (x_0, y_0).**

Recta dada por dos puntos

Para hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, procedemos así:

- A partir de los dos puntos, obtenemos su pendiente.
- Con la pendiente y uno de los puntos, obtenemos la ecuación.

Ejercicio resuelto

Hallar la ecuación de cada una de las rectas siguientes:

a) Pasa por (–5, 7) y tiene una pendiente de $\frac{-3}{5}$.

b) Pasa por (0, 4) y tiene una pendiente de $\frac{7}{3}$.

c) Pasa por (–2, 7) y por (4, 5).

a) Ecuación: $y = 7 - \frac{3}{5}(x + 5)$. Esto ya es la ecuación de la recta.

Podemos simplificarla: $y = 7 - \frac{3}{5}x - \frac{3}{5} \cdot 5 \rightarrow y = 4 - \frac{3}{5}x$

b) $y = 4 + \frac{7}{3}x$. Observa que (0, 4) está en el eje Y. Es decir, 4 es la ordenada en el origen.

c) Empezamos hallando su pendiente: $m = \frac{5-7}{4-(-2)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

Ecuación de la recta que pasa por (–2, 7) y cuya pendiente es $-\frac{1}{3}$:

$$y = 7 - \frac{1}{3}(x + 2) \quad (*)$$

También podríamos hallarla a partir del otro punto:

Ecuación de la recta que pasa por (4, 5) y cuya pendiente es $-\frac{1}{3}$:

$$y = 5 - \frac{1}{3}(x - 4) \quad (**)$$

¿Coincidirán? ¡Naturalmente! Puedes comprobarlo simplificando las ecuaciones (*) y (**).

Actividades

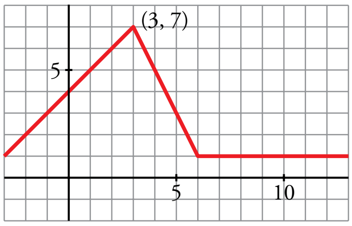
1 Halla la ecuación de cada una de las siguientes rectas:

a) Pasa por (–3, –5) y tiene una pendiente de $\frac{4}{9}$.

b) Pasa por el punto (0, –3) y tiene una pendiente de 4.

c) Pasa por (3, –5) y por (–4, 7).

4 Funciones definidas a trozos



Es frecuente encontrarse con funciones cuyas gráficas están formadas por trozos de rectas. Veamos, por ejemplo, la función representada en el margen:

- El primer tramo pertenece a la recta cuya pendiente es 1 y cuya ordenada en el origen es 4. Su ecuación es, por tanto, $y = x + 4$.
- El segundo tramo pertenece a la recta que pasa por (3, 7) y cuya pendiente es –2. Su ecuación: $y = 7 - 2(x - 3)$. Es decir, $y = -2x + 13$.
- El tercer tramo es la función constante $y = 1$.

La función se describe así: $f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x \le 3 \\ -2x + 13 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 1 & \text{si } x \ge 6 \end{cases}$

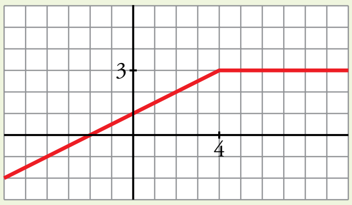
Para describir analíticamente una gráfica formada por trozos de rectas, se dan las ecuaciones de los diversos tramos, enumerados por orden, indicando en cada uno de ellos los valores de x para los que la función está definida.

Ejercicios resueltos

1. Representar la función cuya expresión analítica es:

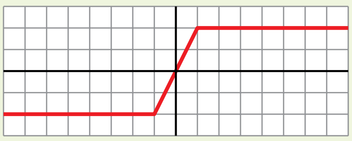
$$y = f(x) = \begin{cases} \mathbf{0{,}5x + 1} & \mathbf{x < 4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{x \ge 4} \end{cases}$$

1. Es una función muy parecida a la anterior. Por eso, representamos directamente los dos tramos de que consta:



Puesto que ahora los dos tramos empalman en el punto de abscisa 4, no nos ocuparemos de si el punto pertenece a uno o a otro tramo.

2. Poner la ecuación de la siguiente función:



2. 1.^{er} TRAMO: $y = -2$, hasta $x = -1$

2.° TRAMO: $y = 2x$, entre –1 y 1

3.^{er} TRAMO: $y = 2$, a partir de $x = 1$

$$y = f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 2x & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Actividades

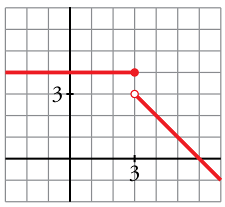
1 Representa las funciones cuyas expresiones analíticas son las siguientes:

a) $y = \begin{cases} 2x - 5, & x < 3 \\ x + 1, & x > 3 \end{cases}$

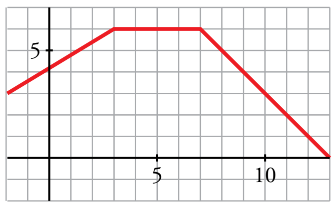
b) $y = \begin{cases} 2x - 5, & x < 3 \\ x - 2, & x \ge 3 \end{cases}$

2 Escribe las ecuaciones de la función que corresponde a cada una de las siguientes gráficas:

a)



b)



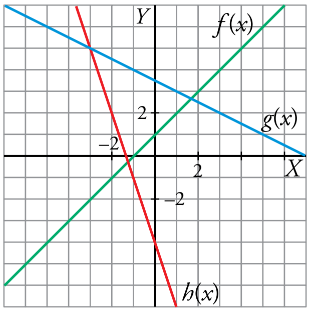
Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Pendiente de una recta

1 ▼▽▽ Halla la pendiente de cada una de las rectas dibujadas:



2 ▼▽▽ Halla la pendiente de las rectas que pasan por los siguientes puntos:

a) (2, 4) y (–1, –2) b) (–3, 5) y (3, –1)

c) (–3, 5) y (2, 1) d) (3, 2) y (5, 2)

3 ▼▽▽ Halla las pendientes de las siguientes rectas:

a) $y = 4x - 2$ b) $y = -\dfrac{4}{5}x$

c) $6x + 3y - 4 = 0$ d) $3y - 12 = 0$

Ecuación y representación de una función lineal

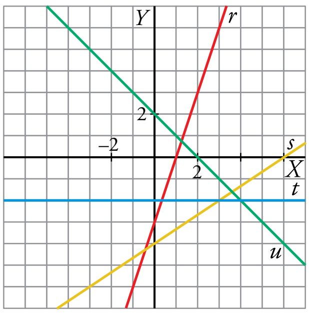
4 ▼▽▽ Asocia a cada recta su ecuación. Di, en cada caso, cuál es su pendiente.

a) $y + 2 = 0$

b) $3x - y = 3$

c) $y = 2 - x$

d) $2x - 3y = 12$



5 ▼▽▽ Representa las siguientes rectas:

a) $y = \dfrac{4}{7}x$ b) $y = 2x - 3$

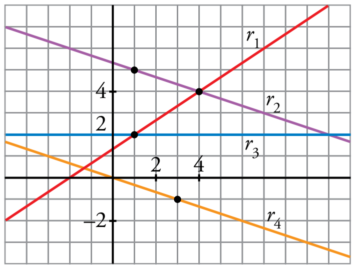
c) $y = \dfrac{-3x + 10}{5}$ d) $y = 2{,}5$

6 ▼▽▽ Halla la ecuación de las rectas que cumplen las siguientes condiciones y dibújalas:

a) Pasa por (5, 3) y tiene una pendiente de 3/5.

b) Pasa por el punto (5, 3) y tiene pendiente –1/2.

7 ▼▽▽ Halla la ecuación de las rectas r_1, r_2, r_3 y r_4 en la forma punto-pendiente.



8 ▼▽▽ Halla la ecuación de las rectas que pasan por los puntos que se indican y represéntalas:

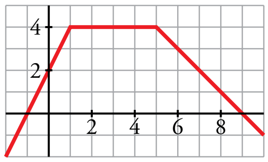
a) (2, 3) y (7, 0) b) (0, 4) y (4, 0)

Funciones definidas a trozos

9 ▼▽▽ Representa las siguientes funciones:

a) $y = \begin{cases} -3, & x < 0 \\ 2x - 3, & x \ge 0 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} x + 3, & x < -4 \\ 2x + 7, & -4 \le x \le 0 \\ 7 - x, & x > 0 \end{cases}$

10 ▼▼▽ Queremos hallar la expresión analítica de esta función formada por tres tramos de rectas.



a) Para $x \le 1$, la recta pasa por (0, 2) y (1, 4). Escribe su ecuación.

b) Para $1 \le x \le 5$, es una función constante. Escribe su ecuación.

c) Para $x \ge 5$, la recta pasa por (5, 4) y (9, 0). Escribe su ecuación.

d) Completa, en tu cuaderno, su expresión analítica:

$$y = \begin{cases} \dots & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } 1 \le x \ \dots \\ \dots & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Resuelve problemas

11 ▼▼▽ Un coche teledirigido, en el instante inicial, está a 2 m de Manuela y se aleja de ella a una velocidad constante de 3 m/s.

a) ¿Cuál es la ecuación que ofrece su distancia a Manuela en función del tiempo?

b) ¿A qué distancia de Manuela está el juguete al minuto de empezar a contar? ¿Cuánto recorre en ese tiempo?

c) Representa la función.

12 ▼▼▽ Mientras ascendíamos por una montaña, medimos la temperatura y obtuvimos los datos de esta tabla:

ALTURA (m)	0	360	720	990
TEMPERATURA (°C)	10	8	6	4,5

a) Representa los puntos en una gráfica.

b) Suponiendo que se sigue la misma pauta, halla la expresión analítica de la función *altura-temperatura*.

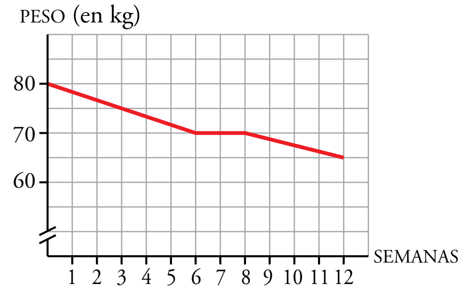
c) ¿A partir de qué altura la temperatura es menor que 0 °C?

13 ▼▼▽ Un fontanero cobra 18 € por el desplazamiento y 15 € por cada hora de trabajo.

a) Haz una tabla de valores de la función *tiempo-coste* y represéntala gráficamente.

b) Si ha cobrado por una reparación 70,50 €, ¿cuánto tiempo ha invertido en la reparación?

14 ▼▼▼ El médico ha puesto a Ricardo un régimen de adelgazamiento y con esta gráfica le explica lo que espera conseguir en las próximas 12 semanas.



a) ¿Cuál era su peso al comenzar el régimen?

b) ¿Cuánto tiene que adelgazar por semana en la primera etapa del régimen? ¿Y entre la sexta y la octava semanas?

c) Halla la expresión analítica de la función anterior.

Autoevaluación

¿Manejas con destreza las funciones lineales?

1 Halla la pendiente de las rectas que pasan por estos pares de puntos:

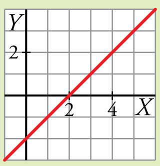
a) (5,4) y (3,1) b) (–2, –5) y (1, 1)

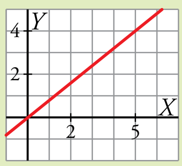
2 Escribe la ecuación de cada una de estas rectas:

a) Pasa por el punto (1, –2) y tiene pendiente $\frac{3}{2}$.

b) Pasa por los puntos (–2, –5) y (1, 1).

3 Escribe la ecuación de cada una de estas rectas:

a) 

b) 

¿Interpretas y representas funciones definidas a trozos?

4 Representa: $f(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x}{2} + 3 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ -x + 6 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

5 Estas son las tarifas de dos compañías telefónicas:

A: 0,30 € por establecimiento de llamada y 0,20 €/min	B: 0,22 €/min

a) ¿Cuánto cuesta una llamada de 5 minutos en cada compañía? ¿Y de 15 min? ¿Y de 20 min?

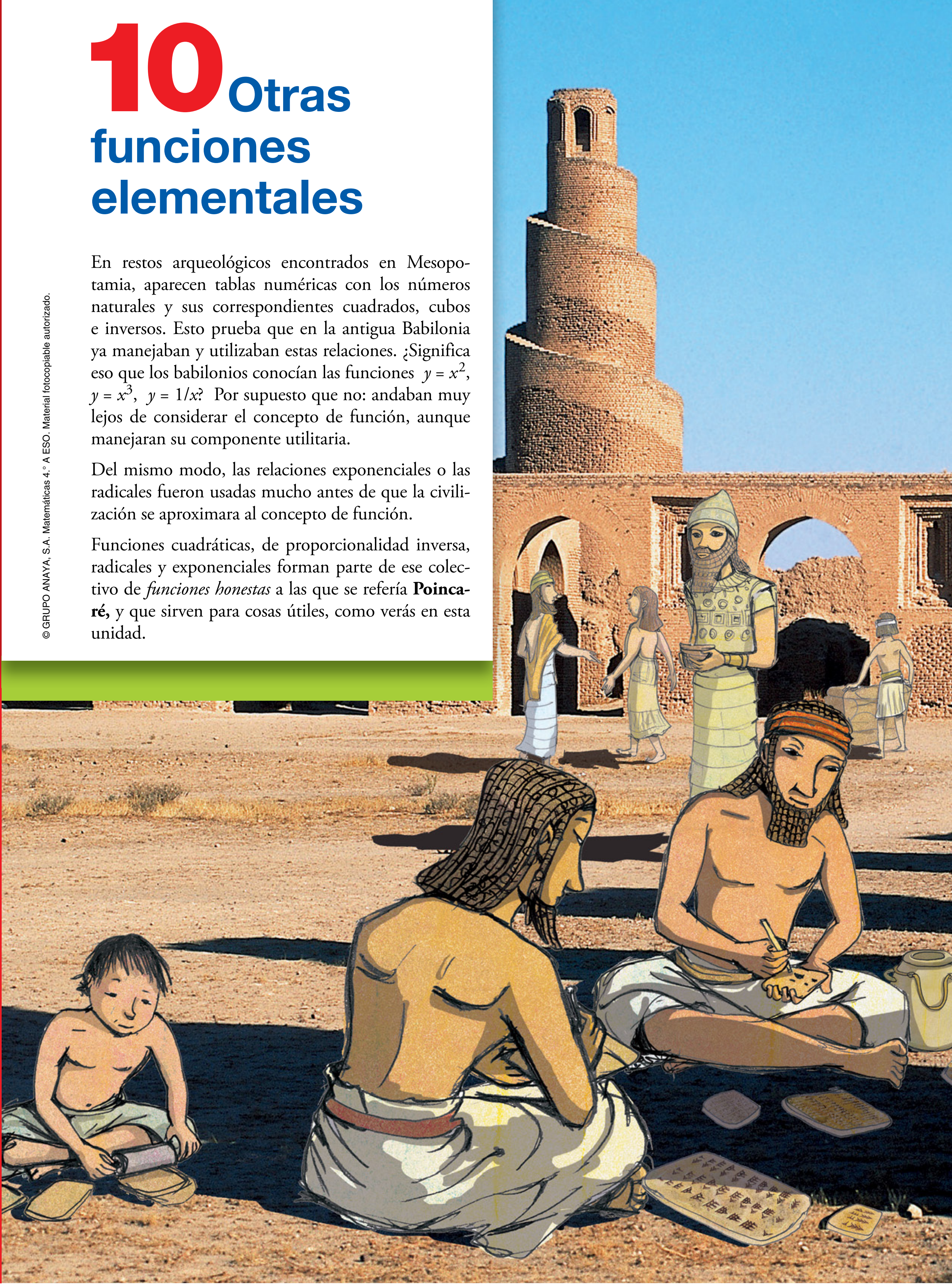
b) Haz, para cada una de las dos compañías, la gráfica de la función que nos da el precio de la llamada dependiendo del tiempo que dure.

10 Otras funciones elementales

En restos arqueológicos encontrados en Mesopotamia, aparecen tablas numéricas con los números naturales y sus correspondientes cuadrados, cubos e inversos. Esto prueba que en la antigua Babilonia ya manejaban y utilizaban estas relaciones. ¿Significa eso que los babilonios conocían las funciones $y = x^2$, $y = x^3$, $y = 1/x$? Por supuesto que no: andaban muy lejos de considerar el concepto de función, aunque manejaran su componente utilitaria.

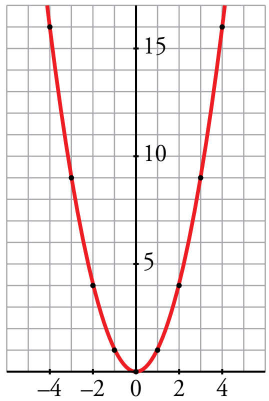
Del mismo modo, las relaciones exponenciales o las radicales fueron usadas mucho antes de que la civilización se aproximara al concepto de función.

Funciones cuadráticas, de proporcionalidad inversa, radicales y exponenciales forman parte de ese colectivo de *funciones honestas* a las que se refería **Poincaré,** y que sirven para cosas útiles, como verás en esta unidad.



1 Parábolas y funciones cuadráticas

La función $y = x^2$



Empecemos construyendo una tabla de valores:

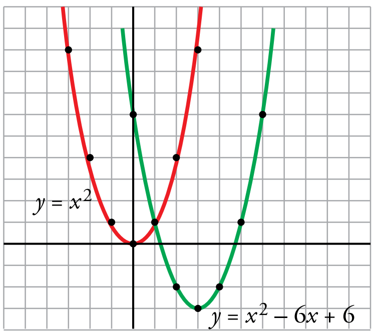
$y = x^2 \rightarrow$

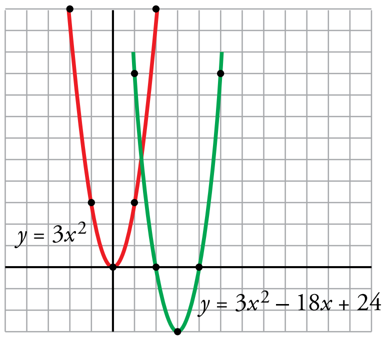
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

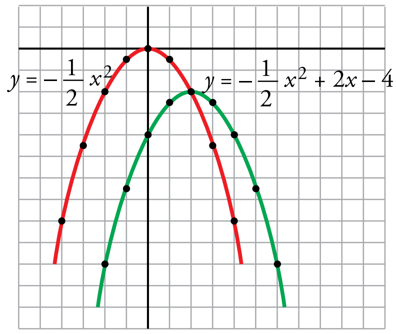
La gráfica es una curva en forma de parábola, **simétrica** respecto al eje Y; tiene un mínimo en el punto (0, 0), al que llamamos **vértice.** Tiene **dos ramas,** una decreciente y otra creciente. Es una función **definida en todo** $\mathbb{R}$ y **continua,** pues no presenta saltos: se puede representar de un solo trazo.

Funciones cuadráticas

Fíjate en las siguientes curvas y comprueba en cada una de ellas, que las coordenadas de los puntos señalados cumplen las correspondientes ecuaciones:







Observándolas, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Las funciones $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, llamadas **cuadráticas,** se representan todas ellas mediante **parábolas** con el eje paralelo al eje Y.
- Su forma (anchura) y su orientación (hacia abajo, hacia arriba) dependen del coeficiente a de x^2, del siguiente modo:

  — Si $a > 0$, tiene las ramas hacia arriba, y si $a < 0$, hacia abajo.

  — Cuanto mayor sea $|a|$, más estilizada es la parábola.

Ejemplo

Representar $y = x^2 - 6x + 6$.

$$\text{Vértice} \begin{cases} x: \ -\dfrac{-6}{2 \cdot 1} = 3 \\ y: \ 3^2 - 6 \cdot 3 + 6 = -3 \end{cases}$$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	6	1	–2	–3	–2	1	6

La representación es la parábola verde de la primera de las tres cuadrículas anteriores.

Representación de funciones cuadráticas

Para representar las funciones cuadráticas $y = ax^2 + bx + c$, conviene saber que la abscisa del vértice es $\dfrac{-b}{2a}$. Después, se construye una tabla de valores a izquierda y derecha de este punto.

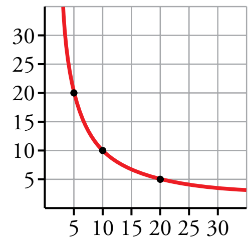
Actividades

1 Calcula el vértice, construye una tabla de valores y representa las siguientes funciones:

a) $y = x^2 - 2x + 3$ b) $y = -x^2 - 4x + 5$

2 Funciones de proporcionalidad inversa

Recuerda: la proporcionalidad inversa relaciona dos variables de forma que cuando una aumenta (doble, triple, cuádruple…), la otra disminuye (mitad, tercio, cuarto…).



EJEMPLO

De un rectángulo de 100 cm^2 de superficie, desconocemos sus lados. Los llamamos x e y. Es claro que $xy = 100$. Lo ponemos así:

$y = \dfrac{100}{x}$ (A igualdad de áreas, los lados son inversamente proporcionales).

Las relaciones de proporcionalidad inversa, como la que acabamos de describir, se presentan con mucha frecuencia en la naturaleza, la física, la economía… Vamos a analizarlas teóricamente.

La función $y = 1/x$

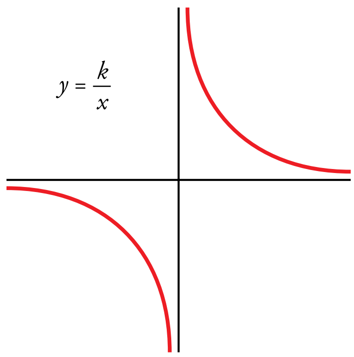
Observa las siguientes tablas de valores:

x	1	2	4	5	10
y	1	0,5	0,25	0,2	0,1

x	1	0,5	0,25	0,1	0,01
y	1	2	4	10	100

Vemos que:

- Cuanto más grande es x, más pequeño se hace y.
- Cuanto más pequeño es x, más grande se hace y.



Características de las funciones $y = k/x$

- No están definidas en $x = 0$.
- Si x se acerca a 0, y toma valores cada vez más grandes. Por eso, decimos que el eje Y es una **asíntota.**
- Si x toma valores cada vez más grandes, y se acerca a 0. Por eso, el eje X es asíntota.

Esta curva es una **hipérbola.**

Actividades

1 Representa con detalle la parte positiva de la función:

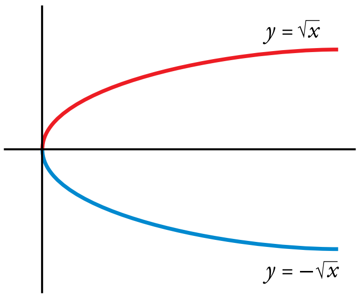
$y = \dfrac{36}{x}$

Para ello, dale a x los valores 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36 y utiliza una hoja de papel cuadriculado para representar los puntos obtenidos.

2 Representa la función $y = 6/x$. Para ello, da a x los valores ±1, ±2, ±3 y ±6.

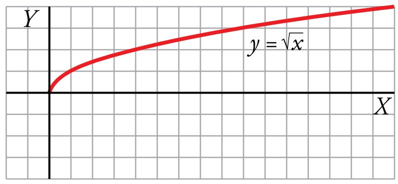
3 Representa $y = \dfrac{8}{x-5}$ dando a x los valores –3, 1, 3, 4, 6, 7, 9 y 13. Comprueba que la asíntota vertical es la recta $x = 5$.

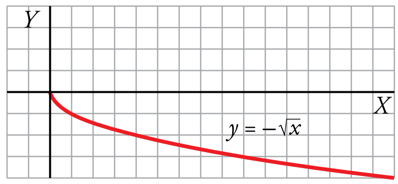
3 Funciones radicales. Funciones exponenciales



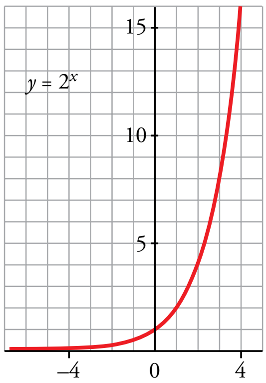
Funciones radicales

Las funciones $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$ se pueden representar punto a punto y dan lugar a las gráficas que ves debajo. Son mitades de parábola y juntas describen una parábola idéntica a $y = x^2$, pero con su eje sobre el eje X.





El dominio de definición de estas funciones es $[0, +\infty)$.



Funciones exponenciales

- En el margen tienes la gráfica de la función exponencial de base 2: $y = 2^x$. Se trata de una función creciente.

$x \geq 0$

x	0	1	2	3	4	…
y	1	2	4	8	16	…

$x \leq 0$

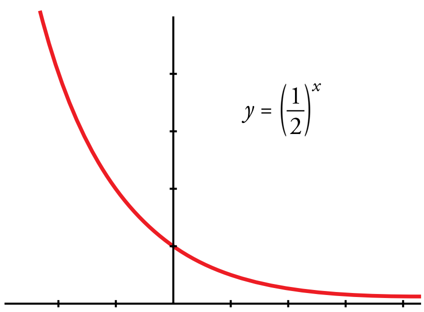
x	0	–1	–2	–3	–4	…
y	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	…

NOTA: Recuerda el significado de las potencias negativas $\rightarrow 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

- La función $y = (1/2)^x$ también es exponencial. Como su base $(1/2)$ es menor que 1, la función es decreciente.

x	0	1	2	3	4	…
y	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	…

x	0	–1	–2	–3	–4	…
y	1	2	4	8	16	…



Se llaman **funciones exponenciales** a las que tienen la ecuación $y = a^x$.

- Todas ellas son continuas, están definidas en todo $\mathbb{R}$ y pasan por los puntos $(0, 1)$ y $(1, a)$.
- Si la base es mayor que 1 $(a > 1)$, entonces son crecientes.
- Si la base es menor que 1 $(a < 1)$, entonces son decrecientes.

Actividades

1 Represente estas funciones y di sus dominios de definición (da a x los valores $-1, 0, 3, 8, 15$):

a) $y = \sqrt{x + 1}$ b) $y = \sqrt{x + 1} - 5$

2 Calcula los valores de la función $y = 1{,}5^x$ para los valores enteros de x comprendidos entre -6 y 6. Representa la función.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Funciones cuadráticas

1 ▼▽▽ Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta, y di cuál es el vértice de cada parábola:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = x^2 - 4$

2 ▼▽▽ Representa las siguientes parábolas, hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes:

a) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x$ b) $y = -3x^2 + 6x - 3$

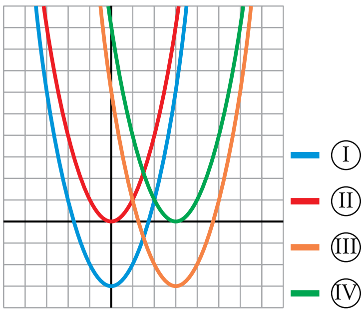
3 ▼▽▽ Di cuál es el punto (abscisa y ordenada) donde se encuentra el vértice de estas parábolas señalando, en cada caso, si se trata de un máximo o de un mínimo:

a) $y = x^2 - 5$ b) $y = 3 - x^2$

c) $y = x^2 + 4x + 4$ d) $y = -5x^2 + 10x - 3$

Representa cada una de esas parábolas.

4 ▼▽▽ Asocia a cada una de las gráficas una de las expresiones siguientes:



a) $y = x^2$

b) $y = (x - 3)^2$

c) $y = x^2 - 3$

d) $y = x^2 - 6x + 6$

Otras funciones

5 ▼▽▽ Dibuja la gráfica de estas funciones, dando a x los valores que se indican en cada caso:

a) $y = \frac{3}{x}$ $x = -3; -1; -1/2; 1/2; 1; 3$

b) $y = -\frac{2}{x}$ $x = -2; -1; -1/2; 1/2; 1; 2$

6 ▼▽▽ Halla las asíntotas de cada una de estas funciones hiperbólicas y represéntalas gráficamente ayudándote de una tabla de valores:

a) $y = \frac{3}{x+3}$ b) $y = \frac{5}{1-x}$

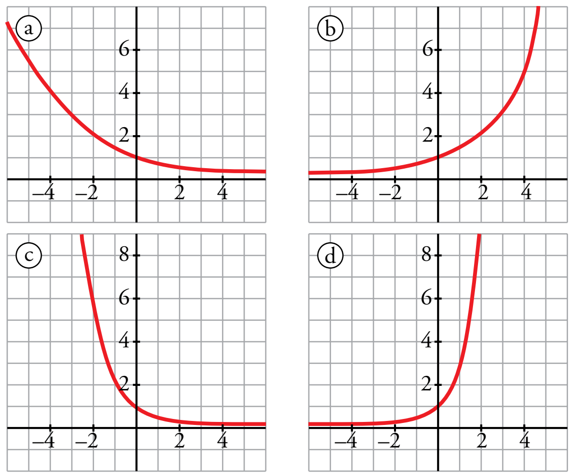
7 ▼▽▽ Ayudándote de una tabla de valores, representa estas funciones. Para el apartado a), da valores positivos a x, y para el apartado b), negativos.

a) $y = \sqrt{x} + 2$ b) $y = 2\sqrt{-x}$

8 ▼▽▽ Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:

I) $y = 3^x$ II) $y = 1{,}5^x$

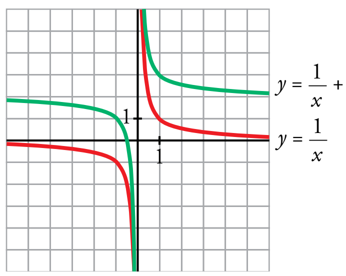
III) $y = 0{,}4^x$ IV) $y = 0{,}7^x$



Di, para cada una, si es creciente o decreciente.

Aplica lo aprendido

9 ▼▼▽ Observa estas hipérbolas y contesta:



a) ¿A qué valor se acerca cada una cuando x toma valores cada vez más grandes?

b) ¿A qué valores se acerca cada una cuando x toma valores cada vez más próximos a cero?

c) ¿Cuál es la asíntota horizontal de cada función?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Resuelve problemas

10 ▼▼▽ La altura, h, a la que se encuentra en cada instante, t, una piedra que lanzamos verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s viene dada por: $h = 20t - 5t^2$.

a) Representa gráficamente la función.

b) Di cuál es su dominio de definición.

c) ¿En qué momento alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

d) ¿En qué momento cae la piedra al suelo?

e) ¿En qué intervalo de tiempo la piedra está a una altura superior a 15 metros?

11 ▼▼▼ El coste por unidad de fabricación de ciertos sobres disminuye según aumenta el número de unidades fabricadas. Este coste viene dado por la función: $y = \dfrac{0{,}3x + 1\,000}{x}$.

a) ¿Qué valores puede tomar la variable x?

b) Da el coste por unidad y el coste de 10 sobres.

c) Calcula, también, el coste por unidad y el coste total para 100 000 sobres.

d) ¿A cuánto asciende el coste por unidad fabricada cuando el número de sobres es muy grande?

12 ▼▼▽ Ejercicio resuelto

En el contrato de alquiler de un apartamento figura una claúsula en la que se especifica que el precio subirá un 5% anual.

a) Si el precio es de 450 € mensuales, ¿cuál será dentro de 5 años?

b) Escribe la función que relaciona el precio mensual del alquiler con los años transcurridos.

Para aumentar una cantidad un 5% se multiplica por 1,05. Por tanto:

a) $450 \cdot 1{,}05^5 = 574{,}33$ €

b) $y = 450 \cdot 1{,}05^x$

13 ▼▼▽ Una furgoneta que costó 20 000 € se deprecia a un ritmo de un 12% anual.

a) ¿Cuál será su precio dentro de 4 años?

b) Halla la función que da el precio del vehículo según los años transcurridos.

c) Calcula cuánto tiempo tardará el precio en reducirse a la mitad.

☞ *Para reducir una cantidad un 12% se multiplica por 0,88.*

Autoevaluación

¿Conoces familias de funciones (cuadráticas, de proporcionalidad inversa, radicales, exponenciales) y las representas a partir de sus ecuaciones, y viceversa?

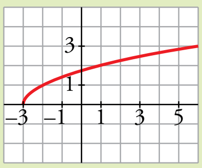
1 Calcula las coordenadas del vértice y representa la parábola: $y = x^2 + 4x - 5$

2 Representa la siguiente función:

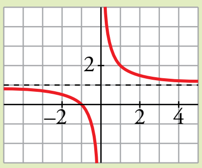
$$y = \frac{2}{x} + 1$$

3 Asocia a cada una de las gráficas una ecuación:

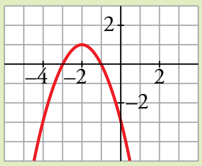
I



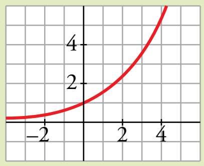
II



III



IV



a) $y = -x^2 - 4x - 3$

b) $y = 1{,}5^x$

c) $y = (1/x) + 1$

d) $y = \sqrt{x + 3}$

¿Asocias una situación real con algún modelo de función y te basas en él para interpretarla?

4 En el contrato de trabajo de un empleado figura que su sueldo subirá un 10% anual. Su sueldo inicial es de 24 000 € anuales.

a) ¿Cuánto ganará dentro de 10 años?

b) Escribe la función que relaciona el dinero que gana con el número de años transcurridos.

11 La semejanza. Aplicaciones

El estudio teórico de la semejanza se suele basar en el teorema de Tales. Recordemos quién fue este personaje.

Tales nació en Mileto (actualmente, en la costa occidental de Turquía), aproximadamente, en el año 640 a.C. Murió con más de 90 años.

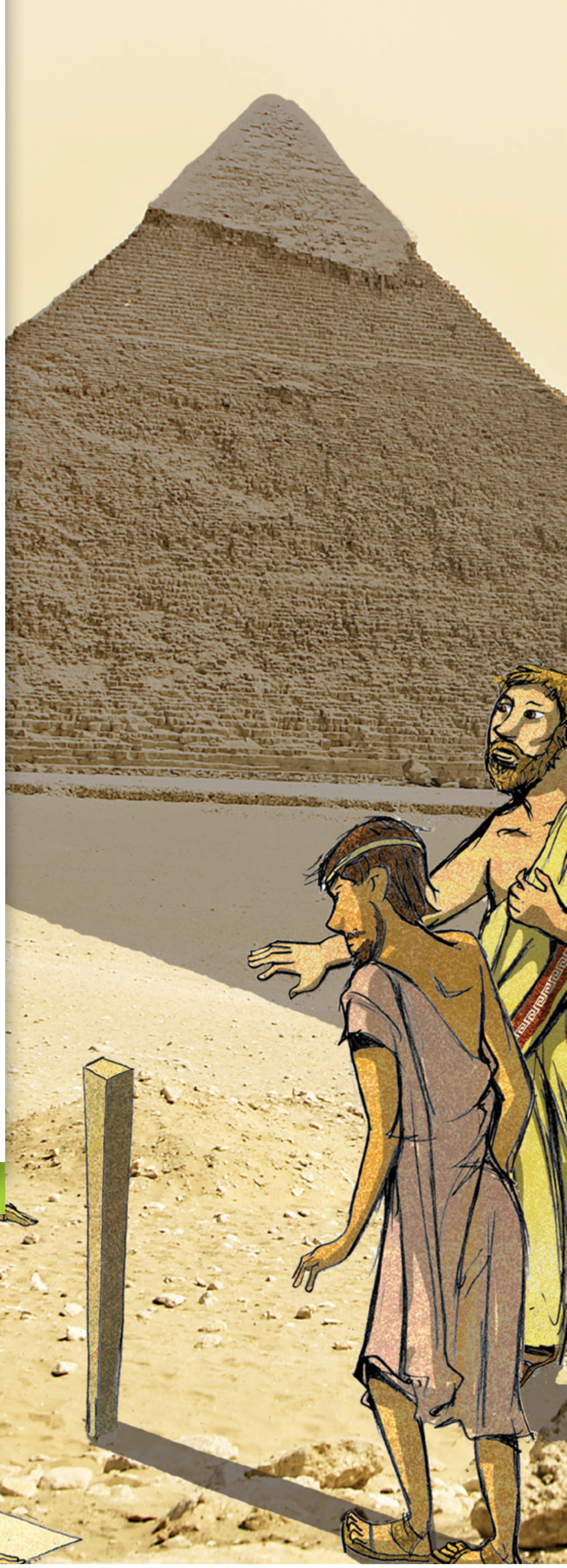
Visitó Egipto y, posiblemente, Babilonia, y aprendió la ciencia práctica acumulada durante siglos por estas civilizaciones. Aportó estos conocimientos, seguramente muy elaborados, al mundo griego.

Fue el primero que exigió que las afirmaciones matemáticas y de otras ciencias fueran avaladas por razonamientos bien fundamentados. Por eso, se le considera el fundador de la ciencia griega.

Muy admirado en su época y en siglos posteriores, se le dio el rango del primero de “los siete sabios de Grecia”. Esta gran admiración de la que fue objeto hizo que se le mitificara y se le atribuyeran méritos que realmente no eran suyos. Por ejemplo, la predicción de un eclipse. Y la paternidad del teorema que lleva su nombre.

Parece cierto que en Egipto midió la altura de una pirámide comparando su sombra con la que arrojaba, en el mismo instante, una vara vertical. Pero esta aplicación práctica de la semejanza no significa que diera forma al enunciado del teorema, ni mucho menos que lo demostrara.

Ambos logros, junto con una adecuada fundamentación y su desarrollo teórico de la semejanza, hay que atribuírselos a **Euclides,** dos siglos y medio posterior.



1 Semejanza

Seguramente, nunca has visto este cuadro. Sin embargo, lo conoces perfectamente por medio de sus reproducciones.

Con un plano podemos orientarnos en una ciudad. La escala nos permite, además, conocer las distancias.

Dos figuras semejantes tienen la *misma forma*. ¿Cómo se manifiesta matemáticamente esta apariencia?

— Los ángulos correspondientes en figuras semejantes son iguales.

— Las longitudes de los segmentos correspondientes en figuras semejantes son proporcionales. La razón de proporcionalidad se llama **razón de semejanza.**

Figuras semejantes en la vida corriente

Estamos rodeados de reproducciones:

— Fotografías, vídeos, películas en pantallas de distintos tamaños…

— Maquetas de monumentos o de urbanizaciones, copias de cuadros famosos, reproducciones de coches…

— Planos de edificios o de ciudades, mapas…

Las primeras pretenden, exclusivamente, transmitir unas características que se conservan con la semejanza: la imagen, la forma, el color, la belleza del original.

Con los planos y los mapas pretendemos más: queremos que además de apreciar la forma, se puedan obtener con precisión medidas, distancias. Por ello, van acompañados de una **escala** con la que se pueden obtener magnitudes de la realidad midiendo sobre su reproducción (plano o mapa).

Escala es el cociente entre cada longitud de la reproducción (mapa, plano, maqueta) y la correspondiente longitud en la realidad. Es, por tanto, la **razón de semejanza** entre la reproducción y la realidad.

Una escala 1:200 significa, como ya sabes, que 1 cm del plano corresponde a 200 cm = 2 m de la realidad.

La expresión 1:200 puede ponerse así: $\frac{1}{200}$, con lo que se muestra la razón de semejanza entre las dos figuras.

Relación entre las áreas y entre los volúmenes

Si la razón de semejanza entre dos figuras es k, la razón entre sus áreas es k^2 y la razón entre sus volúmenes es k^3.

La razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

La razón entre los volúmenes de dos figuras semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza.

Si una maqueta está a escala 1:200, la razón entre la superficie de una parcela y la de su representación es $200^2 = 40\,000$. Y la razón entre el volumen de un edificio y el de su representación en la maqueta es $200^3 = 8\,000\,000$.

Planos, mapas y maquetas

Vamos a aplicar lo dicho en la página anterior a estas representaciones (planos y mapas) que llevan incluida una escala con la que podemos deducir medidas en la realidad que representan.

Actividades

1 Este es el plano de una parte de una ciudad, a escala 1:10 000.

a) Justifica que 1 cm en el plano corresponde a 100 m en la realidad.

b) Amalia vive en A y Benito vive en B. Escoge un itinerario para ir de una casa a la otra y calcula la distancia que tienen que recorrer.

¿Cuánto se tarda, aproximadamente, si se recorre paseando a 3 km/h?

c) Calcula la superficie real del parque.

2 Este mapa está a escala 1:20 000 000.

a) Justifica que 1 cm en el mapa corresponde a 200 km en la realidad.

b) Halla la distancia de Lanzarote a San Sebastián.

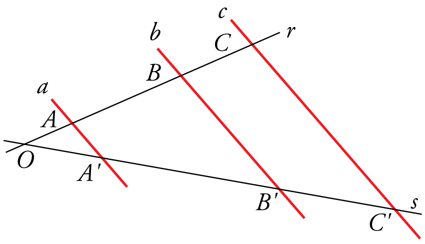
c) Sitúa tu localidad en el mapa y halla su distancia a Argel y a Marrakech.

2 Semejanza de triángulos

En las páginas anteriores hemos tratado con pares de figuras que **sabíamos de antemano que eran semejantes** y, basándonos en esa semejanza, al estudiar una de ellas obteníamos consecuencias para la otra. Así, estudiando un plano sabemos cómo es la planta del edificio o de la ciudad.

Lo que ahora nos proponemos es más difícil: **cómo averiguar si dos figuras son semejantes.** Para ello, hemos de profundizar en la semejanza de triángulos, pues cualquier figura se puede descomponer en triángulos. (Si la figura tiene lados curvos, la descomposición será solo aproximada).

Teorema de Tales



Si las rectas a, b y c son paralelas y cortan a otras dos rectas r y s, entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales.

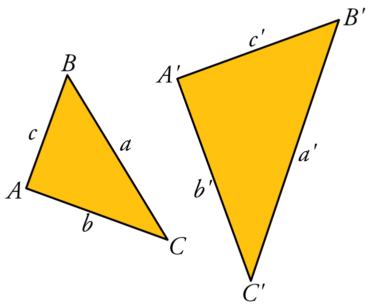
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

Como consecuencia, se verifica: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$

También ocurre lo recíproco: si los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son proporcionales a $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ y las rectas a y b son paralelas, entonces la recta c es paralela a ellas.

El teorema de Tales sirve para estudiar la semejanza de triángulos.

Triángulos semejantes



Dos **triángulos semejantes** tienen:

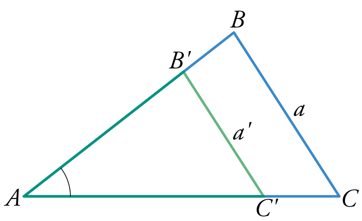
- Sus lados proporcionales:

  $$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \text{razón de semejanza}$$

- Sus ángulos, respectivamente iguales:

  $$\hat{A} = \hat{A}',\ \hat{B} = \hat{B}',\ \hat{C} = \hat{C}'$$

Triángulos en posición de Tales



Los triángulos ABC y $AB'C'$ tienen un ángulo común, el $\hat{A}$. Es decir, el triángulo pequeño está encajado en el grande.

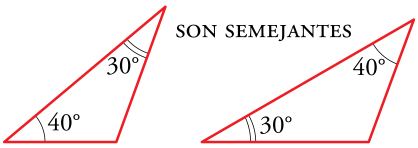
Además, los lados opuestos a $\hat{A}$ son paralelos.

Decimos que esos dos triángulos están en **posición de Tales.**

Dos triángulos en posición de Tales son semejantes.

Criterio de semejanza de triángulos

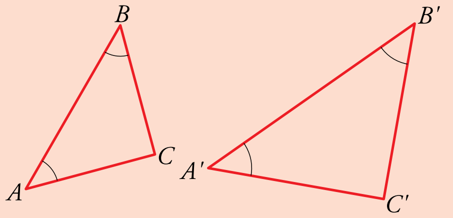
Para saber si dos triángulos son semejantes, no es necesario comprobar en ellos todas las condiciones dadas en la página anterior. Será suficiente ver que se cumplen algunas de ellas.



Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de ángulos respectivamente iguales.

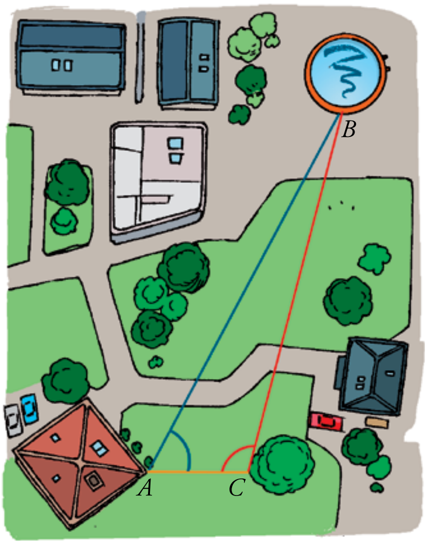
$\widehat{ABC}$ es semejante a $\widehat{A'B'C'}$ si:

$\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$



Aplicación: cálculo de la distancia a un punto inaccesible

Desde la casa de Eva, A, se ve el depósito de agua, B, de un pueblo. Eva quiere averiguar a qué distancia se encuentra. Para ello, hace lo siguiente:



- Busca un lugar, C, relativamente próximo a su casa, desde el cual se vea el depósito de agua.
- Mide los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$ y la distancia $\overline{AC}$:

  $\overline{AC} = 45$ m $\quad \hat{A} = 62° \quad \hat{C} = 105°$

- Construye en su cuaderno un triángulo $A'B'C'$ semejante al ABC tomando:

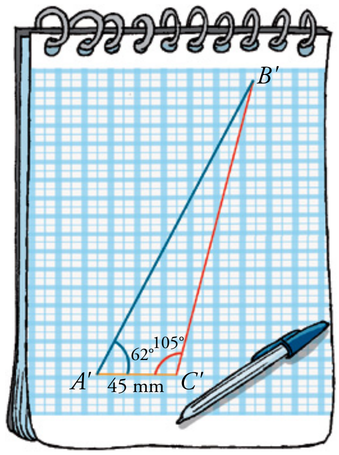
  $\hat{A}' = \hat{A} = 62° \quad \hat{C}' = \hat{C} = 105°$

  (Por tanto, $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son semejantes).

  Toma el lado $\overline{A'C'} = 45$ mm, con lo que la razón de semejanza es 1:1 000.

- Mide sobre su cuaderno, con la regla, la longitud del lado $A'B'$: $\overline{A'B'} = 193$ mm.
- Teniendo en cuenta la razón de semejanza, calcula $\overline{AB}$, que es la distancia buscada.

  Por tanto, deduce que la distancia de su casa al depósito de agua es de 193 m.



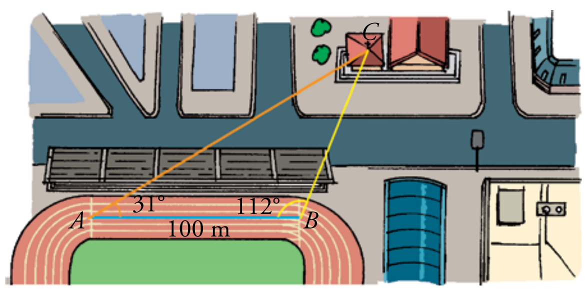
Actividades

1 Desde los extremos A y B de la recta de los 100 m de una pista de atletismo se ve la torre de una iglesia.

Medimos los ángulos $\hat{A} = 31°$ y $\hat{B} = 112°$.

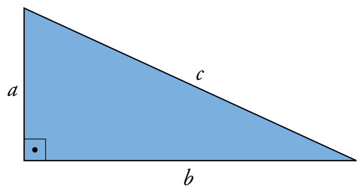
Dibuja en tu cuaderno un triángulo semejante, $A'B'C'$, con $\overline{A'B'} = 5$ cm.

Midiendo $\overline{A'C'}$, calcula la distancia real, $\overline{AC}$.



3 La semejanza en los triángulos rectángulos

Los triángulos rectángulos son particularmente importantes, tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Por eso les vamos a dedicar una atención especial. Empecemos recordando algunos resultados que ya conoces.



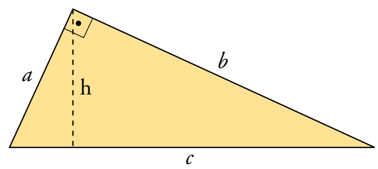
Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo cualquiera, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Aunque es una igualdad entre áreas, se suele utilizar para obtener la longitud de uno de los tres lados conociendo la de los otros dos:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$



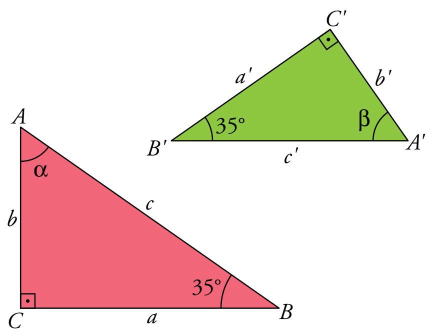
Área

Como en todo triángulo, el área de un triángulo rectángulo es igual a la mitad de la longitud de la base por la altura. Pero aquí podemos tomar los dos catetos como base y altura. Por tanto:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} c \cdot \text{h} = \frac{1}{2} a \cdot b$$

Como consecuencia, podemos calcular h a partir de a, b y c.

Criterio de semejanza de triángulos rectángulos



$\alpha = \beta = 90° - 35°; \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen igual uno de sus ángulos agudos.

Pues con ese ángulo y el ángulo recto ya son dos los ángulos iguales y, por tanto, también será igual el tercero.

Este criterio de semejanza es muy fácil de aplicar. Basta reconocer que dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo igual para asegurar que sus lados son proporcionales.

Por ello, los triángulos rectángulos son especialmente útiles para resolver problemas de semejanza.

Actividades

1 a) Comprueba que 3, 4 y 5 son "números pitagóricos"; es decir, que pueden ser longitudes de los lados de un triángulo rectángulo (o sea, que $5^2 = 3^2 + 4^2$).

Haz lo mismo para:

b) 0,6; 0,8 y 1 c) 5, 12 y 13 d) 7, 24 y 25

e) 8, 15 y 17 f) 1; 1,875 y 2,125

2 Calcula tanto el área como la altura sobre la hipotenusa de los seis triángulos rectángulos descritos en el ejercicio anterior.

3 Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 28°. Otro triángulo rectángulo tiene un ángulo de 62°. Explica por qué son semejantes.

Veamos algunos ejemplos de aplicaciones del criterio de semejanza en triángulos rectángulos.

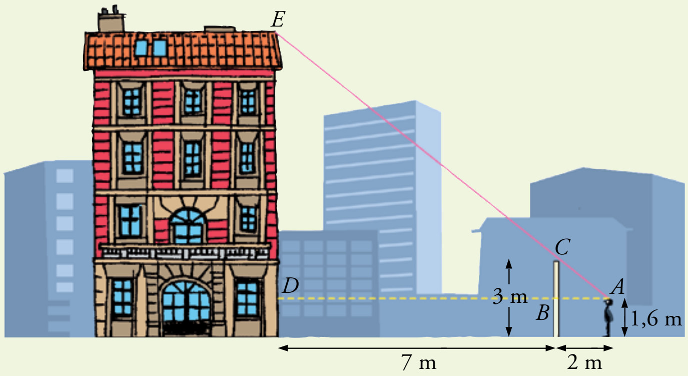
Problemas resueltos

1. Para medir la altura de un edificio, Miguel se sitúa de modo que ve alineados la parte alta de la verja y la del edificio. Señala su posición y toma las medidas que se ven en el dibujo.

a) Explicar por qué los triángulos *ABC* y *ADE* son semejantes.

b) Calcular $\overline{ED}$ y la altura del edificio.

1.



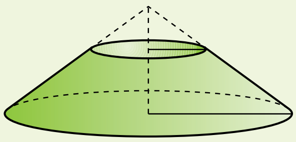
a) Los triángulos *ABC* y *ADE* son semejantes por ser rectángulos con un ángulo agudo igual, $\hat{A}$.

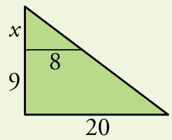
b) $\dfrac{\overline{ED}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \to \dfrac{\overline{ED}}{3 - 1{,}6} = \dfrac{2 + 7}{2} \to \overline{ED} = \dfrac{9 \cdot 1{,}4}{2} = 6{,}3$ m

La altura del edificio es 6,3 + 1,6 = 7,9 m.

2. Hallar el volumen de un tronco de cono de 9 cm de altura sabiendo que los radios de sus bases miden 20 cm y 8 cm.

2.





Ampliamos el tronco hasta completar un cono. Llamamos x al incremento de la altura. Tenemos en cuenta la semejanza de los dos triángulos: el pequeño, de catetos 8 y x; y el grande, de catetos 20 y $x + 9$:

$$\frac{x}{8} = \frac{x+9}{20} \to 20x = 8x + 72 \to 12x = 72 \to x = 6 \text{ cm}$$

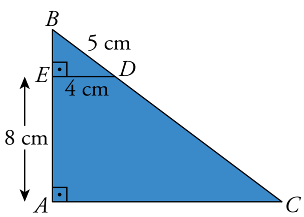
El volumen del tronco de cono es la diferencia de volúmenes de dos conos:

$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot (9 + 6) - \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 6 = \frac{1}{3}\pi\,(6\,000 - 384) = 5\,881{,}06 \text{ cm}^3$$

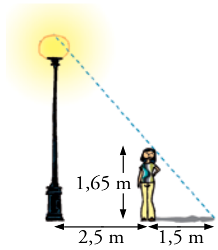
Actividades

4 Calcula la altura de un árbol que proyecta una sombra de 7,22 m en el momento en que un poste de 1,60 m da una sombra de 67 cm.

5 Halla los lados del triángulo *ABC*.

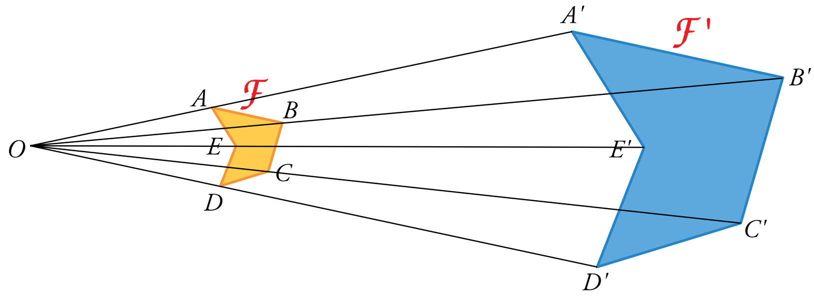


6 Si la altura de Rita es 1,65 m, ¿cuál es la altura de la farola?



7 Calcula el volumen de un tronco de cono cuya altura es 9 cm y cuyas bases tienen radios de 20 cm y 35 cm.

4 Construcción de una figura semejante a otra



Método de la proyección

Este método de construir una figura semejante a otra podría denominarse método de la proyección.

Matemáticamente, se dice que las figuras $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son **homotéticas** *con razón de homotecia* 3.

El punto O se llama **centro de homotecia.**

Deseamos ampliar la figura $\mathcal{F}$ al triple de su tamaño. Para ello, tomamos un punto O cualquiera. Trazamos rectas que pasen por O y por los puntos claves de la figura $\mathcal{F}$, y obtenemos los puntos correspondientes a una distancia triple.

El punto A' está, del punto O, a triple distancia que A: $\overline{OA'} = 3 \cdot \overline{OA}$

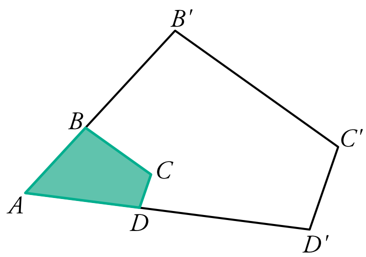
Y también: $\overline{OB'} = 3 \cdot \overline{OB}$, $\overline{OC'} = 3 \cdot \overline{OC}$, etc.

Se obtiene así la figura $\mathcal{F}'$, semejante a la $\mathcal{F}$, con razón de semejanza 3.

Es decir, los lados $A'B'$, $B'C'$, … son el triple de largos que sus correspondientes AB, BC, …, y lo mismo pasa con cualesquiera otros segmentos:

$$\overline{A'C'} = 3 \cdot \overline{AC}; \qquad \overline{E'B'} = 3 \cdot \overline{EB} \quad \dots$$

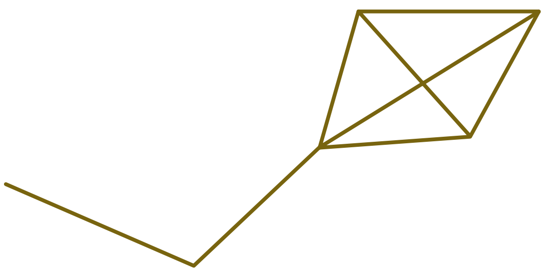
Además, los segmentos de $\mathcal{F}'$ son paralelos a sus correspondientes de $\mathcal{F}$.



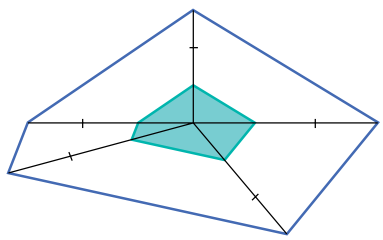
La ampliación se realiza con especial comodidad cuando tomamos como punto de proyección un vértice de la figura inicial.

Actividades

1 Dibuja en tu cuaderno una figura parecida a esta y amplíala al doble de tamaño mediante el método de la proyección.



2 Dibuja en tu cuaderno un pentágono irregular. Redúcelo a su tercera parte proyectando desde un punto interior. Vuelve a hacerlo tomando como punto de proyección uno de los vértices.



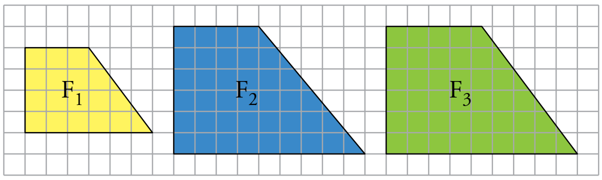
Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

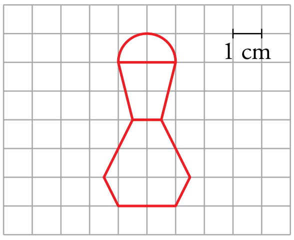
Practica

Figuras semejantes

1 ▼▽▽ ¿Cuáles de estas figuras son semejantes? ¿Cuál es la razón de semejanza?



2 ▼▽▽ Un joyero quiere reproducir un broche como el de la figura duplicando su tamaño.



a) Haz un dibujo de la figura ampliada.

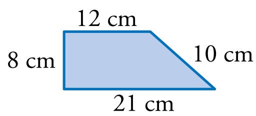
b) Calcula su superficie.

3 ▼▽▽ En un mapa de escala 1:1 500 000, la distancia entre dos poblaciones es de 2 cm.

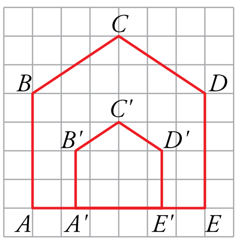
a) ¿Cuál es la distancia real?

b) ¿Qué distancia habrá en el plano entre dos ciudades que distan 180 km?

4 ▼▼▽ ¿Cuánto medirán los lados de un trapecio semejante al de la figura, cuyo perímetro sea 163,2 cm?

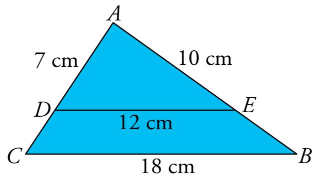


5 ▼▼▽ Halla el centro y la razón de homotecia que transforma la figura *ABCDE* en *A'B'C'D'E'*.



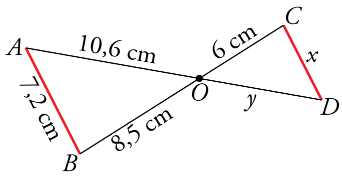
Semejanza de triángulos

6 ▼▽▽ En el triángulo *ABC* hemos trazado *DE* paralelo a *CB*.



¿Por qué son semejantes los triángulos *ABC* y *ADE*? Calcula $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.

7 ▼▽▽ Observa esta figura, en la que el segmento *AB* es paralelo a *CD*.



a) Di por qué son semejantes los triángulos *OAB* y *ODC*.

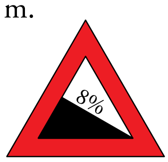
b) Calcula x e y.

8 ▼▽▽ En un triángulo rectángulo, la relación entre los catetos es 3/4. Halla el perímetro de otro triángulo semejante cuyo cateto menor mide 54 cm.

Aplica lo aprendido

9 ▼▼▽ Dos triángulos *ABC* y *PQR* son semejantes. Los lados del primero miden 24 m, 28 m y 34 m. Calcula la medida de los lados del segundo triángulo sabiendo que su perímetro es 129 m.

10 ▼▽▽ En una carretera de montaña, nos encontramos una señal que nos advierte que la pendiente es del 8%; es decir, por cada 100 m que recorremos, el desnivel es de 8 m.



a) ¿Cuál es el desnivel que se produce cuando recorremos 3 km?

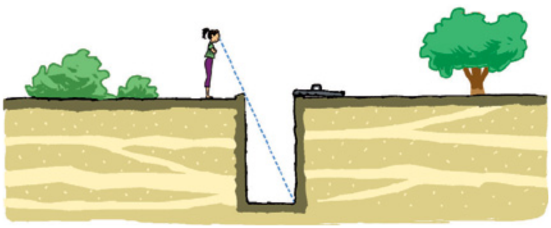
b) Para que el desnivel sea de 500 m, ¿cuántos kilómetros tendremos que recorrer?

Ejercicios y problemas

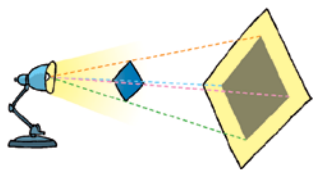
Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Resuelve problemas

11 ▼▼▼ ¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,2 m y alejándote 0,8 m del borde, desde una altura de 1,7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?

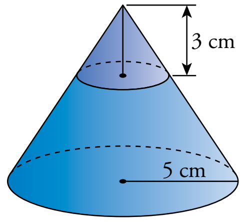


12 ▼▼▽ Una lámpara situada a 25 cm de una lámina cuadrada de 20 cm de lado, proyecta una sombra sobre una pantalla paralela que está a 1,5 m de la lámpara.



¿Cuánto mide el lado del cuadrado proyectado?

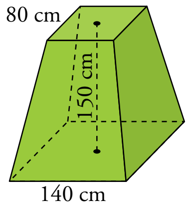
13 ▼▼▽ Para hacer un embudo de boca ancha, hemos cortado un cono de 5 cm de radio a 3 cm del vértice.



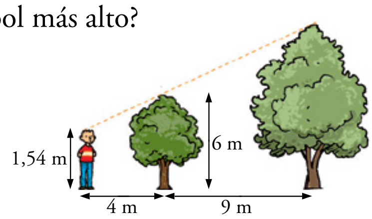
La circunferencia obtenida tiene 2 cm de radio.

Halla el volumen del embudo.

14 ▼▼▽ La base de una escultura tiene forma de tronco de pirámide cuadrangular regular en el que los lados de las bases miden 80 cm y 140 cm, y su altura, 150 cm. Halla su volumen.



15 ▼▼▽ Si la altura de Luis es 1,54 m, ¿cuál es la altura del árbol más alto?



Autoevaluación

¿Manejas la semejanza de figuras para obtener medidas de una a partir de la otra?

1 Alberto tiene una fotografía en la que aparece con su amigo Iván. En esta foto, Alberto mide 8 cm e Iván 7,5 cm. Si la altura real de Alberto es de 1,76 m, ¿cuál es la altura real de Iván?

¿Conoces las condiciones que se deben comprobar para asegurar que dos triángulos son semejantes?

2 Comprueba si son semejantes dos triángulos ABC y $A'B'C'$ que cumplen las condiciones siguientes:

a) $\overline{AB} = 10$; $\overline{BC} = 18$; $\overline{CA} = 12$

$\overline{A'B'} = 25$; $\overline{B'C'} = 45$; $\overline{C'A'} = 30$

b) $\overline{AB} = 20$; $\overline{BC} = 30$; $\overline{CA} = 40$

$\overline{A'B'} = 40$; $\overline{B'C'} = 50$; $\overline{C'A'} = 60$

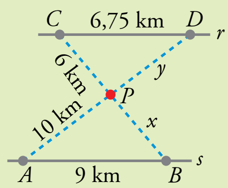
c) $\hat{A} = 58°$; $\hat{B} = 97°$

$\hat{A}' = 58°$; $\hat{C}' = 35°$

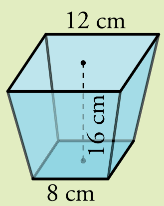
¿Utilizas con soltura la semejanza para resolver problemas?

3 Álvaro debe situarse a 3 m de un charco para ver la copa de un árbol reflejada en él. Si la distancia del charco al árbol es de 10,5 m y la estatura de Álvaro es de 1,72 m, ¿cuál es la altura del árbol?

4 Un centro comercial P está situado entre dos vías paralelas r y s. Se quiere unir, mediante carreteras, con las poblaciones A, B, C y D. Con los datos de la figura, calcula x e y.



5 Un florero tiene forma de tronco de pirámide de bases cuadradas de 8 cm y 12 cm de lado, y altura 16 cm. Calcula su volumen.



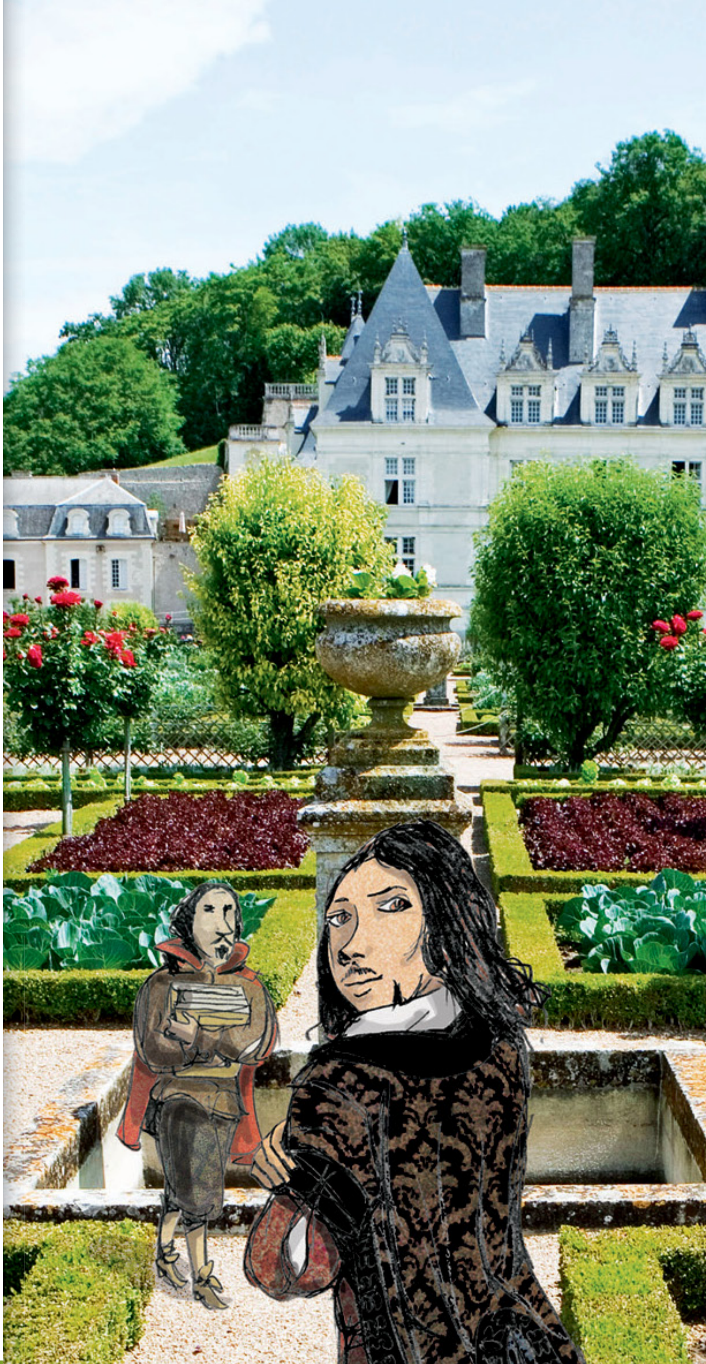
12 Geometría analítica

Con la invención de la Geometría Analítica se pone de manifiesto, una vez más, que las grandes creaciones humanas son fruto de una época, de un momento histórico cuyas circunstancias lo propician. Solo falta el personaje genial que lo lleve a efecto. En este caso fueron dos franceses, Descartes y Fermat, quienes la desarrollaron independiente y casi simultáneamente.

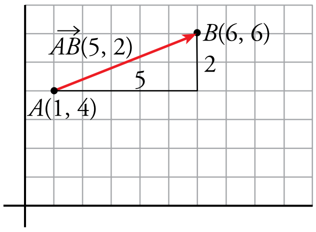
René Descartes (1596-1650), filósofo y matemático, en su obra *El discurso del Método* incluyó una parte final llamada "Geometría" en la que se detalla cómo se aplica el álgebra a la resolución de algunos problemas geométricos con la ayuda de un sistema de coordenadas. *Coordenadas cartesianas* se llamaron, pues en aquella época los textos científicos se escribían en latín y Descartes latinizó su nombre: *Cartesius*.

Pierre de Fermat (1601-1655), abogado, político y matemático por afición, desarrolló un sistema similar al de Descartes: aplicó los métodos algebraicos al tratamiento de figuras geométricas representadas en unos ejes de coordenadas rectangulares. Esto lo describió en 1636, un año antes que Descartes, pero no fue publicado hasta después de su muerte, por lo que su obra no ejerció tanta influencia como la de aquel. Por eso es frecuente atribuir solo a Descartes la invención de la Geometría Analítica, olvidando la contribución de Fermat que, incluso, llegó un poco antes.

La utilización de los vectores en la geometría (los físicos ya los usaban hacía tiempo) llegó en el siglo XIX por medio de **Gauss, Möbius** y **Bellavilis.**



1 Vectores en el plano



En un sistema de ejes cartesianos, cada punto se describe mediante sus coordenadas: $A(1, 4)$, $B(6, 6)$.

La flecha que va de A a B se llama **vector** y se representa por $\vec{AB}$. Es el vector de **origen** A y **extremo** B.

Al vector $\vec{AB}$ podríamos describirlo así: desde A avanzamos 5 unidades en el sentido de las X y subimos dos unidades en el sentido de las Y.

Eso se dice más brevemente así: las **coordenadas** de $\vec{AB}$ son (5, 2).

O, mejor, así .... $\vec{AB} = (5, 2)$.

O, simplemente, así .... $\vec{AB}(5, 2)$.

Las coordenadas de un vector se obtienen restando las coordenadas de su origen a las de su extremo:

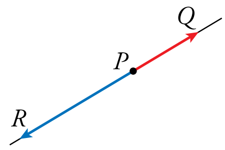
$$B(6, 6),\ A(1, 4) \qquad \vec{AB} = (6, 6) - (1, 4) = (5, 2)$$

Módulo de un vector, $\vec{AB}$, es la distancia de A a B. Se designa así: $|\vec{AB}|$. Si las coordenadas de $\vec{AB}$ son (x, y), entonces $|\vec{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dirección de un vector es la de la recta en la que se encuentra y la de todas sus paralelas.

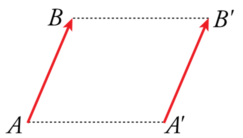
Cada dirección admite dos **sentidos** opuestos.

Por ejemplo, $\vec{PQ}$ y $\vec{PR}$ son vectores de sentidos opuestos.



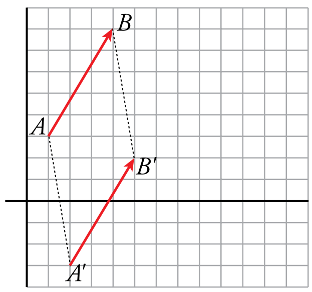
Igualdad de vectores

Dos vectores iguales $\vec{AB} = \vec{A'B'}$ situados en rectas distintas (y, por tanto, paralelas) determinan un paralelogramo $ABB'A'$.



Dos **vectores** son **iguales** cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. En tal caso, tienen las mismas coordenadas.

Ejercicio resuelto



$A(1, 3)$, $B(4, 8)$, $A'(2, -3)$, $B'(5, 2)$. Comprobar que los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{A'B'}$ son iguales.

Representándolos, observamos que tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Pero también podemos comprobarlo mediante sus coordenadas:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Coordenadas de } \vec{AB}: (4, 8) - (1, 3) = (3, 5) & \vec{AB}(3, 5) \\ \text{Coordenadas de } \vec{A'B'}: (5, 2) - (2, -3) = (3, 5) & \vec{A'B'}(3, 5) \end{array}\right\} \ \vec{AB} = \vec{A'B'}$$

Actividades

1 Representa los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$, siendo $A(1, 1)$, $B(-2, 7)$, $C(6, 0)$, $D(3, 6)$ y observa que son iguales. Comprueba que $\vec{AB} = \vec{CD}$ hallando sus coordenadas. Calcula su módulo.

2 Tenemos tres puntos de coordenadas:

$$A(3, -1),\ B(4, 6),\ C(0, 0)$$

Halla las coordenadas del punto D para que los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ sean iguales.

2 Operaciones con vectores

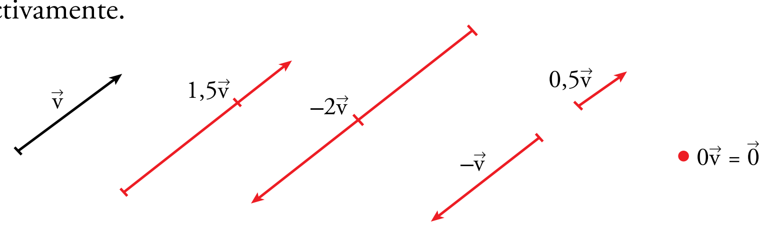
Notación

Los vectores se designan también mediante una letra minúscula con una flechita encima. Para ello, se suelen utilizar las letras $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, y, si se necesitan más, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.

Producto de un vector por un número

El producto de un número k por un vector $\vec{v}$ es otro vector $k\vec{v}$ que tiene:

- Módulo: $|k\vec{v}| = |k|\,|\vec{v}|$ (producto del módulo de $\vec{v}$ por el valor absoluto de k).
- Dirección: la misma que $\vec{v}$.
- Sentido: el mismo que el de $\vec{v}$ o su opuesto, según k sea positivo o negativo, respectivamente.



El producto $0\vec{v}$ es igual al **vector cero,** $\vec{0}$. Es un vector cuyo origen y extremo coinciden y, por tanto, su módulo es cero. Carece de dirección. El vector $-1\vec{v}$ se designa por $-\vec{v}$ y se llama **opuesto** de $\vec{v}$.

Las **coordenadas** del vector $k\vec{v}$ se obtienen multiplicando por k las coordenadas de $\vec{v}$. Las coordenadas de $\vec{0}$ son $(0, 0)$. Las coordenadas de $-\vec{v}$ son las opuestas de las coordenadas de $\vec{v}$.

Entrénate

Dados $\vec{u}(1, 3)$ y $\vec{v}(2, -1)$, calcular:

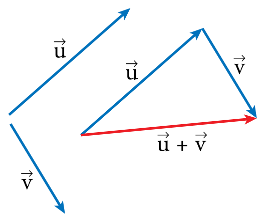
a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} - \vec{v}$

c) $2\vec{u}$ d) $3\vec{v}$

e) $2\vec{u} + 3\vec{v}$ f) $2\vec{u} - 3\vec{v}$

Suma y resta de vectores

- Para **sumar** dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se procede del siguiente modo: se sitúa $\vec{v}$ a continuación de $\vec{u}$, de manera que el origen de $\vec{v}$ coincida con el extremo de $\vec{u}$. La suma $\vec{u} + \vec{v}$ es el vector cuyo origen es el de $\vec{u}$ y extremo el de $\vec{v}$.

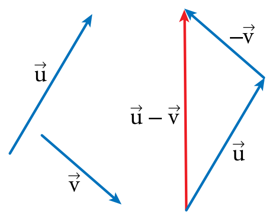


  Las **coordenadas** del vector $\vec{u} + \vec{v}$ se obtienen sumando las coordenadas de $\vec{u}$ con las de $\vec{v}$. Por ejemplo:

  $\vec{u}(7, -3)$, $\vec{v}(4, 5)$ $\rightarrow$ $\vec{u} + \vec{v} = (7 + 4, -3 + 5) = (11, 2)$

- Para **restar** dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se le suma a $\vec{u}$ el opuesto de $\vec{v}$: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

  Las **coordenadas** del vector $\vec{u} - \vec{v}$ se obtienen restándole a las coordenadas de $\vec{u}$ las de $\vec{v}$. Por ejemplo:



  $\vec{u}(7, -3)$, $\vec{v}(4, 5)$ $\rightarrow$ $\vec{u} - \vec{v} = (7 - 4, -3 - 5) = (3, -8)$

Actividades

1 a) Representa los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, siendo $A(1, 3)$, $B(4, 5)$, $C(6, -2)$. Halla sus coordenadas.

b) Representa $\vec{u} + \vec{v}$ y halla sus coordenadas.

c) Representa $3\vec{u}$, $-2\vec{u}$ y $0\vec{v}$ y halla sus coordenadas.

d) Representa y halla las coordenadas del vector $3\vec{u} - 4\vec{v}$.

2 Representa y halla las coordenadas de los vectores $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{p} = \vec{u} - \vec{v}$, $\vec{q} = -\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ siendo $\vec{u}(3, -1)$ y $\vec{v}(-4, 2)$.

3 Punto medio de un segmento. Distancia entre dos puntos

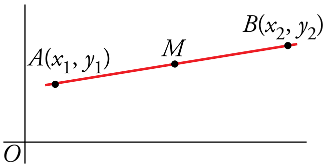
Punto simétrico

Si M es el punto medio de $\overline{AB}$, se dice que B es el **simétrico** de A respecto de M.

Entrénate

Calcula el punto medio, M, del segmento PQ, siendo $P(3, -5)$ y $Q(1, -1)$.

Punto medio de un segmento



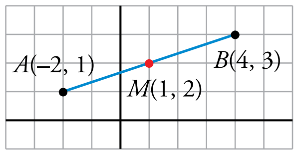
Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces las coordenadas del punto medio, M, del segmento AB son:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

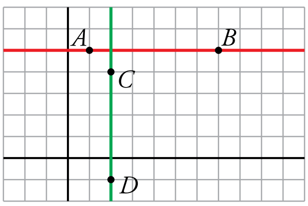
Las coordenadas del punto medio de un segmento son la semisuma de las coordenadas de sus extremos.

Por ejemplo, el punto medio del segmento de extremos $A(-2, 1)$, $B(4, 3)$ es:

$$M = \left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{1 + 3}{2}\right) = (1, 2)$$



Distancia entre dos puntos



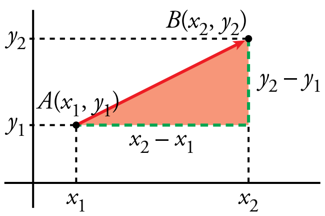
Si dos puntos tienen la misma abscisa o la misma ordenada, hallar su distancia es muy fácil. Por ejemplo, en el gráfico:

$$dist(A, B) = 6; \quad dist(C, D) = 5 \quad \text{(basta con contar cuadritos)}$$

O bien, mediante sus coordenadas:

$$dist[(3, -1), (3, 11)] = 11 - (-1) = 12$$

$$dist[(4, 7), (1, 7)] = 4 - 1 = 3$$



Para dos puntos cualesquiera, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, su distancia se obtiene hallando el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$dist(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esta fórmula también es válida si los puntos tienen la misma abscisa o la misma ordenada. Por ejemplo, la distancia entre los puntos $A(-2, 2)$ y $B(1, 6)$ es:

$$dist(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1 + 2)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Entrénate

Calcula la distancia entre los puntos $P(3, -5)$ y $Q(1, -1)$.

Actividades

1 Halla las coordenadas del punto medio de los siguientes segmentos:

a) $A(-2, 5)$, $B(4, 1)$

b) $P(7, -3)$, $Q(-5, 1)$

c) $R(1, 4)$, $S(7, 2)$

d) $A(-3, 5)$, $B(4, 0)$

2 Halla la distancia entre A y B.

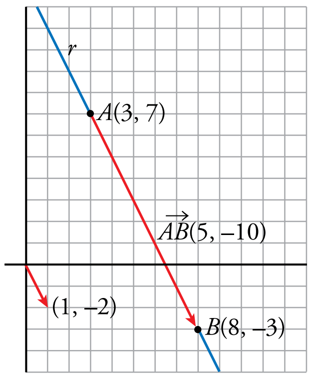
a) $A(-7, 4)$, $B(6, 4)$ b) $A(3, 4)$, $B(3, 9)$

c) $A(-5, 11)$, $B(0, -1)$ d) $A(4, -6)$, $B(7, 4)$

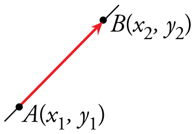
3 Si los vértices de un triángulo isósceles son los puntos $A(-4, 3)$, $B(4, -3)$ y $C(6, 8)$, calcula:

a) La altura sobre el lado AB. b) El área.

4 Ecuaciones de rectas. Paralelismo y perpendicularidad



Una recta queda determinada por dos puntos. A partir de ellos, como ya sabemos, se obtiene la pendiente, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, y, con ellos, la ecuación de la recta: $y = y_1 + m(x - x_1)$



El vector $\overrightarrow{AB}$ que une los dos puntos se llama **vector dirección** de la recta.

Por ejemplo, la recta r que pasa por $A(3, 7)$ y $B(8, -3)$ tiene como vector dirección a $\overrightarrow{AB}(5, -10)$ o cualquier otro vector paralelo a él, como el $(1, -2)$. La pendiente de esta recta es: $m = \dfrac{-3-7}{8-3} = \dfrac{-10}{5} = -2$

Su ecuación es: $y = 7 - 2(x - 3)$; es decir, $y = -2x + 13$

Recuerda

La pendiente de una recta dada por su ecuación es el coeficiente de la x cuando la y está despejada.

Vector dirección de una recta es cualquier vector paralelo a ella. Si A y B son puntos de la recta, $\overrightarrow{AB}$ es un vector dirección de ella.

Si $\vec{d}(a, b)$ es un vector dirección de r, su pendiente es: $m = \dfrac{b}{a}$

Ejercicios resueltos

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A(-2, 3)$ y $B(6, 7)$.

1. Un vector dirección es $\overrightarrow{AB}(8, 4)$. Otro vector dirección: $\vec{d}(2, 1)$

Pendiente: $m = \dfrac{1}{2}$. Ecuación: $y = 3 + \dfrac{1}{2}(x + 2) \rightarrow y = \dfrac{1}{2}x + 4$

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(5, -3)$ y tiene por vector dirección $\vec{d}(3, 2)$.

2. Su pendiente es: $m = \dfrac{2}{3}$

Su ecuación es: $y = -3 + \dfrac{2}{3}(x - 5)$

3. Hallar la ecuación de la recta paralela a r: $2x + 5y - 4 = 0$ que pasa por:

a) (0, 0) **b) (4, –3)**

3. Puesto que la rectas que nos piden son paralelas a r (tienen su misma pendiente), empezamos hallando la pendiente de r. Para ello, despejamos la y y nos fijamos en el coeficiente de la x:

$2x + 5y - 4 = 0 \rightarrow y = -\dfrac{2}{5}x + \dfrac{4}{5}$ Pendiente: $m = -\dfrac{2}{5}$

a) Pasa por (0, 0) y su pendiente es $-\dfrac{2}{5} \rightarrow y = -\dfrac{2}{5}x$.

b) Pasa por (4, –3) y su pendiente es $-\dfrac{2}{5} \rightarrow y = -3 - \dfrac{2}{5}(x - 4)$.

Actividades

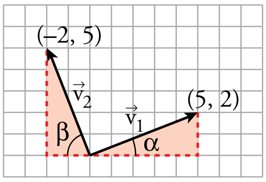
1 Halla la ecuación de la recta que pasa por:

a) $A(1, 3)$, $B(5, 5)$ b) $A(1, 6)$, $B(8, -2)$

2 Halla la ecuación de la recta que pasa por $(7, -5)$ y tiene por vector dirección $(7, -4)$.

3 Halla la recta paralela a $5x - 6y + 14 = 0$ que pasa por $(0, -3)$.

4 Halla la recta paralela a $5y - 10 = 0$ que pasa por $(2, 4)$.



Vector perpendicular a otro

Los vectores $\vec{v}_1(5, 2)$ y $\vec{v}_2(-2, 5)$ son perpendiculares. Se justifica observando, en la gráfica del margen, que los dos triángulos sombreados son iguales y, por tanto, $\alpha + \beta = 90°$. En general:

Los vectores de coordenadas (a, b) y $(-b, a)$ son perpendiculares.

Recta perpendicular a otra

Un vector dirección de una recta r_1 es $\vec{d}_1 = (a, b)$.

Si r_2 es perpendicular a r_1, un vector dirección de r_2 es $\vec{d}_2 = (-b, a)$.

Las pendientes de r_1 y r_2 son, respectivamente, $m_1 = \frac{b}{a}$ y $m_2 = \frac{-a}{b}$.

El producto de sus pendientes es -1: $m_1 \cdot m_2 = \frac{b}{a} \cdot \frac{-a}{b} = -1$

Las pendientes, m_1 y m_2, de dos rectas perpendiculares se relacionan así:

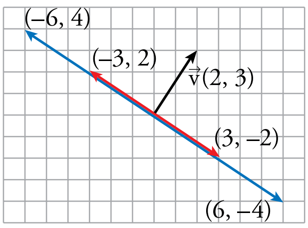
$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Ejercicios resueltos

1. Hallar la ecuación de la recta r que pasa por $A(4, 7)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(3, -5)$.

El vector $\vec{d}(5, 3)$ es perpendicular a $\vec{v}$ y, por tanto, es un vector dirección de r. La pendiente de r es $m = \frac{3}{5}$. Su ecuación es:

$$y = 7 + \frac{3}{5}(x - 4) \rightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{23}{5}$$



2. Obtener varios vectores perpendiculares a $\vec{v}(2, 3)$.

$(-3, 2)$ es perpendicular a $\vec{v}$. También lo son $(3, -2)$, $(-6, 4)$, $(6, -4)$...

3. Dar la ecuación de la recta r, perpendicular a s: $5x - 3y + 15 = 0$, que pasa por $(-7, 2)$.

Pendiente de s: $y = \frac{5}{3}x + 5 \rightarrow m_1 = \frac{5}{3}$

Pendiente de r: $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{3}{5}$

Ecuación de r: $y = 2 - \frac{3}{5}(x + 7) \rightarrow y = -\frac{3}{5}x - \frac{11}{5}$

Actividades

5 Da tres vectores perpendiculares a $(-6, 1)$.

6 Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(2, -5)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(5, 7)$.

7 La recta r pasa por $(3, 0)$, y la recta s, por $(-5, 3)$. Ambas son perpendiculares a $4x + 2y - 7 = 0$.

Halla sus ecuaciones.

Ejercicios y problemas

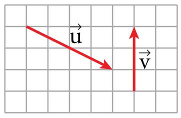
Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Vectores y puntos

1 ▼▽▽ Dados los puntos $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$, $C(5, 2)$ y $D(3, -4)$ halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$.

2 ▼▽▽ a) Di cuáles son las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



b) Dibuja los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ y di cuáles son sus coordenadas.

Rectas

3 ▼▽▽ Escribe la ecuación de las siguientes rectas:

a) Pasa por $(-4, 2)$ y su pendiente es $\frac{1}{2}$.

b) Pasa por $(5, -1)$ y su pendiente es 0.

4 ▼▽▽ Da, en cada caso, un vector dirección, la pendiente y la ecuación de la recta que pasa por A y B:

a) $A(-1, 0)$, $B(0, 3)$

b) $A(-2, 3)$, $B(4, -1)$

5 ▼▽▽ Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por $P(-4, 3)$ y tiene por vector dirección $\vec{d}$:

a) $\vec{d}(2, -1)$ b) $\vec{d}(-1, -3)$ c) $\vec{d}(2, 0)$

6 ▼▽▽ Halla la ecuación de las siguientes rectas:

a) Paralela a $y = -2x + 3$ y pasa por $(4, 5)$.

b) Paralela a $2x - 4y + 3 = 0$ y pasa por $(4, 0)$.

7 ▼▽▽ Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por $P(3, -2)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}$:

a) $\vec{v}(2, 1)$ b) $\vec{v}(-5, 4)$ c) $\vec{v}(-1, 0)$

8 ▼▽▽ Escribe la ecuación de la recta perpendicular a r y que pasa por el punto P en los siguientes casos:

a) $r: y = -2x + 3$; $P(-3, 2)$

b) $r: x = 3$; $P(0, 4)$

Distancias

9 ▼▽▽ Calcula la distancia entre P y Q:

a) $P(3, 5)$, $Q(3, -7)$ b) $P(-8, 3)$, $Q(-6, 1)$

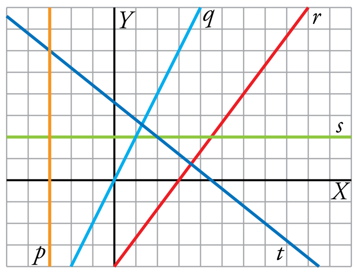
c) $P(0, -3)$, $Q(-5, 1)$ d) $P(-3, 0)$, $Q(15, 0)$

10 ▼▽▽ Comprueba que el triángulo de vértices $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$, $C(7, 4)$ es isósceles. ¿Cuáles son los lados iguales?

11 ▼▽▽ Dibuja el cuadrilátero de vértices $A(-4, 0)$, $B(2, 9/2)$, $C(4, -1)$, $D(-4, -6)$ y halla su perímetro.

Aplica lo aprendido

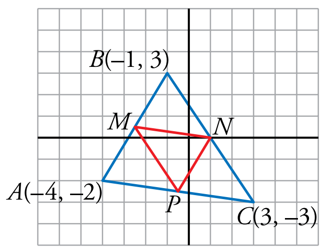
12 ▼▽▽ Escribe la ecuación de las rectas p, q, r, s y t.



13 ▼▽▽ a) Representa los vectores $\vec{u} = 2\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ y $\vec{v} = -\vec{x} + 4\vec{y} - 2\vec{z}$ siendo $\vec{x}(2, 2)$, $\vec{y}(3, 0)$ y $\vec{z}(1, -2)$.

b) Halla las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Son iguales?

14 ▼▽▽ a) Determina las coordenadas de los puntos M, N y P que son los puntos medios de los lados del triángulo ABC.



b) Halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ y $\overrightarrow{PN}$ y comprueba que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

15 ▼▽▽ Escribe la ecuación de una recta perpendicular a r y que pase por $(4, -3)$ en estos casos:

a) $r: 2x + 7 = 0$ b) $r: -y + 4 = 0$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

16 ▼▽▽ ¿Son r y s paralelas o perpendiculares?

r: $3x - 5y + 15 = 0$ $\quad$ s: pasa por $(-2, -3)$ y $(8, 3)$

17 ▼▼▽ Halla la ecuación de la recta perpendicular a AB en su punto medio, siendo $A(-5, 3)$ y $B(2, 7)$.

18 ▼▽▽ Comprueba que el cuadrilátero de vértices $A(1, 5)$, $B(5, 1)$, $C(-4, -3)$ y $D(-8, 1)$ es un paralelogramo. Para ello, prueba que los puntos medios de sus diagonales coinciden.

19 ▼▼▽ Comprueba que el triángulo de vértices $A(4, 4)$, $B(-2, 3)$ y $C(3, -2)$ es isósceles y calcula su área.

☞ *Una altura corta al lado desigual en su punto medio.*

20 ▼▽▽ La recta r es paralela a $5x - 4y + 3 = 0$, y la recta s es perpendicular a ellas. Ambas pasan por el punto $(1, 3)$. Escribe las ecuaciones de r y s.

Resuelve problemas

21 ▼▼▽ Dibuja un paralelogramo que tenga dos de sus lados sobre las rectas $y = 3x$ e $y = 0$ y un vértice en el punto $P(6, 3)$.

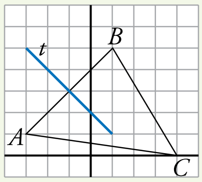
a) Halla las ecuaciones de los otros dos lados.

b) Di cuáles son las coordenadas de los otros vértices.

22 ▼▼▽ Halla las coordenadas del punto D, de modo que $ABCD$ sea un paralelogramo, siendo $A(1, -1)$, $B(0, 2)$ y $C(6, 5)$.

23 ▼▼▽ Ejercicio resuelto

En el triángulo de vértices $A(-3, 1)$, $B(1, 5)$ y $C(4, 0)$, hallar la ecuación de la mediatriz t del lado AB.



La mediatriz t es perpendicular a AB en su punto medio.

Punto medio de AB: $\left(\dfrac{-3+1}{2}, \dfrac{1+5}{2}\right) = (-1, 3)$

Pendiente de AB: $m = \dfrac{5-1}{1+3} = 1$

Pendiente de t: $m' = -1$

t: $y = 3 - 1(x + 1) \rightarrow x + y - 2 = 0$

24 ▼▼▽ En el triángulo de vértices $A(-1, 1)$, $B(3, 4)$, y $C(3, 0)$, halla:

a) La ecuación de la mediatriz de BC.

b) La ecuación de la mediatriz de AC.

25 ▼▼▽ Dado el triángulo de vértices $A(-5, 4)$, $B(4, 1)$, $C(-1, -2)$, halla:

a) El punto medio del lado AC.

b) La ecuación de la mediana del vértice B.

Autoevaluación

¿Dominas la operativa con vectores?

1 Dados los vectores $\vec{u}(2, -3)$ y $\vec{v}(-1, 4)$, calcula:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ $\qquad$ b) $\vec{u} - \vec{v}$

c) $3\vec{u}$ $\qquad$ d) $2\vec{v}$

e) $3\vec{u} + 2\vec{v}$ $\qquad$ f) $3\vec{u} - 2\vec{v}$

¿Sabes hallar el punto medio y la distancia entre dos puntos, a partir de sus coordenadas?

2 Calcula el punto medio, M, del segmento PQ, siendo $P(-5, 1)$, $Q(3, -7)$.

3 Calcula la distancia entre los puntos $P(-3, -6)$, $Q(5, 9)$.

¿Obtienes con soltura la ecuación de una recta dada de diferentes formas? ¿Reconoces, sin representarlas, si dos rectas son paralelas o perpendiculares?

4 Dados los puntos $A(2, 1)$ y $B(5, 3)$, obtén:

a) El vector dirección de la recta que pasa por A y B.

b) La ecuación de dicha recta.

5 Obtén la ecuación de la recta paralela a $y = 2x - 3$ por el punto $(0, 2)$.

6 Determina la ecuación de la recta perpendicular a $y = 1 + \dfrac{2}{3}(x - 2)$ por el punto $(2, 1)$.

13 Estadística

En el desarrollo histórico de la Estadística se pueden distinguir tres grandes etapas.

Censos. Desde la Antigüedad y hasta el siglo XVI. Solo se realizan recogidas de datos y, a lo sumo, una exposición ordenada y clara de estos.

Análisis de datos. Abarca los siglos XVII, XVIII y XIX. Se supera lo meramente descriptivo y los datos pasan a ser analizados científicamente con el fin de extraer conclusiones.

Se suele considerar que esta etapa comienza con los trabajos de **John Graunt** (s. XVII), quien utilizó archivos parroquiales para realizar un profundo estudio de los nacimientos y las defunciones en Londres durante 30 años: anotó el sexo de cada nacido, las enfermedades de los fallecidos y otras muchas variables. Con ello pudo extraer conclusiones válidas para el futuro e inauguró, así, la Estadística Demográfica.

Algo más tarde, el profesor **Neumann** (s. XVII) comenzó a utilizar métodos con los que elaboró estadísticas muy minuciosas y así, por ejemplo, consiguió demostrar la falsedad de la creencia popular de que en los años terminados en 7 morían más personas. Sus métodos sirvieron de base para elaborar las tablas de mortalidad utilizadas por las compañías de seguros.

También es destacable el trabajo de **Quételet** (s. XIX), el primero en aplicar la estadística a las Ciencias Sociales, para lo que se valió de la probabilidad.

Estadística inferencial. Se inicia a finales del XIX. La esencia de esta rama de la Estadística es que a partir de una muestra se extraen conclusiones válidas para toda una población. Para ello, se echa mano de la alta matemática. Son figuras destacadas en este campo **Ronald Fisher** y **Karl Pearson.**

1 Dos ramas de la estadística

Recuerda

Población. Es el conjunto de todos los elementos cuyo conocimiento nos interesa y que serán objeto de nuestro estudio.

Muestra es un subconjunto extraído de la población, cuyo estudio sirve para inferir características de toda la población.

Individuo es cada uno de los elementos que forman la población o la muestra.

Caracteres son los aspectos que deseamos estudiar en los individuos de una población. Cada carácter puede tomar distintos valores o modalidades.

Una **variable estadística** recorre todos los valores de un cierto carácter.

Las variables estadísticas pueden ser:

Cuantitativas si toman valores numéricos.

- **discretas:** solo toman valores aislados.
- **continuas:** pueden tomar cualquier valor de un intervalo.

Cualitativas si toman valores no numéricos.

La estadística tiene por objeto el desarrollo de técnicas para el conocimiento numérico de un conjunto de datos empíricos (recogidos mediante experimentos o encuestas). Según el colectivo a partir del cual se obtenga la información y el objetivo que se persiga a la hora de analizar esos datos, la estadística se llama descriptiva o inferencial.

Estadística descriptiva

La **estadística descriptiva** trata de describir y analizar algunos caracteres de los individuos de un grupo dado (población) sin extraer conclusiones para un grupo mayor.

Para este estudio, se dan los siguientes pasos:

1. Selección de los caracteres que interesa estudiar.
2. Análisis de cada carácter: diseño y realización de una encuesta o de un experimento y recogida de datos.
3. Clasificación y organización de los resultados en tablas de frecuencias.
4. Elaboración de gráficos, si conviene para divulgarlos a un público amplio (no expertos).
5. Obtención de **parámetros:** valores numéricos que resumen la información obtenida.

▼ **EJEMPLO**

Supongamos que por orden del rector, un funcionario de una universidad organiza, tabula, representa gráficamente y obtiene parámetros de algunos caracteres de todos los alumnos (por ejemplo: edades, resultados académicos) para compararlos con estudios similares hechos en años anteriores. Este estudio es **estadística descriptiva,** pues se realiza sobre la totalidad de la población.

Estadística inferencial

La **estadística inferencial** trabaja con muestras y pretende, a partir de ellas, “inferir” características de toda la población. Es decir, se pretende tomar como generales propiedades que solo se han verificado para casos particulares. En ese proceso hay que operar con mucha cautela: ¿Cómo se elige la muestra? ¿Qué grado de confianza se puede tener en el resultado obtenido?

▼ **EJEMPLO**

Una editorial realiza una encuesta a 387 alumnos de una universidad sobre sus preferencias en la lectura, con el fin de extraer consecuencias válidas para todos los universitarios. Esto es **estadística inferencial,** pues, a partir de una muestra, se desea obtener información sobre algún aspecto de la población.

Se estudia el corportamiento de una variable en una MUESTRA.

⬇

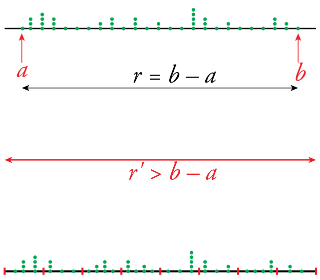
Se INFIERE el comportamiento de esa variable en la POBLACIÓN.

2 Tablas de frecuencias

Tras la recogida de datos, la elaboración de una tabla de frecuencias es el siguiente paso. Cuando la variable toma pocos valores, la elaboración de la tabla es sumamente sencilla. No hay más que hacer el recuento de los resultados.

Tabla con datos agrupados

Cuando en una distribución estadística el número de valores que toma la variable es muy grande, conviene elaborar una tabla de frecuencias agrupándolos en intervalos. Para ello:



1. Se localizan los valores extremos, a y b, y se halla su diferencia, $r = b - a$ (recorrido).
2. Se decide el número de intervalos que se quiere formar, teniendo en cuenta la cantidad de datos que se poseen. El número de intervalos no debe ser inferior a 6 ni superior a 15.
3. Se toma un intervalo, r', de longitud algo mayor que el recorrido r y que sea múltiplo del número de intervalos, con objeto de que estos tengan una longitud entera.
4. Se forman los intervalos, de modo que el extremo inferior del primero sea algo menor que a y el extremo superior del último sea algo mayor que b. Es deseable que los extremos de los intervalos no coincidan con ninguno de los datos. Para ello, conviene que los extremos de los intervalos tengan una cifra decimal más que los datos.

El punto medio de cada intervalo se llama **marca de clase.** Es el valor que representa a todo el intervalo para el cálculo de algunos parámetros.

No lo olvides

Cuando se elabora una tabla con datos agrupados, se pierde algo de información (pues en ella se ignora cada valor concreto, que se difumina dentro de un intervalo). A cambio, se gana en claridad y eficacia.

Ejercicio resuelto

Elaborar una tabla de frecuencias con las estaturas de 40 adolescentes:

168	160	167	175	175
167	168	158	149	160
178	166	158	163	171
162	165	163	156	174
160	165	154	163	165
161	162	166	163	159
170	165	150	167	164
165	173	164	169	170

1. Valores extremos: $a = 149$, $b = 178$. Recorrido: $r = 178 - 149 = 29$.
2. Tomaremos solo 6 intervalos. Un múltiplo de 6 mayor que 29 y próximo a él es 30. Longitud de cada intervalo: 5.
3. Formamos los intervalos comenzando por un número algo menor que $a = 149$ y terminando en un número algo mayor que $b = 178$.
4. Repartimos los datos en los intervalos:

INTERVALOS	148,5-153,5	153,5-158,5	158,5-163,5	163,5-168,5	168,5-173,5	173,5-178,5
M. DE CLASE	151	156	161	166	171	176
FRECUENCIAS	2	4	11	14	5	4

Actividades

1 Reparte los cuarenta datos del ejercicio resuelto anterior en 10 intervalos con el mismo recorrido total.

2 Reparte los cuarenta datos del ejercicio resuelto anterior en 8 intervalos. Para ello, toma $r' = 32$.

3 Parámetros estadísticos: $\bar{x}$ y σ

x_i	f_i
x_1	f_1
x_2	f_2
.	.
.	.
.	.
x_n	f_n

La tabla de frecuencias de la izquierda **puede corresponder** a:

- Una distribución de datos aislados que toma los valores $x_1, x_2, \dots x_n$.
- Una distribución de datos agrupados en intervalos, de los cuales $x_1, x_2, \dots x_n$ son las marcas de clase.

En el primer caso, la tabla refleja exactamente la distribución real. En el segundo, la tabla es una buena aproximación a la realidad.

Recordemos cómo se obtienen los **parámetros** a partir de una tabla:

PUNTUACIONES EN UN TEST

x_i	f_i	$f_i x_i$
0	12	0
1	31	31
2	86	172
3	92	276
4	48	192
5	19	95
	288	766

Media: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

$\Sigma f_i x_i \to$ suma de todos los datos

$\Sigma f_i = N \to$ n.° total de individuos

Por ejemplo, en la distribución que tenemos en el margen:

$\Sigma f_i = 288$. Hay 288 individuos (que han realizado el test).

$\Sigma f_i x_i = 766$. Es la suma de las puntuaciones de todos los individuos.

La media es $\bar{x} = 766/288 = 2{,}66$.

Varianza: $Var = \dfrac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$ o bien $Var = \dfrac{\Sigma f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$

Las dos expresiones coinciden.

— En la primera de ellas, se ve claro el significado de la varianza: promedio de los cuadrados de las desviaciones a la media.

— La segunda es más cómoda para los cálculos, como se puede apreciar en el ejemplo (tabla del margen):

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	12	0	0
1	31	31	31
2	86	172	344
3	92	276	828
4	48	192	768
5	19	95	475
	288	766	2 446

$$Var = \frac{2\,446}{288} - 2{,}66^2 = 1{,}42$$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{varianza}$

La desviación típica es un parámetro más razonable que la varianza, pues se expresa en la misma magnitud que los datos y que la media (por ejemplo, si los datos vienen en centímetros, la desviación típica viene en centímetros; sin embargo, la varianza se daría en centímetros cuadrados).

En el ejemplo: $\sigma = \sqrt{1{,}42} = 1{,}19$

Coeficiente de variación: $C.V. = \dfrac{\sigma}{\bar{x}}$

El coeficiente de variación sirve para comparar las dispersiones de población heterogéneas, pues indica la *variación relativa*.

En el ejemplo: $C.V. = \dfrac{1{,}19}{2{,}66} = 0{,}447$. O bien 44,7%.

Ejercicio resuelto

Calcular $\bar{x}$, σ y C.V. en la siguiente distribución:

DISTRIBUCIÓN DE PESOS (EN kg)	
INTERVALOS	FRECUENCIAS
42,5-53,5	4
53,5-64,5	19
64,5-75,5	86
75,5-86,5	72
86,5-97,5	41
97,5-108,5	7

Empezamos sustituyendo los intervalos por sus marcas de clase:

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
48	4	192	9 216
59	19	1 121	66 139
70	86	6 020	421 400
81	72	5 832	472 392
92	41	3 772	347 024
103	7	721	74 263
	229	17 658	1 390 434

$N = \Sigma f_i = 229$

$\Sigma f_i x_i = 17\,658$

$\Sigma f_i x_i^2 = 1\,390\,434$

Los números de la 3.ª columna, $f_i x_i$, se obtienen multiplicando los números de las columnas anteriores $(x_i \cdot f_i = f_i x_i)$. Por ejemplo, $59 \cdot 19 = 1\,121$.

Análogamente, los de la 4.ª columna se obtienen multiplicando los de la 1.ª por los de la 3.ª $(x_i \cdot f_i x_i = f_i x_i^2)$. Por ejemplo, $59 \cdot 1\,121 = 66\,139$.

Con las sumas de las columnas de la tabla, obtenemos los parámetros:

MEDIA: $$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{17\,658}{229} = 77{,}1 \text{ kg}$$

DESVIACIÓN TÍPICA: $$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{1\,390\,434}{229} - 77{,}1^2} = 11{,}2 \text{ kg}$$

COEF. DE VARIACIÓN: $$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{11{,}2}{77{,}1} = 0{,}145 = 14{,}5\%$$

CON CALCULADORA

1. Preparamos la calculadora para que trabaje en el **MODO SD.**
2. Borramos los datos que pudiera haber acumulados de otras ocasiones: INV AC
3. Introducimos los datos:
   48 × 4 DATA
   59 × 19 DATA
   …
   103 × 7 DATA
4. Resultados obtenidos:

N.º DE INDIVIDUOS Σf_i	n	→	229
SUMA DE VALORES $\Sigma f_i x_i$	Σx	→	17658
SUMA DE CUADRADOS $\Sigma f_i x_i^2$	Σx^2	→	1390434
MEDIA $\bar{x}$	$\bar{x}$	→	77.10917031
DESV. TÍPICA σ	σ_n	→	11.22230132

Actividades

1 Halla, manualmente y con calculadora, $\bar{x}$, σ y C.V. en la tabla obtenida en el ejercicio resuelto de la página 125:

x_i	151	156	161	166	171	176
f_i	2	4	11	14	5	4

2 Halla, manualmente y con calculadora, $\bar{x}$, σ y C.V. en la distribución de los ejercicios 1 y 2 de la página 125.

Compara los resultados entre sí y con los del ejercicio 1 de esta página.

4 Medidas de posición

Mediana

Si los individuos de una población están colocados en orden creciente según la variable que estudiamos, el que ocupa el valor central se llama individuo mediano, y su valor, la **mediana.** La mediana, Me, está situada de modo que antes de ella está el 50% de la población, y detrás, el otro 50%.

Por ejemplo: 6, 7, 7, 7, **8**, 9, 10, 12, 15 → mediana: $Me = 8$

Si el número de individuos es par, la mediana es el valor medio de los dos centrales. Por ejemplo: 6, 7, 7, 7, **8**, **9**, 10, 12, 15, 16 → $Me = 8{,}5$

Cuartiles

Si en lugar de partir la totalidad de los individuos en dos mitades, lo hacemos en cuatro partes iguales (todas ellas con el mismo número de individuos), los dos nuevos puntos de separación se llaman **cuartiles.**

Cuartil inferior, Q_1, es un valor de la variable que deja por debajo de él al 25% de la población, y por encima, al 75%.

El **cuartil superior,** Q_3, deja debajo al 75% y encima al 25%.

Se designan por Q_1 y Q_3, porque la mediana sería el Q_2.

Por ejemplo, en la distribución

$$\underbrace{1, 2, 2}_{25\%} \underset{Q_1}{\uparrow}, \underbrace{3, 4, 5}_{25\%} \underset{Me}{\uparrow}, \underbrace{5, 5, 6}_{25\%} \underset{Q_3}{\uparrow}, \underbrace{8, 9, 10}_{25\%}$$

estos parámetros toman los valores siguientes: $Q_1 = 2{,}5$; $Me = 5$; $Q_3 = 7$

Mediana y cuartiles se llaman **medidas de posición.**

Ten en cuenta

En general, las cosas no son tan fáciles como en este ejemplo. Obsérvalo en el ejercicio resuelto.

Ejercicio resuelto

Calcular Me, Q_1 y Q_3 en la distribución:

1 1 2 3 4 4 5 5 5

5 6 7 7 7 8 9 10

Hay 17 individuos. 17/2 = 8,5 → La Me es el valor del individuo 9.°, $Me = 5$.

17/4 = 4,25 → (5.° lugar) $Q_1 = 4$

17 · (3/4) = 12,75 → (13.° lugar) $Q_3 = 7$

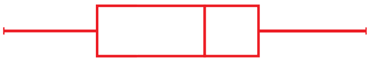
Actividades

1 Calcula Me, Q_1 y Q_3 en la siguiente distribución, cuyos datos están dados ordenadamente:

0 0 1 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 5

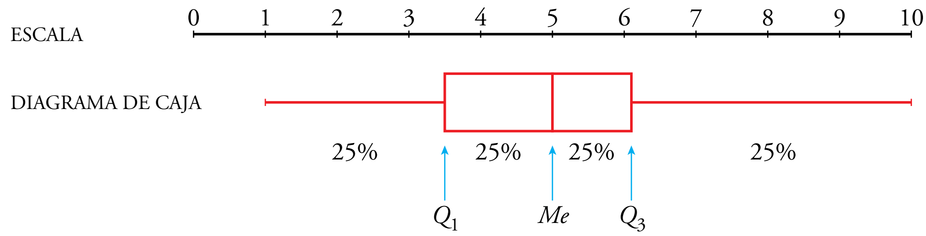
5 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 9 9 9 9 9 9 10 10

5 Diagramas de caja



Este diagrama se llama también de **caja y bigotes.**

Observa la siguiente forma de representar distribuciones estadísticas.



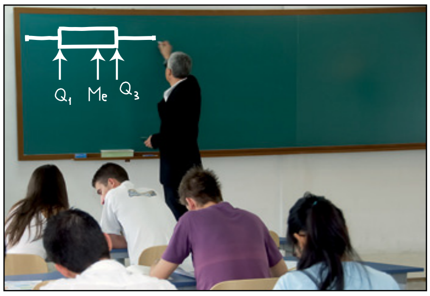
La gráfica corresponde a la distribución de notas en un cierto examen. En la parte alta se ha puesto la escala sobre la que se mueve la variable. Debajo se pone el diagrama propiamente dicho, que consiste en lo siguiente:

— La población total se parte en cuatro trozos, cada uno de ellos con el 25% de los individuos, previamente ordenados de menor a mayor.

— El 50% de los valores centrales se destacan mediante un rectángulo **(caja).**

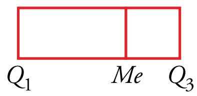
— Los valores extremos (el 25% de los menores y el 25% de los mayores) se representan mediante sendos segmentos **(bigotes).**

Los puntos que separan los cuatro trozos son, obviamente, los cuartiles y la mediana (Q_1, Me, Q_3).

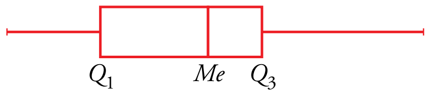


Los **diagramas de caja** (o caja y bigotes) se construyen del siguiente modo:

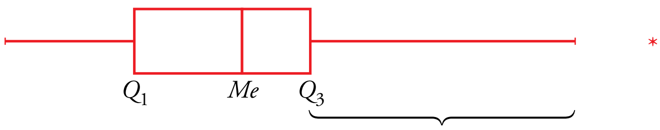
- La caja abarca el intervalo Q_1, Q_3 (llamado recorrido intercuartílico) y en ella se señala expresamente el valor de la mediana, Me.



- Los bigotes se trazan hasta abarcar la totalidad de los individuos, con la condición de que cada lado no se alargue más de una vez y media la longitud de la caja.



- Si uno (o más) de los individuos quedara por debajo o por arriba de esa longitud, el correspondiente lado del bigote se dibujaría con esa limitación y se añadiría, mediante asterisco, el individuo en el lugar que le corresponda. Por ejemplo:



La longitud de este lado del bigote es 1,5 veces la de la caja. En este lado no está incluido el individuo extremo que se representa mediante un asterisco.

Problemas resueltos

1. Representar, mediante un diagrama de caja, la siguiente distribución.

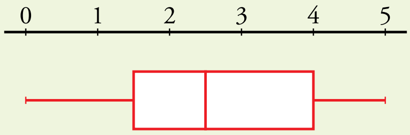
0 0 0 1 1 1 1 1 1 1
2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
3 3 3 3 3 3 3 3 3 4
4 4 4 4 4 4 4 5 5 5

1. Tenemos 40 individuos.

40 : 2 = 20 ⟶ La mediana será el valor intermedio entre los individuos 20.° y 21.°. Esto es: $Me = 2,5$.

40 : 4 = 10 ⟶ El cuartil inferior será el valor intermedio entre los individuos 10.° y 11.°: $Q_1 = 1,5$.

Y, de la misma manera: $Q_3 = 4$.



La longitud de la caja es 4 – 1,5 = 2,5. Los bigotes recogen al resto de la distribución. No hay individuo excepcionales.

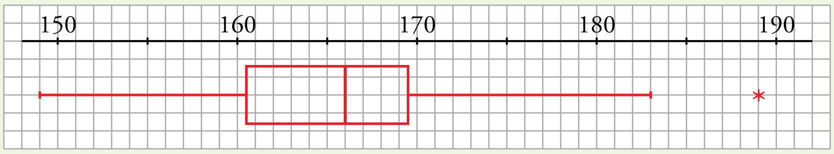
2. Las estaturas de los 40 alumnos y alumnas de una clase son, dadas ordenadamente:

149	**150**	**154**	**156**	**157**
158	**159**	**160**	**160**	**160**
161	**162**	**162**	**163**	**163**
163	**163**	**164**	**165**	**166**
166	**166**	**167**	**167**	**167**
168	**168**	**168**	**169**	**169**
170	**170**	**170**	**171**	**172**
173	**174**	**175**	**175**	**189**

Representar la distribución mediante un diagrama de caja.

2. Puesto que el número de individuos es múltiplo de cuatro, Q_1, Me y Q_3 serán los valores que hay entre los individuos 10.° y 11.°, entre 20.° y 21.°, entre 30.° y 31.°, respectivamente. Es decir,

$Q_1 = 160,5$ $\quad Me = 166$ $\quad Q_3 = 169,5$



La longitud de la caja es 169,5 – 160,5 = 9.

Una vez y media esta longitud es 1,5 · 9 = 13,5.

El altísimo estudiante que mide 189 cm se separa del extremo superior de la caja 189 – 169,5 = 19,5. Esa distancia es mayor que una vez y media la longitud de la caja. Por eso, hemos puesto a la derecha un bigote de longitud 13,5 y hemos añadido un asterisco que señala la situación del individuo excepcional.

Actividades

1 Representa mediante diagramas de caja y bigotes las siguientes distribuciones:

a) 1 1 2 3 4 4 5 5
5 6 7 7 7 8 9 10

b) 1 2 2 3 3 3 4 4 4 4 4 5 5 5
5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 6 6 6 7 7
7 7 7 7 7 7 7 8 8 8 8 9 9 10 10

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Tablas de frecuencias

1 ▼▽▽ En una maternidad se han tomado los pesos (en kilogramos) de 50 recién nacidos:

2,8	3,2	3,8	2,5	2,7	3,7	1,9	2,6	3,5	2,3
3,0	2,6	1,8	3,3	2,9	2,1	3,4	2,8	3,1	3,9
2,9	3,5	3,0	3,1	2,2	3,4	2,5	1,9	3,0	2,9
2,4	3,4	2,0	2,6	3,1	2,3	3,5	2,9	3,0	2,7
2,9	2,8	2,7	3,1	3,0	3,1	2,8	2,6	2,9	3,3

a) ¿Cuál es la variable y de qué tipo es?

b) Construye una tabla con los datos agrupados en 6 intervalos de 1,65 a 4,05.

c) Representa gráficamente esta distribución.

2 ▼▽▽ A un grupo de 30 personas se les ha tomado el número de pulsaciones por minuto (ritmo cardíaco) obteniéndose los siguientes resultados:

87	85	61	51	64	75	80	70	69	82
80	79	82	74	92	76	72	73	63	65
67	71	88	76	68	73	70	76	71	86

Representa gráficamente esta distribución agrupando los datos en 6 intervalos (desde 50,5 a 92,5).

Media, desviación típica y C.V.

Halla la media, la desviación típica y el coeficiente de variación en las siguientes distribuciones:

3 ▼▽▽

x_i	f_i
0	12
1	9
2	7
3	6
4	3
5	3

4 ▼▽▽

x_i	f_i
0	1
1	5
2	6
3	7
4	4
5	4
6	3

5 ▼▽▽

INTERVALO	f_i
1,65-2,05	4
2,05-2,45	5
2,45-2,85	13
2,85-3,25	17
3,25-3,65	8
3,65-4,05	3

6 ▼▽▽

INTERVALO	f_i
50,5-57,5	1
57,5-64,5	3
64,5-71,5	8
71,5-78,5	8
78,5-85,5	6
85,5-92,5	4

7 ▼▽▽ Los gastos mensuales de una empresa *A* tienen una media de 100 000 euros y una desviación típica de 12 500 euros. En otra empresa *B*, la media es 15 000 euros, y la desviación típica, 2 500 euros. Calcula el coeficiente de variación y di cuál de las dos tiene más variación relativa.

Medidas de posición

8 ▼▽▽ La mediana y los cuartiles de la distribución de "Aptitud para la música" (escala 1-100) en un colectivo de personas son $Q_1 = 31$, $Me = 46$ y $Q_3 = 67$.

Copia y completa las siguientes afirmaciones:

a) El 75% tiene una aptitud superior o igual a ____.

b) El 25% tiene una aptitud superior o igual a ____.

c) El ____% tiene una aptitud igual o menor a 46 puntos.

d) El ____% tiene una aptitud superior o igual a 46 e inferior o igual a 67.

e) El ____% tiene una aptitud superior o igual a 31 e inferior o igual a 67.

9 ▼▽▽ La altura, en centímetros, de un grupo de alumnos y alumnas de una misma clase es:

150	169	171	172	172	175	181
182	183	177	179	176	184	158

Calcula la mediana y los cuartiles y explica el significado de estos parámetros.

10 ▼▽▽ Calcula la mediana y los cuartiles de la siguiente distribución:

x_i	0	1	2	3	4	5
f_i	12	9	7	6	3	3

11 ▼▽▽ Halla la mediana, los cuartiles y el percentil 60 en cada una de las siguientes distribuciones, correspondientes a las notas obtenidas en un test que han hecho dos grupos de estudiantes:

A: 25 – 22 – 27 – 30 – 23 – 22 – 31 – 18
24 – 25 – 32 – 35 – 20 – 28 – 30

B: 27 – 32 – 19 – 22 – 25 – 30 – 21
29 – 23 – 31 – 21 – 20 – 18 – 27

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Diagramas de caja

Haz el diagrama de caja correspondiente a las siguientes distribuciones.

12 ▼▽▽ La del ejercicio 8.

13 ▼▽▽ La del ejercicio 9.

14 ▼▽▽ La A y la B del ejercicio 10.

Muestreo

15 ▼▽▽ Se quieren realizar los siguientes estudios:

I. Tipo de transporte que utilizan los vecinos de un barrio para acudir a su trabajo.

II. Estudios que piensan seguir los alumnos y las alumnas de un centro escolar al terminar la ESO.

III. Edad de las personas que han visto una obra de teatro en una ciudad.

IV. Número de horas diarias que ven la televisión los niños y las niñas de tu comunidad autónoma con edades comprendidas entre 5 y 10 años.

a) Di en cada uno de estos casos cuál es la población.

b) ¿En cuáles de ellos es necesario recurrir a una muestra? ¿Por qué?

16 ▼▽▽ Para hacer un sondeo electoral en un pueblo de 400 electores, aproximadamente, se va a elegir una muestra de 200 individuos. Di si te parece válido cada uno de los siguientes modos de seleccionarlos y explica por qué.

a) Se le pregunta al alcalde, que conoce a todo el pueblo, qué individuos le parecen más representativos.

b) Se eligen 200 personas al azar entre las que acuden a la verbena el día del patrón.

c) Se seleccionan al azar en la guía telefónica y se les encuesta por teléfono.

d) Se acude a las listas electorales y se seleccionan al azar 200 de ellos.

Aplica lo aprendido

17 ▼▽▽ En una urbanización de 25 familias se ha observado la variable "número de coches que tiene la familia" y se han obtenido los siguientes datos:

0 1 2 3 1   0 1 2 3 1
0 1 1 1 4   0 1 1 1 4
3 2 2 1 1

a) Construye la tabla de frecuencias.

b) Haz el diagrama de barras.

c) Calcula la media y la desviación típica.

d) Halla la mediana y los cuartiles.

e) Dibuja el diagrama de caja.

Autoevaluación

¿Conoces los parámetros estadísticos $\bar{x}$, σ y C.V.? ¿Los sabes calcular e interpetar?

1 La edad de los visitantes de una exposición está recogida en la siguiente tabla:

EDAD	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)	[55, 65)	[65, 75]
N.° DE VIS.	63	95	189	243	175	105

a) Representa los datos en un gráfico adecuado.

b) Halla $\bar{x}$, σ y C.V.

2 Los beneficios, en millones de euros, de dos empresas en seis años consecutivos han sido los siguientes:

A	5,9	2,5	7,4	8,1	4,8	3,7
B	4,5	3,8	5,7	3,5	5,5	4,6

¿Cuál de las dos empresas tiene mayor variación?

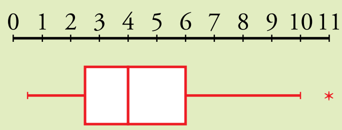
¿Conoces las medidas de posición, mediana, cuartiles y percentiles? ¿Los sabes calcular e interpretar? ¿Sabes utilizarlos para construir o interpretar un diagrama de caja?

3 Halla la mediana y los cuartiles de la siguiente distribución:

0 0 1 1 1   1 1 1 1 1   2 2 2 2 2   2 2 2 2 2
2 2 2 2 2   2 2 2 3 3   3 3 3 3 4   4 4 4 6 8

Haz el correspondiente diagrama de caja.

4 Indica por qué el diagrama de caja siguiente es incorrecto:



14 Cálculo de probabilidades

Históricamente, el interés por la probabilidad comienza con los juegos de azar. **Cardano,** algebrista italiano del siglo XVI, fue un jugador empedernido en algunas épocas de su vida. Esta pasión le hizo ser conocedor de trucos y fullerías. Acabó escribiendo un libro sobre el juego, en el que, por primera vez, se teoriza sobre las probabilidades.

Fue otro jugador en el siglo XVII, el caballero de Meré, quien indujo, sin saberlo, a que los matemáticos **Pascal** y **Fermat** mantuvieran una fructífera correspondencia: en sus cartas, proponían soluciones a algunos problemas sobre juegos planteados por Meré (al tirar cuatro dados, ¿qué es más ventajoso, apostar por "algún 6" o por "ningún 6"?), y elucubraban sobre otras situaciones probabilísticas. Así nació, con estos dos genios, la base de la teoría de las probabilidades.

Ni Pascal ni Fermat publicaron sus conclusiones, pero sí lo hizo **Huygens** en 1657, en un breve libro titulado *Sobre los razonamientos en los juegos de azar.*

En 1713, **Jacques Bernouilli** recogió lo escrito por Huygens, lo amplió y completó, construyendo así el primer libro importante sobre la teoría de las probabilidades: *Arte de la conjetura.*

Laplace, en 1812, publicó *Teoría analítica de las probabilidades,* donde recogió y organizó multitud de resultados que había ido obteniendo y difundiendo desde hacía 40 años. Se trata de la mayor aportación de la historia a esta teoría. Pocos años después publicó *Ensayo filosófico de las probabilidades,* destinado a los no expertos. De este libro es la siguiente frase:

La teoría de las probabilidades es solo sentido común expresado con números.

1 Probabilidades en experiencias simples

Experiencias irregulares

Para calcular la probabilidad de un suceso correspondiente a una experiencia irregular (una chincheta, o un dado cargado, o extraer una bola de una bolsa cuya composición ignoramos…) no queda más remedio que experimentar. Es decir, repetir la experiencia muchas veces, averiguar la frecuencia relativa de ese suceso y asignarle ese valor (aproximado) a la probabilidad. Cuantas más veces hagamos la experiencia, más fiable será el valor asignado.

Por ejemplo, si en una bolsa hay bolas de cinco colores (🔴, 🟢, 🔵, ⚪ y ⚫) y realizamos 100 veces la experiencia de extraer, mirar, anotar y devolver a la bolsa, obteniendo los siguientes resultados:

f(🔴) = 34, f(🟢) = 23, f(🔵) = 21, f(⚪) = 8, f(⚫) = 14

les asignaríamos los siguientes valores a las probabilidades:

P[🔴] ≈ fr(🔴) = 0,34; P[🟢] ≈ fr(🟢) = 0,23; P[🔵] ≈ fr(🔵) = 0,21;

P[⚪] ≈ fr(⚪) = 0,08; P[⚫] ≈ fr(⚫) = 0,14

Experiencias regulares. Ley de Laplace

Si la experiencia aleatoria se realiza con un instrumento regular (dado correcto, baraja completa…), entra en juego la ley de Laplace. Recordémosla:

- Si el espacio muestral tiene n casos y la experiencia es *regular*, entonces todos ellos tienen la misma probabilidad, $1/n$.
- Si un suceso tiene k casos, entonces su probabilidad es k/n.

$$P[S] = \frac{\text{número de casos favorables a } S}{\text{número total de casos posibles}}$$

Por ejemplo, en una bolsa hay 40 bolas idénticas salvo en el color. De ellas, 15 son rojas. Entonces, al extraer una bola al azar:

$$P[\text{Roja}] = \frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

Problemas resueltos

1. Lanzamos un dado con forma de dodecaedro perfecto, con las caras numeradas del 1 al 12. Calcular:

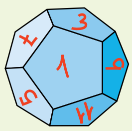
a) $P[8]$

b) P[menor que 3]

c) P[impar]

d) P[número primo]

e) P[mayor que 4 pero menor que 8]



1. a) $P[8] = \frac{1}{12}$. Hay 12 casos, y el “8” es uno de ellos.

b) Solo 1 y 2 son menores que 3 → $P[\text{menor que } 3] = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

c) Hay 6 números impares menores que 12 → $P[\text{impar}] = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

d) 2, 3, 5, 7, 11 son primos → $P[\text{número primo}] = \frac{5}{12}$

e) $P[\{5, 6, 7\}] = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

2. Con un molde se han fabricado varios miles de dados. Sospechamos que son incorrectos. ¿Cómo procedemos para averiguar si son o no correctos? En caso de que no lo sean, ¿cómo evaluaremos la probabilidad de cada cara?

2. Podemos suponer que todos los dados son idénticos. Experimentamos con varios efectuando, en total, 1 000 lanzamientos. Estos son los resultados:

	1	2	3	4	5	6
f	154	123	236	105	201	181
fr	0,154	0,123	0,236	0,105	0,201	0,181

Observamos que algunas de las frecuencias relativas se diferencian demasiado del valor 1/6 = 0,166…

Puesto que el número de experimentaciones (1 000) es suficientemente grande, podemos concluir que el dado es defectuoso. Tomaremos las frecuencias relativas de las distintas caras como valores aproximados de sus respectivas probabilidades.

3. Lanzamos dos dados correctos y anotamos las diferencias de las puntuaciones.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) ¿Qué probabilidad tiene cada caso?

c) Hallar la probabilidad del suceso “la diferencia es mayor que 3”.

3.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	0	1	2	3	4	5
⚁	1	0	1	2	3	4
⚂	2	1	0	1	2	3
⚃	3	2	1	0	1	2
⚄	4	3	2	1	0	1
⚅	5	4	3	2	1	0

A partir de la tabla de la izquierda, construimos la distribución siguiente:

DIFERENCIAS	0	1	2	3	4	5
N.° DE VECES	6	10	8	6	4	2
PROBABILIDAD	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

a) y b) En la tabla anterior aparece el espacio muestral, $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, con las probabilidades asociadas a cada caso.

c) P[Diferencia mayor que 3] = P[{4, 5}] = 4/36 + 2/36 = 6/36 = 1/6

4. Un juego de cartas solo distingue estas posibilidades:

FIGURA (sota, caballo o rey), AS, MENOR QUE 6 (2, 3, 4, 5), MAYOR QUE 5 (6, 7).

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Di la probabilidad en cada caso.

c) ¿Cuál es la probabilidad de “no FIGURA”?

4. Hay 40 cartas. La probabilidad de cada una es 1/40.

a) En este juego, el espacio muestral es E = {“FIGURA”, “AS”, “< 6”, “> 5”}.

b) Hay 3 figuras en cada palo ⟶ P[FIGURA] = 12/40 = 3/10 = 0,3

Hay 4 ases en la baraja ⟶ P[AS] = 4/40 = 1/10 = 0,1

Hay 4 números < 6 en cada palo → P[< 6] = 16/40 = 2/5 = 0,4

Hay 2 números > 5 en cada palo → P[> 5] = 8/40 = 1/5 = 0,2

c) P[no FIGURA] = 1 – P[FIGURA] = 1 – 0,3 = 0,7

Actividades

1 Lanzamos un dado con forma de octaedro, con sus caras numeradas del 1 al 8. Evalúa estas probabilidades:

a) P[múltiplo de 3]

b) P[menor que 5]

c) P[número primo]

d) P[no múltiplo de 3]

2 Lanzamos dos dados y anotamos *la menor de las puntuaciones*.

a) Escribe el espacio muestral y asígnale probabilidad a cada uno de los casos.

b) Halla la probabilidad del suceso “la menor puntuación es menor que 4” = “< 4”.

c) Halla P[no < 4].

2 Probabilidades en experiencias compuestas

Las experiencias simples que forman una experiencia compuesta pueden ser **dependientes** o **independientes.**

Recuerda

Las siguientes experiencias:

a) *extraer tres cartas de una baraja,*

b) *lanzar cinco dados,*

se pueden considerar como experiencias compuestas de otras simples:

a) *Extraer una carta de una baraja, después otra, y después otra.*

b) *Lanzar un dado, y otro… y otro.*

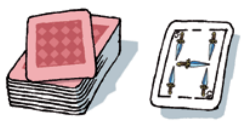
Dos o más experiencias aleatorias se llaman **independientes** cuando el resultado de cada una de ellas no depende del resultado de las demás.

Por ejemplo, el lanzamiento de dos dados puede considerarse como composición de dos pruebas (un dado y otro dado) independientes, pues el resultado de cada dado no influye en el otro.

Dos o más experiencias aleatorias se llaman **dependientes** cuando el resultado de cada una de ellas influye en las probabilidades de las siguientes.

La 1.ª es AS. Quedan 3 ASES en 39 cartas.

La 1.ª no es AS. Quedan 4 ASES en 39 cartas.



Por ejemplo, extraer dos cartas de una baraja (una carta seguida de otra carta) es la composición de dos pruebas *dependientes*, pues el resultado de la primera influye en las probabilidades de los sucesos de la segunda:

1.ª extracción	quedan	2.ª extracción
AS	39 cartas, 3 ASES	$P[\text{AS}] = 3/39$
NO AS	39 cartas, 4 ASES	$P[\text{AS}] = 4/39$

Como vemos, las probabilidades de los sucesos en la 2.ª extracción *dependen* de lo que ocurrió en la 1.ª.

Extracciones con o sin reemplazamiento

"Extraemos una bola de esta bolsa y, después, otra". Falta un dato: ¿la que hemos extraído la echamos de nuevo a la bolsa antes de la 2.ª extracción o no?

— "Sacamos una bola, la miramos, la devolvemos a la bolsa, removemos y volvemos a sacar", lo resumimos así: "sacamos dos bolas **con reemplazamiento**".

— "Sacamos una bola, la miramos y sacamos otra" se resume así: "sacamos dos bolas **sin reemplazamiento**".

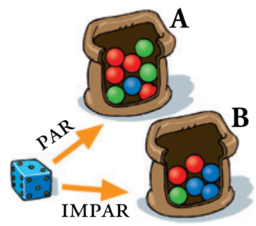
En el primer caso, las experiencias son independientes. En el segundo, dependientes.

Actividades

1

Lanzamos un dado y, después, sacamos una bola de la bolsa. Estas dos experiencias, ¿son dependientes o independientes?

2



Lanzamos un dado. Si sale par, extraemos una bola de la bolsa A. Si sale impar, de la B. Las experiencias, ¿son dependientes o independientes?

3 Composición de experiencias independientes

Experiencias independientes

El resultado de cada experiencia **no influye** en el resultado de la siguiente.

Es más sencillo calcular las probabilidades de los sucesos compuestos descomponiéndolos en sucesos simples.

Cuando varias experiencias aleatorias son independientes, la probabilidad de que ocurra S_1 en la primera, S_2 en la segunda, etc., es:

$$P[S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } \dots] = P[S_1] \cdot P[S_2] \cdot \dots$$

Problemas resueltos

1. Lanzamos dos dados, uno rojo (R) y otro verde (V). Hallar estas probabilidades:

a) 3 en R y 5 en V

b) 5 en R y 3 en V

c) un 3 y un 5

d) PAR en R y > 2 en V

"PAR" = {2, 4, 6}

"> 2" = {3, 4, 5, 6}

1. a) $P[3 \text{ en R y } 5 \text{ en V}] = P[3] \cdot P[5] = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

b) $P[5 \text{ en R y } 3 \text{ en V}] = P[5] \cdot P[3] = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

c) $P[\text{un } 3 \text{ y un } 5] = P[3 \text{ en R y } 5 \text{ en V}] + P[5 \text{ en R y } 3 \text{ en V}] =$

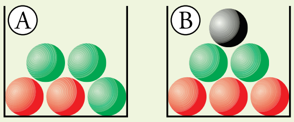
$$= \left(\frac{1}{36}\right) + \left(\frac{1}{36}\right) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

d) $P[\text{PAR en R y} > 2 \text{ en V}] = P[\text{PAR}] \cdot P[> 2] =$

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1
⚁	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
⚂	1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
⚃	1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
⚄	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
⚅	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

2. Sacamos una bola de A y una bola de B. Calcular:



a) P[🔴 y 🔴]

b) P[🔴 y 🟢]

c) P[🟢 y 🔴]

d) P[una de ellas 🔴 y otra 🟢]

e) P[la segunda ⚫]

2. a) P[🔴 y 🔴] = P[1.ª 🔴] · P[2.ª 🔴] = $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

b) P[🔴 y 🟢] = P[1.ª 🔴] · P[2.ª 🟢] = $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

c) P[🟢 y 🔴] = P[1.ª 🟢] · P[2.ª 🔴] = $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

d) P[una de ellas 🔴 y otra 🟢] = P[🔴 y 🟢] + P[🟢 y 🔴] = $\frac{4}{30} + \frac{9}{30} = \frac{13}{30}$

e) P[la 2.ª ⚫] = P[cualquier cosa la 1.ª] · P[la 2.ª ⚫] = $1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

Actividades

1 Se extraen 3 cartas con reemplazamiento. Halla:

a) P[AS en 1.ª y FIGURA en 2.ª y 3.ª] b) P[3 ASES]

c) P[un AS y dos FIGURAS] d) P[ningún AS]

2 Se lanzan 5 monedas. Halla la probabilidad de:

a) 5 caras b) alguna cruz

3 Lanzamos 3 monedas. Calcula:

a) P[tres caras] b) P[ninguna cara] c) P[alguna cara]

4 Se lanzan dos monedas y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en ambas monedas y seis en el dado? ¿Cuál, la de obtener cruz en las monedas y par en el dado?

4 Composición de experiencias dependientes

Experiencias dependientes

El resultado de cada experiencia influye en las probabilidades de las siguientes.

Si dos sucesos S_1 y S_2 corresponden a pruebas dependientes, la probabilidad de que ocurra S_1 en la 1.ª y S_2 en la 2.ª es:

$$P[S_1 \text{ y } S_2] = P[S_1] \cdot P[S_2 \text{ en la 2.ª} / S_1 \text{ en la 1.ª}] = P[S_1] \cdot P[S_2 / S_1]$$

La expresión $P[S_2 / S_1]$ se llama **probabilidad condicionada:** probabilidad de S_2 **condicionada** a que ocurra S_1.

Para tres sucesos dependientes:

$$P[S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } S_3] = P[S_1] \cdot P[S_2 / S_1] \cdot P[S_3 / S_1 \text{ y } S_2]$$

La probabilidad condicionada $P[S_3 / S_1 \text{ y } S_2]$ significa "probabilidad de que ocurra S_3 supuesto que ocurrieron S_1 y S_2".

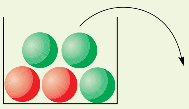
Problema resuelto

De una urna con 3 bolas verdes y 2 rojas, extraemos dos bolas. Calcular la probabilidad de que:

a) Ambas sean verdes.

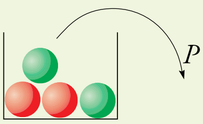
b) La 1.ª sea roja y la 2.ª verde.

c) Las dos sean rojas.

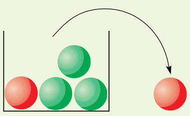


$P[\color{green}\bullet] = \dfrac{3}{5}$

Si la 1.ª es $\color{green}\bullet$



$P[\color{green}\bullet \text{ en este caso}] = \dfrac{2}{4}$



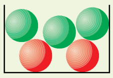
Si la 1.ª es $\color{red}\bullet$, quedan cuatro: 1 $\color{red}\bullet$ y 3 $\color{green}\bullet$

a) Imaginemos una gran cantidad de gente. Cada uno de ellos tiene una urna con 3 bolas verdes y 2 bolas rojas. Son sometidos a dos pruebas:

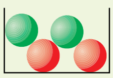
1.ª prueba: Han de extraer bola verde. (La dejan fuera).

2.ª prueba: Han de volver a extraer verde.

Averigüemos qué proporción de gente supera cada prueba y, en consecuencia, qué proporción supera las dos.

PRIMERA EXTRACCIÓN  $P[\color{green}\bullet] = 3/5$. Por término medio, 3 de cada 5 individuos extraen bola verde y superan la 1.ª prueba.

Ahora, la composición de la urna se modifica dependiendo del resultado de la primera prueba. Como estamos siguiendo la pista a los que extraen bola verde, estos tienen ahora una urna con 2 bolas verdes y 2 bolas rojas. Veamos *qué proporción de ellos* supera la 2.ª prueba.

SEGUNDA EXTRACCIÓN  $P[\color{green}\bullet] = 2/4$. Por término medio, 2 de cada 4 de los que superan la 1.ª prueba superan también la 2.ª.

Proporción de individuos que superan ambas pruebas: $\dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{2}{4} = \dfrac{6}{20}$. Es decir:

$$P[\color{green}\bullet \color{black}\text{ y } \color{green}\bullet\color{black}] = P[\color{green}\bullet \color{black}\text{ la 1.ª}] \cdot P[\color{green}\bullet \color{black}\text{ la 2.ª} / \color{green}\bullet \color{black}\text{ la 1.ª}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

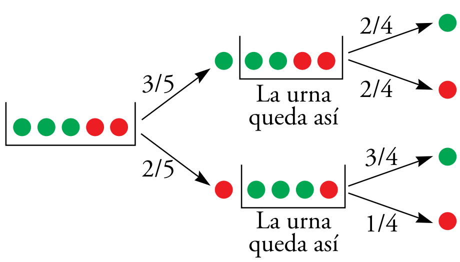
Estas pruebas son **dependientes,** porque el resultado de la primera influye en la segunda.

b) $P[\color{red}\bullet \color{black}\text{ y } \color{green}\bullet\color{black}] = P[\color{red}\bullet \color{black}\text{ la 1.ª}] \cdot P[\color{green}\bullet \color{black}\text{ la 2.ª} / \color{red}\bullet \color{black}\text{ la 1.ª}] = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$

c) $P[\color{red}\bullet \color{black}\text{ y } \color{red}\bullet\color{black}] = P[\color{red}\bullet \color{black}\text{ la 1.ª}] \cdot P[\color{red}\bullet \color{black}\text{ la 2.ª} / \color{red}\bullet \color{black}\text{ la 1.ª}] = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$

Descripción de la experiencia mediante un diagrama en árbol

La experiencia de la página anterior se puede describir sistemáticamente, y de forma muy clara, mediante un **diagrama en árbol:**



$P[\text{●} \text{ y } \text{●}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P[\text{●} \text{ y } \text{●}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P[\text{●} \text{ y } \text{●}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P[\text{●} \text{ y } \text{●}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

Recuerda

Significado de algunas probabilidades:

$\frac{2}{5} = P[\text{●} \text{ en la 1.ª}]$

$\frac{3}{4} = P[\text{●} \text{ en 2.ª} / \text{●} \text{ en 1.ª}]$

Problema resuelto

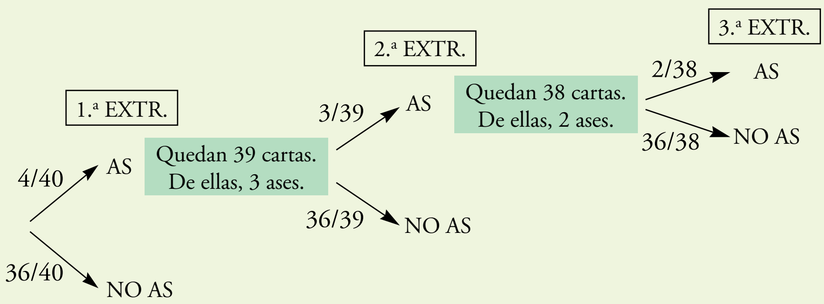
Extraemos tres cartas de una baraja española. Hallar la probabilidad de obtener tres ASES.

$P[3 \text{ ASES}] = P[\text{AS en 1.ª y AS en 2.ª y AS en 3.ª}] =$

$= P[\text{AS en 1.ª}] \cdot P[\text{AS en 2.ª / AS en 1.ª}] \cdot P[\text{AS en 3.ª / AS en 1.ª y 2.ª}] =$

$= \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38}$

Lo describimos en un diagrama en árbol:



$P[3 \text{ ASES}] = P[\text{AS y AS y AS}] = P[\text{AS}] \cdot P[\text{AS en 2.ª / AS en 1.ª}] \cdot$

$\cdot\, P[\text{AS en 3.ª / AS en 1.ª y 2.ª}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2\,470}$

Observa

Si en la 1.ª sale AS, quedan 3 ASES en 39 cartas. Por tanto:

$P[\text{AS en 2.ª / AS en 1.ª}] = \frac{3}{39}$

Análogamente:

$P[\text{AS en 3.ª / AS en 1.ª y 2.ª}] = \frac{2}{38}$

Actividades

1 Extraemos dos cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea un REY y la segunda un AS?

2 Copia y completa el diagrama en árbol del problema resuelto de esta página y sobre él halla P[NINGÚN AS].

3 Una urna contiene 5 bolas negras y 3 blancas. Extraemos tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean blancas? ¿Y negras?

4 Se extraen, una tras otra, 3 cartas de una baraja. ¿Cuál es la probabilidad de obtener BASTOS las tres veces?

a) Supón que se extraen con reemplazamiento.

b) Supón que se extraen sin reemplazamiento.

5 Una urna A tiene tres bolas blancas y una negra. Otra B tiene una bola negra. Sacamos una bola de A y la echamos en B. Removemos y sacamos una bola de B. ¿Cuál es la probabilidad de que esta sea blanca?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Experiencias simples

1 ▼▽▽ En la lotería primitiva se extraen bolas numeradas del 1 al 49. Calcula la probabilidad de que la primera bola extraída sea un número…:

a) … de una sola cifra. b) … múltiplo de 7.

c) … mayor que 25.

2 ▼▽▽ Se extrae una carta de una baraja española. Di cuál es la probabilidad de que sea:

a) REY O AS. b) FIGURA Y OROS. c) NO SEA ESPADAS.

3 ▼▽▽ Lanzamos dos dados y anotamos la puntuación mayor (si coinciden, la de uno de ellos).

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2				
⚁	2				5	
⚂						
⚃				4		6
⚄						
⚅		6				

a) Completa en tu cuaderno la tabla y di las probabilidades de los seis sucesos elementales 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

b) Halla la probabilidad de los sucesos:

A: n.° par, *B*: n.° menor que 4.

Experiencias compuestas

4 ▼▽▽ a) Tenemos dos barajas de 40 cartas. Sacamos una carta de cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figuras (sota, caballo o rey)?

b) Tenemos una baraja de 40 cartas. Sacamos dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean un 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figura?

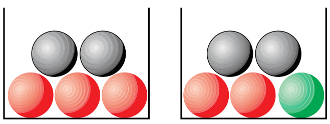
5 ▼▽▽ Lanzamos tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres puntuaciones sean menores que 5?

6 ▼▽▽ Sacamos una bola de cada urna. Calcula la probabilidad de que:

a) Ambas sean rojas.

b) Ambas sean negras.

c) Alguna sea verde.



7 ▼▽▽ Una urna tiene 3 bolas rojas y 2 verdes. Extraemos dos. Calcula P[2 rojas] y P[2 verdes].

Aplica lo aprendido

8 ▼▼▽ Una urna contiene 100 bolas numeradas así:

00, 01, 02, …, 99

Llamamos x a la cifra de las decenas e y a la cifra de las unidades del número que tiene cada bola. Se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) $x = 3$ b) $y = 3$ c) $x \neq 7$ d) $x > 5$

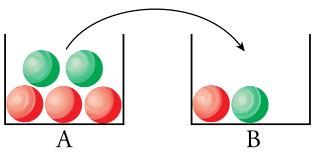
e) $x + y = 9$ f) $x < 3$ g) $y > 7$ h) $y < 7$

9 ▼▽▽ Después de tirar muchas veces un modelo de chinchetas, sabemos que la probabilidad de que una cualquiera caiga con la punta hacia arriba es 0,38.

Si tiramos dos chinchetas, ¿cuál será la probabilidad de que las dos caigan de distinta forma?

10 ▼▽▽ En un laboratorio se somete un nuevo medicamento a tres controles. La probabilidad de pasar el primero es 0,89, la de pasar el segundo es 0,93 y la de pasar el tercero es 0,85. ¿Cuál es la probabilidad de que el nuevo producto pase las tres pruebas?

11 ▼▼▽ Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una de B. Calcula:

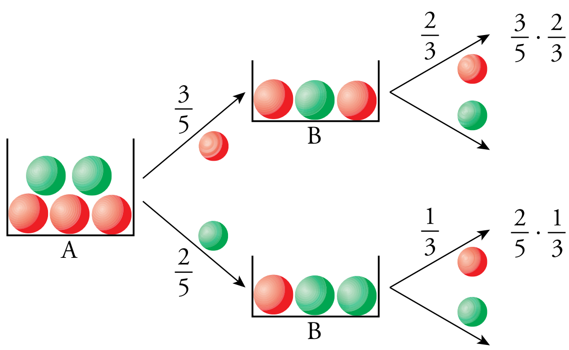


a) P[1.ª roja y 2.ª roja] b) P[1.ª roja y 2.ª verde]

c) P[2.ª roja / 1.ª verde] d) P[2.ª roja / 1.ª roja]

e) P[2.ª roja] f) P[2.ª verde]

☞ *e) Para calcular esta probabilidad, ten en cuenta el siguiente diagrama:*



12 ▼▼▽ En una clase hay 17 chicos y 18 chicas. Elegimos al azar dos alumnos de esa clase.

Calcula la probabilidad de que:

a) Los dos sean chicos.

b) Sean dos chicas.

c) Sean un chico y una chica.

13 ▼▼▽ Tiramos dos dados correctos. Di cuál es la probabilidad de obtener:

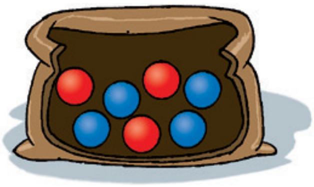
a) En los dos la misma puntuación.

b) Un 6 en alguno de ellos.

c) En uno de ellos, mayor puntuación que en el otro.

14 ▼▼▽ Se extraen dos bolas de esta bolsa.

Calcula la probabilidad de que ambas sean del mismo color.



Resuelve problemas

15 ▼▼▽ En una bolsa hay 4 bolas, dos de ellas están marcadas con un 1 y las otras dos con un 2. Se hacen tres extracciones y se anotan los resultados en orden.

Calcula la probabilidad de que el número formado sea el 121, suponiendo que la experiencia sea:

a) Con reemplazamiento.

b) Sin reemplazamiento.

16 ▼▼▽ Matías y Elena juegan con una moneda. La lanzan tres veces y si sale dos veces cara y una vez cruz o dos veces cruz y una vez cara, gana Matías. Si sale tres veces cara o tres veces cruz, gana Elena.

Calcula la probabilidad que tiene cada uno de ganar.

Autoevaluación

¿Resuelves problemas de probabilidad de experiencias simples y compuestas?

1 Encima de una mesa tenemos estas cuatro cartas de una baraja española:

– Cinco de copas.

– As de oros.

– Cuatro de bastos.

– Dos de oros.

Sacando al azar otra carta del mazo y fijándonos en su número, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones de las cinco cartas (las cuatro de la mesa y la extraída del mazo) sea 15? ¿Y 16?

2 Lanzamos una moneda y un dado y observamos los resultados obtenidos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener CRUZ y CINCO?

b) ¿Y la de obtener CARA y NÚMERO PAR?

3 Lanzamos dos dados. Calcula la probabilidad de que el producto de las puntuaciones:

a) Sea 5.

b) Sea 6.

c) Sea 4.

☞ *Haz una tabla con todos los casos posibles.*

4 Tenemos dos bolsas, A y B, con estas bolas:

A: 7 blancas y 3 negras

B: 1 blanca, 2 negras y 7 rojas

Tirando un dado, si sale 1 o 2 extraemos una bola de A. Si sale 3, 4, 5 o 6, extraemos una bola de B. Calcula la probabilidad de extraer bola roja.

5 La urna A tiene 3 bolas rojas y 1 negra, y la B, 3 negras y 1 roja. Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una bola de B. Calcula la probabilidad de que ambas bolas sean rojas.

Anotaciones

Anotaciones

Anotaciones

Anotaciones

Anotaciones

Anotaciones