3

EDUCACIÓN SECUNDARIA

Matemáticas

J. Colera, I. Gaztelu, Mª J. Oliveira

ADAPTACIÓN CURRICULAR

Esta serie de **Matemáticas** responde a un proyecto pedagógico creado y desarrollado por Anaya Educación para la ESO. En su elaboración han participado:

Autores: José Colera, Ignacio Gaztelu, M.ª José Oliveira y Leticia Colera Cañas

Coordinación editorial: Mercedes García-Prieto

Edición: César de la Prida

Diseño de cubiertas e interiores: Miguel Ángel Pacheco y Javier Serrano

Tratamiento infográfico del diseño: Javier Cuéllar, Patricia Gómez y Teresa Miguel

Equipo técnico: José Luis Román

Corrección: Sergio Borbolla

Ilustraciones: Montse Español y Álex Orbe

Edición gráfica: Nuria González y Mar Merino

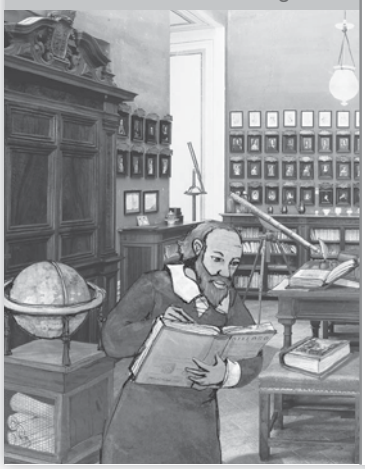
Fotografías: 123RF; Age Fotostock; Album; Archivo Anaya: Cosano, P.; Enríquez, S.; Leiva, Á. De; Lezama, D.; Martin, J.; Ortega, Á.; Rico, J.J. ; Ruiz, J.B.; Velasco, P.; Zurdo, F.; Cordón Press/Corbis; Getty Images; NASA.

Agradecimientos al niño: Diego Lezama

Agradecemos la colaboración de José Manuel González Aparici, por su aportación en algunos de los enunciados de los problemas que aparecen en esta obra, y a José Colera Cañas, por la elaboración de las HOJAS DE CÁLCULO que se pueden encontrar en www.anayadigital.com.

Índice

Unidad	Contenidos	Competencias
1 Fracciones y decimales Página 7 	**1.** Números racionales ..... 8 **2.** Operaciones con fracciones ..... 10 **3.** La fracción como operador ..... 11 **4.** Números decimales ..... 12 **5.** Cálculo con porcentajes 13	Ejercicios y problemas ..... 16 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación 18
2 Potencias y raíces. Números aproximados Página 19 	**1.** Potenciación ..... 20 **2.** Raíces exactas ..... 22 **3.** Aproximaciones y errores ..... 23 **4.** Notación científica 25	Ejercicios y problemas ..... 27 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación 28
3 Progresiones Página 29 	**1.** Sucesiones ..... 30 **2.** Progresiones aritméticas ..... 32 **3.** Progresiones geométricas 34	Ejercicios y problemas ..... 35 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación 36
4 El lenguaje algebraico Página 37 	**1.** Expresiones algebraicas ..... 38 **2.** Monomios ..... 39 **3.** Polinomios ..... 40 **4.** Identidades 42	Ejercicios y problemas ..... 44 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación 45

Unidad	Contenidos	Competencias
5 Ecuaciones Página 47 	**1.** Ecuaciones. Solución de una ecuación ..... 48 **2.** Ecuaciones de primer grado ..... 49 **3.** Ecuaciones de segundo grado ..... 51 **4.** Resolución de problemas con ecuaciones 54	Ejercicios y problemas ..... 55 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación 56
6 Sistemas de ecuaciones Página 57 	**1.** Ecuaciones con dos incógnitas. Soluciones... 58 **2.** Sistemas de ecuaciones ..... 59 **3.** Número de soluciones de un sistema lineal ..... 60 **4.** Resolución de sistemas ..... 61 **5.** Resolución de problemas mediante sistemas 62	Ejercicios y problemas ..... 63 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación 64
7 Funciones y gráficas Página 65 	**1.** Las funciones y sus gráficas ..... 66 **2.** Variaciones de una función ..... 68 **3.** Tendencias de una función ..... 70 **4.** Discontinuidades. Continuidad ..... 71 **5.** Expresión analítica de una función 72	Ejercicios y problemas ..... 73 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación 74

Unidad	Contenidos	Competencias
8 Funciones lineales Página 75 	**1.** Función de poporcionalidad $y = mx$ ..... 76 **2.** La función $y = mx + n$ ..... 78 **3.** Recta de la que se conoce un punto y la pendiente ..... 79 **4.** Ecuación de la recta que pasa por dos puntos ..... 80 **5.** Forma general de la ecuación de una recta ... 81 **6.** Aplicaciones de la función lineal ..... 82 **7.** Estudio conjunto de dos funciones 83	Ejercicios y problemas ..... 84 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación 86
9 Problemas métricos en el plano Página 87 	**1.** Teorema de Pitágoras. Aplicaciones ..... 88 **2.** Lugares geométricos ..... 90 **3.** Las cónicas como lugares geométricos ..... 91 **4.** Áreas de los polígonos ..... 93 **5.** Áreas de figuras curvas 94	Ejercicios y problemas ..... 95 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación 96
10 Cuerpos geométricos Página 97 	**1.** Poliedros regulares (sólidos platónicos) ..... 98 **2.** Poliedros semirregulares ..... 99 **3.** Superficie de los cuerpos geométricos ..... 101 **4.** Medida del volumen de los cuerpos geométricos ..... 105 **5.** Coordenadas geográficas 107	Ejercicios y problemas ..... 109 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación 110

Unidad	Contenidos	Competencias
11 Transformaciones geométricas Página 111 	**1.** Movimientos en el plano ..... 112 **2.** Estudio de las traslaciones ..... 113 **3.** Estudio de los giros ..... 115 **4.** Simetrías axiales ..... 116 **5.** Estudio de los mosaicos 117	Ejercicios y problemas ..... 118 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación 118
12 Estadística Página 119 	**1.** Población y muestra ..... 120 **2.** Variables estadísticas ..... 121 **3.** Confección de una tabla de frecuencias ..... 122 **4.** Gráfico adecuado al tipo de información ..... 123 **5.** Parámetros estadísticos ..... 125 **6.** Cálculo de $\bar{x}$ y σ en tablas de frecuencia ..... 127 **7.** Coeficiente de variación 128	Ejercicios y problemas ..... 129 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación 130
13 Azar y probabilidad Página 131 	**1.** Sucesos aleatorios ..... 132 **2.** Probabilidad de un suceso ..... 133 **3.** Ley de Laplace para experiencias regulares 134	Ejercicios y problemas ..... 135 Consolida lo aprendido utilizando tus competencias. Autoevaluación 136

1 Fracciones y decimales

Tanto las fracciones como los números decimales, que ahora interpretamos y manejamos con toda soltura, recorrieron un largo y tortuoso camino de muchos siglos hasta llegar a la versión actual.

Los egipcios (siglo XVII a.C.) utilizaban exclusivamente las **fracciones unitarias,** es decir, aquellas en las que el numerador es 1. Por ejemplo, para expresar $\frac{3}{5}$ ponían $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$ (también podían poner $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$, pero, curiosamente, preferían la primera descomposición). Para efectuar estas descomposiciones, se valían de unas complicadas tablas.

Nos resulta chocante que no consideraran correcto expresar $\frac{3}{5}$ como $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$, pero más sorprendente aún es que esta afición por las fracciones unitarias se prolongara hasta el siglo XIII (tres milenios después), en que **Fibonacci,** quien aunque ya conocía y manejaba las fracciones ordinarias, siguió dedicando mucho esfuerzo en descomponerlas en unitarias.

El sistema de numeración decimal se usaba en Occidente desde el siglo VIII en los números enteros. Sin embargo, para expresar las partes de la unidad se recurría a las fracciones sexagesimales. Por ejemplo, una aproximación de π se expresaba así:

$$3;8,29,44, \text{ que significaba } 3 + \frac{8}{60} + \frac{29}{60^2} + \frac{44}{60^3}$$

No fue hasta finales del siglo XVI cuando se popularizó el uso de los decimales para expresar partes de la unidad. El francés **Vieta** y el flamenco **Stevin** fueron los principales impulsores del cambio.

DEBERÁS RECORDAR

- Conceptos y procedimientos de divisibilidad.
- Las operaciones con números enteros.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

1 Números racionales

Fracciones y números fraccionarios

Los números enteros sirven para contar elementos, pero no son buenos para expresar medidas. Para medir, suele ser necesario fraccionar la unidad: la mitad, cuatro terceras partes, siete milésimas… Estas medidas se expresan mediante fracciones: 1/2, 4/3, 7/1 000.

Una fracción es el cociente indicado de dos números enteros. Dicho cociente puede ser:

- Un número entero. Por ejemplo, $\frac{6}{2} = 3$, $\frac{-12}{3} = -4$
- Un número fraccionario. Por ejemplo, $\frac{17}{2} = 8 + \frac{1}{2}$, $\frac{-13}{5} = -2 - \frac{3}{5}$

A la unión de todos los números enteros y de todos los números fraccionarios se la llama conjunto de **números racionales** y se designa por $\mathbb{Q}$. Los números racionales son los que se pueden poner en forma de fracción.

Simplificación de fracciones

Si el numerador y el denominador de una fracción se pueden dividir por un mismo número, al hacerlo diremos que hemos **simplificado** o **reducido.**

Por ejemplo:

$$\frac{25}{15} = \frac{5}{3}\,; \quad \frac{8}{-12} = \frac{4}{-6} = \frac{-2}{3}\,; \quad \frac{3\,000}{4\,500} = \frac{2}{3}$$

Cuando una fracción no se puede reducir más y su denominador es positivo, diremos que es **irreducible.** Por ejemplo, 2/3 es irreducible.

Entrénate

1 Simplifica estas fracciones:

$\frac{2}{4}$ $\frac{2}{6}$

$\frac{5}{10}$ $\frac{10}{15}$

$\frac{20}{30}$ $\frac{30}{40}$

$\frac{30}{45}$ $\frac{40}{60}$

Actividades

1 Clasifica estos números en enteros o fraccionarios:

$$\frac{17}{3},\ -\frac{16}{4},\ \frac{20}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{16}{7},\ -\frac{25}{5},\ -\frac{7}{2}$$

2 Simplifica hasta obtener la fracción irreducible:

a) $\frac{12}{21}$ b) $\frac{15}{40}$ c) $\frac{18}{24}$

3 Simplifica estas fracciones hasta que obtengas la fracción irreducible:

a) $\frac{28}{35}$ b) $\frac{48}{72}$ c) $\frac{54}{72}$

d) $\frac{84}{96}$ e) $\frac{75}{150}$ f) $\frac{208}{240}$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Fracciones equivalentes

Cada número racional puede expresarse mediante muchas (infinitas) fracciones:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \dots$$

De ahí la necesidad de establecer un criterio que permita reconocer cuándo dos fracciones representan al mismo número racional.

Se dice que dos **fracciones** son **equivalentes** cuando, al simplificarse, dan lugar a la misma fracción irreducible, que tomamos como expresión habitual del correspondiente número racional.

$\frac{18}{30}$ y $\frac{21}{35}$ son equivalentes, pues $\frac{18}{30} = \frac{18:6}{30:6} = \frac{3}{5}$ y $\frac{21}{35} = \frac{21:7}{35:7} = \frac{3}{5}$.

Entrénate

1 Comprueba, en cada caso, si las fracciones dadas son equivalentes:

a) $\frac{3}{4}$ y $\frac{21}{28}$

b) $\frac{2}{3}$ y $\frac{6}{4}$

c) $\frac{27}{48}$ y $\frac{9}{16}$

Cálculo mental

1 Es evidente que $\frac{2}{3} < \frac{7}{4}$ porque:

$$\frac{2}{3} < 1 \qquad \frac{7}{4} > 1$$

Compara mentalmente:

a) $\frac{7}{9}$ y $\frac{11}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ y $-\frac{4}{5}$

c) $\frac{17}{4}$ y $\frac{20}{7}$ d) $\frac{23}{5}$ y 3

e) 2 y $\frac{8}{11}$ f) 2 y $\frac{6}{3}$

Comparación de fracciones

Dos fracciones con el mismo denominador son muy fáciles de comparar. Para comparar dos fracciones con distinto denominador, las "reducimos a común denominador", es decir, buscamos fraccciones respectivamente equivalentes a ellas y que tengan el mismo denominador.

Ejercicio resuelto

Comparar $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{8}$ y $\frac{9}{16}$.

Tomaremos como denominador común el mín.c.m. (12, 8, 16) = 48.

$$48 : 12 = 4 \rightarrow \frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 4}{12 \cdot 4} = \frac{28}{48}$$

$$48 : 8 = 6 \rightarrow \frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 6}{8 \cdot 6} = \frac{30}{48}$$

$$48 : 16 = 3 \rightarrow \frac{9}{16} = \frac{9 \cdot 3}{16 \cdot 3} = \frac{27}{48}$$

Evidentemente:

$$\frac{27}{48} < \frac{28}{48} < \frac{30}{48}$$

Por tanto:

$$\frac{9}{16} < \frac{7}{12} < \frac{5}{8}$$

Actividades

4 Compara mentalmente cada pareja de números:

a) $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{3}$ b) $\frac{6}{8}$ y $\frac{7}{8}$

c) $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$ d) 3 y $\frac{11}{2}$

5 Compara estas fracciones y ordénalas de menor a mayor:

$$\frac{3}{5} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{7}{10}$$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

2 Operaciones con fracciones

Suma y resta de fracciones

Para **sumar (o restar) fracciones con el mismo denominador,** se suman (o se restan) sus numeradores y se mantiene el denominador.

Para **sumar (o restar) fracciones con distinto denominador,** se empieza por transformarlas en otras equivalentes con el mismo denominador.

Por ejemplo: $\frac{7}{10} - \frac{5}{12} + 2 = \frac{42}{60} - \frac{25}{60} + \frac{120}{60} = \frac{42 - 25 + 120}{60} = \frac{137}{60}$

Producto de fracciones

El **producto de dos fracciones** es otra fracción cuyo numerador es el producto de sus numeradores y cuyo denominador es el producto de sus denominadores:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Por ejemplo: $\frac{8}{3} \cdot \frac{7}{10} = \frac{8 \cdot 7}{3 \cdot 10} = \frac{56}{30} = \frac{28}{15}$

Cociente de fracciones

La **inversa de una fracción** $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$ porque $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1$.

Por ejemplo, la inversa de $\frac{5}{7}$ es $\frac{7}{5}$, y la inversa de 3 es $\frac{1}{3}$.

El **cociente de dos fracciones** es el producto de la primera por la inversa de la segunda:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Por ejemplo: $\frac{9}{4} : \frac{5}{7} = \frac{9}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{63}{20}$; $\frac{6}{11} : 3 = \frac{6}{11} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{33} = \frac{2}{11}$

Entrénate

1 Calcula:

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{4} + \frac{7}{12} - \frac{5}{9}$

c) $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{7}{10}$

d) $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} + \frac{3}{8} - \frac{5}{24}$

2 Opera hasta llegar a la fracción irreducible:

a) $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$

b) $\frac{7}{10} - \frac{5}{6} + \frac{1}{5}$

c) $\frac{7}{9} + \frac{5}{6} - \frac{2}{3}$

d) $\frac{13}{16} + \frac{11}{24} - \frac{7}{12}$

3 Opera:

a) $\frac{6}{5} : \frac{3}{5}$ b) $\frac{6}{5} : 6$

c) $\frac{6}{5} : \frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3} : \frac{1}{6}$

Actividades

Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:

1 a) $\frac{5}{7} \cdot \left(\frac{2}{5} + 1\right)$ b) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} - 1\right)$

c) $\frac{3}{14} : \left(1 - \frac{5}{7}\right)$ d) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) : \frac{5}{6}$

2 a) $\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4} - 1\right)$ b) $(-3) \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right)$

3 a) $3 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{15}\right)$ b) $\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right)$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

3 La fracción como operador

Para hallar los 2/3 de una cantidad, 600 €, se divide esta por 3 (obteniéndose, así, *una tercera parte*), y el resultado se multiplica por 2. Es decir, se multiplica la cantidad por 2/3 $\rightarrow \frac{2}{3} \cdot 600 = 400$ €

Lo que corresponde a una fracción $\frac{a}{b}$ de una cantidad C es la parte $P = \frac{a}{b} \cdot C$.

▼ **EJEMPLO:** *¿Cuántas cartas le toca repartir a un cartero al que asignan $\frac{3}{28}$ del total de 4 004 cartas que hay?*

$\frac{3}{28} \cdot 4\,004 = 429$ cartas le toca repartir.

Si conocemos la parte P que corresponde a la fracción $\frac{a}{b}$ de una cantidad C, esa cantidad se obtiene multiplicando P por la fracción inversa, $C = P \cdot \frac{b}{a}$.

▼ **EJEMPLO:** *Ramiro posee 7/20 de una compañía. Este año le han correspondido 37 800 €. ¿Cuál ha sido la ganancia total de la compañía?*

[Beneficios totales] $= \frac{20}{7} \cdot$ [Beneficios de Ramiro] $= \frac{20}{7} \cdot 37\,800 = 108\,000$ €

Las distintas partes (fracciones) de un todo suman 1.

Para hallar una parte $\frac{a}{b}$ de otra $\frac{c}{d}$ de una cantidad, se multiplica $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot C$.

▼ **EJEMPLO:** *De una herencia de 104 000 €, Alberto posee 3/8; Berta, 5/12, y Claudia, el resto. ¿Qué parte le corresponde a Claudia?*

Si Claudia emplea 2/5 de su parte en pagar deudas, ¿cuánto le queda?

$1 - \frac{3}{8} - \frac{5}{12} = \frac{24 - 9 - 10}{24} = \frac{5}{24}$ es la fracción de Claudia.

Como gasta $\frac{2}{5}$, le quedan $\frac{3}{5}$. Es decir, le quedan $\frac{3}{5}$ de $\frac{5}{24}$.

$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{24} \cdot 104\,000 = \frac{1}{8} \cdot 104\,000 = 13\,000$ € le quedan.

Entrénate

1 Calcula mentalmente:

a) $\frac{1}{4}$ de 32 b) $\frac{3}{4}$ de 24

c) $\frac{1}{2}$ de 52 d) $\frac{2}{5}$ de 20

e) $\frac{5}{6}$ de 30 f) $\frac{2}{7}$ de 70

2 Calcula:

a) $\frac{2}{9}$ de 117 b) $\frac{7}{10}$ de 380

c) $\frac{7}{11}$ de 132 d) $\frac{11}{14}$ de 350

e) $\frac{5}{21}$ de 1 428 f) $\frac{15}{22}$ de 1 540

3 Calcula mentalmente:

a) $\frac{1}{2}$ de $\square = 13$ b) $\frac{1}{4}$ de $\square = 8$

c) $\frac{3}{4}$ de $\square = 15$ d) $\frac{3}{7}$ de $\square = 30$

4 Calcula:

a) $\frac{1}{6}$ de $\square = 107$

b) $\frac{3}{4}$ de $\square = 210$

c) $\frac{2}{5}$ de $\square = 168$

d) $\frac{3}{7}$ de $\square = 132$

Actividades

1 Un ciclista ha recorrido los 5/9 de la etapa de hoy, de 216 km. ¿Cuántos kilómetros lleva recorridos?

2 He sacado del banco 3 900 €, que son los 3/11 de mis ahorros. ¿A cuánto ascienden mis ahorros?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

4 Números decimales

Los números decimales sirven para designar medidas, pues con ellos se puede expresar cualquier valor intermedio entre dos números enteros.

Tipos de números decimales

Veamos las distintas clases de números decimales que existen:

- **Decimal exacto** es el que tiene un número limitado de cifras decimales.

  Por ejemplo: 5,4; 0,97; 8; –0,0725

- **Decimal periódico** es el que tiene infinitas cifras decimales que se repiten periódicamente.

$7{,}81818181\ldots = 7{,}\overset{\frown}{81}$

PERIODO

$0{,}735735735\ldots = 0{,}\overset{\frown}{735}$

Estos se llaman **periódicos puros,** porque en ellos el periodo empieza inmediatamente después de la coma.

$18{,}352222\ldots = 18{,}35\overset{\frown}{2}$

$0{,}0454545\ldots = 0{,}0\overset{\frown}{45}$

Son **periódicos mixtos,** porque antes del periodo tienen otras cifras decimales.

- **Decimales no exactos ni periódicos.** Son los números decimales que tienen infinitas cifras que no se repiten periódicamente.

  Por ejemplo: $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$ $\pi = 3{,}14159265\ldots$

Recuerda

En un número, el grupo de cifras decimales que se repite una y otra vez se llama **periodo.** Se indica poniendo un arco sobre las cifras correspondientes:

$7{,}\overset{\frown}{81}$ $18{,}35\overset{\frown}{2}$

Recuerda

Números racionales son los que se pueden poner en forma de fracción.

Los decimales con infinitas cifras no periódicas no son racionales.

Paso de fracción a decimal

Para obtener la expresión decimal de una fracción, se efectúa la división entre el numerador y el denominador. El cociente puede ser:

- **Un número entero.** Por ejemplo: $\frac{72}{9} = 8$; $\frac{-240}{15} = -16$
- **Un decimal exacto.** Por ejemplo: $\frac{3}{8} = 0{,}375$; $\frac{123}{40} = 3{,}075$; $\frac{42}{25} = 1{,}68$
- **Un decimal periódico.** Por ejemplo: $\frac{11}{3} = 3{,}\overset{\frown}{6}$; $\frac{86}{11} = 7{,}\overset{\frown}{81}$; $\frac{87}{66} = 1{,}3\overset{\frown}{18}$

Entrénate

1 Expresa en forma decimal:

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{11}{8}$

c) $\frac{11}{100}$ d) $\frac{7}{30}$

Actividades

1 Indica qué tipo de número decimal es cada uno:

3,52 $2{,}\overset{\frown}{8}$ $1{,}5\overset{\frown}{4}$ $\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$

$2{,}7\overset{\frown}{3}$ 3,5222… $\pi - 2 = 1{,}1415926\ldots$

2 Ordena de menor a mayor los siguientes números decimales:

$2{,}\overset{\frown}{5}$ 2,5 $2{,}3\overset{\frown}{5}$ 2,505005…

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

5 Cálculos con porcentajes

Cálculo de un tanto por ciento de una cantidad

Para calcular el 16% de 5 000, se suele proceder así: $\frac{5\,000 \cdot 16}{100} = 800$.

Pero $\frac{16}{100} = 0{,}16$, y esta expresión decimal del tanto por ciento permite proceder del siguiente modo: El 16% de 5 000 es $5\,000 \cdot 0{,}16 = 800$.

Para hallar un tanto por ciento de una cantidad, se expresa el tanto por ciento en forma decimal y se multiplica por él.

Entrénate

1 Expresa en forma decimal:

10% 1% 160% 127%

2 Calcula.

a) El 24% de 300.

c) El 30% de 83 200.

e) El 230% de 5 200.

3 ¿Qué tanto por ciento representa cada cantidad respecto a su total?

a) 15 respecto a 30.

b) 5 respecto a 20.

c) 2 respecto a 10.

4 Calcula el tanto por ciento que representa.

a) 45 respecto a 225.

b) 4 230 respecto a 9 000.

c) 6 000 respecto a 4 000.

d) 975 respecto a 32 500.

Obtención del tanto por ciento correspondiente a una proporción

En una población de 5 000 personas, 800 han leído El Quijote. *¿Qué porcentaje del total representan?*

Hemos de calcular cuántas, de cada 100 personas, han leído *El Quijote*:

$\frac{800}{5\,000} \cdot 100 = 16$. Han leído *El Quijote* el 16% del total.

Para hallar qué tanto por ciento representa una cantidad, a, respecto a un total, C, se efectúa $\frac{a}{C} \cdot 100$.

Actividades

1 En un hotel de 175 habitaciones están ocupadas el 60%. ¿Cuántas habitaciones están ocupadas?

2 El 32% de los 25 alumnos de una clase participan en un torneo de ajedrez. ¿Cuántos alumnos participan en el torneo?

3 En un colegio de 750 alumnos han aprobado todas las materias 495. ¿Qué tanto por ciento de alumnos ha aprobado todo?

4 Un agente inmobiliario cobra una comisión del 1,5% sobre el precio de un apartamento que se ha vendido por 100 500 €. ¿Cuánto cobrará por esa venta?

5 En un club deportivo hay 124 socios que juegan al baloncesto y representan el 25% del total. Calcula cuántos socios tiene ese club.

6 En un hospital están ocupadas 405 camas de las 450 que tiene el centro. ¿Cuál es el porcentaje de camas ocupadas?

7 En un depósito de agua hemos echado 57,4 litros que representan el 82% de su capacidad. ¿Cuántos litros caben en el depósito?

8 La superficie cultivada de una comunidad es 357 ha, lo que representa el 38% de su extensión. ¿Cuál es la superficie de esa comunidad?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Cálculo de aumentos porcentuales

Un reloj de 50 € aumenta su precio un 16%. ¿Cuánto vale ahora?

Con lo que sabemos hasta ahora, podríamos resolverlo así:

Aumento: $50 \cdot 0{,}16 = 8$ €

Precio final: $50 + 8 = 58$ €

Pero observemos que si sube un 16%, el precio actual es el 116% del anterior. Por eso, para obtenerlo, se puede multiplicar directamente 50 por 1,16:

$$50 \cdot 1{,}16 = 58 \text{ €}$$

1,16 es 1 + 0,16 (la cantidad más 16 centésimas)

El número por el que hay que multiplicar la cantidad inicial para obtener la cantidad final se llama **índice de variación.**

En **aumentos porcentuales,** el índice de variación es 1 más el aumento porcentual expresado en forma decimal.

Para **calcular el valor final,** halla el índice de variación y multiplícalo por la cantidad inicial: VALOR FINAL = VALOR INICIAL · ÍNDICE DE VARIACIÓN.

Entrénate

1 Halla, mentalmente, el índice de variación que corresponde a estos aumentos porcentuales:

a) 25% b) 5% c) 40%

d) 80% e) 110% f) 200%

2 Unas acciones que valían a principios de año 13,70 € han subido un 35%. ¿Cuánto valen ahora?

Cálculo de disminuciones porcentuales

Una nevera valía 620 €. Se rabaja un 40%. ¿Cuánto vale ahora?

Si quitamos un 40% al precio inicial, queda el 60%. Su precio final es:

$$620 \cdot 0{,}60 = 372 \text{ €}$$

0,60 es la unidad menos 40 centésimas: $1 - 0{,}40 = 0{,}60$

En una **disminución porcentual,** el índice de variación es 1 menos la disminución porcentual puesta en forma decimal.

Para **calcular el valor final,** halla el índice de variación y multiplícalo por la cantidad inicial: VALOR FINAL = VALOR INICIAL · ÍNDICE DE VARIACIÓN.

Entrénate

3 ¿Qué índice de variación corresponde a estas disminuciones porcentuales? Hazlo mentalmente.

a) 25% b) 5% c) 40%

d) 15% e) 88% f) 1%

4 En una comunidad autónoma había 69 580 parados. Han disminuido un 15%. ¿Cuántos hay ahora?

Actividades

9 En un restaurante han subido el menú del día un 8%. ¿Cuál será el nuevo precio si costaba 7,5 €?

10 Tengo que pagar 352 € por un mueble en el que incluyen el cobro de un 10% por transportarlo hasta casa. ¿Cuál será el precio del mueble prescindiendo del transporte?

11 ¿Cuál sera el precio de unos zapatos de 68 € si nos hacen un descuento del 40%?

12 ¿Qué descuento me han hecho en una factura de 1 385 € si he pagado 1 135,7 €?

13 Una camiseta cuesta 21 € después de rebajarla un 30%. ¿Cuál era su precio antes de la rebaja?

14 El número de alumnos que juega al baloncesto ha pasado en un año de 110 a 145, mientras que el número de los que juegan al tenis ha pasado de 45 a 57. ¿En cuál de los dos deportes ha sido mayor el aumento porcentual?

15 El precio de un coche que hoy cuesta 39 200 € ha subido en el último año un 12%. ¿Cuánto costaba ese mismo coche hace un año?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.° ESO. Material fotocopiable autorizado.

Cálculo de la cantidad inicial conociendo la variación porcentual y la cantidad final

Tras aumentar su precio un 35%, un ordenador cuesta 783 €. ¿Cuánto valía antes de la subida?

Observa el esquema siguiente:

PRECIO INICIAL · 1,35 = PRECIO FINAL

PRECIO INICIAL = PRECIO FINAL : 1,35

Precio inicial = 783 : 1,35 = 580 €

Si conocemos la cantidad final que resulta después de haber aplicado una variación porcentual, la cantidad inicial se obtiene dividiendo la cantidad final por el índice de variación.

CANTIDAD INICIAL = CANTIDAD FINAL : ÍNDICE DE VARIACIÓN

Entrénate

1 Indica cuál es la cantidad inicial si sabemos que:

a) Aumenta 50%. C. final = 1 500.

b) Aumenta 50%. C. final = 3 000.

c) Aumenta 25%. C. final = 125.

d) Aumenta 25%. C. final = 250.

e) Disminuye 50%. C. final = 400.

f) Disminuye 40%. C. final = 600.

Problemas resueltos

1. El precio de un televisor fue de 566,40 €. ¿Cuál era su precio antes de cargarle un 18% de IVA?

1. El índice de variación es 1 + 0,18 = 1,18.

Por tanto, el precio del televisor antes de cargarle el IVA era:

566,40 : 1,18 = 480 €

2. En unos grandes almacenes, todos los artículos han bajado un 35%. Hemos comprado un cuadro por 195 €, una bicicleta por 78 € y un libro por 14,30 €. ¿Cuánto valía cada cosa antes de las rebajas?

2. En los tres casos, el índice de variación es 1 – 0,35 = 0,65.

Por tanto, los precios de los artículos antes de las rebajas eran:

Cuadro → 195 : 0,65 = 300 €

Bicicleta → 78 : 0,65 = 120 €

Libro → 14,30 : 0,65 = 22 €

Actividades

16 El precio de una batidora, después de aplicarle un IVA de un 18%, es de 70,80 €. ¿Cuál es su precio antes de cargarle ese IVA?

17 Al estirar una goma elástica, su longitud aumenta un 30% y, en esa posición, mide 104 cm. ¿Cuánto mide sin estirar?

18 En unas rebajas en las que se hace el 30% de descuento, Roberto ha comprado una cámara fotográfica por 50,40 €. ¿Cuál era su precio inicial?

19 Un cartero ha repartido el 36% de las cartas que tenía. Aún le quedan 1 184. ¿Cuántas tenía antes de empezar el reparto?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Opera y calcula

Operaciones con números enteros

1 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) $-17 + (-13)$ b) $-15 + 17 - (-8)$

c) $5(-7 - 5)$ d) $-50 - 5(-11)$

e) $-3(6 + 4) + 7$ f) $(-3)^2 - (-2)^3$

Operaciones con fracciones

2 ▼▽▽ Calcula y simplifica el resultado hasta obtener una fracción irreducible.

a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right) \cdot \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right)$ b) $\left(\frac{5}{9} - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{6}{5} - 3\right)$

c) $\left(1 - \frac{7}{10}\right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right)$ d) $\left(\frac{7}{3} - 2\right) : \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)$

3 ▼▽▽ Opera y simplifica hasta obtener una fracción irreducible.

a) $\dfrac{\frac{2}{3} - \frac{3}{5}}{1 - \frac{1}{5}}$ b) $\dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{7}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{7}}$

c) $\dfrac{2 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right)}{(-3) \cdot \left(\frac{3}{10} - \frac{8}{15}\right)}$ d) $\dfrac{(-4) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right)}{(-11) \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{5}\right)}$

4 ▼▽▽ Calcula paso a paso y, después, comprueba el resultado con la calculadora utilizando las teclas de fracción y paréntesis.

a) $-\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} : \frac{2}{3}\right)$

b) $3 - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{8}(-2)$

c) $\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) : \left[2 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{3}\right)\right]$

Fracciones y decimales

5 ▼▽▽ Agrupa las fracciones que sean equivalentes.

$$\frac{21}{49} \quad \frac{24}{36} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{14}{21} \quad \frac{10}{15} \quad \frac{15}{35} \quad \frac{3}{7}$$

6 ▼▽▽ Simplifica las fracciones siguientes:

$$\frac{24}{60} \quad \frac{114}{72} \quad \frac{51}{68} \quad \frac{26}{39} \quad \frac{125}{50} \quad \frac{225}{400}$$

7 ▼▽▽ En cada apartado, reduce a común denominador y ordena de menor a mayor:

a) $\frac{5}{6}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{8}{15}$ b) $-\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{12}, -\frac{3}{4}$

8 ▼▽▽ Calcula y simplifica mentalmente.

a) $2 + \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5}$

d) $2 \cdot \frac{5}{4}$ e) $\frac{2}{3} : 2$ f) $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}$

g) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}$ h) $\frac{12}{7} : 3$ i) $\frac{7}{3} \cdot 21$

9 ▼▽▽ Expresa como un número decimal las siguientes fracciones:

$$\frac{9}{25} \quad \frac{13}{9} \quad \frac{23}{6} \quad \frac{17}{200} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{233}{990} \quad \frac{13}{22}$$

10 ▼▽▽ Ordena de menor a mayor en cada apartado:

a) $3{,}56;\ 3{,}5\widehat{6};\ 3{,}\widehat{5};\ 3{,}\widehat{56}$

b) $-1{,}32;\ -1{,}3\widehat{2};\ -1{,}\widehat{32};\ -1{,}\widehat{3}$

Porcentajes

11 ▼▽▽ Calcula los porcentajes siguientes:

a) 28% de 325 b) 80% de 37

c) 3% de 18 d) 0,7% de 4 850

e) 2,5% de 14 300 f) 130% de 250

12 ▼▽▽ ¿Qué porcentaje representa?

a) 78 de 342 b) 420 de 500

c) 25 de 5 000 d) 340 de 200

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

13 ▼▽▽ Calcula, en cada caso, la cantidad inicial de lo que conocemos:

a) El 28% es 98. b) El 15% es 28,5.

c) El 2% es 325. d) El 150% es 57.

14 ▼▽▽ ¿Por qué número hay que multiplicar para que se produzca uno de estos resultados?

a) Aumenta un 12%. b) Disminuye el 37%.

c) Aumenta un 150%. d) Disminuye un 2%.

15 ▼▽▽ Calcula el índice de variación y la cantidad final:

a) 325 aumenta el 28%.

b) 87 disminuye el 80%.

c) 425 aumenta el 120%.

d) 125 disminuye el 2%.

16 ▼▽▽ ¿Qué porcentaje de aumento o de disminución corresponde a estos índices de variación?:

a) 1,54 b) 0,18 c) 0,05

d) 2,2 e) 1,09 f) 3,5

17 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) 10% de 340 b) 25% de 400

c) 75% de 4 000 d) 150% de 200

Aplica lo aprendido

18 ▼▽▽ ¿Cuántas botellas de 3/4 de litro se pueden llenar con un bidón de 30 litros de aceite?

19 ▼▽▽ Con una botella de 3/4 de litro de perfume podemos rellenar 25 frasquitos para regalar. ¿Qué fracción de litro cabe en cada frasquito?

20 ▼▽▽ Seis amigos se reparten los 3/7 de un premio, y el resto lo entregan a una ONG. Si cada uno ha recibido 22 €, ¿cuál era el importe del premio? ¿Cuánto donaron a la ONG?

21 ▼▽▽ Si me como los 4/9 del bizcocho que he hecho con mi padre y él se come los 3/5 del resto, ¿qué fracción del bizcocho ha comido mi padre? ¿Qué fracción queda?

22 ▼▽▽ De los 25 estudiantes que hay en una clase, tres han llegado, hoy, tarde. ¿Cuál es porcentaje de estudiantes que, hoy, han sido puntuales?

23 ▼▽▽ En una encuesta realizada para valorar un programa de radio, 224 personas lo aprueban. Si estas son el 35% de las encuestadas, ¿cuántas personas fueron consultadas?

24 ▼▽▽ Si el precio del alquiler de un piso es 410 € mensuales y lo suben un 3%, ¿cuál será la nueva mensualidad?

25 ▼▽▽ El precio de un medicamento es 32 €. Con una receta médica he pagado 9,60 €. ¿Qué porcentaje me han descontado?

26 ▼▽▽ Una mezcla de cereales está compuesta por 7/15 de trigo, 9/25 de avena y el resto de arroz.

a) ¿Qué parte de arroz tiene la mezcla?

b) ¿Qué cantidad de cada cereal habrá en 600 g de mezcla?

27 ▼▽▽ Julia gastó 1/3 de su dinero en libros y 2/5 en discos. Si le han sobrado 36 €, ¿cuánto tenía?

28 ▼▽▽ De los 300 libros de una biblioteca, 1/6 son de poesía; 180, de novela, y el resto, de historia. ¿Qué fracción representan los libros de historia?

29 ▼▽▽ En una papelería hacen una rebaja del 15% en todos los artículos. ¿Cuál será el precio que hemos de pagar por una cartera de 24 € y una calculadora de 18 €?

30 ▼▽▽ Si el precio del abono transporte de una ciudad subió el 12%, ¿cuál era el precio anterior si ahora cuesta 35,84 €?

31 ▼▽▽ He pagado 187,2 € por un billete de avión que costaba 240 €. ¿Qué porcentaje de descuento me hicieron?

32 ▼▽▽ He pagado 885 € por un artículo que costaba 750 € sin IVA. ¿Qué porcentaje de IVA me han aplicado?

33 ▼▽▽ La información nutricional de una marca de leche dice que en un litro hay 160 mg de calcio, que es el 20% de la cantidad diaria recomendada. Calcula la cantidad diaria de calcio que debe tomar una persona.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

34 ▼▼▽ Un comerciante compra 50 kg de naranjas a 1,20 € el kilo, y las vende ganando un 40%. Calcula la cantidad recaudada por la venta de las naranjas.

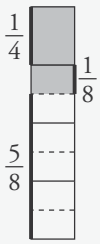
35 ▼▼▽ Un tornillo tiene un paso de rosca de 5/8 de milímetro. ¿Cuántas vueltas hemos de dar para que penetre 1,5 milímetros?

36 ▼▼▽ Un depósito de agua está lleno hasta los 5/7 de su capacidad. Se necesitan todavía 380 litros para completarlo. ¿Cuál es la capacidad del depósito?

Resuelve problemas

37 ▼▼▽ **Ejercicio resuelto**

De un depósito de agua, se saca la cuarta parte y, después, la sexta parte del resto, quedando aún 40 litros. ¿Cuál es su capacidad?



Sacamos $\frac{1}{4}$. Dividimos los $\frac{3}{4}$ que nos quedan en 6 partes $\rightarrow \frac{3}{4} : 6 = \frac{1}{8}$

Queda $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{5}{8}$, que son 40 *l*.

La capacidad es $\frac{40 \cdot 8}{5} = 64$ *l*.

38 ▼▼▽ Del dinero de una cuenta bancaria, retiramos los 3/8 y, después, los 7/10 de lo que quedaba.

Si el saldo actual es de 1 893 €, ¿cuánto había al principio?

39 ▼▼▽ De un depósito de aceite, se vacía la mitad; de lo que queda, se vacía otra vez la mitad; luego, los 11/15 del resto, y al final quedan 36 *l*.

¿Cuántos litros había al principio?

40 ▼▼▽ El 70% de todos los asistentes a un congreso son europeos, y los no europeos ascienden a 75. De estos últimos, la quinta parte son asiáticos, un tercio son africanos y el resto son americanos.

a) ¿Cuántas personas asisten a ese congreso?

b) Calcula el número de asistentes de cada continente.

41 ▼▼▽ Nos comprometimos a pagar en tres plazos una lavadora que costaba 700 €.

En el primer plazo pagamos los 2/5 del total; en el segundo, los 2/3 de lo quedaba por pagar y en el tercero, el resto.

a) ¿Qué parte del total tuvimos que pagar en el tercer plazo?

b) Calcula la cantidad pagada en cada uno de los dos primeros plazos.

Autoevaluación

1 Efectúa y simplifica el resultado:

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\left(1 - \frac{5}{9}\right) + 4 \cdot \frac{2}{15}$$

2 De las entradas de un concierto se vendieron los 3/5 por internet y 3/4 del resto en la taquilla. Si quedaron 34 entradas sin vender, ¿cuántas se pusieron a la venta?

3 a) Expresa en forma decimal estas fracciones:

$$\frac{5}{8} \quad \frac{13}{6} \quad \frac{11}{3} \quad \frac{35}{11}$$

b) Ordena esos números de menor a mayor.

4 Un programa de radio tenía 130 000 oyentes a principios de año. Hasta hoy, su audiencia ha aumentado un 110%.

¿Cuántos oyentes tiene ahora?

5 He comprado una camisa, que estaba rebajada un 25%, por 18 €.

¿Cuál era su precio inicial?

6 El abono mensual del autobús costaba 30 € y lo han subido a 36 €.

¿Cuál ha sido el porcentaje de aumento?

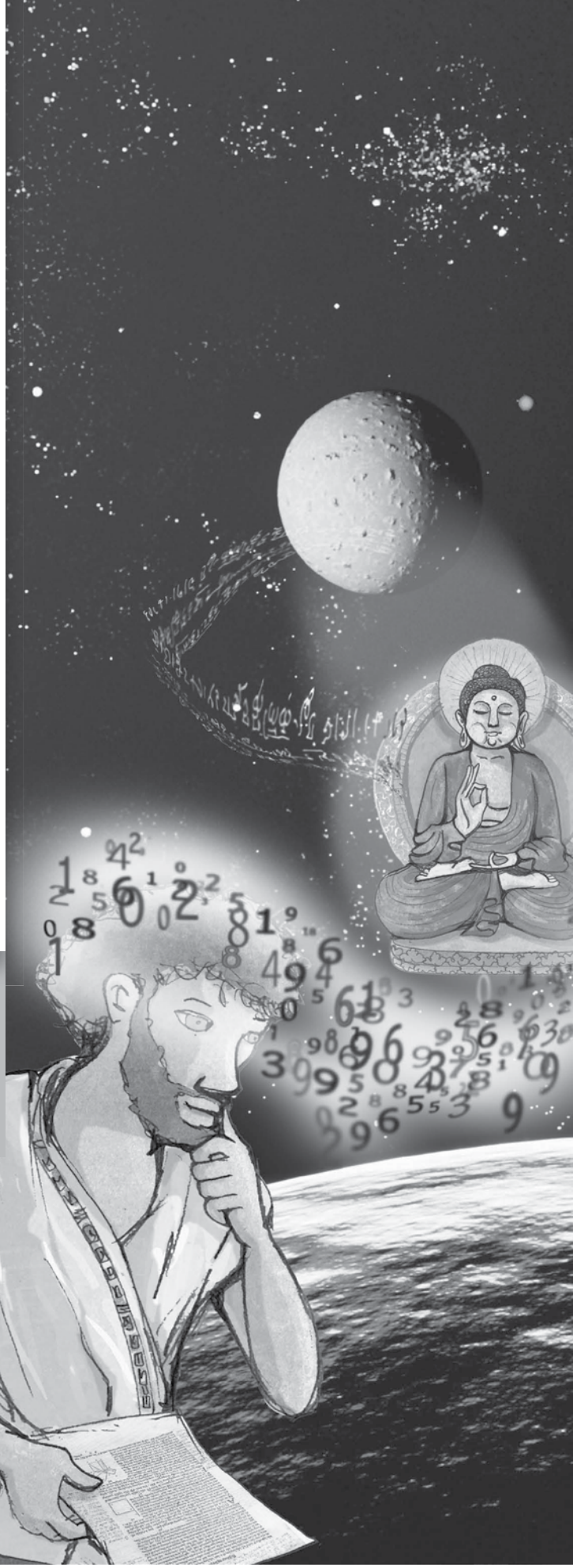
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

2 Potencias y raíces. Números aproximados

Nuestro sistema de numeración llegó a la civilización occidental por medio de los árabes (siglo IX), quienes, a su vez, lo aprendieron de los indios entre los siglos VII y VIII. Por eso, lo que hoy llamamos "numeración arábiga" debería llamarse "hindú" o "indoarábiga".

Los antiguos indios fueron muy aficionados a los números enormes. En su gran poema *Mahabarata* (siglo VI a.C., aproximadamente), se cuenta que Buda tuvo $6 \cdot 10^{11}$ hijos y se habla de $24 \cdot 10^{15}$ divinidades. Y una leyenda popular describe una batalla en la que intervinieron 10^{40} monos.

Arquímedes, gran matemático, ingeniero e inventor griego (siglo III a.C.), con el fin de demostrar que el número de granos de arena "no era infinito", se propuso escribir un número mayor que el número de granos de arena que cabrían en el universo. Y para ello escribió todo un libro, *El Arenario*, en el que tuvo que inventar una nueva forma de escribir números extraordinariamente grandes.



DEBERÁS RECORDAR

- Operaciones con potencias de base 10.
- Aproximación de números decimales: truncamiento y redondeo.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

1 Potenciación

Potencias de exponente positivo

Las potencias de exponente entero positivo (1, 2, 3, …) son fáciles de interpretar:

$$a^1 = a \qquad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Por ejemplo: $8^1 = 8$, $(-6)^4 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$, $\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7}$

Propiedades

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ — Por ejemplo: $a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^{3+4}$

② $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ — Por ejemplo: $(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = a^3 \cdot b^3$

③ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ — Por ejemplo: $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^{2 \cdot 3}$

④ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ — Por ejemplo: $\frac{a^6}{a^4} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = \frac{a^{6-4}}{1} = a^{6-4}$

⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ — Por ejemplo: $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}$

Entrénate

1 Completa estos productos con los exponentes que faltan:

a) $3^4 \cdot 3 = 3^{\square}$ b) $2^5 \cdot 2^2 = 2^{\square}$

c) $4^5 \cdot 4^3 = 4^{\square}$ d) $5^{\square} \cdot 5^2 = 5^6$

e) $7^3 \cdot 7^{\square} = 7^5$ f) $4^3 \cdot 4^{\square} = 4^6$

2 Completa las siguientes divisiones con los exponentes que faltan:

a) $a^5 : a^3 = a^{\square}$ b) $x^9 : x^6 = x^{\square}$

c) $n^4 : n^2 = n^{\square}$ d) $2^9 : 2^{\square} = 2^4$

e) $3^{\square} : 3^4 = 3^2$ f) $5^7 : 5^{\square} = 5^2$

3 Completa estas potencias con los exponentes que faltan:

a) $(a^2)^3 = a^{\square}$ b) $(b^2)^2 = b^{\square}$

c) $(c^3)^3 = c^{\square}$ d) $(2^3)^{\square} = 2^6$

e) $(4^3)^{\square} = 4^{12}$ f) $(5^4)^{\square} = 5^8$

Ejercicio resuelto

Reducir a una sola potencia.

a) $5^2 \cdot 5^6 \cdot 5^3$ **b)** $(2^3)^4$ **c)** $\frac{5^8}{5^6}$ **d)** $\frac{14^5}{7^5}$ **e)** $2^7 \cdot 5^7$

a) $5^2 \cdot 5^6 \cdot 5^3 = 5^{2+6+3} = 5^{11}$ (Propiedad ①)

b) $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$ (Propiedad ③)

c) $\frac{5^8}{5^6} = 5^{8-6} = 5^2$ (Propiedad ④)

d) $\frac{14^5}{7^5} = \left(\frac{14}{7}\right)^5 = 2^5$ (Propiedad ⑤)

e) $2^7 \cdot 5^7 = (2 \cdot 5)^7 = 10^7$ (Propiedad ②)

Actividades

1 Calcula las siguientes divisiones como en el ejemplo:

$15^3 : 5^3 = (15 : 5)^3 = 3^3 = 27$

a) $16^4 : 8^4$ b) $12^4 : 4^4$ c) $32^3 : 8^3$

d) $\frac{75^2}{25^2}$ e) $\frac{21^3}{7^3}$ f) $\frac{35^4}{7^4}$

2 Reduce a una sola potencia.

a) $4^3 \cdot 4^4 \cdot 4$ b) $(5^6)^3$ c) $\frac{7^6}{7^4}$

d) $\frac{15^3}{3^3}$ e) $2^{10} \cdot 5^{10}$ f) $\frac{12^5}{3^5 \cdot 4^5}$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Potencias de exponente cero o negativo

La propiedad ④ solo era válida para $m > n$.

Veamos qué ocurriría si fuera $m = n$ o $m < n$:

$\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$. Pero $\frac{a^3}{a^3} = 1$. Por tanto, tendría que ser $a^0 = 1$.

$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$. Pero $\frac{a^3}{a^5} = \frac{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}}{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot a\cdot a} = \frac{1}{a^2} \rightarrow a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

Estas igualdades nos sugieren la siguiente definición:

Si a es un número racional distinto de cero y n es entero positivo:

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Por ejemplo:

$6^{-2} = \frac{1}{6^2}$ $\qquad \frac{1}{6^{-2}} = 6^2$ $\qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5$ $\qquad \frac{2}{3^{-4}} = 2\cdot 3^4$

Las propiedades que teníamos para las potencias de exponente positivo también son válidas para potencias de exponentes enteros cualesquiera.

Entrénate

1 Escribe en forma de fracción:

a) 3^{-2} b) 2^{-3} c) 5^{-1}

2 Expresa como un entero:

a) $\frac{1}{3^{-2}}$ b) $\frac{1}{2^{-3}}$ c) $\frac{1}{5^{-1}}$

3 Calcula.

a) $a^{-3}\cdot a^5$ b) $a^2\cdot a^{-6}$

c) $\frac{x^3}{x^4}$ d) $\frac{1}{x^2\cdot x^3}$

4 Calcula.

a) $4^3\cdot 4^{-2}$ b) $3^2\cdot 3^{-3}$

c) $4^2\cdot 2^{-2}$ d) $5^3\cdot 5^{-4}$

e) $6^4\cdot 6^{-4}$ f) $3^5\cdot 3^{-2}$

Actividades

3 Simplifica y completa los siguientes productos:

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^3\cdot\frac{b^4}{b^3}$ b) $\left(\frac{a}{b}\right)^3\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^3$

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}\cdot\frac{a^4}{b^3}$ d) $\left(\frac{a}{b}\right)^3\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}$

4 Expresa como potencia de base 10 esta operación y, después, halla su resultado:

$$0{,}00001 : 10\,000\,000$$

5 Expresa como fracción simplificada.

a) $\frac{3^4}{3^5}$ b) 5^{-1} c) a^{-6}

d) $4^{-1}5^{-2}$ e) $(3^2)^{-2}$ f) $5\cdot 3^{-1}\cdot x^{-2}$

6 Escribe como una potencia de base a y exponente un número entero:

a) $\frac{1}{a^{-3}}$ b) $\frac{a^6}{a^8}$ c) $a^2\cdot a^{-6}$

d) $\frac{1}{a^2\cdot a^3}$ e) $\frac{a}{a^3}$ f) $\frac{a^{-4}}{a}$

7 Calcula:

a) 2^{-3} b) $\frac{1}{3^{-2}}$ c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

8 Reduce a un único número racional.

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^2$ b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ c) $\left(\frac{-1}{5}\right)^{-2}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^0$ e) $\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)^{-6}$ f) $\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^6$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

2 Raíces exactas

Dos raíces cuadradas

Observa:

$$3^2 = 9,\ (-3)^2 = 9$$

Por tanto, 9 tiene dos raíces cuadradas: 3 y –3.

Pero, ¡atención!, cuando ponemos $\sqrt{9}$ nos estamos refiriendo a la raíz positiva, es decir, $\sqrt{9} = 3$.

Análogamente, 16 tiene dos raíces cuartas: 2 y –2.

Pero $\sqrt[4]{16} = 2$.

Raíces cuadradas

Como sabes, $\sqrt{25} = 5$, porque $5^2 = 25$.

Análogamente, $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$, porque $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}$.

Raíces cúbicas

Las raíces cúbicas se comportan de forma similar a las raíces cuadradas:

$\sqrt[3]{8} = 2$, porque $2^3 = 8$

$\sqrt[3]{\frac{8}{1\,000}} = \frac{2}{10}$, porque $\left(\frac{2}{10}\right)^3 = \frac{2^3}{10^3} = \frac{8}{1\,000}$

Otras raíces

Del mismo modo, interpretamos raíces de índice superior a 3:

Puesto que $2^5 = 32$, $\sqrt[5]{32} = 2$.

$\sqrt[4]{10\,000} = 10$, porque $10^4 = 10\,000$

En general: si $a = b^n$, entonces $\sqrt[n]{a} = b$.

Ejercicio resuelto

Calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{\frac{49}{16}}$

b) $\sqrt{4\,356}$

c) $\sqrt[3]{\frac{1\,000}{64}}$

d) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}$

a) $\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{7^2}{4^2} = \frac{49}{16}$. Por tanto, $\sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4}$.

b) Puesto que piden $\sqrt{4\,356}$, supondremos que 4 356 es un cuadrado perfecto.

Para comprobarlo, lo descomponemos en factores primos: $4\,356 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2$.

Es decir, $4\,356 = (2 \cdot 3 \cdot 11)^2 = 66^2$. Por tanto, $\sqrt{4\,356} = 66$.

c) $1\,000 = 10^3$, $64 = 4^3$. Por tanto, $\sqrt[3]{\frac{1\,000}{64}} = \frac{10}{4}$.

d) $243 = 3^5$. Por tanto, $\sqrt[5]{\frac{1}{243}} = \frac{1}{3}$.

Actividades

1 Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{8}$ b) $\sqrt[5]{32}$ c) $\sqrt[3]{27}$ d) $\sqrt[4]{16}$

e) $\sqrt[4]{81}$ f) $\sqrt[3]{125}$ g) $\sqrt[3]{1\,000}$ h) $\sqrt[5]{100\,000}$

2 Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[4]{625}$ b) $\sqrt[5]{243}$ c) $\sqrt[3]{343}$ d) $\sqrt[6]{1\,000\,000}$

e) $\sqrt[6]{64}$ f) $\sqrt[7]{128}$ g) $\sqrt[4]{28\,561}$ h) $\sqrt[3]{10\,648}$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.° ESO. Material fotocopiable autorizado.

3 Aproximaciones y errores

Recuerda

Recuerda que para **aproximar** un número a un determinado orden de unidades:

- Se suprimen todas las cifras de la derecha de dicho orden.
- Si la primera cifra suprimida es igual o mayor que cinco, se suma 1 a la cifra anterior.

Los números decimales son especialmente útiles para expresar cantidades aproximadas.

Por qué usar números aproximados

Con mucha más frecuencia de la que somos conscientes, usamos números aproximados.

Lo hacemos, en general, por uno de estos motivos:

— o bien porque no es conveniente o no es necesario dar una cantidad exacta que sí conocemos,

— o bien porque, simplemente, no tenemos forma de medirla (o no la conocemos) con exactitud.

Por ejemplo:

- Al comunicar (o comentar) que a alguien le han tocado 3 527 834,56 € en la primitiva, diremos "tres millones y medio" o, acaso, "3 millones 528 mil euros" (no es necesario decir la cantidad exacta).
- Al medir la longitud de una mesa con una cinta métrica, nos aproximaremos hasta los centímetros o, como mucho, a los milímetros (con una cinta métrica no somos capaces de medir con más exactitud).

Cifras significativas

La altura a la que vuela un avión se puede expresar de diversas formas (nos fijamos en el número de cifras que usamos en cada caso):

9 km → solo una cifra

9,2 km → dos cifras

9 200 m → cuatro cifras (¿o, tal vez, solo dos?)

9 246 m → cuatro cifras

Está claro que cuantas más cifras se utilizan con más precisión se está dando la medida. Pero, a veces, no es conveniente dar demasiadas: ¿es razonable que la altura de un avión se dé afinando hasta los metros?

Fijémonos ahora en la medición 9 200 m. ¿Han querido ser exactos hasta los "metros" o solo hasta los "cientos de metros"? Muy probablemente sea esto último y, en este caso, los dos ceros finales no son *cifras significativas*.

Se llaman **cifras significativas** aquellas con las que se expresa un número aproximado. Solo deben utilizarse aquellas cuya exactitud nos conste.

Los ceros del final de un número no son cifras significativas si solo se han utilizado para poder expresar la cantidad en la unidad deseada (9 200 m en lugar de 92 cientos de metros).

Número de cifras significativas

Las estimaciones que hacemos en la vida corriente, sin ánimo de que sean muy precisas, tienen una o, a lo sumo, dos cifras significativas:

"ESTAS CASAS CUESTAN CUATROCIENTOS VEINTE MIL EUROS"

Una cantidad dada con tres cifras afina mucho. Solo en la ciencia se necesitan precisiones de cuatro o más cifras.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Control del error cometido

Es claro que cuando damos una medida aproximada estamos cometiendo un error, que consiste en la diferencia, en valor absoluto, entre el valor exacto (o real) y el valor aproximado. Se llama **error absoluto.**

$$\textbf{Error absoluto} = |\text{Valor real} - \text{Valor aproximado}|$$

En general, el error absoluto es desconocido (porque no conocemos el valor real), pero puede controlarse. Por ejemplo, al dar la altura del avión, 9,2 km, podemos saber que el error cometido es menor que 0,05 km = 50 m, ya que si se da 9,2 es porque está más cerca de esta medida que de 9,1 y que de 9,3.

No es lo mismo cometer un error de 50 m al medir la altura de un avión, que al medir la altura de un edificio o la altura de un satélite. Por eso se define el **error relativo** como el cociente entre el error absoluto y la medida exacta.

$$\textbf{Error relativo} = \frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor real}}$$

Cuantas más cifras significativas se utilicen para dar la medida aproximada, menor es el error relativo cometido.

Por ejemplo, si comparamos el error relativo de las mediciones 87 m, 5 km y 453 km, podemos asegurar que el menor error relativo se da en 453 km, ya que en ella se utilizan tres cifras significativas.

Actividades

1 ¿Qué podemos decir del error absoluto y del error relativo de estas mediciones?

a) Volumen de una bañera, 326 litros.

b) Volumen de una piscina, 326 m^3.

2 Compara el error relativo cometido al hacer las siguientes pesadas:

a) Una ballena, 37 toneladas.

b) Un pavo, 3 kg.

3 Aproxima al orden de la unidad indicada:

a) 2,3148 a las centésimas.

b) 43,18 a las unidades.

c) 0,00372 a las milésimas.

d) 13 847 a las centenas.

e) 4 723 a los millares.

f) 37,9532 a las décimas.

4 Expresa con dos cifras significativas estas cantidades:

a) Presupuesto de un club: 1 843 120 €.

b) Votos de un partido político: 478 235.

c) Precio de una empresa: 15 578 147 €.

d) Tamaño de un ácaro: 1,083 mm.

5 ¿En cuál de las aproximaciones dadas se comete menos error absoluto?

a) $\frac{14}{3} \approx \begin{cases} 4{,}6 \\ 4{,}7 \end{cases}$ b) $\sqrt{6} \approx \begin{cases} 2{,}44 \\ 2{,}45 \end{cases}$

6 Calcula el error absoluto cometido en cada caso:

	CANTIDAD REAL	CANTIDAD APROXIMADA
PRECIO DE UN COCHE	12 387 €	12 400 €
TIEMPO DE UNA CARRERA	81,4 min	80 min
DISTANCIA ENTRE DOS PUEBLOS	13,278 km	13,3 km

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

4 Notación científica

Los números siguientes están puestos en notación científica:

$$3{,}56 \cdot 10^{13} \; (= \underbrace{35\,600\,000\,000\,000}_{13 \text{ cifras}})$$

$$9{,}207 \cdot 10^{-16} \; (= 0{,}\underbrace{0000000000000009}_{16 \text{ cifras}}207)$$

La notación científica tiene sobre la usual la siguiente ventaja: las cifras se nos dan contadas, con lo que el orden de magnitud del número es evidente. Esta notación es útil, sobre todo, para expresar números muy grandes o muy pequeños.

Un número puesto en notación científica consta de:

- Una parte entera formada por una sola cifra que no es el cero (la de las unidades).
- El resto de las cifras significativas, si las hay, puestas como parte decimal.
- Una potencia de base 10 que da el orden de magnitud del número.

$$N = a\,,\underbrace{b\,c\,d\,\ldots}\cdot \underbrace{10^{n}}$$

PARTE ENTERA (SOLO UNA CIFRA) — PARTE DECIMAL — POTENCIA ENTERA DE BASE 10

Si n es positivo, el número N es "grande".

Y si n es negativo, entonces N es "pequeño".

Entrénate

1 Expresa como potencias enteras de base 10.

a) 100 000

b) 10

c) 10 000 000

2 Expresa como potencias enteras de base 10.

a) 0,001

b) 0,1

c) 0,000001

3 Escribe con todas sus cifras.

a) $2{,}3 \cdot 10^{5}$ b) $6{,}8 \cdot 10^{-4}$

c) $1{,}94 \cdot 10^{7}$ d) $2{,}26 \cdot 10^{-8}$

Actividades

1 Escribe estos números con todas sus cifras:

a) $4 \cdot 10^{7}$ b) $5 \cdot 10^{-4}$ c) $9{,}73 \cdot 10^{8}$

d) $8{,}5 \cdot 10^{-6}$ e) $3{,}8 \cdot 10^{10}$ f) $1{,}5 \cdot 10^{-5}$

2 Opera y expresa el resultado como una potencia de base 10:

a) 1 000 · 100 000

b) 1 000 · 0,01

c) 1 000 : 0,01

d) 1 000 : 0,000001

e) 1 000 · 0,000001

f) 0,0001 · 0,01

g) 0,0001 : 0,01

3 Escribe estos números en notación científica:

a) 13 800 000 b) 0,000005

c) 4 800 000 000 d) 0,0000173

4 Escribe estos números en notación científica:

a) 27 800 000 b) 950 000 000 000

c) 0,00057 d) 0,00000000136

5 Expresa en notación científica.

a) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km.

b) Caudal de una catarata: 1 200 000 *l*/s.

c) Velocidad de la luz: 300 000 000 m/s.

d) Emisión de CO_2: 54 900 000 000 kg.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

PREFIJOS PARA ÓRDENES DE UNIDADES	
tera	10^{12}
giga	10^{9}
mega	10^{6}
kilo	10^{3}
hecto	10^{2}
deca	10
deci	10^{-1}
centi	10^{-2}
mili	10^{-3}
micro	10^{-6}
nano	10^{-9}

Calculadora para notación científica

Las teclas para poner el exponente en una notación científica son, dependiendo del modelo de calculadora, EXP o $\times 10^x$.

Interpretación

Cuando la calculadora obtiene un resultado con más cifras de las que caben en su pantalla, recurre a la notación científica. Por ejemplo:

123 000 000 × 45 000 = 5.535 ×10 12

0,000123 ÷ 50 000 = 2.46 ×10 -09

Escritura

Para poner $5{,}74 \cdot 10^{9}$, hacemos: 5,74 EXP 9 [o bien 5,74 $\times 10^x$ 9]

Para poner $2{,}95 \cdot 10^{-13}$, hacemos: 2,95 EXP 13 +/− [o bien 2,95 $\times 10^x$ (−) 13]

Operaciones

Las operaciones se encadenan como si fueran números cualesquiera. La propia calculadora, al presionar la tecla =, da el resultado en forma científica.

Ejercicios resueltos

a) $(3{,}214 \cdot 10^{-5}) \cdot (7{,}2 \cdot 10^{15})$

a) 3,214 EXP 5 +/− × 7,2 EXP 15 = 2.31408 ×10 11

b) $\dfrac{3{,}214 \cdot 10^{-5}}{7{,}2 \cdot 10^{15}}$

b) 3,214 EXP 5 +/− ÷ 7,2 EXP 15 = 4.4638889 ×10 -21

c) $3{,}2 \cdot 10^{8} + 7{,}3 \cdot 10^{-14} - 4{,}552 \cdot 10^{8}$

c) 3,2 EXP 8 + 7,3 EXP 14 +/− − 4,552 EXP 8 = -1.352 ×10 8

Si los números que queremos sumar son muy diferentes en orden de magnitud, el resultado que muestra la calculadora es de orden igual al mayor de ellos.

Por ejemplo: 7,32 EXP 4 + 5,35 EXP 17 = 5.35 ×10 17

Actividades

6 Calcula:

a) $(3{,}25 \cdot 10^{7}) \cdot (9{,}35 \cdot 10^{-15})$

b) $(5{,}73 \cdot 10^{4}) + (-3{,}2 \cdot 10^{5})$

7 Efectúa con la calculadora:

a) $(2{,}5 \cdot 10^{7}) \cdot (8 \cdot 10^{3})$

b) $(5 \cdot 10^{-3}) : (8 \cdot 10^{5})$

c) $(7{,}4 \cdot 10^{13}) \cdot (5 \cdot 10^{-6})$

8 Efectúa con la calculadora:

a) $(2 \cdot 10^{5}) \cdot (3 \cdot 10^{12})$

b) $(1{,}5 \cdot 10^{-7}) \cdot (2 \cdot 10^{-5})$

c) $(3{,}4 \cdot 10^{-8}) \cdot (2 \cdot 10^{17})$

d) $(8 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{17})$

e) $(9 \cdot 10^{-7}) : (3 \cdot 10^{7})$

f) $(4{,}4 \cdot 10^{8}) : (2 \cdot 10^{-5})$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Opera y calcula

Potencias y raíces

1 ▼▽▽ Calcula las potencias siguientes:

a) $(-3)^3$ b) $(-2)^4$ c) $(-2)^{-3}$

d) -3^2 e) -4^{-1} f) $(-1)^{-2}$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ i) $\left(\frac{4}{3}\right)^{0}$

2 ▼▽▽ Calcula.

a) 3^{-2} b) 2^{-3} c) 5^{-1}

d) $\frac{1}{3^{-2}}$ e) $\frac{1}{2^{-3}}$ f) $\frac{1}{5^{-1}}$

3 ▼▽▽ Calcula.

a) $4^3 \cdot 4^{-2}$ b) $3^2 \cdot 3^{-3}$ c) $4^2 \cdot 2^{-2}$

d) $5^3 \cdot 5^{-4}$ e) $6^4 \cdot 6^{-4}$ f) $3^5 \cdot 3^{-2}$

4 ▼▽▽ Opera.

a) $a^{-3} \cdot a^5$ b) $a^2 \cdot a^{-6}$ c) $a^{-1} \cdot a^5$

d) $\frac{x^3}{x^4}$ e) $\frac{1}{x^2 \cdot x^3}$ f) $\frac{1}{x^{-2}}$

5 ▼▽▽ Opera y simplifica los siguientes productos:

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \frac{b^4}{a^3}$ b) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^3$

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} \cdot \frac{a^4}{b^3}$ d) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-3}$

6 ▼▽▽ Expresa como potencia única.

a) $\frac{3^4}{3^{-3}}$ b) $\frac{2^{-5}}{2^3}$ c) $\left(\frac{2^{-3}}{2^{-2}}\right)^{-1}$

7 ▼▽▽ Calcula.

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt{\frac{16}{25}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ d) $\sqrt[5]{-1}$

8 ▼▽▽ Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[6]{64}$ b) $\sqrt[3]{216}$

c) $\sqrt{14\,400}$ d) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$

e) $\sqrt[3]{\frac{64}{216}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{3\,375}{1\,000}}$

9 ▼▽▽ Justifica si son ciertas o no las siguientes frases:

a) Como $(-5)^2 = 25$, entonces $\sqrt{25} = -5$.

b) -5 es una raíz cuadrada de 25.

c) 81 tiene dos raíces cuadradas: 3 y -3.

d) 27 tiene dos raíces cúbicas: 3 y -3.

Notación científica

10 ▼▼▽ Di cuál debe ser el valor de n para que se verifique la igualdad en cada caso:

a) $3\,570\,000 = 3{,}57 \cdot 10^n$

b) $0{,}000083 = 8{,}3 \cdot 10^n$

c) $157{,}4 \cdot 10^3 = 1{,}574 \cdot 10^n$

d) $93{,}8 \cdot 10^{-5} = 9{,}38 \cdot 10^n$

e) $14\,700 \cdot 10^5 = 1{,}47 \cdot 10^n$

f) $0{,}003 \cdot 10^8 = 3 \cdot 10^n$

11 ▼▼▽ Efectúa estas operaciones con la calculadora:

a) $3{,}6 \cdot 10^{12} - 4 \cdot 10^{11}$

b) $5 \cdot 10^9 + 8{,}1 \cdot 10^{10}$

c) $8 \cdot 10^{-8} - 5 \cdot 10^{-9}$

d) $5{,}32 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-6}$

Aplica lo aprendido

12 ▼▽▽ Si la edad del Sol es $5 \cdot 10^9$ años, y la de la Tierra, 4 600 millones de años, ¿cuál de los dos es más viejo?

Calcula la diferencia entre la edad del Sol y la de la Tierra y exprésala en notación científica y en millones de años.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

13 ▼▽▽ Si una persona respira unas 15 veces por minuto, ¿cuántas veces habrá respirado esa persona si vive hasta los 80 años?

14 ▼▽▽ El número estimado de estrellas de nuestra galaxia es de $1{,}1 \cdot 10^{11}$, y el número estimado de galaxias en el universo es de $1{,}2 \cdot 10^{12}$. Si suponemos que, en todas las galaxias, el número de estrellas es aproximadamente el mismo, ¿cuál será el número de estrellas en el universo?

15 ▼▽▽ En un gramo de arena hay alrededor de 250 granos. ¿Cuántos granos habrá en un contenedor en el que hay una tonelada de arena?

16 ▼▽▽ El volumen de una gota de agua es 1/4 de mililitro, aproximadamente. ¿Cuántas gotas habrá en un depósito que contiene 1 m^3 de agua?

17 ▼▽▽ El diámetro de un virus es $5 \cdot 10^{-4}$ mm. ¿Cuántos de esos virus son necesarios para rodear la Tierra? (Radio medio de la Tierra: 6 370 km).

18 ▼▽▽ El presupuesto en educación de una comunidad autónoma ha pasado de $8{,}4 \cdot 10^6$ € a $1{,}3 \cdot 10^7$ € en tres años.

¿Cuál ha sido la variación porcentual?

19 ▼▽▽ En España se consumen, aproximadamente, 7,2 millones de toneladas de papel al año.

¿Cuál es el consumo anual per cápita? (Población de España: 45 millones).

20 ▼▽▽ Los veterinarios estiman que el 5% de la población mundial tiene un perro.

Según esta estimación, ¿cuántos perros hay en el mundo? (Población mundial: $6{,}8 \cdot 10^9$ habitantes).

21 ▼▼▽ La velocidad de la luz es $3 \cdot 10^8$ m/s. Un *año luz* es la distancia que recorre la luz en un año.

a) ¿Qué distancia recorre la luz del Sol en un año?

b) ¿Cuánto tarda la luz del Sol en llegar a Plutón? (Distancia del Sol a Plutón: $5{,}914 \cdot 10^6$ km).

c) La estrella Alfa-Centauro está a 4,3 años luz de la Tierra. Expresa en kilómetros esa distancia.

22 ▼▼▽ En un reloj que mide el crecimiento de la población mundial, observo que aumentó en 518 personas en 30 minutos.

Si se mantiene ese ritmo de crecimiento, ¿cuándo llegaremos a 7 mil millones? (Población mundial: $6{,}8 \cdot 10^9$).

Autoevaluación

1 Calcula:

a) 5^0 b) 3^{-2}

c) $(-2)^3$ c) $(-5)^{-1}$

2 Simplifica:

a) $(3^{-2} \cdot 3^4)^3$ b) $5^3 : 5^{-2}$

3 Calcula aplicando la definición:

a) $\sqrt[3]{-8}$ b) $\sqrt[4]{81}$ c) $\sqrt[5]{1/32}$

4 Expresa en notación científica:

a) 234 000 000 b) 0,000075

5 Escribe con todas las cifras:

a) $5{,}2 \cdot 10^6$ b) $8 \cdot 10^{-5}$

6 Efectúa con la calculadora:

a) $(3{,}5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^{-13})$

b) $(9{,}6 \cdot 10^8) : (3{,}2 \cdot 10^{10})$

c) $(2{,}7 \cdot 10^8) + (3{,}3 \cdot 10^7)$

7 La población mundial está estimada en $6{,}8 \cdot 10^9$, y el número de internautas es, aproximadamente, de 1 600 millones de personas.

¿Qué porcentaje de la población mundial utiliza internet?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

3 Progresiones

Las progresiones geométricas fueron tratadas por primera vez, de forma rigurosa, por **Euclides,** matemático griego del siglo III a.C. Fue el fundador y primer director de la gran escuela matemática de Alejandría, donde escribió su monumental obra *Elementos*, que consta de 13 libros en los que se desarrolló sobre todo la geometría, pero cuatro de ellos los dedicó a la aritmética. En uno de estos, el IX, trató las progresiones geométricas. Aunque sus resultados son similares a los que se exponen en esta unidad, la nomenclatura era muy distinta. Incluso cambia el nombre: Euclides las llamó *proporciones continuas*.

En el siglo I, **Nicómaco** recopiló lo que entonces se sabía de aritmética, casi todo conocido desde Euclides. Aunque sus aportaciones fueron escasas, en su obra incluyó el estudio de las progresiones aritméticas, que no trató Euclides cuatrocientos años antes.

Hay que esperar hasta el siglo XIII para que aparezca la sucesión más conocida de la historia, la de Fibonacci:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 ...

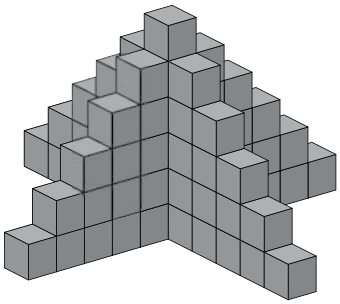
Su autor, **Leonardo de Pisa** (hijo de Bonaccio: **Fibonacci**), la describió en su *Liber Abaci*, en un contexto de descendencia de conejos: "Cuántas parejas de conejos se producirán en un año, comenzando por una pareja única, si cada mes cualquier pareja engendra otra pareja que se reproduce, a su vez, desde el segundo mes".

DEBERÁS RECORDAR

- Cómo se usan el "factor constante" y el "sumando constante" con la calculadora.
- Algunas propiedades de potencias y de raíces.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

1 Sucesiones



¿A cuál de las sucesiones de la derecha corresponde esta torre?

Las **sucesiones** son conjuntos de números (u otros objetos) dados ordenadamente. Por ejemplo:

a) 1, 5, 9, 13, 17, …

b) 170, 120, 70, 20, –30, –80, …

c) 2, 4, 8, 16, 32, 64, …

d) 1, –3, 9, –27, 81, –243, …

e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, …

f) 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

Cada una de las sucesiones anteriores se construye siguiendo un cierto criterio. Algunos son evidentes:

— Sumar siempre la misma cantidad.

— Multiplicar siempre por la misma cantidad.

Otros son menos evidentes:

— Cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

— Cada término se obtiene elevando al cuadrado el número que indica su posición.

A los elementos de la sucesión los llamamos **términos.** Podemos referirnos al primer término, al segundo término, al tercer término… de una sucesión c, pero es más cómodo llamarlos $c_1, c_2, c_3, \ldots$

Así, por ejemplo, para indicar que en la primera sucesión la diferencia de cada término al anterior es 4, podemos escribir:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = 4$$

Se llama **sucesión** a un conjunto de números dados ordenadamente de modo que se puedan numerar: primero, segundo, tercero…

Los elementos de la sucesión se llaman **términos** y se suelen designar mediante una letra con subíndice. El subíndice de cada elemento indica el lugar que ocupa en la sucesión:

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5,\ s_6, \ldots$$

Entrénate

1 Añade tres términos más a cada una de las siguientes sucesiones:

a) 12, 14, 16, 18, …

b) 25, 20, 15, 10, …

c) 7, 3, –1, –5, …

d) –13, –8, –3, 2, …

2 Escribe el octavo término de cada una de estas sucesiones, de las que conocemos sus cuatro primeros términos:

a) $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16$

b) $b_1 = 15, b_2 = 9, b_3 = 3, b_4 = -3$

Actividades

1 Añade tres términos más a cada una de las siguientes sucesiones:

a) $\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

c) 3, 6, 12, 24, …

d) 1, 3, 4, 7, …

2 Escribe el octavo término de cada una de estas sucesiones:

a) $a_1 = 1{,}2; a_2 = 2{,}3; a_3 = 3{,}4; a_4 = 4{,}5; \ldots$

b) $b_1 = 1, b_2 = -3, b_3 = 9, b_4 = -27, \ldots$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Término general de una sucesión

A veces, podemos encontrar una expresión que sirve para obtener un término cualquiera de la sucesión con solo saber el lugar que este ocupa.

Por ejemplo, para la sucesión a) 1, 5, 9, 13, 17, … de la página anterior, encontramos la expresión $a_n = 4n - 3$, pues dándole a n los valores 1, 2, 3, 4, …, obtenemos los términos $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

$a_n = 4n - 3$ es el **término general** de esta sucesión.

Se llama **término general** de una sucesión s (y se simboliza con s_n) a la expresión que representa un término cualquiera de esta.

Hay sucesiones cuyo término general puede expresarse mediante una fórmula, $s_n = f(n)$, en la cual, dándole a n un cierto valor, se obtiene el término correspondiente.

Las sucesiones que habitualmente manejaremos estarán formadas siguiendo algún criterio. Algunas vendrán dadas por su término general o será fácil obtenerlo. Pero en otras, cada término se obtendrá operando con los anteriores.

Las **sucesiones** cuyos términos se obtienen a partir de los anteriores se dice que están dadas en **forma recurrente.**

Por ejemplo, en la sucesión e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, …, cada término es la suma de los dos anteriores, $e_n = e_{n-1} + e_{n-2}$.

Entrénate

1 Escribe los cuatro primeros términos de cada sucesión:

$a_n = 7n - 10$

$b_n = 43 - 13n$

$c_n = (-1)^n \cdot n^2$

2 Halla el término general de las siguientes sucesiones:

a) 3, 9, 27, 81, …

b) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots$

c) 4, 5, 6, 7, …

d) 1, 3, 5, 7, …

Actividades

3 Escribe los cuatro primeros términos y el décimo de cada una de las siguientes sucesiones:

$a_n = \dfrac{2n-5}{n^2+1}$ $\qquad$ $b_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

$c_n = 4 + \dfrac{5n-5}{2}$ $\qquad$ $d_n = (-1)^{n+1} \cdot n$

4 Calcula los términos que se piden en cada una de estas sucesiones:

$a_n = \dfrac{3n-2}{n} \rightarrow a_5,\ a_{10}$ y a_{100}

$b_n = \dfrac{(-2)^n}{5} \rightarrow b_5,\ b_6$ y b_7

$c_n = 39 - 17n \rightarrow c_1,\ c_4$ y c_{15}

$d_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \rightarrow d_1,\ d_6$ y d_{20}

5 Halla el término general de las siguientes sucesiones:

a) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{9}{3}, \dfrac{16}{3}, \ldots$ $\qquad$ b) 7, 14, 21, 28, …

6 ¿Cuál es el término general de estas sucesiones?

a) $\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{15}, \dfrac{1}{20}, \ldots$ $\qquad$ b) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots$

7 ¿Cuál es el término general de estas sucesiones?

a) $\dfrac{0}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{6}, \dfrac{3}{8}, \ldots$ $\qquad$ b) 3, 6, 11, 18, 27, …

c) –1, 2, 7, 14, 23, … $\qquad$ d) 12, 14, 16, 18, …

e) 25, 20, 15, 10, … $\qquad$ f) 6, 12, 24, 48, …

8 Descubre la ley de recurrencia y añade un nuevo término a cada una de las siguientes sucesiones:

a) 1, –4, 5, –9, 14, –23, … (Diferencia)

b) 1, 2, 3, 6, 11, 20, …
(Relaciona cada elemento con los tres anteriores)

c) 1; 2; 1,5; 1,75; … (Semisuma)

d) 1, 2, 2, 1, 1/2, 1/2, 1, … (Cociente)

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

2 Progresiones aritméticas

Con calculadora

Añade cuatro términos a cada una de las sucesiones de la derecha. Si decimos que en a) la diferencia es 3, ¿cuál será la diferencia en las demás?

Con calculadora de pantalla sencilla generamos las sucesiones así:

a) 3 [+] [+] 2 [=] [=] [=] [=] [=] …

b) 20 [+] [+] 120 [=] [=] [=] [=] [=] …

c) 2 [+/−] [+] [+] 9 [=] [=] [=] [=] [=] …

d) 0,04 [+] [+] 5,83 [=] [=] [=] [=] …

Y con calculadora de pantalla descriptiva, así:

a) 2 [=] [Ans] [+] 3 [=] [=] [=] [=] …

b) 120 [=] [Ans] [+] 20 [=] [=] [=] …

c) 9 [=] [Ans] [+] [(−)] 2 [=] [=] [=] …

d) 5,83 [=] [Ans] [+] 0,04 [=] [=] [=] …

Observa las siguientes sucesiones:

a) 2, 5, 8, 11, 14, 17, …

b) 120, 140, 160, 180, 200, 220, …

c) 9, 7, 5, 3, 1, –1, –3, –5, …

d) 5,83; 5,87; 5,91; 5,95; 5,99; 6,03; …

A estas sucesiones se las llama **progresiones aritméticas.**

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente sumando un mismo número (positivo o negativo), al que se llama **diferencia,** d, de la progresión.

Obtención del término general

Una progresión aritmética queda perfectamente determinada si conocemos el primer término y la diferencia. Por ejemplo, en la progresión a) de arriba, $a_1 = 2$ y $d = 3$. ¿Cómo hallaríamos el término 100?

— Para pasar del a_1 al a_{100}, hemos de dar 99 pasos.

— Cada paso supone aumentar 3 unidades.

— Por tanto, para pasar del término a_1 al a_{100}, aumentamos $99 \cdot 3 = 297$ unidades.

— Es decir, $a_{100} = 2 + 297 = 299$.

El **término general** a_n de una progresión aritmética cuyo primer término es a_1 y cuya diferencia es d se obtiene razonando así:

Para pasar de a_1 a a_n damos $n - 1$ pasos de amplitud d. Por tanto:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Actividades

1 Asocia cada una de las siguientes progresiones aritméticas I, II, III y IV con su término general:

I) 3, 10, 17, 24, … II) –8, –12, –16, –20, …

III) 14, 11, 8, 5, … IV) –1,5; 0; 1,5; 3; …

$a_n = -3n + 17$ $b_n = 7n - 4$

$c_n = 1{,}5n - 3$ $d_n = -4n - 4$

2 Determina el término general de las progresiones aritméticas de las que conocemos:

a) $a_1 = 11$; $d = 3$ b) $b_1 = -5$; $d = 2$

3 Determina el término general de las progresiones aritméticas de las que conocemos:

a) $a_2 = -7$; $d = -4$ b) $b_2 = 3/2$; $d = 1$

4 Halla el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

a) 25, 20, 15, 10, …

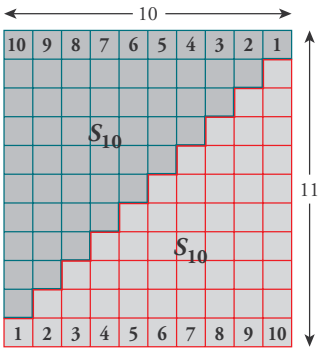
b) 7, 3, –1, –5, …

c) –10, –7, –4, –1, …

d) –8, –12, –16, –20, …

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Suma de los términos de una progresión aritmética



$$S_{10} = \frac{10 \cdot 11}{2}$$

Los números naturales forman una progresión aritmética de diferencia $d = 1$. Veamos cómo obtenemos la suma de los diez primeros términos; es decir, la suma $1 + 2 + 3 + \ldots + 10$:

$$\begin{aligned} S_{10} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ S_{10} &= 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S_{10} &= 11 + 11 + 11 + \ldots\ldots\ldots + 11 + 11 \end{aligned}$$

$$2S_{10} = 10 \cdot 11 \rightarrow S_{10} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

Esta forma simplificada de proceder se debe a la siguiente propiedad:

En una progresión aritmética de n términos, los términos equidistantes de los extremos suman lo mismo.

La **suma** $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ de los n **primeros términos** de una progresión aritmética es:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Actividades

5 Calcula la suma de los treinta primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $a_1 = 3$; $a_2 = 10$; $a_3 = 1{,}7$; $a_4 = 24$; …; $a_n = 7n - 4$

b) $b_1 = 11$, $b_2 = 14$, $b_3 = 17$, $b_4 = 20$, …; $b_n = 3n + 8$

c) $c_1 = -10$, $c_2 = -7$, $c_3 = -4$, $c_4 = -1$, …; $c_n = 3n - 13$

d) $d_1 = 7$, $d_2 = 3$, $d_3 = -1$, $d_4 = -5$, …; $d_n = -4n + 11$

6 Calcula la suma de los veinte primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $a_n = 2n - 7$ b) $b_n = -4n - 4$

c) $c_n = -3n + 17$ d) $d_n = 1{,}5n - 3$

7 Calcula la suma de los once primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $a_n = 6 - n$ b) $b_1 = 4$, $b_2 = 7$

c) $c_1 = 12$, $c_4 = 18$ d) $d_2 = 10$, $d_4 = 16$

8 Halla la suma de todos los números pares menores que cien: 2, 4, 6, 8, …, 98.

9 En una progresión aritmética conocemos su sexto término, $a_6 = 13$, y la diferencia, $d = -3$.

Calcula el primer término y la suma de los quince primeros términos.

10 En una progresión aritmética, $a_1 = 5$ y $a_2 = 7$.

Calcula el término que ocupa el lugar 40, a_{40}, y la suma de los primeros cuarenta términos, S_{40}.

11 En una progresión aritmética, $b_1 = 5$ y $b_2 = 12$.

Calcula la suma de los 32 primeros términos, S_{32}.

12 El primer término de una progresión aritmética es $c_1 = 17$ y el quinto es $c_5 = 9$. Halla la suma S_{20}.

13 Los primeros términos de una progresión aritmética son $a_1 = 4$, $a_2 = 7$. Halla esta suma:

$$a_{10} + a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{19} + a_{20}$$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

3 Progresiones geométricas

Con calculadora

Añade dos términos a cada una de las progresiones a), b), c) de la derecha.

Obtén nuevamente, con la calculadora, las tres progresiones geométricas usando el **factor constante.**

Por ejemplo, para a):

2 × × 3 = = = = = …
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
6 12 24 48 96

O bien, con la calculadora de pantalla descriptiva:

3 = Ans × 2 = = = = …
↓ ↓ ↓ ↓
6 12 24 48

Entrénate

1 Asocia cada una de las progresiones geométricas I, II y III con su término general:

I) 125, 50, 20, …

II) 1 000, 800, 640, …

III) 1 000; 160; 25,6; …

$a_n = 1\,000 \cdot (0{,}16)^{n-1}$

$b_n = 125 \cdot (0{,}4)^{n-1}$

$c_n = 1000 \cdot (0{,}8)^{n-1}$

2 Halla el término general de estas progresiones geométricas:

a) $a_1 = 4$, $r = 3$

b) $b_1 = 3$, $r = -2$

c) $c_1 = 5$, $r = 5$

d) $d_1 = -2$, $r = 1/3$

Observa las siguientes sucesiones:

a) 3, 6, 12, 24, 48, 96, … Cada término se obtiene multiplicando el anterior por 2. Se trata de una progresión geométrica de razón 2.

b) 3, 30, 300, 3 000, … Es una progresión geométrica de razón 10.

c) 80; –40; 20; –10; 5; –2,5; … Progresión geométrica de razón –1/2 = –0,5

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente multiplicando por un número fijo, r, llamado **razón.**

Obtención del término general

Una progresión geométrica queda completamente definida si conocemos el primer término y la razón. Por ejemplo, en la progresión a), el primer término es $a_1 = 3$ y la razón es $r = 2$. ¿Cómo hallaríamos el término 25?

— Para pasar del a_1 al a_{25}, hemos de dar 24 pasos.

— Cada paso supone multiplicar por 2. Por tanto, para pasar del a_1 al a_{25} habremos de multiplicar veinticuatro veces por 2; es decir, por 2^{24}.

— Así, $a_{25} = 3 \cdot 2^{24} = 3 \cdot 16\,777\,216 = 50\,331\,648$.

El **término general** a_n de una progresión geométrica cuyo primer término es a_1 y cuya razón es r se obtiene razonando del siguiente modo:

Para pasar de a_1 a a_n hemos de dar $n - 1$ pasos. Cada paso consiste en multiplicar por r. Por tanto:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Problema resuelto

1. Los dos primeros términos de una progresión geométrica son $a_1 = 250$ y $a_2 = 300$. Calcular r, a_6 y a_n.

$a_2 = a_1 \cdot r \;\rightarrow\; 300 = 250 \cdot r \;\rightarrow\; r = \dfrac{300}{250} = 1{,}2$

$a_1 = 250$, $a_2 = 300$, $a_3 = 360$, $a_4 = 432$, $a_5 = 518{,}4$; $a_6 = 622{,}08$

TÉRMINO GENERAL: $a_n = 250 \cdot 1{,}2^{n-1}$

Actividades

1 En las siguientes progresiones geométricas, calcula el término que se pide:

a) $a_1 = 5$, $r = 2 \rightarrow a_6$ b) $b_1 = 1/2$, $r = -2 \rightarrow b_7$

c) $c_1 = 10$, $r = 0{,}1 \rightarrow c_5$ d) $d_1 = 15$, $r = 1/2 \rightarrow d_8$

2 Calcula el término general de las siguientes progresiones geométricas:

a) 5, 50, 500, 5000, … b) $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \ldots$

c) –3, 6, –12, 24, … d) $5, \frac{15}{2}, \frac{45}{4}, \frac{135}{8}, \ldots$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Sucesiones: formación, término general

1 ▼▽▽ Escribe los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) Cada término se obtiene sumando 7 al anterior. El primero es –10.

b) El primer término es 0,1. Los demás se obtienen multiplicando el anterior por 2.

c) El primero es 2; el segundo, 4, y los siguientes, la semisuma de los dos anteriores.

2 ▼▽▽ Escribe los términos a_{10} y a_{25} de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 3n - 1$

b) $b_n = \frac{n^2 + 1}{2}$

c) $c_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

d) $d_n = 1 + \frac{(-1)^n}{10}$

e) $e_n = n(n - 1)$

f) $f_n = \frac{n - 2}{n + 2}$

3 ▼▽▽ Escribe los cinco primeros términos de la siguiente sucesión:

$$a_1 = 1 \qquad a_n = 2a_{n-1} + 3$$

4 ▼▽▽ Averigua el criterio con el que se ha formado cada una de las siguientes sucesiones:

a) 11, 9, 7, 5, …

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

c) 2,5; 2,9; 3,3; 3,7; …

d) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

e) 8, 12, 18, 27, …

f) 0, 3, 8, 15, …

Progresiones aritméticas

5 ▼▽▽ En las siguientes progresiones aritméticas, calcula el término que se pide:

a) $a_1 = 5,\ d = 4 \rightarrow a_8$

b) $b_1 = -3,\ d = -2 \rightarrow b_{10}$

c) $c_1 = 4,\ c_2 = 7 \rightarrow c_{11}$

d) $d_1 = 12,\ d_4 = 18 \rightarrow d_9$

e) $e_2 = 10,\ e_4 = 16 \rightarrow e_1$

6 ▼▽▽ Calcula la diferencia de las siguientes progresiones aritméticas en las que conocemos dos términos:

a) $a_1 = 7,\ a_{10} = 34$

b) $b_2 = 3,\ b_8 = 15$

c) $c_3 = 8,\ c_{11} = 16$

7 ▼▽▽ Escribe los cinco primeros términos y a_{20} de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $a_1 = 1{,}5;\ d = 2$

b) $a_1 = 32;\ d = -5$

c) $a_1 = 5;\ d = 0{,}5$

d) $a_1 = -3;\ d = -4$

8 ▼▽▽ Halla, en cada caso, el término general y calcula, después, a_{50}:

a) 25, 18, 11, 4, …

b) –13, –11, –9, –7, …

c) 1,4; 1,9; 2,4; 2,9; …

d) –3, –8, –13, –18, …

9 ▼▽▽ Calcula la suma de los veinte primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $a_1 = 5;\ d = 2$

b) $a_1 = -1;\ a_2 = -7$

c) Los números pares.

d) Los múltiplos de 3.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Progresiones geométricas

10 ▼▽▽ Escribe los cinco primeros términos de las siguientes progresiones geométricas:

a) $a_1 = 0{,}3;\ r = 2$

b) $a_1 = -3;\ r = \frac{1}{2}$

c) $a_1 = 200;\ r = -0{,}1$

d) $a_1 = \frac{1}{81};\ r = 3$

11 ▼▽▽ Halla, en cada una de las sucesiones siguientes, el término general:

a) 20; 8; 3,2; 1,28; …

b) 40, 20, 10, 5, …

c) 6; –9; 13,5; –20,25; …

d) 0,48; 4,8; 48; 480; …

Resuelve problemas

12 ▼▼▽ En un teatro, la primera fila dista del escenario 4,5 m, y la octava, 9,75 m.

a) ¿Cuál es la distancia entre dos filas?

b) ¿A qué distancia del escenario está la fila 17?

13 ▼▼▽ Para preparar una carrera, un deportista comienza corriendo 3 km y aumenta 1,5 km su recorrido cada día.

¿Cuántos días tiene que entrenar para llegar a hacer un recorrido de 15 km?

14 ▼▼▽ En el año 1986 fue visto el cometa *Halley* desde la Tierra, a la que se acerca cada 76 años. Esta era la cuarta vez que nos visitaba desde que el astrónomo Halley lo descubrió.

a) ¿En qué año fue descubierto?

b) ¿Cuándo será visto en el siglo XXI?

15 ▼▼▽ La dosis de un medicamento es 100 mg el primer día y 5 mg menos cada uno de los siguientes. El tratamiento dura 12 días.

¿Cuántos miligramos tiene que tomar el enfermo durante todo el tratamiento?

16 ▼▼▽ Un tipo de bacteria se reproduce por bipartición cada cuarto de hora. ¿Cuántas bacterias habrá después de 6 horas?

17 ▼▼▽ La población de un cierto país aumenta por término medio un 2,5% anual. Si la población actual es de 3 millones, ¿cuál será dentro de 10 años?

Autoevaluación

1 Escribe, en cada caso, los cinco primeros términos de las sucesiones cuyo término general es:

a) $a_n = 3n - 2$

b) $a_n = 2^{n-1}$

c) $a_n = \frac{n+1}{2n}$

2 Añade un nuevo término a cada una de las progresiones siguientes. Después, escribe el término general de cada una:

a) 7, 10, 13, 16, ...

b) 1, 3, 9, 27, ...

3 En una progresión aritmética conocemos $a_1 = 13$ y $a_4 = 4$. Escribe su término a_{10} y el término general.

4 De una progresión geométrica sabemos que el primer término es igual a 5 y que la razón es 2. Escribe el cuarto término y el término general.

5 Por el alquiler de un local pagamos 3 000 € el primer año. En el contrato figura que habrá una subida de 100 € al año.

a) ¿Cuánto pagaremos el décimo año?

b) Calcula la cantidad total que pagaremos durante esos 10 años.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

4 El lenguaje algebraico

Los problemas algebraicos están presentes en todas las antiguas civilizaciones, casi siempre ligados a situaciones cotidianas: repartos, herencias, partición de terrenos, cálculo de superficies…

Sin perder su componente utilitaria, el estudio teórico del álgebra fue avanzando, de modo que la historia de su desarrollo fue la mejora del simbolismo y la sistematización en la resolución de ecuaciones.

En el siglo III, **Diofanto** de Alejandría inventó una notación simbólica que, aunque rudimentaria, supuso un importante progreso.

En el siglo IX, el máximo exponente de la matemática árabe fue **Al-Jwarizmi.** Escribió un manual que tuvo una gran influencia en todo el mundo civilizado, incluso siglos después. Se le puede considerar el "padre" del álgebra como ciencia.

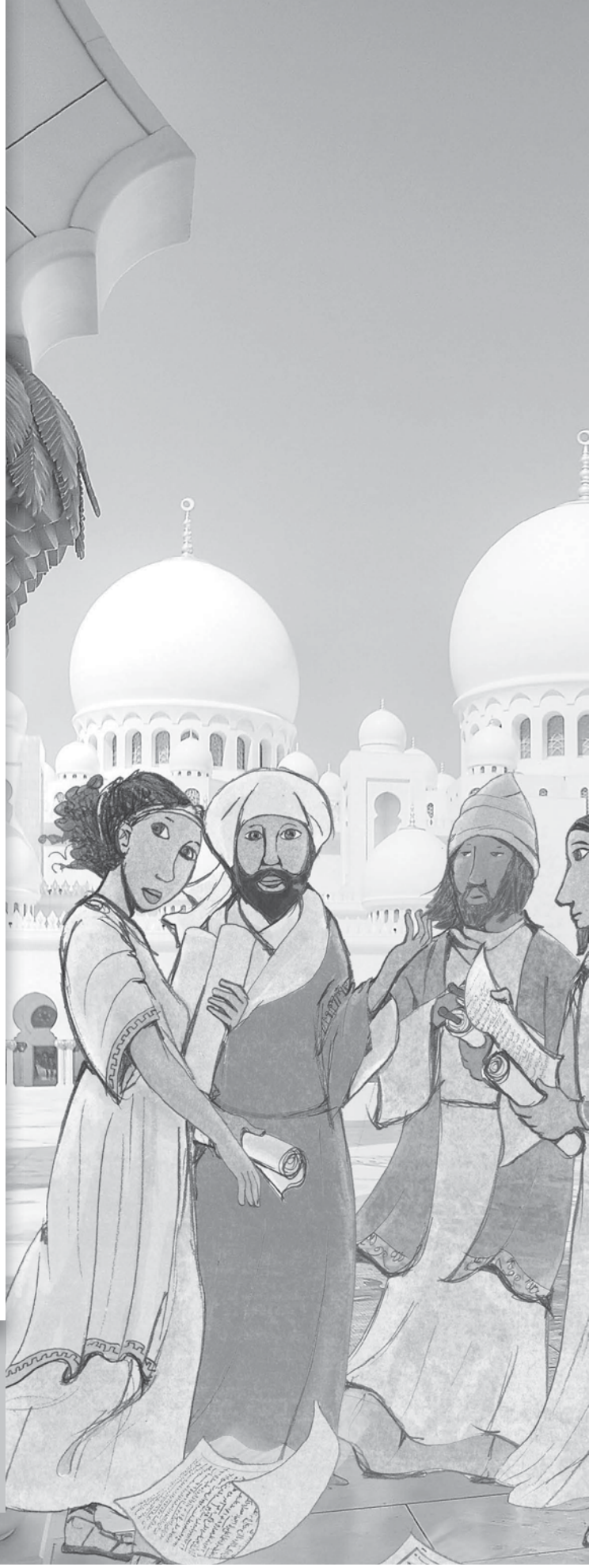
Los europeos aprendieron de los árabes, del mismo modo que estos habían aprendido de los griegos y de los indios. El desarrollo del álgebra no fue uniforme en Europa y cabe destacar la escuela de algebristas italianos del siglo XVI.

El álgebra, tal como la conocemos hoy, terminó de evolucionar con los estudios de los franceses **Vieta** (finales del siglo XVI) y **Descartes** (siglo XVII).

Un ejemplo del largo camino que hubo que transitar hasta llegar a un simbolismo eficaz es el nombre que se le dio a la incógnita: los egipcios la llamaron "el montón", y los árabes, "la cosa". Esta nomenclatura pasó a Europa, donde al álgebra se la llegó a denominar "el arte de la cosa" o "el arte cósico".

¿Y la x, de dónde viene? "Cosa", en árabe, se pronuncia "xay" y así fue transcrita al castellano. Poco a poco fue sustituida por su letra inicial.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.° ESO. Material fotocopiable autorizado.



DEBERÁS RECORDAR

- La traducción al lenguaje algebraico es muy importante. Ejercítate todo lo que puedas resolviendo muchos casos sencillos.

1 Expresiones algebraicas

Trabajar en álgebra consiste en manejar relaciones numéricas en las que una o más cantidades son desconocidas. Estas cantidades se llaman **variables** o **incógnitas** y se representan por letras.

Al traducir al lenguaje algebraico los términos de un problema, se obtienen **expresiones algebraicas.**

Hay expresiones algebraicas de muy distinto tipo:

- **Monomios:** $7x^3$, $-\frac{3}{2}x$, $4\pi r^2$ (superficie de la esfera)
- **Polinomios:** $5x^3 + x^2 - 11$, $2\pi r\text{h} + 2\pi r^2$ (área total del cilindro)

Algunas expresiones algebraicas contienen el signo "=":

- **Identidades:** $5(x + 4) = 5x + 20$. La segunda parte de la igualdad se consigue operando en la primera.
- **Ecuaciones:** $5(x + 4) = x + 44$. La igualdad solo es cierta para algún valor de la incógnita x. En este caso, para $x = 6$.

Entrénate

1 Indica, de estas expresiones algebraicas, cuáles son identidades y cuáles ecuaciones:

a) $2x + 3 = 8$

b) $2(x + 3) = 2x + 6$

c) $-x + 5 - (1 - x^2) = x^2 - x + 4$

d) $x^2 - x + 4 = x + 4$

Ejercicio resuelto

Expresar algebraicamente:

a) El triple de un número menos cuatro unidades.

b) El triple del resultado de restarle cuatro unidades a un número.

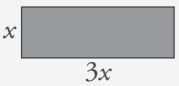
c) El perímetro de un rectángulo es 60 cm y uno de sus lados es el triple del otro.

a) El triple de un número $\rightarrow 3x$

El triple de un número menos cuatro unidades $\rightarrow 3x - 4$

b) Quitarle a un número cuatro unidades $\rightarrow x - 4$

El triple del anterior resultado $\rightarrow 3(x - 4)$

c) 

El rectángulo del que nos hablen es de esta forma.

Su perímetro es la suma de sus cuadtro lados, es decir, $x + 3x + x + 3x$.

Su perímetro es 60 cm $\rightarrow x + 3x + x + 3x = 60$

Si operamos en la expresión anterior, $8x = 60$

Actividades

1 Describe mediante una expresión algebraica los enunciados siguientes:

a) El doble de un número.

b) El doble de un número menos su tercera parte.

c) Sumar tres unidades a un número.

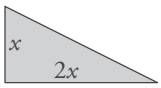
d) El doble del resultado de sumarle tres unidades a un número.

2 Describe mediante una expresión algebraica con dos incógnitas:

a) Un número más el doble de otro.

b) La mitad de la suma de dos números.

3 Describe mediante una expresión algebraica: el área de este triángulo es 36 cm^2.



© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

2 Monomios

Monomio es el producto de un número por una o varias letras.

En un monomio, *las letras* **(parte literal)** *representan números* de valor desconocido o indeterminado. Por eso conservan todas las propiedades de los números y sus operaciones.

- El **coeficiente** de un monomio es el número que multiplica a la parte literal.
- Se llama **grado** de un monomio al número total de factores que forman su parte literal.

  Los números son monomios de grado cero, pues $x^0 = 1$.
- Dos **monomios** son **semejantes** cuando tienen idéntica la parte literal.

Ejemplos

- Estas expresiones son monomios:

  $7a^2$, $\frac{4}{5}xy^2$, $(5+\sqrt{2})x^5$

  Sus coeficientes respectivos son:

  7, 4/5 y $5+\sqrt{2}$.
- El grado de $7a^2 = 7(a \cdot a)$ es 2.

  El de $\frac{4}{5}xy^2 = \frac{4}{5}(x \cdot y \cdot y)$ es 3.
- $9 = 9x^0$ es un monomio de grado cero.
- $5abx^2$ y $-7abx^2$ son semejantes.

Suma y resta de monomios

- La suma de monomios semejantes es otro monomio, también semejante a ellos, cuyo coeficiente es la suma de sus coeficientes.

  Por ejemplo: $7x^5 + 11x^5 = 18x^5$
- Si dos monomios no son semejantes, su suma no se puede simplificar y hay que dejarla indicada. Entonces el resultado ya no es un monomio.

  Por ejemplo: $7x^5 + 11x^3$ no admite simplificación.
- La resta es un caso particular de la suma.

  Por ejemplo: $3abx^2 - 8abx^2 = -5abx^2$

Producto de monomios

El producto de dos o más monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes, y su parte literal, el producto de las partes literales de los factores.

Por ejemplo: $(3x^2ab) \cdot (5xac) = 15x^3a^2bc$

Entrénate

1 Efectúa estas operaciones:

a) $2x^3 + 7x^3$ b) $-3x^2 + 8x^2$

c) $4y^4 - 2y^4$ d) $-z^5 - 3z^5$

e) $3xy + 8xy$ f) $-2y^2x + 8y^2x$

g) $5 \cdot (3x^2)$ h) $-3 \cdot (-2x)$

i) $(2x) \cdot (3x^2)$ j) $(2y) \cdot (5y^2)$

Actividades

1 ¿Cuál es el grado de cada uno de los siguientes monomios?

a) $-5xy^2z^3$ b) $11xy^2$ c) -12

2 Efectúa las siguientes sumas de monomios:

a) $5x + 3x^2 - 11x + 8x - x^2 + 7x$

b) $6x^2y - 13x^2y + 3x^2y - x^2y$

c) $2x - 5x^2 + 3x + x^2 - 3$

3 Efectúa los siguientes productos de monomios:

a) $(3x) \cdot (5x^2)$ b) $(-3x^2) \cdot (4x^3)$

c) $\left(\frac{2}{3}x^3\right) \cdot (-6x)$ d) $\left(\frac{2}{9}x^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}x^3\right)$

4 Escribe dos monomios semejantes a cada uno de los siguientes:

a) $-5ab^2c^3$ b) $6x^3$ c) x d) 7

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

3 Polinomios

Ejemplos

- Son polinomios: $3x^2y + 5x^3 - 8$

  $2x^2 + x^2 - 5x + 1$
- Simplificación:

  $5x^2 + 4x^4 - 2x^2 - 3x^4 + 1 \rightarrow$

  $\rightarrow \; x^4 + 3x^2 + 1$
- Simplificar antes de asignar el grado a un polinomio:

  $7x^3 + 5x^2 + 3x^3 - 2x - 10x^3 =$

  $= 5x^2 - 2x \rightarrow$ Su grado es 2.

- Un **polinomio** es la suma de dos o más monomios. Cada uno de los monomios que lo forman se llama **término.**
- Si en un polinomio hay monomios semejantes, conviene operar, simplificar la expresión y obtener el polinomio en su **forma reducida.**
- El **grado** de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo componen cuando el polinomio se ha puesto en su forma reducida (es necesario reducir el polinomio antes de decir su grado, ya que es posible que los monomios de mayor grado se simplifiquen y desaparezcan).
- El **valor numérico** de un polinomio para $x = a$ es el número que se obtiene al sustituir la x por a. Por ejemplo, el valor de $2x^3 - 5x^2 + 7$ para $x = 2$ es $2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 7 = 2 \cdot 8 - 5 \cdot 4 + 7 = 3$.
- Si el valor numérico de un polinomio para $x = a$ es 0, entonces se dice que a es una **raíz** de dicho polinomio.

Entrénate

1 Dados $A = 2x^3 - 7x^2 + 1$

$B = 5x^2 - 4x + 2$

$C = 4x^3 + 2x^2 - 5x$, halla:

a) $A + B$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + 1 \\ 5x^2 - 4x + 2 \\ \hline \square x^3 - \square x^2 - \square x + \square \end{array}$$

b) $B - C$

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 4x + 2 \\ -4x^3 - 2x^2 + 5x \\ \hline \end{array}$$

c) $3C - 2A$

$$\begin{array}{r} 12x^3 + 6x^2 - 15x \\ -4x^3 + 14x^2 - 2 \\ \hline \end{array}$$

Suma y resta de polinomios

Para sumar dos polinomios, agrupamos sus términos y sumamos los monomios semejantes.

Para restar dos polinomios, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo. El **opuesto** de un polinomio es el que resulta de cambiar de signo todos sus términos.

Por ejemplo, sean $A = 6x^2 - 4x + 1$ y $B = x^3 + 2x^2 - 11$:

$$\begin{array}{rcr} A & \rightarrow & 6x^2 - 4x + 1 \\ + B & \rightarrow & x^3 + 2x^2 - 11 \\ \hline A + B & \rightarrow & x^3 + 8x^2 - 4x - 10 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} A & \rightarrow & 6x^2 - 4x + 1 \\ - B & \rightarrow & -x^3 - 2x^2 + 11 \\ \hline A - B & \rightarrow & -x^3 + 4x^2 - 4x + 12 \end{array}$$

Producto de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada término del polinomio y se suman los resultados. Por ejemplo:

$(3x^2) \cdot (x^3 - 2x^2 - 1) = 3x^2 \cdot x^3 - 3x^2 \cdot 2x^2 - 3x^2 \cdot 1 = 3x^5 - 6x^4 - 3x^2$

Actividades

1 Di el grado de cada uno de estos polinomios:

a) $x^6 - 3x^4 + 2x^2 + 3$

b) $5x^2 + x^4 - 3x^2 - 2x^4 + x^3$

2 Considera los polinomios $P = 5x^3 - x^2 - 2x + 1$ y $Q = x^4 - 2x^2 + 2x - 2$.

Halla $P + Q$ y $P - Q$.

3 Dados los polinomios $A = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 1$; $B = 2x^2 - x + 3$ y $C = 4x^3 + 2x^2 - x$, halla $A - B + C$.

4 Halla los productos siguientes y di de qué grado son:

a) $2x(x^2 + 3x - 1)$ b) $2x^2(3x^2 - 4x + 6)$

c) $-2(-3x^3 - x)$ d) $5(x^2 + x - 1)$

e) $-7x^5(2x^2 - 3x - 1)$ f) $-7x(2x^3 - 3x^2 + x)$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ten en cuenta

La forma que ves aquí de disponer los cálculos, permite multiplicar polinomios de manera ordenada y segura. Cuando falta algún término, hay que dejar un hueco en el lugar correspondiente.

Producto de dos polinomios

Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada monomio de uno de los factores por todos y cada uno de los monomios del otro factor y, después, se suman los monomios semejantes obtenidos.

Por ejemplo: $P = 5x^3 - 2x^2 - 1$, $\quad Q = 6x - 3$

$$\begin{array}{rl} 5x^3 - 2x^2 \quad -1 & \longleftarrow P \\ \hline 6x - 3 & \longleftarrow Q \\ -15x^3 + 6x^2 \quad +3 & \longleftarrow \text{producto de } -3 \text{ por } P \\ 30x^4 - 12x^3 \quad -6x & \longleftarrow \text{producto de } 6x \text{ por } P \\ \hline 30x^4 - 27x^3 + 6x^2 - 6x + 3 & \longleftarrow P \cdot Q \end{array}$$

Cuando hay pocos términos, no hace falta utilizar el método anterior, podemos realizar el producto directamente:

$$(2x^2 - 1)\,(3x + 4) = 6x^3 + 8x^2 - 3x - 4$$

Entrénate

1 Copia y completa en tu cuaderno:

$$\begin{array}{r} x^2 - 5x + 2 \\ \times\ x^2 + 1 \\ \hline \square x^2 - \square x + \square \\ \square x^4 - \square x^3 + \square x^2 \\ \hline x^4 - \square x^3 + \square x^2 - \square x + \square \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 1 \\ \times\ x^2 + 1 \\ \hline \square x^2 + \square \\ \square x^4 + \square x^2 \\ \hline \square x^4 + \square x^2 + \square \end{array}$$

2 Copia y completa:

a) $x \cdot (x + 3) = \square x^2 + \square x$

b) $4a \cdot (2a + 5) = \square a^2 + \square a$

c) $x^2 \cdot (\square + \square) = x^3 + 5x^2$

d) $\square \cdot (3a + 5) = 3a^2 + 5a$

e) $9x^2 + 6x + 3 = \square \cdot (3x^2 + 2x + 1)$

Sacar factor común

En la expresión $3xy + 6x^2z + 9xyz$ la x y el 3 están multiplicando en todos los sumandos. Son factores comunes a todos ellos. Podemos sacarlos fuera, así:

$$3xy + 6x^2z + 9xyz = 3x \cdot y + 3x \cdot 2xz + 3x \cdot 3yz = 3x(y + 2xz + 3yz)$$

A esta transformación se le llama **sacar factor común.** Se utiliza para simplificar expresiones y para resolver algunas ecuaciones que aparecerán más adelante.

Comprueba que si quitaras el paréntesis en la expresión final, volverías a obtener la inicial.

Cuando un sumando coincide con el factor común, ten en cuenta que está multiplicado por 1. Por ejemplo: $xy + x^2 + x = x(y + x + 1)$.

Actividades

5 Siendo $P = 4x^2 + 3$, $Q = 5x^2 - 3x + 7$ y $R = 5x - 8$, calcula:

a) $P \cdot Q$ b) $P \cdot R$ c) $Q \cdot R$

6 Opera y simplifica la expresión resultante:

a) $x(5x^2 + 3x - 1) - 2x^2(x - 2) + 12x^2$

b) $5(x - 3) + 2(y + 4) - \frac{7}{3}(y - 2x + 3) - 8$

c) $15 \cdot \left[\frac{2(x-3)}{3} - \frac{4(y-x)}{5} + \frac{x+2}{15} - 7\right]$

7 Extrae factor común en cada expresión:

a) $5x^2 - 15x^3 + 25x^4$

b) $\frac{x^4}{3} - \frac{x}{9} - \frac{1}{15}$

c) $2x^3y^5 - 3x^3y^4 + 2x^3y^2 + 7x^3y^3$

d) $2x^2y - 5x^3y$

e) $2(x - 3) + 3(x - 3) - 5(x - 3)$

f) $2xy^2 - 6x^2y^3 + 4xy^3$

©GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

4 Identidades

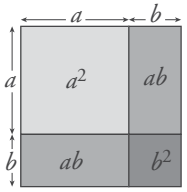
La igualdad $2x + 5x = 7x$ es una identidad porque es cierta cualquiera que sea el valor de x.

Conoces muchas identidades. Aquí tienes algunas:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad$ $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$ $\qquad$ $a - (b + c) = a - b - c$

Todas ellas son consecuencia de propiedades aritméticas o simples traducciones de estas.

Una **identidad** es una **igualdad algebraica** que es cierta para valores cualesquiera de las letras que intervienen.



JUSTIFICACIÓN GRÁFICA DEL CUADRADO DE UNA SUMA

Identidades notables

Se suelen llamar así a las tres igualdades siguientes:

I. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$	CUADRADO DE UNA SUMA
II. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$	CUADRADO DE UNA DIFERENCIA
III. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$	SUMA POR DIFERENCIA

Estas igualdades ya las conocías, pero las seguirás utilizando con frecuencia, por lo que es necesario que las manejes con soltura.

Entrénate

1 Desarrolla aplicando las identidades notables.

a) $(x + 3)^2 = \square x^2 + \square x + \square$

b) $(5 + x)^2 = \square + \square x + \square x^2$

c) $(3x + 1)^2 = \square x^2 + \square x + \square$

d) $(x - 7)^2 = \square x^2 - \square x + \square$

e) $(2x - 3)^2 = \square x^2 - \square x + \square$

f) $(3x - a)^2 = \square x^2 - \square x + \square$

g) $(4x + 3y)^2 = \square x^2 + \square xy + \square y^2$

h) $(x + 2)(x - 2) = \square x^2 - \square$

i) $(5x + 2y)(5x - 2y) = \square x^2 - \square y^2$

j) $(x^2 + 2x)(x^2 - 2x) = \square x^4 - \square x^2$

Ejercicios resueltos

1. Desarrollar: a) $(5x - 3)^2$ b) $(4x - 3)(4x + 3)$

a) Es el cuadrado de una diferencia:

$(5x - 3)^2 = (5x)^2 + 3^2 - 2 \cdot 5x \cdot 3 = 25x^2 + 9 - 30x$

b) Es el producto de una suma por la diferencia de los mismos términos:

$(4x - 3) \cdot (4x + 3) = (4x)^2 - 3^2 = 16x^2 - 9$

2. Simplificar $(3x + 5)^2 - (3x - 5)^2$

$(3x + 5)^2 - (3x - 5)^2 = 9x^2 + 25 + 30x - (9x^2 + 25 - 30x) =$

$= 30x - (-30x) = 60x$

Actividades

1 Desarrolla los siguientes cuadrados:

a) $(x + 4)^2$ $\qquad$ b) $(2x - 5)^2$ $\qquad$ c) $(1 - 6x)^2$

d) $\left(\frac{x}{2} + 6\right)^2$ $\qquad$ e) $\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$ $\qquad$ f) $(ax + b)^2$

2 Efectúa los siguientes productos:

a) $(x + 1)(x - 1)$ $\qquad$ b) $(2x + 3)(2x - 3)$

c) $\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right)$ $\qquad$ d) $(ax + b)(ax - b)$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Utilidad de las identidades

Las identidades sirven para transformar una expresión algebraica en otra más cómoda de manejar. Por ejemplo:

$$(x+5)^2-(x-3)^2 \overset{(1)}{=} (x^2+25+10x)-(x^2+9-6x) \overset{(2)}{=}$$
$$= x^2+25+10x-x^2-9+6x \overset{(3)}{=}$$
$$= 16x+16 \overset{(4)}{=} 16(x+1)$$

Cada una de las cuatro igualdades es una identidad.

La expresión final, $16(x+1)$, es más sencilla y cómoda de manejar que la inicial, pero es **idéntica** a ella. Por eso, podemos sustituir la primera expresión por la última, y el cambio es ventajoso.

Aclaraciones

(1) Se han desarrollado el cuadrado de una suma y el de una diferencia.

(2) Un paréntesis precedido del signo menos obliga a cambiar de signo a todos sus términos.

(3) Se reducen términos semejantes.

(4) Se saca 16 como factor común.

Ejercicios resueltos

1. Simplificar: $(2x-4)^2-(2x+4)(2x-4)$

$(2x-4)^2-(2x+4)(2x-4) = 4x^2-16x+16-(4x^2-16) =$

$= 4x^2-16x+16-4x^2+16 = -16x+32$

2. Multiplicar por 12 y simplificar: $\frac{3(x+2)}{4}+\frac{3x+5}{2}-\frac{5(4x+1)}{6}+\frac{25}{12}$

Observa que 12 es el mínimo común múltiplo de 4, 2, 6 y 12.

$$\left[\frac{3(x+2)}{4}+\frac{3x+5}{2}-\frac{5(4x+1)}{6}+\frac{25}{12}\right]\cdot 12 =$$

$$= 3\cdot 3(x+2)+6(3x+5)-2\cdot 5(4x+1)+25 =$$

$$= 9x+18+18x+30-40x-10+25 = -13x+63$$

Entrénate

1 Transforma estas sumas en productos:

a) $x^2-9 = x^2-3^2 =$
$= (x+\square)\cdot(x-\square)$

b) $4x^2-9 = (2x)^2-3^2 =$
$= (2x+\square)\cdot(\square-\square)$

c) $x^2+4+4x = x^2+2^2+2(x\cdot 2) =$
$= (x+\square)^2$

d) $x^2-6x+9 = x^2+3^2-2(x\cdot 3) =$
$= (\square-\square)^2$

Actividades

3 Expresa en forma de producto.

a) $4x^2-25$ b) $x^2+16+8x$

c) x^2+2x+1 d) $x^2+18x+81$

e) $9x^2+6x+1$ f) $4x^2+25-20x$

4 Simplifica las expresiones siguientes:

a) $(x-2)(x+2)-(x^2+4)$

b) $(3x-1)^2-(3x+1)^2$

c) $2(x-5)^2-(2x^2+3x+50)$

d) $(5x-4)(2x+3)-5$

e) $3(x^2+5)-(x^2+40)$

f) $(x+3)^2-[x^2+(x-3)^2]$

5 Multiplica y simplifica el resultado:

a) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}-\frac{3x}{4}-\frac{1}{4}$ por 8

b) $x+\frac{2x-3}{9}+\frac{x-1}{3}-\frac{12x+4}{9}$ por 9

c) $\frac{(2x-4)^2}{8}-\frac{x(x+1)}{2}-5$ por 8

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Expresa y calcula

Traducción a lenguaje algebraico

1 ▼▽▽ Asocia a cada enunciado una de las expresiones algebraicas que aparecen debajo:

a) El cuadrado de un número menos su doble.

b) El 80% de un número.

c) Un número impar.

d) Los dos tercios de un número más cinco unidades.

$$\frac{2}{3}x + 5; \quad x^2 - 2x; \quad 0{,}8x; \quad 2x + 1$$

2 ▼▽▽ Expresa en lenguaje algebraico empleando una sola incógnita.

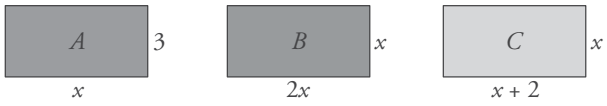
a) El triple de un número menos dos.

b) El producto de dos números consecutivos.

c) El cuadrado de un número más su mitad.

d) La suma de un número con otro diez unidades mayor.

3 ▼▽▽ Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estos rectángulos:



4 ▼▽▽ Traduce a lenguaje algebraico utilizando dos incógnitas.

a) La suma de los cuadrados de dos números.

b) El cuadrado de la diferencia de dos números.

c) La mitad del producto de dos números.

d) La semisuma de dos números.

5 ▼▽▽ Si x e y son las edades actuales de dos hermanos, expresa los siguientes enunciados utilizando ambas incógnitas:

a) La suma de las edades que tenían hace 5 años.

b) El producto de las edades que tendrán dentro de 6 años.

c) La diferencia entre la edad del mayor y la mitad de la del menor.

Monomios

6 ▼▽▽ Indica el grado de cada uno de los siguientes monomios y di cuáles son semejantes:

a) $-5xy$ b) $(-7x)^3$ c) $8x$ d) $(xy)^2$

e) $\frac{2}{3}x^2y^2$ f) $\frac{4}{5}x^3$ g) $\frac{-3yx}{5}$ h) $\frac{1}{2}x^2$

7 ▼▽▽ Calcula el valor numérico de los monomios del ejercicio anterior para $x = -1$ e $y = 3$.

8 ▼▽▽ Efectúa.

a) $5x - x^2 + 7x^2 - 9x + 2$

b) $2x + 7y - 3x + y - x^2$

c) $x^2y^2 - 3x^2y - 5xy^2 + x^2y + xy^2$

9 ▼▽▽ Efectúa estos productos de monomios:

a) $(6x^2)(-3x)$ b) $(-x)(5xy)$ c) $(2xy^2)(4x^2y)$

Polinomios

10 ▼▽▽ Simplifica las siguientes expresiones:

a) $(2x^3 - 5x + 3) - (2x^3 - x^2 + 1)$

b) $5x - (3x + 8) - (2x^2 - 3x)$

¿Cuál es el grado de cada polinomio?

11 ▼▽▽ Considera estos polinomios:

$A = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$

$B = 2x^4 + x^3 - 2x + 4$

$C = -x^3 + 3x^2 - 7x$

Halla: $A + B$; $A - C$; $A - B + C$

12 ▼▽▽ Efectúa, reduce y di cuál es el grado del polinomio resultante.

a) $x(x^2 - 5) - 3x^2(x + 2) - 7(x^2 + 1)$

b) $5x^2(-3x + 1) - x(2x - 3x^2) - 2 \cdot 3x$

c) $\frac{1}{3}x^2\left(-\frac{3}{2}x^2 + 6x - 9\right)$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

13 ▼▽▽ Opera y simplifica el resultado.

$$\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{6}\right)(6x - 12)$$

14 ▼▽▽ Extrae factor común.

a) $12x^3 - 8x^2 - 4x$

b) $-3x^3 + x - x^2$

c) $2xy^2 - 4x^2y + x^2y^2$

d) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x$

Identidades notables

15 ▼▽▽ Desarrolla estas expresiones:

a) $(x + 6)^2$ b) $(7 - x)^2$

c) $(3x - 2)^2$ d) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

e) $(x - 2y)^2$ f) $\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}y\right)^2$

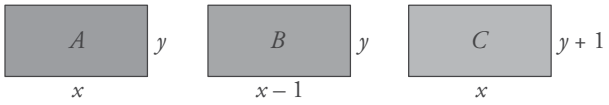
16 ▼▽▽ Efectúa estos productos:

a) $(x + 7)(x - 7)$ b) $(3 + x)(3 - x)$

c) $(3 + 4x)(3 - 4x)$ d) $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$

Aplica lo aprendido

17 ▼▼▽ Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estos rectángulos:



18 ▼▼▽ Traduce a lenguaje algebraico utilizando dos incógnitas:

a) La cantidad de agua que queda en un depósito del que se saca 2/5 de su contenido y 20 litros.

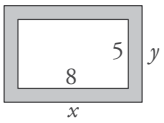
b) Lo que tengo que pagar por dos camisetas que tenían el mismo precio, pero una está rebajada un 15% y la otra, un 20%.

19 ▼▼▽ Expresa algebraicamente utilizando dos incógnitas:

a) El área de un rectángulo de 24 m^2 en el que uno de sus lados mide 5 cm más que el otro.

b) Gasté en un traje 3/5 de lo que tenía y 60 € en dos camisas. Me queda la mitad de lo que tenía.

20 ▼▼▽ Expresa algebraicamente el área de la parte coloreada de la figura.



Autoevaluación

1 Escribe en lenguaje algebraico:

a) Si gasto los $\frac{2}{5}$ de lo que tengo, me quedan 12 €.

b) La mitad del resultado de sumar 5 unidades a un número.

2 Extrae factor común:

a) $x^3 - x^2 + x$ b) $4x^3 - 6x^2 + 2x$

3 Desarrolla:

a) $(x - 5)^2$ b) $(3x + 5)^2$

c) $(3x - 5)^2$ d) $(3x + 5)(3x - 5)$

4 ¿Cuál de las siguientes expresiones es una identidad? Explica por qué.

a) $(2x - 1)(2x + 1) = 4x^2 - 1$ b) $8x - 5 = 3x$

5 Efectúa y reduce:

a) $x(3x - 2) - (x - 3)(2x - 1)$

b) $(x - 2)^2 - 2(x^2 - 4)$

6 Multiplica por el mínimo común múltiplo de los denominadores y simplifica:

$$\frac{5(x-1)}{9} + \frac{7x-2}{12} - \frac{x(x+1)}{2}$$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.° ESO. Material fotocopiable autorizado.

5 Ecuaciones

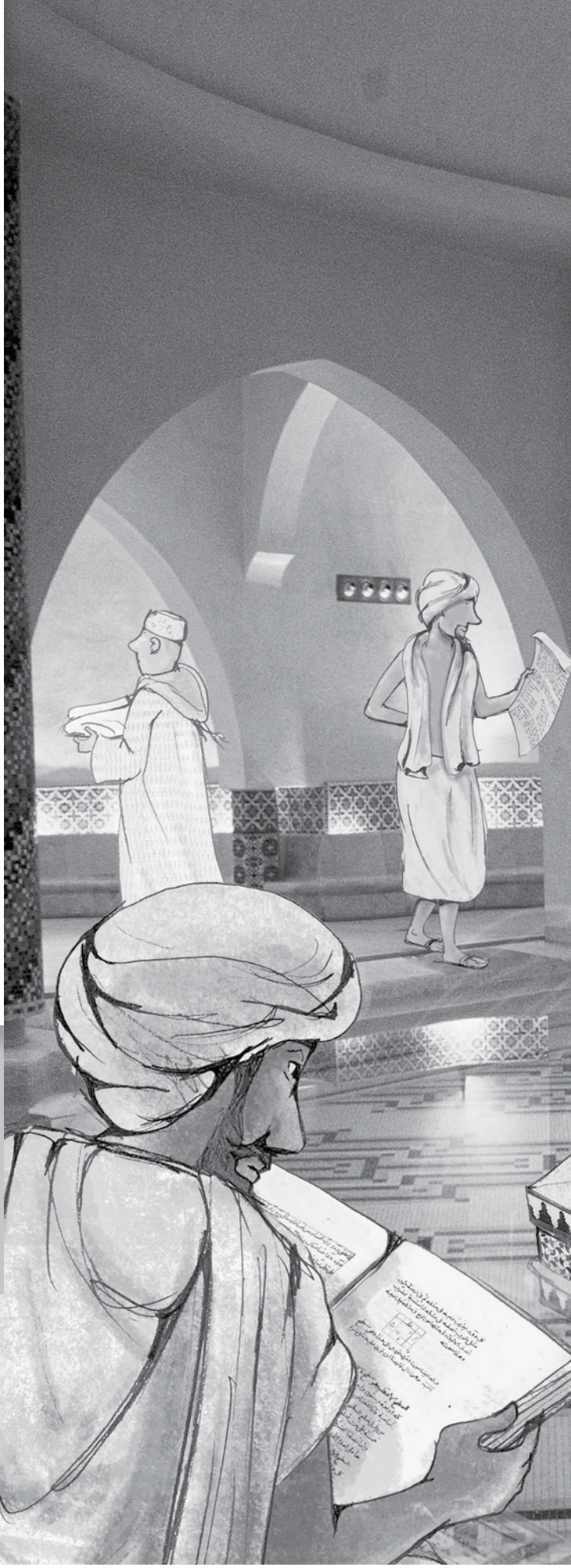
La búsqueda de métodos para resolver ecuaciones fue un empeño de los matemáticos de la Antigüedad. Los primeros intentos, como es natural, fueron titubeantes, poco sólidos: resoluciones por tanteo o mediante procedimientos solo válidos para casos particulares, pero no generalizables.

El primero que lo afrontó de forma rigurosa fue el griego **Diofanto,** en el siglo III. En su libro *Aritmética* trató las resoluciones de ecuaciones de primer grado y algunas de segundo grado. Además, los problemas que propuso prepararon el terreno para consolidar la teoría de ecuaciones, que se desarrolló siglos más tarde.

En Bagdad aparece un personaje clave, el árabe **Al-Jwarizmi**. Su libro *Al-jabr wa-l-muqabala* es un referente fundamental en la historia del álgebra. Fue estudiado y traducido a todos los idiomas en siglos posteriores. El título viene a ser "transposición y cancelación" y alude a los trasiegos que se realizan con los coeficientes para despejar la incógnita. El libro acabó siendo denominado, simplemente, *Al-jabr*, y este nombre finalmente designó la ciencia que contenía (*al-jabr* ~ álgebra).

Los algebristas árabes también ingeniaron curiosos métodos para resolver geométricamente algunos tipos de ecuaciones de segundo grado.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.



DEBERÁS RECORDAR

- Qué es una ecuación. Solución de una ecuación.
- El manejo de la calculadora para comprobar si un número es o no solución de una ecuación.
- Algunas peculiaridades de las raíces cuadradas de un número.

1 Ecuaciones. Solución de una ecuación

Las ecuaciones y sus soluciones

Nomenclatura

Las expresiones que hay a ambos lados del signo = se llaman **miembros.** En la ecuación que ves a la derecha:

$2x^2 - \frac{10}{x}$ es el **primer miembro** y

3 es el **segundo miembro.**

Una **ecuación** es una igualdad en la que interviene alguna letra (**incógnita**) cuyo valor queremos conocer.

Solución de la ecuación es el valor de la incógnita que hace cierta la igualdad.

Por ejemplo, $2x^2 - \frac{10}{x} = 3$ es una ecuación.

El valor $x = 2$ es solución, porque $2 \cdot 2^2 - \frac{10}{2} = 3$.

Qué es resolver una ecuación

Resolver una ecuación es encontrar su solución (o sus soluciones) o averiguar que no tiene solución. Seguramente, conoces procedimientos para resolver metódicamente algunos tipos de ecuaciones. Pero si llegamos a la solución mediante cualquier otro camino, también es válida la resolución.

Por ejemplo, vamos a buscar, por tanteo, alguna solución de $x^2 - 5x + 6 = 0$:

- ¿Será $x = 0$ solución? $0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6 \neq 0 \rightarrow$ NO
- ¿Y $x = 2$? $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0 \rightarrow$ SÍ

Entrénate

1 Comprueba si alguno de los valores dados es solución de la ecuación correspondiente:

a) $3x + 11 = 38$; $x = 5$, $x = 9$

b) $5(x - 3) = 15$; $x = 6$, $x = -6$

c) $\sqrt{5x + 1} = 6$; $x = 1$, $x = 7$

2 Halla, tanteando, alguna solución (busca números enteros) de estas ecuaciones:

a) $5(x^2 + 1) = 50$ b) $(x + 1)^2 = 9$

Ejercicio resuelto

Resolver por tanteo estas ecuaciones: a) $x^x = 3\,125$ b) $x^6 = 1\,200$

a) Tanteando con enteros, encontramos la solución $x = 5$, pues $5^5 = 3\,125$.

b) Dando valores enteros a x, observamos que:

$3^6 = 729$ } x está entre 3 y 4. Es decir, $x = 3,...$
$4^6 = 4\,096$ } Damos a x los valores 3,1; 3,2; 3,3; ... y observamos que:

$3{,}2^6 = 1\,073,\ldots < 1\,200$ } $x = 3{,}2...$ Podemos decir que, aproximando
$3{,}3^6 = 1\,291,\ldots > 1\,200$ } hasta las décimas, la solución es $x = 3{,}2$.

Actividades

1 Comprueba, en cada caso, si cada uno de los dos valores es o no solución de la ecuación:

a) $x^3 - 20x = -16$; $x = 5$, $x = 4$

b) $\frac{12}{x} - \frac{x}{2} = 1$; $x = 4$, $x = 6$

c) $2^{x-1} = 512$; $x = 9$, $x = 10$

d) $x^x + 1 = 28$; $x = 3$, $x = 1$

e) $\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 2} = 1$; $x = 1$, $x = 6$

2 Tantea para hallar alguna solución de estas ecuaciones (todas ellas tienen solución entera):

a) $x^3 + x = 10$ b) $(x - 5)(x + 2) = 0$

c) $3^{x+1} = 81$ d) $x^x = 3\,125$

3 Tanteando con ayuda de la calculadora, encuentra una solución (aproximada hasta las décimas) de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 + 1 = 100$ b) $3^x = 1\,000$ c) $\sqrt{8x - 40} = 5$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

2 Ecuaciones de primer grado

A las ecuaciones polinómicas de primer grado se las llama, simplemente, **ecuaciones de primer grado.** En ellas, la x solo aparece elevada a 1 ($x^1 = x$).

- Son de primer grado: $4x + 7 = 8$; $\frac{2}{3}x - 2{,}5 = 9$; $\sqrt{3}x + 17 = 4 - 2x$
- No son de primer grado: $(6x + 5)^2 = 8$; $\frac{8}{x} = 5x + 3$; $\sqrt{6x} + 1 = 5x$

Una **ecuación de primer grado** es una expresión que se puede reducir a la forma $ax + b = 0$, siendo $a \neq 0$. Tiene una única solución: $x = -\frac{b}{a}$

Ecuaciones anómalas

Existen expresiones que parecen ecuaciones de primer grado y que, sin embargo, no tienen solución o tienen infinitas soluciones. Por ejemplo:

- $4x - 6 = 4(x + 3) \rightarrow 4x - 6 = 4x + 12 \rightarrow 0 \cdot x = 18$

  No puede ser $0 \cdot x = 18$. Por tanto, la ecuación **no tiene solución.**

- $4x - 6 = 4(x - 2) + 2 \rightarrow 4x - 6 = 4x - 6 \rightarrow 0 \cdot x = 0$

  $0 \cdot x = 0$ es cierto cualquiera que sea x, pues $0 = 0$. Por tanto, la ecuación **tiene infinitas soluciones.**

Realmente, estas igualdades no son ecuaciones, pues carecen del término en x. Sin embargo, puesto que antes de simplificar no sabemos en qué van a quedar, las trataremos como ecuaciones de primer grado.

Entrénate

1 Resuelve estas ecuaciones y comprueba la solución de cada una:

a) $3x - 2(x + 3) = x - 3(x + 1)$

b) $4 + x - 4(1 - x) + 5(2 + x) = 0$

c) $2x + 7 - 2(x - 1) = 3(x + 3)$

d) $4(2x - 7) - 3(3x + 1) = -5 + x$

2 Comprueba si estas dos ecuaciones son o no equivalentes:

$2(x - 1) + x + 1 = 2x + 1$

$2x - 1 - (x - 1) = 2(3x - 5)$

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución o ambas carecen de solución. Así, las ecuaciones $5x - 9 = 51$ y $3x - 7 = 89 - 5x$ son equivalentes porque la solución de ambas es $x = 12$.

Transformaciones que mantienen la equivalencia de ecuaciones

Para resolver una ecuación, hemos de despejar la x mediante una serie de *pasos*. Cada *paso* consiste en transformar la ecuación en otra equivalente, en la que la x esté más próxima a ser despejada. Recordemos algunas reglas:

TRANSFORMACIÓN	REGLA PRÁCTICA
Sumar o restar la misma expresión en los dos miembros de la igualdad.	Lo que está sumando en un miembro pasa restando al otro miembro, y viceversa.
Multiplicar o dividir los dos miembros por el mismo número distinto de cero.	Lo que está multiplicando a todo lo demás de un miembro pasa dividiendo al otro, y viceversa.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Pasos para resolver ecuaciones de primer grado

Seguramente aprendiste a resolver ecuaciones de primer grado sencillas el curso pasado. Ahora vamos a entrenarnos para resolver ecuaciones de primer grado algo más complejas.

Con frecuencia, las ecuaciones que tendremos que resolver presentan un aspecto complicado.

Por ejemplo: $\frac{3x-1}{20} - \frac{2(x+3)}{5} = \frac{4x+2}{15} - 5$

Veamos qué pasos conviene dar para, poco a poco, ir despejando la x (en el margen puedes ver cómo hemos resuelto la ecuación del ejemplo siguiendo los pasos que ahora describimos):

1. Quitar denominadores, si los hay. Para ello, se multiplican los dos miembros de la ecuación por un múltiplo común de los denominadores; preferiblemente, su mínimo común múltiplo.

2. Quitar paréntesis, si los hay.

3. Pasar los términos en x a un miembro y los números al otro miembro.

4. Simplificar cada miembro.

5. Despejar la x. Se obtiene, así, la solución.

6. Comprobación: sustituir la solución en cada miembro de la ecuación inicial para comprobar que coinciden los resultados.

Esta secuencia no hay que tomarla como algo rígido, pues habrá ocasiones en que convenga empezar quitando paréntesis, simplificando… El entrenamiento y el sentido común te orientarán sobre cuándo conviene hacer una cosa u otra.

Ejemplo

Resolvamos la ecuación:

$$\frac{3x-1}{20} - \frac{2(x+3)}{5} = \frac{4x+2}{15} - 5$$

1 mín.c.m. (20, 5, 15) = 60

Se multiplican por 60 los dos miembros.

$$3(3x-1) - 24(x+3) =$$
$$= 4(4x+2) - 60 \cdot 5$$

2 ↓

$$9x - 3 - 24x - 72 = 16x + 8 - 300$$

3 ↓

$$9x - 24x - 16x = 8 - 300 + 3 + 72$$

4 ↓

$$-31x = -217$$

5 ↓

$x = \frac{-217}{-31}$. *Solución:* $x = 7$

6 ↓

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3 \cdot 7 - 1}{20} - \frac{2(7+3)}{5} = -3 \\ \frac{4 \cdot 7 + 2}{15} - 5 = 2 - 5 = -3 \end{array}\right\}$$

Coinciden. La solución es correcta.

Actividades

1 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $1 + \frac{x}{2} = x$

b) $\frac{1}{3} + x = \frac{x}{3} - 1$

c) $4 - \frac{3x}{5} = \frac{2}{5} + 3x$

d) $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} = x$

e) $\frac{1}{3} - \frac{x}{9} = 1$

f) $\frac{2x}{4} - 1 = \frac{x}{6}$

g) $4 = \frac{3x}{2} + \frac{2x}{5} + \frac{1}{5}$

h) $1 - \frac{x}{12} + \frac{x}{3} = \frac{5}{8} - \frac{x}{6}$

i) $\frac{2}{3} - \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3x}{4} + 1$

j) $\frac{3x}{15} - x = -\frac{3x}{3} + \frac{9}{5}$

k) $\frac{x}{3} + \frac{x}{9} - \frac{4x}{27} = \frac{11}{27} - \frac{x}{9}$

l) $\frac{x}{2} + \frac{x-3}{8} + \frac{2x+2}{16} = \frac{x-2}{2}$

m) $\frac{13+x}{20} - \frac{5x}{2} = \frac{10+x}{5} + \frac{1-12x}{10}$

n) $3x - \frac{x+3}{4} = 13$

o) $4 - \frac{x+2}{4} = x - 4$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

3 Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

Para despejar la x, se sigue un largo y complicado proceso que no vamos a ver aquí. El resultado final es la fórmula siguiente:

SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El doble signo (±) quiere decir que puede haber dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estas dos soluciones pueden reducirse a una o a ninguna, según los casos.

Ejemplo

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

es una ecuación de segundo grado, donde:

$$a = 3, \ b = -5, \ c = -2$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} =$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49 > 0$$

Por eso, esta ecuación tiene dos soluciones.

Número de soluciones

La expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación. El número de soluciones depende del signo de Δ:

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene **dos soluciones:**

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, solo hay **una solución:** $x = \frac{-b}{2a}$. Se llama **solución doble.**
- Si $\Delta < 0$, $\sqrt{\Delta}$ carece de sentido. La ecuación **no tiene solución.**

Actividades

1 Para cada una de estas ecuaciones, indica cuánto valen a, b y c. Resuélvelas aplicando la fórmula:

a) $x^2 - 4x - 5 = 0$ b) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

c) $-x^2 + x + 6 = 0$ d) $2x^2 - 7x - 4 = 0$

e) $x^2 - 10x + 25 = 0$ f) $x^2 - x + 2 = 0$

2 Completa esta tabla:

	a	b	c	¿TIENE SOLUCIÓN?	x_1	x_2
$5x^2 - 8x = 0$						
$x^2 - 64 = 0$						
$x^2 - 3x + 4 = 0$						
$4x^2 + x - 3 = 0$						

3 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ d) $5x^2 - 7x + 3 = 0$

e) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ f) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

g) $x^2 - 3x + 15 = 0$ h) $x^2 - 0{,}1x + 0{,}2 = 0$

4 Resuelve estas ecuaciones:

a) $x^2 + 4x - 21 = 0$ b) $x^2 + 9x + 20 = 0$

c) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ d) $x^2 + x + 3 = 0$

e) $4x^2 + 28x + 49 = 0$ f) $x^2 - 2x + 3 = 0$

g) $4x^2 - 20x + 25 = 0$ h) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ecuaciones incompletas

Las ecuaciones de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ en las que los coeficientes b o c son cero se llaman **incompletas:** $ax^2 + c = 0$ y $ax^2 + bx = 0$.

Aunque pueden resolverse aplicando la fórmula general, es posible encontrar sus soluciones de forma mucho más sencilla. Por ejemplo:

- $3x^2 - 75 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{75}{3} = 25 \rightarrow x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$
- $7x^2 + 14x = 0 \rightarrow x(7x + 14) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 7x + 14 = 0 \rightarrow x = -\frac{14}{7} = -2 \end{cases}$

Ecuaciones sin término en x, $ax^2 + c = 0$

Para resolver las ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$ no es necesario aplicar la fórmula general, pues se puede despejar x con toda sencillez:

$$x^2 = -\frac{c}{a} \rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Ecuaciones sin término independiente, $ax^2 + bx = 0$

Para resolver las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$ no es necesario aplicar la fórmula general, pues se puede sacar factor común la x e igualar a cero cada uno de los dos factores:

$$(ax + b) \cdot x = 0 \rightarrow \text{Soluciones: } x_1 = -\frac{b}{a},\ x_2 = 0$$

Ten en cuenta

- Si $x^2 = 25$, entonces $x = \pm 5$, pues 25 tiene dos raíces cuadradas, 5 y -5.
- Para que un producto de dos factores sea igual a cero, es necesario que sea 0 alguno de ellos:

$$x \cdot (7x + 14) = 0$$

$x = 0$ o bien $7x + 14 = 0$

Ejercicio resuelto

Resolver:

a) $2x^2 - 98 = 0$

b) $2x^2 + 98 = 0$

c) $5x^2 + 95x = 0$

a) $2x^2 - 98 = 0 \rightarrow 2x^2 = 98 \rightarrow x^2 = \frac{98}{2} = 49 \rightarrow x = \pm\sqrt{49} = \pm 7$

Las soluciones son $x_1 = 7$, $x_2 = -7$.

b) $2x^2 + 98 = 0 \rightarrow 2x^2 = -98 \rightarrow x^2 = -\frac{98}{2} = -49$

No tiene solución, porque el cuadrado de un número no puede ser negativo.

Es decir, $\sqrt{-49}$ no tiene sentido.

c) $5x^2 + 95x = 0 \rightarrow x(5x + 95) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 5x + 95 = 0 \rightarrow x_2 = -95/5 = -19 \end{cases}$

Actividades

5 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado sin utilizar la fórmula de resolución:

a) $3x^2 - 12x = 0$ b) $x - 3x^2 = 0$ c) $2x^2 - 5x = 0$ d) $2x^2 - 8 = 0$

e) $9x^2 - 25 = 0$ f) $4x^2 + 100 = 0$ g) $16x^2 = 100$ h) $3x^2 - 6 = 0$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Reglas para resolver ecuaciones de segundo grado

Ten en cuenta

- $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0)$ $\rightarrow$ Aplica la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- $ax^2 + c = 0$ $\rightarrow$ Despeja x^2…
- $ax^2 + bx = 0$ $\rightarrow$ Saca la x como factor común…

- Si la ecuación de segundo grado está completa (tiene todos sus términos), aplica la fórmula.
- Si es una ecuación incompleta, tal como hemos visto en el apartado anterior, podrás resolverla con facilidad sin aplicar la fórmula.
- Si tiene una fisonomía complicada, arréglala: quita denominadores, suprime paréntesis, agrupa términos y pásalos todos al primer miembro.

  Solo cuando esté simplificada, aplica uno de los consejos anteriores.
- Comprueba las soluciones. Si la ecuación proviene de un problema con enunciado, haz la comprobación sobre él, pues es posible que alguna de las soluciones carezca de sentido real.

Ejercicio resuelto

Resolver la ecuación siguiente: $\dfrac{x(x-1)}{3} = \dfrac{x(x+1)}{4} - \dfrac{3x+4}{12}$

- Quitamos denominadores multiplicando por el mínimo común múltiplo de ellos: mín.c.m. (3, 4, 12) = 12

$$4x(x-1) = 3x(x+1) - (3x+4)$$

- Quitamos paréntesis:

$$4x^2 - 4x = 3x^2 + 3x - 3x - 4$$

- Agrupamos los términos, pasándolos todos al primer miembro:

$$4x^2 - 3x^2 - 4x - 3x + 3x + 4 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

- Aplicamos la fórmula, teniendo en cuenta que $a = 1,\ b = -4,\ c = 4$:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

- Comprobamos que para $x = 2$, el valor que toma el primer miembro de la ecuación inicial coincide con el valor que toma el segundo miembro.

Actividades

6 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(3x + 4)(5x - 7) = (2x + 7)^2 + 53$

b) $(2x + 1)(x - 3) = (x + 1)(x - 1) - 8$

c) $(2x - 3)(2x + 3) - x(x + 1) - 5 = 0$

d) $(2x + 1)^2 = 4 + (x + 2)(x - 2)$

7 Resuelve:

a) $\dfrac{x^2 - 3x}{2} + 2 = \dfrac{x + 12}{6}$

b) $\dfrac{(5x - 4)(5x + 4)}{4} = \dfrac{(3x - 1)^2 - 9}{2}$

c) $\dfrac{(x - 1)^2 - 3x + 1}{15} + \dfrac{x + 1}{5} = 0$

©GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

4 Resolución de problemas con ecuaciones

Plantear una ecuación a partir de un problema es traducir a lenguaje algebraico las condiciones que ligan lo que se sabe con lo que se desea conocer. Conviene proceder de forma organizada, por lo que es útil dar estos pasos:

1. Identificar los datos conocidos y lo que deseamos conocer. Dar nombre a la incógnita.

2. Relacionar mediante una igualdad (ecuación) lo conocido con lo desconocido.

3. Resolver la ecuación.

4. Interpretar la solución ajustándola al enunciado.

Observación

En la próxima unidad, al estudiar sistemas de ecuaciones, podrás utilizar más de una incógnita. Verás que así se simplifica la tarea de traducir un enunciado a ecuaciones.

Problema resuelto

1. El precio de unos zapatos ha subido un 15% en diciembre y ha bajado un 20% en enero. De esta forma, el precio inicial ha disminuido en 6,96 €. ¿Cuál era el precio inicial?

1. Precio de los zapatos $\rightarrow x$

Con un aumento del 15% $\rightarrow 1{,}15x$

Con una rebaja del 20% $\rightarrow 0{,}8 \cdot 1{,}15x$

El que la diferencia entre los precios inicial y final es de 6,96 €, se traduce en la siguiente ecuación: $x - 0{,}92x = 6{,}96$

Resolvemos la ecuación: $0{,}08x = 6{,}96 \rightarrow x = 87$ €

El precio inicial de los zapatos era de 87 €.

Actividades

1 Si a un número se le quita su mitad y luego su tercera parte se obtiene 9. ¿Cuál es ese número?

☞ *La mitad de un número desconocido, x, es x/2 y su tercera parte, x/3.*

2 La base de un rectángulo es igual al doble de la altura disminuida en 4 cm y su perímetro es 100 cm. Halla la longitud de sus lados.

☞ *Si la altura es x, la base es 2x – 4.*

3 Divide 1 600 € en tres partes de modo que la segunda parte supere a la primera en 100 € y la tercera parte supere a la segunda en 200 €.

☞ *Completa esta tabla para organizar los datos:*

PRIMERA PARTE	SEGUNDA PARTE	TERCERA PARTE
x	$x + 100$	$x + 100 + \ldots$

4 Un padre de 37 años tiene dos hijos de 8 y 5 años. ¿Cuántos años tienen que pasar para que la suma de las edades de los hijos sea igual a la edad del padre?

☞ *Completa esta tabla para organizar los datos:*

	PADRE	HIJO 1	HIJO 2
EDAD HOY	37	8	5
EDAD DENTRO DE X AÑOS	$37 + x$	$8 + x$	...

5 Una madre tiene 42 años y su hijo, 15. ¿Cuántos años hace que la edad de la madre era cuatro veces la del hijo?

☞ *Completa esta tabla para organizar los datos:*

	MADRE	HIJO
EDAD HOY	42	15
EDAD HACE X AÑOS	$42 - x$	...

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Opera y calcula

Ecuaciones de primer grado

1 ▼▽▽ Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2(2 - 3x) - 3(3 - 2x) = 4(x + 1) + 3(4 - 5x)$

b) $\frac{x - 3}{5} = \frac{x + 1}{3} - 2$

c) $1 = \frac{x + 3}{3} - \frac{x}{2}$

d) $\frac{3x + 4}{5} = \frac{x + 2}{2}$

e) $\frac{5x - 16}{6} = -\frac{x + 8}{12} + \frac{x + 1}{3}$

f) $\frac{2x - 4}{3} = 3 - \frac{4 + x}{2}$

2 ▼▼▽ Comprueba que las siguientes ecuaciones son de primer grado y halla sus soluciones:

a) $(4x - 3)(4x + 3) - 4(3 - 2x)^2 = 3x$

b) $2x(x + 3) + (3 - x)^2 = 3x(x + 1)$

c) $(2x - 3)^2 + (x - 2)^2 = 3(x + 1) + 5x(x - 1)$

d) $\frac{x(x + 1)}{2} - \frac{(2x - 1)^2}{8} = \frac{3x + 1}{4} - \frac{1}{8}$

Ecuaciones de segundo grado

3 ▼▽▽ Resuelve:

a) $7x^2 - 28 = 0$ b) $7x^2 + 28 = 0$

c) $4x^2 - 9 = 0$ d) $3x^2 + 42x = 0$

e) $3x^2 = 42x$ f) $11x^2 - 37x = 0$

g) $2(x + 5)^2 + (x - 3)^2 = 14(x + 4)$

h) $7x^2 + 5 = 68$

4 ▼▼▽ Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{x}{3}(x - 1) - \frac{x}{4}(x + 1) + \frac{3x + 4}{12} = 0$

b) $\frac{(x - 1)(x + 2)}{12} - \frac{(x + 1)(x - 2)}{6} - 1 = \frac{x - 3}{3}$

c) $\frac{x + 1}{2} - \frac{(x - 1)^2}{4} - \frac{x + 2}{3} + \frac{(x - 2)^2}{6} = \frac{1}{6}$

Aplica lo aprendido

5 ▼▽▽ He pagado 14,30 € por un bolígrafo, un cuaderno y una carpeta. Si el precio de la carpeta es 5 veces el del cuaderno y este cuesta el doble que el bolígrafo, ¿cuál es el precio de cada artículo?

6 ▼▽▽ Álvaro y Yago han comprado dos videojuegos que tenían el mismo precio, pero han conseguido una rebaja del 16% y del 19%, respectivamente.

Si Álvaro pagó 1,26 € más que Yago, ¿cuál era el precio que tenía el videojuego?

7 ▼▽▽ Con 3,5 € más del dinero que tengo, podría comprar la camiseta de mi equipo. Si tuviera el doble, me sobrarían 7,25 €.

¿Cuánto dinero tengo?

8 ▼▽▽ Si al cuadrado de un número le restamos su triple, obtenemos 130.

¿Cuál es el número?

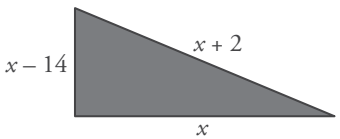
9 ▼▽▽ Halla dos números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados es 145.

10 ▼▽▽ Halla tres números enteros consecutivos tales que la diferencia entre el cuadrado del mayor y el menor sea igual al producto del menor por el intermedio aumentado en cuatro unidades.

11 ▼▽▽ La tercera parte del cuadrado de un número entero, sumado a la quinta parte del mismo número, da como resultado 78. Halla dicho número.

12 ▼▽▽ La superficie de un rectángulo es 494 cm^2. Halla sus dimensiones sabiendo que una es 7 cm más larga que la otra.

13 ▼▽▽ En un triángulo rectángulo, un cateto mide 2 cm menos que la hipotenusa y 14 cm más que el otro cateto. Calcula la longitud de los tres lados.



©GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Resuelve problemas

14 ▼▼▽ **Ejercicio resuelto**

De los socios de un club deportivo:

- **Los 2/5 juegan al fútbol.**
- **1/3 de los que quedan juega al baloncesto.**
- **28 se dedican al balonmano.**
- **Y aún queda 1/6 que hacen atletismo.**

¿Cuántos socios son?

Llamamos x al número de socios del club.

- $\frac{2}{5}x$ juegan al fútbol → quedan $\frac{3}{5}x$
- $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}x = \frac{1}{5}x$ juega a baloncesto → quedan $\frac{2}{5}x$
- $\frac{2}{5}x - 28$ son los que hacen atletismo.

Por tanto, $\frac{2}{5}x - 28 = \frac{1}{6}x$. Resolvemos:

$12x - 840 = 5x \rightarrow x = 120$ son los socios del club.

15 ▼▽▽ Del dinero de una cuenta bancaria retiramos 1/7; ingresamos después 2/15 de lo que quedó y aún faltan 12 € para tener la cantidad inicial.

¿Cuánto dinero había en la cuenta?

16 ▼▼▽ Dos hermanas se llevan 3 años y su padre tiene 45. Hace 7 años, la suma de las edades de las hijas era la mitad que la del padre. ¿Qué edad tiene cada hija?

EDAD	HOY	HACE 7 AÑOS
HIJA MENOR	x	$x - 7$
HIJA MAYOR	$x + 3$	$x + 3 - 7$
PADRE	45	38

17 ▼▼▽ Un padre de 43 años tiene dos hijos de 9 y 11 años. ¿Cuántos años han de transcurrir para que entre los dos hijos igualen la edad del padre?

18 ▼▼▽ La edad actual de un padre es el triple que la de su hijo y dentro de 14 años será el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?

19 ▼▼▽ Un repostero ha mezclado 12 kg de azúcar de 1,10 €/kg con cierta cantidad de miel de 4,20 € el kilo. La mezcla sale a 2,34 €/kg. ¿Cuánta miel puso?

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE (€)
AZÚCAR	12	1,10	$1,10 \cdot 12 = 13,20$
MIEL	x	4,20	$4,20x$
MEZCLA	$12 + x$	2,34	$2,34(12 + x)$

COSTE DEL AZÚCAR + COSTE DE LA MIEL = COSTE DE LA MEZCLA

20 ▼▼▽ ¿Cuántos litros de aceite de orujo de 1,6 €/l tenemos que añadir a 60 l de aceite de oliva de 2,8 €/l para obtener una mezcla de 2,5 €/l?

Autoevaluación

1 Busca por tanteo una solución exacta de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $(x + 1)^3 = 64$

b) $\sqrt{x + 80} = 11$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x - 2(x + 3) = x - 3(x + 1)$

b) $\frac{x - 3}{5} = \frac{x + 1}{3} - 2$

3 Resuelve estas ecuaciones: a) $x^2 - 5x = 0$

b) $2x^2 - 50 = 0$ c) $2x^2 - 3x - 2 = 0$

4 Juan tiene 5 años más que Sandra. Dentro de 3 años, la edad de Juan será el doble de la de Sandra. ¿Qué edad tiene cada uno?

5 La altura de un rectángulo mide 5 m menos que su base, y su área es igual a 40 m^2. Calcula la medida de los lados del rectángulo.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

6 Sistemas de ecuaciones

El desarrollo de la resolución de sistemas de ecuaciones se hizo a la par que el de las ecuaciones.

Los babilonios plantearon y resolvieron, entre otras cosas, sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas a las que llamaban *longitud*, *anchura*, *área*, *volumen*..., aunque el problema no tuviera nada que ver con cuestiones geométricas. En una de sus tablillas aparece el siguiente problema:

$$1/4\ \textit{anchura} + \textit{longitud} = 7\ \textit{manos}$$

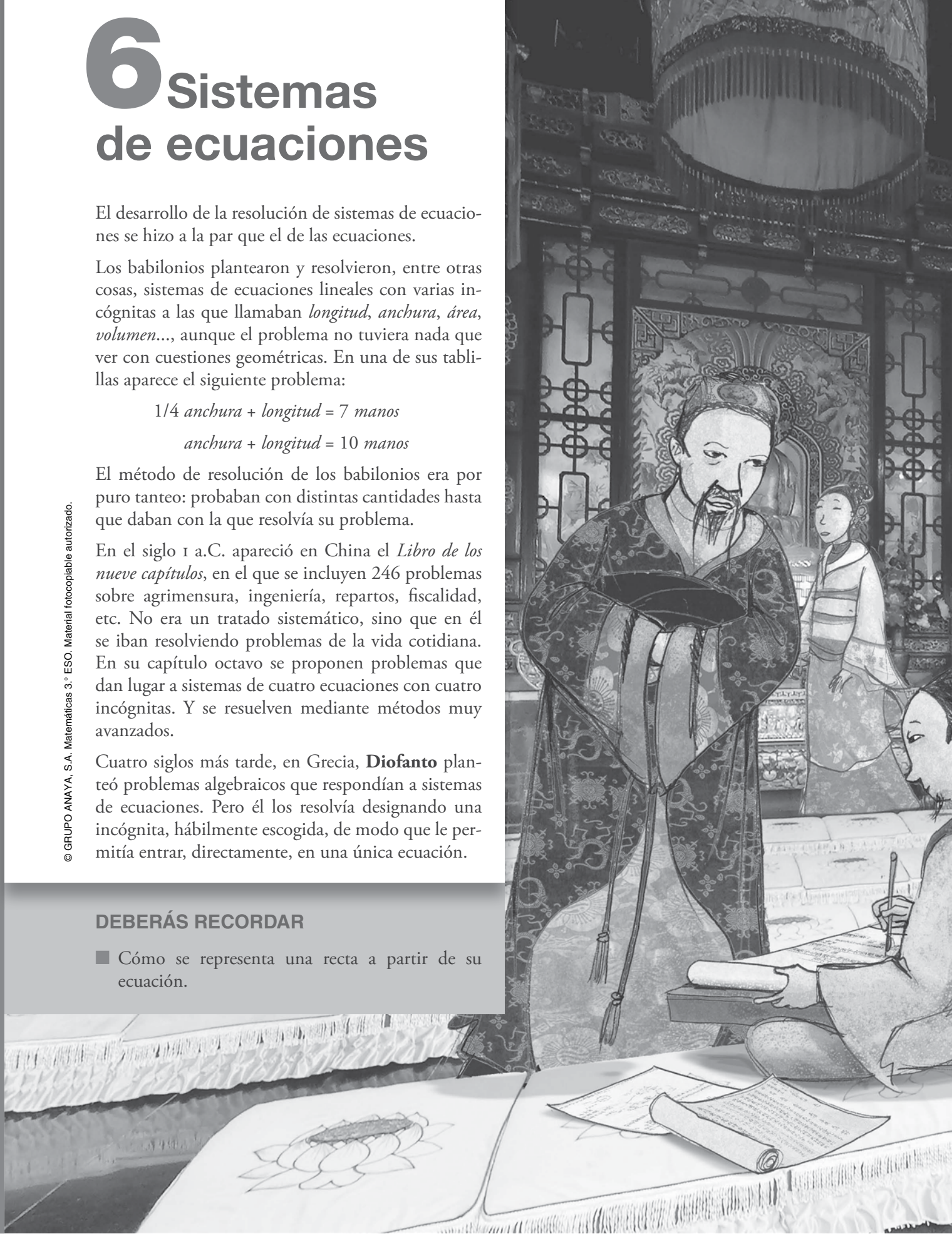
$$\textit{anchura} + \textit{longitud} = 10\ \textit{manos}$$

El método de resolución de los babilonios era por puro tanteo: probaban con distintas cantidades hasta que daban con la que resolvía su problema.

En el siglo I a.C. apareció en China el *Libro de los nueve capítulos*, en el que se incluyen 246 problemas sobre agrimensura, ingeniería, repartos, fiscalidad, etc. No era un tratado sistemático, sino que en él se iban resolviendo problemas de la vida cotidiana. En su capítulo octavo se proponen problemas que dan lugar a sistemas de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Y se resuelven mediante métodos muy avanzados.

Cuatro siglos más tarde, en Grecia, **Diofanto** planteó problemas algebraicos que respondían a sistemas de ecuaciones. Pero él los resolvía designando una incógnita, hábilmente escogida, de modo que le permitía entrar, directamente, en una única ecuación.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.° ESO. Material fotocopiable autorizado.



DEBERÁS RECORDAR

- Cómo se representa una recta a partir de su ecuación.

1 Ecuaciones con dos incógnitas. Soluciones

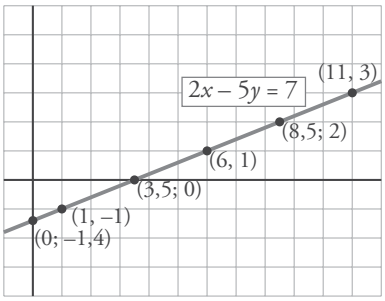
Nomenclatura

A las incógnitas se las suele designar con las letras x, y. Sin embargo, pueden usarse otras, como t y v (para *tiempo* y *velocidad*).

En esta unidad vamos a tratar con ecuaciones lineales con dos incógnitas. Por ejemplo, $2x - 3y = 3$ es una ecuación lineal con dos incógnitas, x e y. El par de valores $x = 6$, $y = 3$ es solución de esta ecuación porque $2 \cdot 6 - 3 \cdot 3$ es igual a 3. También son soluciones $x = 3$, $y = 1$ o $x = 9$, $y = 5$.

Solución de una ecuación con dos incógnitas es todo par de valores que hacen cierta la igualdad. Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

Representación gráfica



Para obtener soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas, se despeja una de ellas y se le dan valores a la otra:

$$2x - 5y = 7 \rightarrow y = \frac{2x - 7}{5} \rightarrow$$

x	1	3,5	6	8,5	11	0
y	–1	0	1	2	3	–1,4

Si las soluciones se interpretan como puntos del plano, entonces **la ecuación se representa mediante una recta** y sus soluciones son los puntos de esta. Por eso, una solución como $x = 6$, $y = 1$ se designa también así: (6, 1).

Entrénate

1 ¿Es $x = 5$, $y = 1$ solución de la ecuación lineal $3x - 5y = 10$? ¿Y $x = 0$, $y = -2$?

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $3x - 5y = 10$?

2 Representa las siguientes ecuaciones en los mismos ejes:

$5x - 2y = 0$ $\quad 8x - 3y = 1$

Para ello:

- Despeja y.
- Da valores a x para obtener los correspondientes de y.

3 ¿Tienen algún punto en común las dos ecuaciones del ejercicio anterior? ¿Cuál?

Ejercicio resuelto

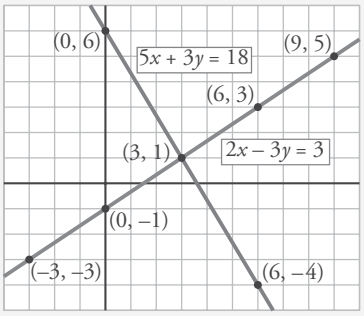
Representar las rectas siguientes: $2x - 3y = 3$ $\quad 5x + 3y = 18$

$$2x - 3y = 3 \rightarrow y = \frac{2x - 3}{3}$$

x	–3	0	3	6	9	…
y	–3	–1	1	3	5	…

$$5x + 3y = 18 \rightarrow y = \frac{18 - 5x}{3}$$

x	0	1	2	3	6	…
y	6	13/3	8/3	1	–4	…



El punto donde se cortan las rectas, (3, 1), es la solución común de ambas ecuaciones: $x = 3$, $y = 1$.

Actividades

1 Comprueba si cada uno de los pares de valores siguientes es solución de la ecuación $4x - 3y = 12$:

a) $x = 6$, $y = 4$ $\quad$ b) $x = 6$, $y = 12$ $\quad$ c) $x = 0$, $y = -4$

2 Representa las rectas de ecuaciones:

$2x - y = 6$ $\quad x + y = 0$

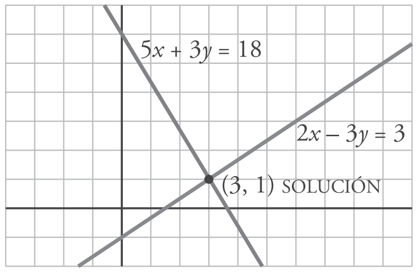
¿Cuál es la solución común a ambas ecuaciones?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

2 Sistemas de ecuaciones

Dos ecuaciones forman un **sistema de ecuaciones** cuando lo que pretendemos de ellas es encontrar su solución común.

Se llama **solución** de un sistema de ecuaciones a la solución común a ambas.



La solución de un sistema de ecuaciones lineales es el punto donde se cortan las dos rectas.

Si las dos ecuaciones del ejercicio resuelto de la página anterior las tomamos como sistema de ecuaciones, las pondremos del siguiente modo:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 5x + 3y = 18 \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = 3$, $y = 1$, porque es solución de ambas ecuaciones.

A veces, en lugar de decir **sistema de ecuaciones** diremos, simplemente, **sistema.**

Ejercicio resuelto

Estudiar si alguno de los pares $x = -3$, $y = 5$ y $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$ es solución de cada uno de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \mathbf{5x + 6y = 15} \\ \mathbf{3x + 4y = 8} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{3x - \quad y = -14} \\ \mathbf{9x + 10y = 23} \end{cases}$

Recuerda que un par x e y es solución de un sistema cuando lo es de ambas ecuaciones.

a) $\begin{cases} 5x + 6y = 15 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$

- $x = -3,\ y = 5$: $\begin{cases} -15 + 30 = 15 & \textbf{SÍ} \\ -9 + 20 = 11 & \textbf{NO} \end{cases}$ NO ES SOLUCIÓN.
- $x = 2,\ y = \frac{1}{2}$: $\begin{cases} 10 + 3 = 13 & \textbf{NO} \\ 6 + 2 = 8 & \textbf{SÍ} \end{cases}$ NO ES SOLUCIÓN.

b) $\begin{cases} 3x - \quad y = -14 \\ 9x + 10y = 23 \end{cases}$

- $x = -3,\ y = 5$: $\begin{cases} -9 - 5 = -14 & \textbf{SÍ} \\ -27 + 50 = 23 & \textbf{SÍ} \end{cases}$ SÍ ES SOLUCIÓN.
- $x = 2,\ y = \frac{1}{2}$: $\begin{cases} 6 - 1/2 = 11/2 & \textbf{NO} \\ 18 + 5 = 23 & \textbf{SÍ} \end{cases}$ NO ES SOLUCIÓN.

Entrénate

1 ¿Es el par de valores $x = 1$, $y = -1$ solución de este sistema de ecuaciones?

$$\begin{cases} 7x - 20y = 14 \\ 9x + 10y = 18 \end{cases}$$

$7 \cdot 1 - 20 \cdot (-1) = \ldots$

$9 \cdot 1 + 10 \cdot (-1) = \ldots$

2 Comprueba, de igual manera, si el par de valores $x = 2$, $y = 0$ es o no solución del sistema del ejercicio anterior:

$7 \cdot 2 - 20 \cdot 0 = \ldots$

$9 \cdot 2 + 10 \cdot 0 = \ldots$

Actividades

1 Di si alguno de los pares $x = -1$, $y = 4$ y $x = 7$, $y = 8$ es solución de cada uno de los siguientes sistemas:

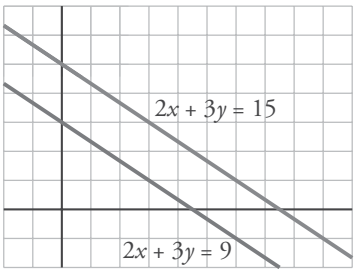
a) $\begin{cases} -6x + 5y = 26 \\ x - 2y = -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + 4y = 18 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + y = 43 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = -1 \end{cases}$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

3 Número de soluciones de un sistema lineal

En general, un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene una única solución, el punto donde se cortan las dos rectas. Sin embargo, no siempre ocurre esto. Veamos, a continuación, los demás casos que pueden darse.

Sistemas sin solución



Sistema incompatible. Gráficamente, son dos rectas paralelas. No tienen ningún punto común.

Hay sistemas cuyas ecuaciones dicen cosas contradictorias. Por ejemplo:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 4x + 6y = 18 \end{cases}$

En ambos casos es imposible conseguir que las dos igualdades sean ciertas para los mismos valores de x y de y:

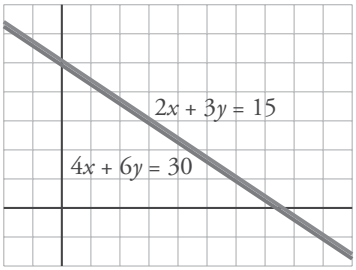
En a), si $2x + 3y$ es igual a 15, no puede ser, a la vez, igual a 9.

En b), como $4x + 6y$ es el doble de $2x + 3y$, debería ser igual a 30 y no a 18.

Se dice que estos sistemas son incompatibles.

Los sistemas que no tienen solución se llaman **incompatibles.** Gráficamente, son dos rectas paralelas: no tienen ningún punto en común.

Sistemas con infinitas soluciones



Sistema indeterminado. Gráficamente, es dos veces la misma recta. Todos sus puntos coinciden.

Hay sistemas cuyas dos ecuaciones dicen lo mismo. Es decir, son dos veces la misma ecuación. Por ejemplo:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 4x + 6y = 30 \end{cases}$

Las soluciones del sistema son las de cualquiera de las dos ecuaciones. Como sabemos, una ecuación con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

Estos sistemas se llaman indeterminados.

Los sistemas que tienen infinitas soluciones se llaman **indeterminados.** Gráficamente, son dos rectas coincidentes: todos sus puntos son comunes.

Actividades

1 Fijándote en sus ecuaciones, di cuál de estos sistemas tiene una solución, cuál es incompatible y cuál indeterminado. Compruébalo representando las rectas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

2 Completa estos sistemas para que el primero tenga la solución $x = 6$, $y = -1$, el segundo sea incompatible, y el tercero y el cuarto sean indeterminados:

a) $\begin{cases} x - 4y = \ldots \\ 2x - y = 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x + 2y = \ldots \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x \ldots = 16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x + 11y = 3 \\ \ldots + 33y = 9 \end{cases}$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

4 Resolución de sistemas

Método de sustitución

Este método de resolución de un sistema de ecuaciones consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y **sustituirla** en la otra.

En la práctica, al aplicar este método, solo se escribe en cada paso la ecuación que se transforma, en lugar de escribir el sistema completo cada vez. Describamos los pasos que conviene dar para aplicar este método:

① Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.

② Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.

③ Se resuelve esta ecuación.

④ El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.

⑤ Se ha obtenido, así, la solución.

Ejercicio resuelto

Resolver por el método de sustitución este sistema: $\begin{cases} \mathbf{3x + 2y = 18} \\ \mathbf{x - 3y = -5} \end{cases}$

① Despejamos la x en la 2.ª ecuación: $x = 3y - 5$

② Sustituimos esta expresión de la x en la 1.ª: $3(3y - 5) + 2y = 18$

③ Resolvemos la ecuación resultante:

$9y - 15 + 2y = 18 \rightarrow 11y = 33 \rightarrow y = 3$

④ Sustituimos el valor de y en $x = 3y - 5 \rightarrow x = 3 \cdot 3 - 5 = 4$

⑤ Se ha obtenido la solución: $x = 4$, $y = 3$

Comprueba que la solución es correcta sustituyendo en el sistema original la x y la y por los valores obtenidos.

Entrénate

1 Resuelve este sistema paso a paso:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 6 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$

①Despeja x en la 2.ª ecuación (es la más sencilla de despejar):

$x - 3y = 2 \rightarrow x = \square + \square y$

②Sustituye esta expresión de la x en la 1.ª ecuación:

$2 \cdot (\square + 3y) - 5y = \square$

③Resuelve la ecuación resultante:

$y = \square$

④Sustituye el valor de y en la igualdad que obtuviste en el paso ①, y calcula el valor de x:

$x = 2 + 3 \cdot \square \rightarrow x = \square$

⑤*Solución*: $x = \square$, $y = \square$

2 Resuelve este sistema paso a paso:

$$\begin{cases} 5x + y = 1 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$$

①Despeja y en la 1.ª ecuación.

②Sustituye el resultado en la 2.ª ecuación.

③Resuelve: $x = \square$

④Sustituye el valor de x en la igualdad del paso ①, y calcula el valor de y.

⑤*Solución*: $x = \square$, $y = \square$

Actividades

1 Resuelve estos sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ 4x - 3y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

2 Resuelve:

a) $\begin{cases} 5x + 6y = 2 \\ 4x - y = 19 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 4x - 3y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 8y = 1 \\ 5x - 2y = -6 \end{cases}$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

5 Resolución de problemas mediante sistemas

Al traducir a lenguaje algebraico un problema algo complejo, suele ser más sencillo recurrir a un sistema de ecuaciones que a una única ecuación con una incógnita. Veamos los pasos que conviene dar:

① Identificar los elementos que intervienen y nombrar las incógnitas.

② Expresar mediante ecuaciones las relaciones existentes.

③ Resolver el sistema de ecuaciones resultante.

④ Interpretar la solución ajustándola al enunciado.

Ejercicio resuelto

He pagado 55,72 € por una camiseta y un pantalón que costaban 70 € entre los dos. La camiseta tenía un 18% de descuento y el pantalón, un 22%. ¿Cuál era el precio original de cada artículo?

① Identificamos los elementos y nombramos las incógnitas.

Con un 18% de descuento, pagamos $100 - 18 = 82\%$.

Con un 22% de descuento, pagamos $100 - 22 = 78\%$.

Por tanto:

	CAMISETA	PANTALÓN
PRECIO ORIGINAL	x	y
PRECIO CON REBAJA	$0{,}82x$	$0{,}78y$

② Expresamos mediante ecuaciones la información del problema. $\begin{cases} x + y = 70 \\ 0{,}82x + 0{,}78y = 55{,}72 \end{cases}$

③ Resolvemos el sistema de ecuaciones: $x = 70 - y$

$0{,}82(70 - y) + 0{,}78y = 55{,}72 \rightarrow 57{,}4 - 0{,}82y + 0{,}78y = 55{,}72 \rightarrow -0{,}04y = -1{,}68 \rightarrow y = 42;\ x = 70 - 42 = 28$

④ Interpretamos la *solución:* el precio original de la camiseta era de 28 € y el del pantalón, de 42 €.

Entrénate

1 Un examen tipo test consta de 50 preguntas y hay que contestar a todas. Por cada acierto se obtiene un punto y por cada fallo se restan 0,5 puntos. Si mi nota ha sido 24,5 puntos, ¿cuántos aciertos y cuántos fallos he tenido?

- Identifica los elementos y nombra las incógnitas:

  Aciertos: x Fallos: y

  Puntos obtenidos por aciertos: x

  Punto restados por fallos: $0{,}5y$

- Expresa mediante ecuaciones la información del problema:

$$\begin{cases} x + y = \square \\ x - 0{,}5y = \square \end{cases}$$

Resuelve el sistema e interpreta la solución.

2 La suma de dos números es 31 y su diferencia es 5. ¿Cuáles son esos números?

$$\begin{cases} x + y = \square \\ x - y = \square \end{cases}$$

Actividades

1 Daniel pagó un día por 3 hamburguesas y 2 refrescos 6,3 €. Otro día, por 2 hamburguesas y 4 refrescos pagó 6,6 €. ¿Cuál es el precio de una hamburguesa? ¿Y el de un refresco?

☞ *Si x es el precio de una hamburguesa e y el de un refresco, 3 hamburguesas y 2 refrescos costarán $3x + 2y$.*

2 En un test de 50 preguntas, dan 0,8 puntos por cada acierto y quitan 0,4 puntos por cada error. Si Ana ha obtenido 22 puntos contestando a todas las preguntas, ¿cuántas ha contestado bien y cuántas mal?

3 Por un pantalón y unos zapatos, que costaban 70 € entre los dos, he pagado 50,8 €. Halla el precio inicial de cada artículo sabiendo que en el pantalón me han rebajado un 20% y en los zapatos un 30%.

4 En una fábrica de chocolate han empaquetado los 1200 bombones en cajas de 1 docena y de 2 docenas. En total se han utilizado 60 cajas. Calcula cuántas han sido de 1 docena y cuántas de 2 docenas.

☞ *En x cajas de 1 docena entran $12x$ bombones. ¿Cuántos bombones entran en y cajas de 2 docenas?*

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Solución de un sistema de ecuaciones

1 ▼▽▽ Comprueba si $x = 2$, $y = -1$ es solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ 5x + y = -10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y = 10 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$

2 ▼▽▽ Completa los dos sistemas de ecuaciones para que ambos tengan como solución el par de valores $x = 3$, $y = -1/2$:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = \ldots \\ x - 4y = \ldots \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x}{2} + y = \ldots \\ x - y = \ldots \end{cases}$

3 ▼▽▽ a) Busca dos soluciones de la ecuación $3x - y = 1$.

b) Representa gráficamente la recta $3x - y = 1$.

c) Un punto cualquiera de la recta, ¿es solución de la ecuación?

4 ▼▽▽ a) Representa en los mismos ejes dos rectas cuyas ecuaciones son:

$2x + y = 3$ $x - y = 3$

b) Di cuál es la solución de este sistema:

$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$

c) ¿Tienen estos sistemas la misma solución?

S: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$ S': $\begin{cases} y + 1 = 0 \\ 3x - 4y = 10 \end{cases}$

Resolución de sistemas de ecuaciones

5 ▼▽▽ Resuelve, por el método de sustitución, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x + 3y = 0 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 9y = 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 4y = 11 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases}$

6 ▼▽▽ Resuelve gráficamente los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 3x + y = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ x + 8y = -2 \end{cases}$

7 ▼▽▽ Resuelve por sustitución.

a) $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x - 3y = -25 \\ x - 5y = -17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x - y = -6 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 16 = 2y \\ 2y - 3x = 16 \end{cases}$

Aplica lo aprendido

8 ▼▽▽ Halla dos números tales que su suma sea 160, y su diferencia, 34.

9 ▼▽▽ En una granja hay conejos y gallinas. Hemos contado 26 cabezas y 62 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay?

☞ *Si hay x conejos habrá $4x$ patas de conejo…*

10 ▼▽▽ Busca una fracción que sea igual a 2 si se le suman 11 unidades al numerador, y que sea igual a 1 si se le restan 4 unidades al denominador.

11 ▼▽▽ María tiene ciruelas en dos fruteros. Si pasa 2 del primero al segundo, ambos tendrán el mismo número de ciruelas; pero si pasa 3 del segundo al primero, el segundo tendrá la mitad de ciruelas que el primero. ¿Cuántas ciruelas hay en cada frutero?

☞

	FRUTERO 1	FRUTERO 2
NÚMERO DE CIRUELAS	x	y
NÚMERO DE CIRUELAS	$x - 2$	$y + 2$
NÚMERO DE CIRUELAS	$x + 3$	$y - 3$

12 ▼▽▽ Halla dos números cuya suma sea 40 y tales que al dividir el mayor entre el menor nos dé 2 de cociente y 1 de resto.

☞ *Sabes que dividendo = divisor · cociente + resto. Escribe esta igualdad llamando x al dividendo e y al divisor.*

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

13 ▼▽▽ El perímetro de un rectángulo es 36 cm. Si al lado mayor le sumamos 2 cm y al menor le restamos 4 cm, el perímetro del nuevo rectángulo es 32 cm. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?

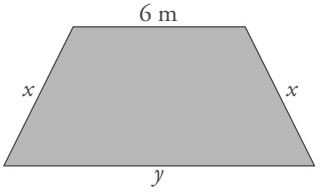
☞ *Si llamamos x e y a los iniciales, los nuevos lados medirán $x + 2$ e $y - 4$.*

14 ▼▽▽ Por dos bolígrafos y tres cuadernos he pagado 7,80 €; por cinco bolígrafos y cuatro cuadernos, pagué 13,20 €. ¿Cuál es el precio de un bolígrafo? ¿Y de un cuaderno?

15 ▼▽▽ Un librero ha vendido 45 libros, unos a 32 € y otros a 28 €. Obtuvo por la venta 1 368 €. ¿Cuántos libros vendió de cada clase?

16 ▼▽▽ Una cooperativa ha envasado 2 000 *l* de aceite en botellas de 1,5 *l* y 2 *l*. Si ha utilizado 1 100 botellas, ¿cuántas se han necesitado de cada clase?

17 ▼▽▽ Si la base mayor es la suma de los lados oblicuos y el perímetro es 38 m, ¿cuánto mide cada lado?



18 ▼▽▽ Los alumnos de un centro escolar son 420 entre ESO y Bachillerato. El 42% de ESO y el 52% de Bachillerato son chicas, lo que supone un total de 196 mujeres. Calcula cuántos estudiantes hay en ESO y cuántos en Bachillerato.

Resuelve problemas

19 ▼▼▽ La suma de las edades de una madre y su hijo es 56 años. Hace 10 años, la edad de la madre era el quíntuple de la edad que tenía el hijo. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

☞

	MADRE	HIJO
EDAD HOY	x	y
EDAD HACE 10 AÑOS	$x - 10$	$y - 10$

20 ▼▼▽ Hace tres años, la edad de Nuria era el doble de la de su hermana Marta. Dentro de 7 años, será los 4/3 de la que entonces tenga Marta. Calcula la edad actual de cada una.

☞

	NURIA	MARTA
EDAD HOY	x	y
EDAD HACE 3 AÑOS	$x - 3$	$y - 3$
EDAD DENTRO DE 7 AÑOS	$x + 7$	$y + 7$

21 ▼▼▽ Hemos mezclado aceite de oliva de 3,5 €/*l* con aceite de girasol de 2 €/*l* para obtener 50 *l* de mezcla a 3,08 €/*l*. Calcula la cantidad de aceite de oliva y de aceite de girasol que hemos mezclado.

☞

	CANTIDAD (*l*)	PRECIO (€/*l*)	COSTE (€)
OLIVA	x	3,5	$3{,}5x$
GIRASOL	y	2	$2y$
MEZCLA	50	3,08	$3{,}08 \cdot 50$

Autoevaluación

1 a) Busca tres soluciones de la ecuación $2x - y = 3$.

b) Dibuja en los mismos ejes estas dos ecuaciones:

$2x - y = 3$ $\quad$ $x + y = 0$

¿Cuál es la solución del sistema que forman?

2 ¿Cuál de los sistemas siguientes no tiene solución y cuál tiene infinitas soluciones?

a) $\begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 9 \end{cases}$

3 Resuelve: a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

4 Para pagar un bocadillo que costaba 3 €, he utilizado nueve monedas de 20 céntimos y de 50 céntimos. ¿Cuántas monedas de cada clase he utilizado?

5 He pagado 83 € por una cazadora y unos deportivos. En la cazadora me han rebajado el 20%, y en los deportivos, el 10%, y así me he ahorrado 17 €. ¿Cuáles eran los precios sin rebajar?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

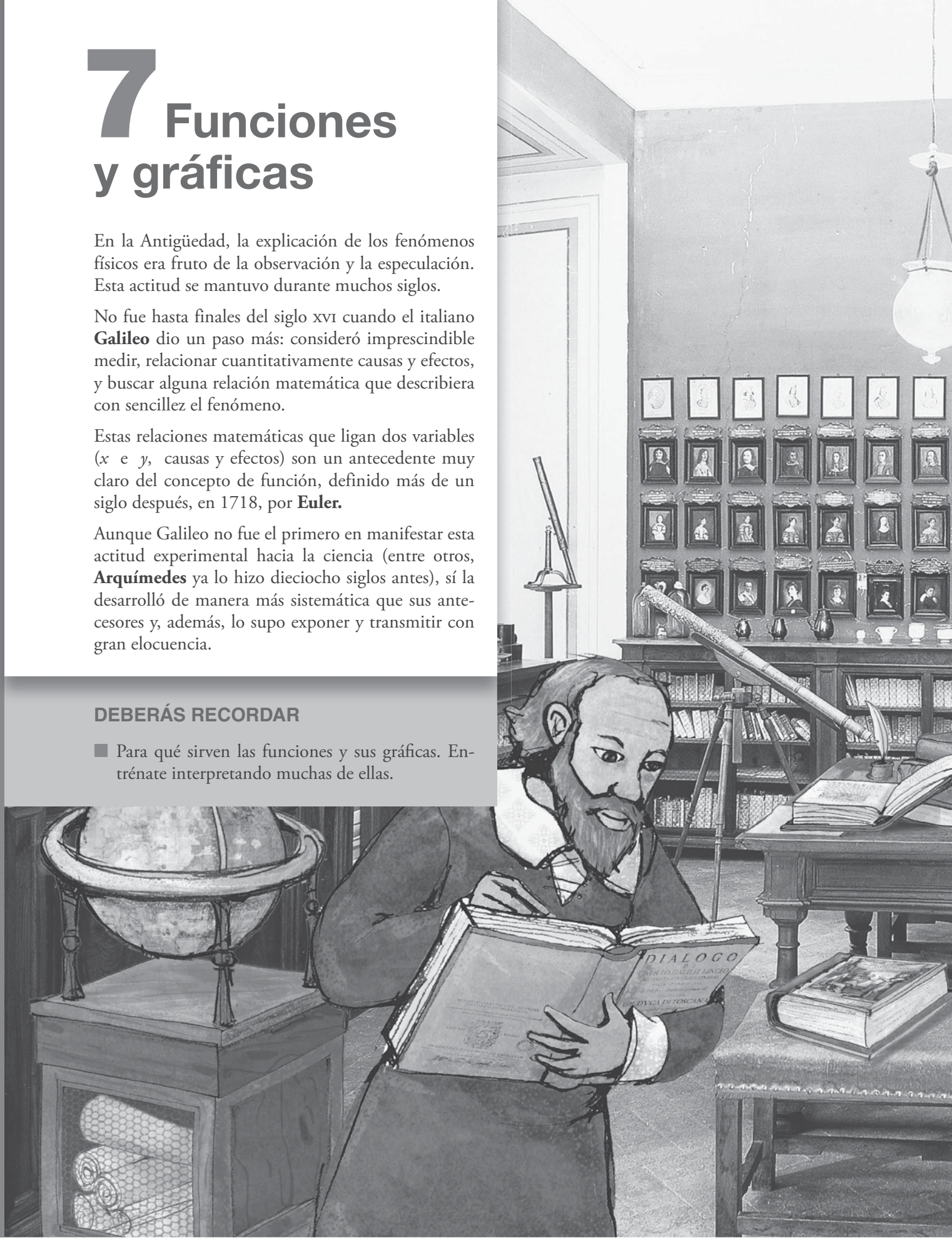
7 Funciones y gráficas

En la Antigüedad, la explicación de los fenómenos físicos era fruto de la observación y la especulación. Esta actitud se mantuvo durante muchos siglos.

No fue hasta finales del siglo XVI cuando el italiano **Galileo** dio un paso más: consideró imprescindible medir, relacionar cuantitativamente causas y efectos, y buscar alguna relación matemática que describiera con sencillez el fenómeno.

Estas relaciones matemáticas que ligan dos variables (x e y, causas y efectos) son un antecedente muy claro del concepto de función, definido más de un siglo después, en 1718, por **Euler.**

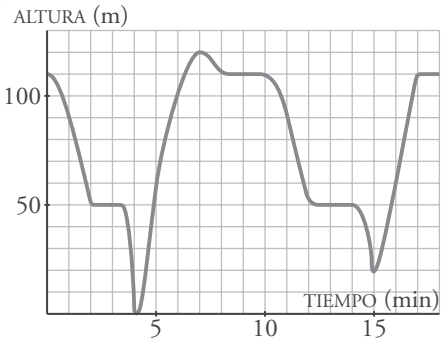
Aunque Galileo no fue el primero en manifestar esta actitud experimental hacia la ciencia (entre otros, **Arquímedes** ya lo hizo dieciocho siglos antes), sí la desarrolló de manera más sistemática que sus antecesores y, además, lo supo exponer y transmitir con gran elocuencia.



DEBERÁS RECORDAR

- Para qué sirven las funciones y sus gráficas. Entrénate interpretando muchas de ellas.

1 Las funciones y sus gráficas



tiempo (*t*) → *altura* (*a*)

Un equipo de naturalistas observa un águila: sale de su nido, caza un conejo, regresa a su nido, vuelve a salir, caza una paloma y, de nuevo, vuelve a su nido.

Observando atentamente la gráfica que han dibujado, se pueden averiguar muchas cosas: altura del nido, altura a la que suele otear para buscar caza, momento en que consigue dar caza a cada una de sus presas…

Dos variables, dos ejes

La gráfica que describe el vuelo del águila relaciona dos variables:

- El tiempo que ha transcurrido desde que comenzó la observación, *t*. Es la **variable dependiente.**
- La altura a la que se encuentra el águila, *a*. Es la **variable independiente.**

La representación se ha hecho en un diagrama cartesiano:

- En el **eje horizontal** o **eje de abscisas,** el tiempo, *t*.
- En el **eje vertical** o **eje de ordenadas,** la altura, *a*.

Cada punto de la gráfica representa un *tiempo* y una *altura*, y significa que en ese instante el águila está a esa altura.

Analizando la gráfica apreciamos las subidas y bajadas del águila en su vuelo, y podríamos describirlas con cierto detalle.

Escalas

En cada eje hay una **escala:**

- En el eje horizontal, un cuadrito significa 1 minuto.
- En el eje vertical, un cuadrito significa 10 metros.

Las escalas en los ejes nos permiten no solo describir cualitativamente el comportamiento, sino también cuantificarlo. Por ejemplo: la altura máxima alcanzada durante la observación es de 120 m y eso ocurre a los 7 minutos.

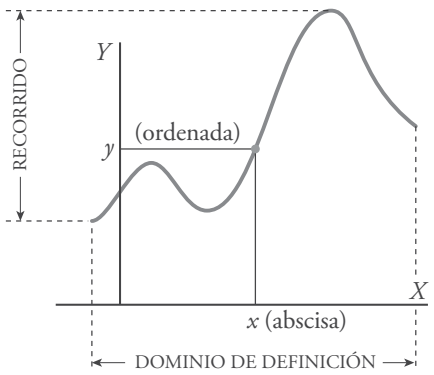
Dominio de definición y recorrido

La gráfica del vuelo del águila se extiende en el tramo 0-18. Solo tenemos información del comportamiento del águila en este intervalo de tiempo.

El intervalo 0-18 se llama **dominio de definición** de la función.

La altura a la que se encuentra el águila oscila entre 0 m y 120 m.

Al tramo 0-120 se le llama **recorrido** de la función.



Función

Una **función** es una relación entre dos variables a las que, en general, llamaremos *x* e *y*.

La función asocia a cada valor de *x* **un único** valor de *y*.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Actividades

1 Observa la gráfica de la página anterior. Responde:

a) ¿A qué altura se encuentra el nido?

b) ¿A qué altura estaba el águila a los cinco minutos de empezar la observación?

c) ¿Desde qué altura otea para buscar caza?

d) ¿En qué instante caza al conejo?

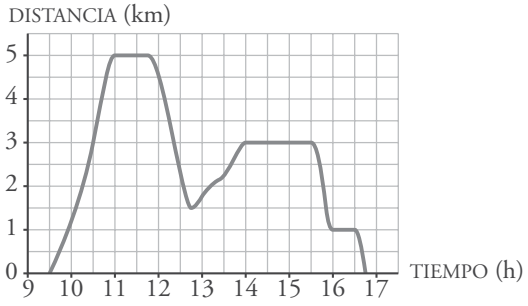
e) ¿Cuánto tiempo pasa en el nido con su pareja y sus polluelos después de cazar al conejo?

f) ¿A qué altura volaba la paloma que caza?

g) Desde que caza a la paloma, ¿cuánto tarda en subir al nido? Halla la velocidad de subida en metros por minuto.

2 En unos ejes cartesianos, describe 10 minutos de un posible vuelo de una cigüeña, desde que sale de su nido en el campanario de una iglesia hasta que vuelve a él, después de haber cazado una rana.

3 Matilde sale de casa y visita al dentista. A continuación recoge un vestido en casa de la modista y come con una amiga en un restaurante. Por último, hace la compra en un supermercado situado camino de casa.



Observa la gráfica y responde:

a) ¿Cuál es la variable independiente?

b) ¿Cuál es la variable dependiente?

c) ¿En qué tramo o tramos está definida la función?

d) ¿Qué representa cada cuadrito del eje de abscisas?

e) ¿Qué representa cada cuadradito del eje de ordenadas?

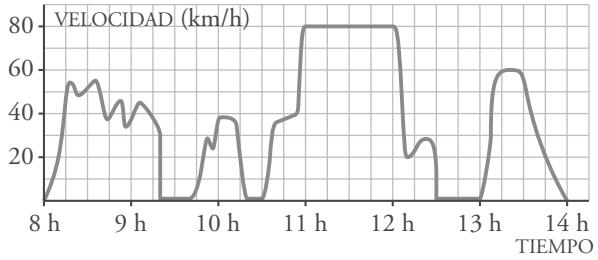
f) ¿A qué distancia de la casa de Matilde está la consulta del dentista?

g) ¿A qué hora llegó Matilde al restaurante?

h) ¿Cuánto duró la comida?

i) ¿Qué le queda a Matilde más lejos de casa, la modista o el supermercado?

4 En la siguiente gráfica se ha representado la velocidad de una furgoneta de reparto a lo largo de una mañana de trabajo, que finaliza cuando el conductor para a la hora de comer.



Observa la gráfica y responde:

a) ¿Qué se ha representado en el eje de abscisas?

b) ¿Qué se ha representado en el eje de ordenadas?

c) ¿Qué intervalo es el dominio de definición?

d) ¿Cuál es la variable independiente?

e) ¿Cuál es la variable dependiente?

f) ¿Cuántas paradas ha hecho antes de comer?

g) ¿A qué hora efectuó la primera parada?

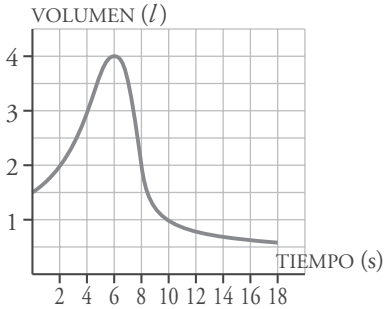
h) ¿Cuánto duró la primera parada?

i) ¿A qué hora entró en la autovía?

j) ¿A qué velocidad circuló por la autovía?

5 Para medir la capacidad espiratoria de los pulmones, se hace una prueba que consiste en inspirar al máximo y, después, espirar tan rápido como se pueda en un aparato llamado espirómetro.

Esta curva indica el volumen de aire que entra y sale de los pulmones.



a) ¿Cuál es el volumen en el momento inicial?

b) ¿Cuánto tiempo duró la observación?

c) ¿Cuál es la capacidad máxima de los pulmones de esta persona?

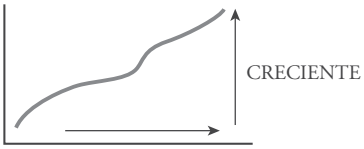
d) ¿Cuál es el volumen a los 10 segundos de iniciarse la prueba?

¿Y cuándo termina la prueba?

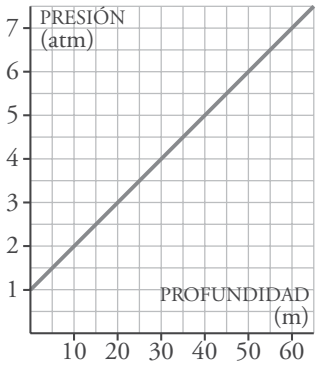
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

2 Variaciones de una función

Crecimiento y decrecimiento



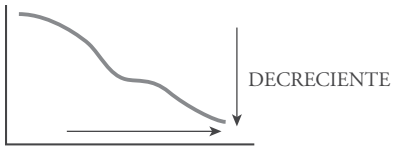
- Al sumergirnos en agua, la presión aumenta de manera uniforme. En la superficie, la presión es la atmosférica (1 atm). Por cada 10 m que profundizamos, la presión aumenta una atmósfera (1 atm).



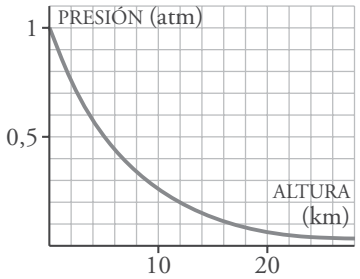
Esta gráfica corresponde a la función:

profundidad dentro del agua → *presión*

Esta función es **creciente,** pues a más profundidad más presión.



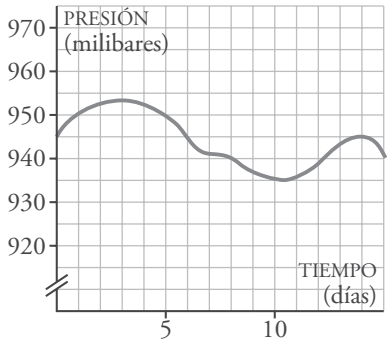
- La presión atmosférica disminuye al aumentar la altura a la que nos encontremos sobre el nivel del mar, aunque no lo hace uniformemente: al principio disminuye más rápidamente que después.



Esta gráfica corresponde a la función:

altura sobre el nivel del mar → *presión*

Es una función **decreciente,** pues a más altura menos presión.



- La variación de la presión atmosférica en un lugar es indicio importante de cambios en la meteorología (de ahí lo del *parte meteorológico*, *centro de altas presiones*, *isobaras*, etc.).

La gráfica de la izquierda nos da la presión atmosférica en un cierto lugar, en cada momento, durante 15 días. Corresponde a la función:

instante de tiempo → *presión*

La función presenta tramos en los que es **creciente** y tramos en los que es **decreciente.**

Para estudiar las variaciones de una función *hemos de mirar su gráfica de izquierda a derecha*; es decir, hemos de ver cómo varía la y cuando x aumenta.

Una función es **creciente** cuando al aumentar la variable independiente, x, aumenta la variable dependiente, y.

Una función es **decreciente** cuando al aumentar x disminuye y.

También podemos decir que **un tramo** de una función es **creciente** o **decreciente.**

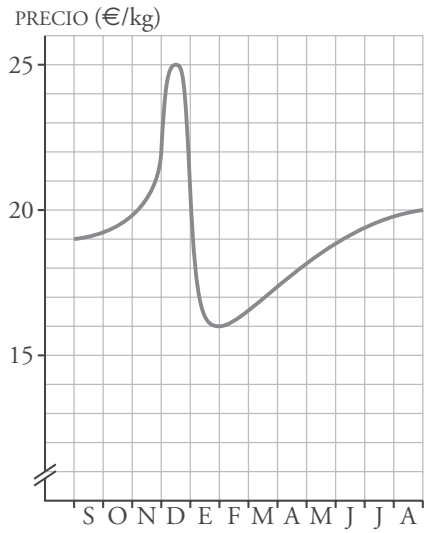
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

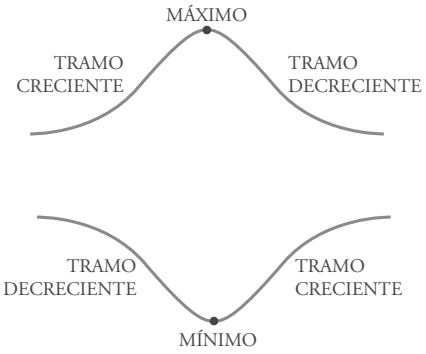
Máximos y mínimos

La gráfica adjunta describe el precio de la carne de cordero lechal a lo largo de un año (de septiembre a final de agosto). Corresponde a la función:

tiempo → *precio*

La gráfica presenta un **tramo creciente** de septiembre a diciembre. A partir de aquí, hay un **tramo decreciente** hasta mediados de enero y vuelve a crecer suavemente hasta el final de agosto. Se aprecian claramente un **máximo** de 25 €/kg a mediados de diciembre y un **mínimo** de 16 €/kg a finales de enero.





Una función tiene un **máximo** en un punto cuando su ordenada es mayor que la ordenada de los puntos que lo rodean.

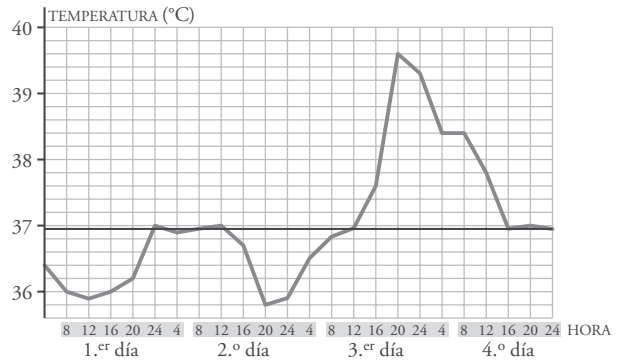
A la izquierda del máximo, la función es creciente, y a su derecha es decreciente.

Una función presenta un **mínimo** en un punto cuando su ordenada es menor que la de los puntos que lo rodean.

A la izquierda del mínimo, la función es decreciente, y a su derecha, creciente.

Actividades

1 La gráfica siguiente refleja la temperatura de un enfermo durante cuatro días:



a) Desde las 12 h a las 24 h del 1.er día hay un *tramo creciente*. Describe otro tramo en el que la función sea creciente.

b) Describe dos tramos en los que la función sea *decreciente*.

c) Señala el *máximo*, indicando en qué momento se produce y qué temperatura alcanza el enfermo.

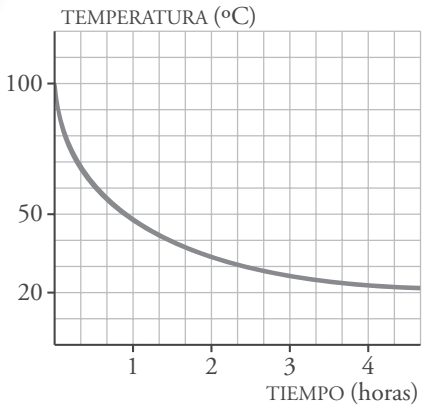
d) Señala el *mínimo*, indicando el momento y la temperatura.

2 En unos ejes cartesianos representados sobre papel cuadriculado, representa una función definida en el intervalo 2-10 que sea creciente en todo el tramo.

3 Representa una función definida en el intervalo 0-12 que tenga un mínimo en el punto (3, 2) y un máximo en (7, 8). Describe un tramo creciente y un tramo decreciente.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

3 Tendencias de una función



Comportamiento a largo plazo

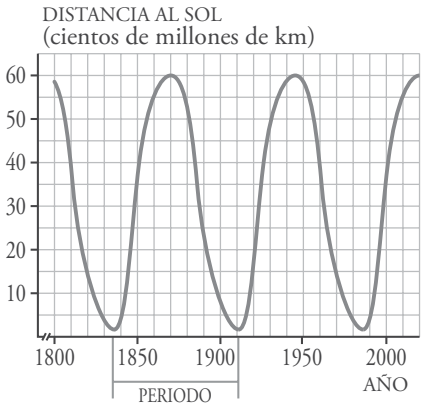
Dejamos enfriar una olla de agua hirviendo en una habitación a 20 °C.

La gráfica de la izquierda representa la función:

tiempo → *temperatura*

Es claro que, al pasar el tiempo, la temperatura del agua se acerca a la temperatura ambiente, 20 °C. Decimos que la temperatura del agua **tiende** a 20 °C con el transcurso del tiempo.

Hay funciones en las que, aunque solo conozcamos un trozo de ellas, podemos predecir cómo se comportarán lejos del intervalo en que han sido estudiadas, porque tienen **ramas** con una **tendencia** muy clara.



Periodicidad

A veces, aunque solo conozcamos un trozo de curva, podemos saber cómo se comporta la función fuera de ese tramo.

La gráfica de la izquierda describe la distancia del cometa *Halley* al Sol a lo largo de los dos últimos siglos.

La función es:

tiempo → *distancia al Sol*

Como la órbita se repite una y otra vez cada 76 años, la función se repite también en ese periodo de tiempo. Es una función **periódica** de **periodo** 76 años.

Funciones periódicas son aquellas cuyo comportamiento se va repitiendo cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. A la longitud de ese intervalo se le llama **periodo.**

Una función periódica queda perfectamente determinada conociendo su comportamiento en un tramo correspondiente a un periodo.

Actividades

1 Una madre mira a su hijo dar vueltas en unos caballitos. En cada vuelta, que dura 30 s, se acercan hasta casi tocarse (2 m) y se alejan hasta 24 m.

Representa en unos ejes la función:

tiempo → *distancia*

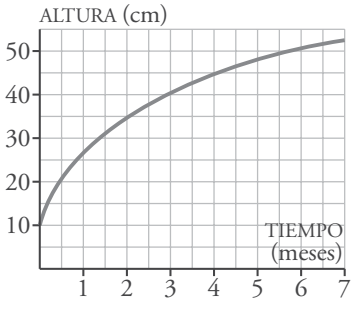
Para ello, toma las escalas siguientes:

— Eje *X*: 1 cuadradito = 5 segundos

— Eje *Y*: 1 cuadradito = 2 metros

Representa un intervalo correspondiente a 4 vueltas.

2 La gráfica representa el tamaño de una planta con el paso del tiempo.



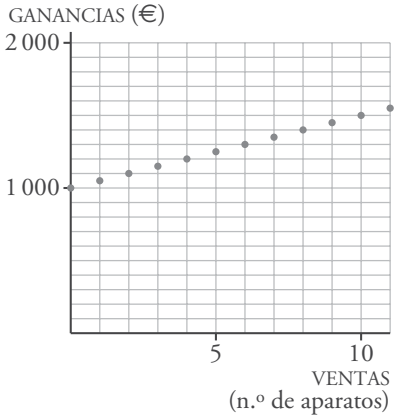
a) ¿Cuánto medía cuando se plantó?

b) ¿Es la función creciente? Explica por qué es lógico que lo sea.

c) ¿Se aprecia alguna tendencia en la función?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

4 Discontinuidades. Continuidad



- Un representante de ordenadores recibe cada mes 1 000 € fijos más 50 € por cada aparato vendido. A la izquierda tienes la gráfica de la función:

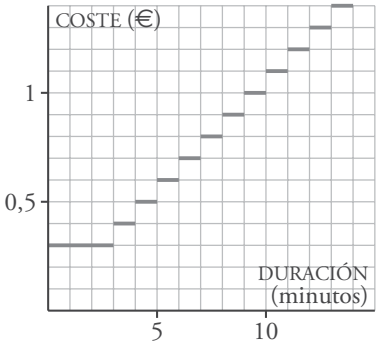
aparatos vendidos → *ganancias mensuales*

La variable independiente solo tiene sentido para los valores 0, 1, 2, 3, 4, … y no para los intermedios, pues no se puede vender un número fraccionario de ordenadores. La gráfica es **discontinua** porque la variable independiente se mueve a saltos.

- Cierta llamada telefónica cuesta 30 céntimos de euro para comenzar, y con ellos se puede hablar durante 3 minutos. A partir de ese momento, cada minuto o fracción cuesta 10 céntimos. Esta es la función:

duración → *coste*

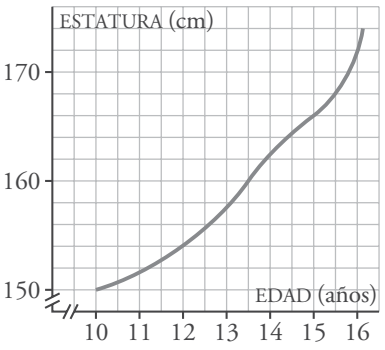
Los saltos bruscos que presenta la gráfica se llaman **discontinuidades** de la función.

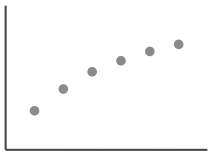


- Esta gráfica describe la estatura de un chico entre los 10 y los 16 años. Se trata de la función:

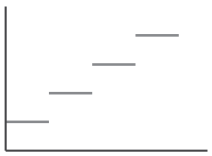
edad → *estatura*

La variación de la estatura es suave, sin saltos bruscos. Es una función **continua.**

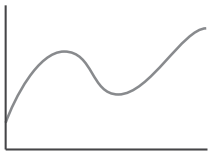




Función discontinua



Función discontinua



Función continua

Una función se llama **continua** cuando no presenta discontinuidad de ningún tipo. Por tanto, su gráfica se puede trazar sin levantar el lápiz del papel (tercera gráfica de la izquierda).

También se puede decir de una función que es **continua en un tramo,** aunque tenga discontinuidades en otros lugares.

Actividades

1 El precio de una fotocopia es 0,10 €. Representa esta función:

número de fotocopias → *coste*

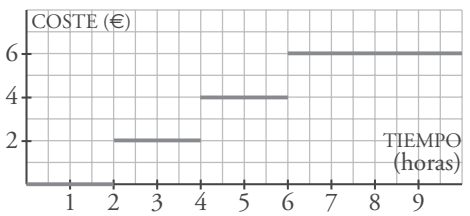
¿Se pueden unir los puntos de la gráfica?

2 La gráfica de la derecha muestra las tarifas del aparcamiento de un centro comercial.

a) ¿Cuánto pagamos si estamos 1 h?

b) ¿Y si estamos 2 h y 30 min? ¿Y si estamos 8 h?

c) ¿Es una función continua?

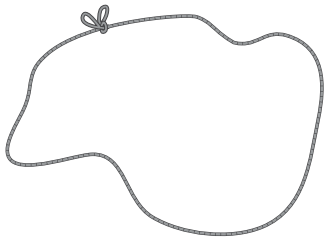


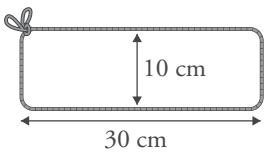
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

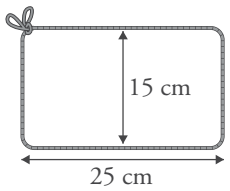
5 Expresión analítica de una función

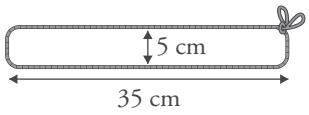
Casi todas las funciones que hemos visto hasta ahora nos han venido dadas, o bien por su *gráfica*, o bien por un *enunciado* que, de forma aproximada, nos ha permitido conocer algunas características del fenómeno descrito. Hay, sin embargo, una gran cantidad de funciones que pueden darse mediante una *fórmula* con la que se relacionan de forma exacta las dos variables. Veamos un ejemplo.

Disponemos de un hilo de 80 cm unido por sus extremos y deseamos formar con él rectángulos distintos, como se indica en las figuras:





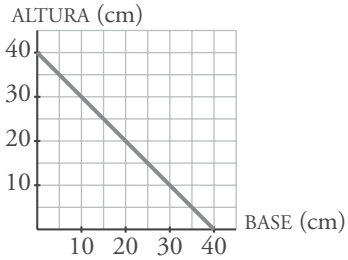




La altura de estos rectángulos dependerá de la medida de su base, x. Por ejemplo, si la base es $x = 30$ cm, la altura será $40 - 30 = 10$ cm.

Esta tabla muestra la altura del rectángulo para distintos valores de la base:

BASE (cm)	10	15	20	35	x
ALTURA (cm)	30	25	20	5	$40 - x$



La función que relaciona la medida de la base, x, con la altura del rectángulo viene dada por la fórmula: $y = 40 - x$, con $0 < x < 40$, que es su **expresión analítica.** Para cada valor de x comprendido entre 0 y 40, obtenemos un valor de y.

La **expresión analítica de una función** es una ecuación que relaciona algebraicamente las dos variables que intervienen.

Actividades

1 Queremos construir rectángulos de área 12 m^2. El área dependerá de las medidas que tengan la base, x, y altura, y. Por ejemplo, si la base es $x = 6$ cm, la altura será $y = \frac{6}{2} = 2$ cm.

a) Completa la tabla que da la medida de la altura, y, para distintos valores de la base, x.

BASE x	1	1,5	2	3	4	5	6
ALTURA y	12	8					

b) ¿Cuál de las tres expresiones siguientes corresponde a esta función?

$y = \frac{x}{12}$ $\quad y = \frac{12}{x}$ $\quad y = 12x$

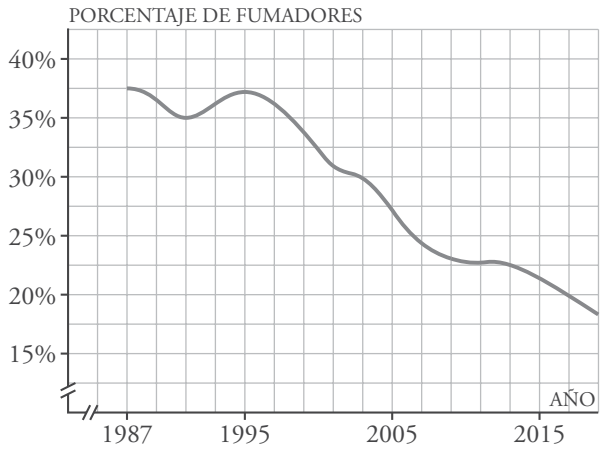
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Practica

Interpretación de gráficas

1 ▼▽▽ En la gráfica siguiente viene representado el porcentaje de fumadores en España en los últimos años (parte roja), así como la previsión de cómo se supone que irá evolucionando dicho porcentaje en los años próximos (parte azul):



a) ¿Cuáles son las dos variables que se relacionan?

b) ¿Entre qué años se ha hecho el estudio? ¿En cuáles hay solamente previsiones y no datos reales?

c) ¿Cuál es la escala que se ha considerado en el eje X? ¿Y en el eje Y?

d) Observa que tanto en el eje X como en el eje Y aparecen dos rayitas señaladas. ¿Cuál crees que es su significado?

e) ¿Cuál era el porcentaje de fumadores en el año 1987? ¿Y en 1991? ¿Y en 1995? ¿Y en 2005?

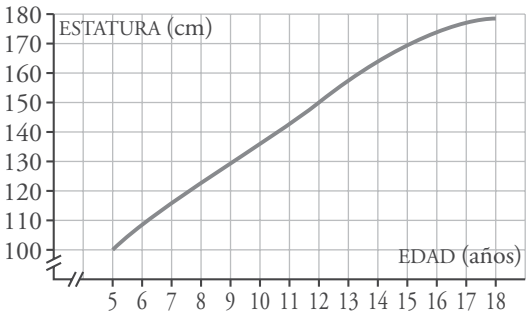
f) ¿En qué años se dio el porcentaje más alto de fumadores?

g) ¿Cuál es el porcentaje de fumadores previsto (aproximadamente) para el año 2015? ¿Y para 2017?

h) Si las previsiones se cumplieran respecto al porcentaje de fumadores, ¿este irá aumentando o disminuyendo en los próximos años?

i) Haz una descripción global de la gráfica, indicando el dominio, el crecimiento y el decrecimiento de la función, y sus máximos y mínimos.

2 ▼▽▽ La estatura de Óscar entre los 5 y los 18 años viene representada en esta gráfica:



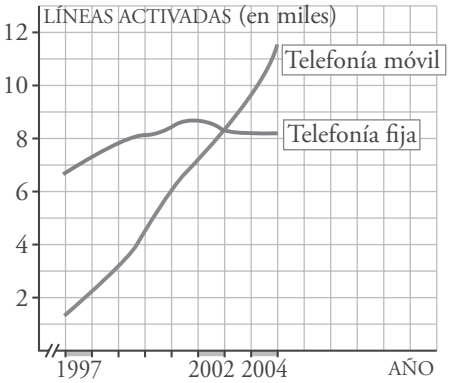
a) ¿Cuáles son las variables que intervienen?

b) ¿Qué escala se utiliza para cada variable?

c) ¿Cuántos centímetros creció entre los 5 y los 8 años? ¿Y entre los 15 y los 18? ¿En cuál de estos dos intervalos el crecimiento fue mayor?

d) Observa que la gráfica al final crece más lentamente. ¿Crees que aumentará mucho más la estatura o que se estabilizará en torno a algún valor?

3 ▼▽▽ El uso de teléfonos móviles ha aumentado mucho en los últimos años. Sin embargo, la telefonía fija no ha sufrido grandes variaciones. En esta gráfica vemos qué ha ocurrido en una gran ciudad:



a) ¿Cuántas líneas de telefonía fija y móvil había activadas, aproximadamente, a principios de 1997? ¿Y a principios de 2002? ¿Y a finales de 2004?

b) ¿En qué momento (aproximado) había igual número de líneas de teléfonos fijos que de móviles?

c) ¿Cuál ha sido el aumento de líneas en la telefonía fija de principios de 1997 a finales de 2004? ¿Y en la móvil? ¿En cuál ha sido mayor el aumento?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

4 ▼▽▽ Un tiovivo acelera durante 2 minutos hasta alcanzar una velocidad de 10 km/h. Permanece a esta velocidad durante 7 min y decelera hasta parar en 1 minuto. Está parado 5 minutos y comienza otra vuelta. Dibuja la gráfica *tiempo-velocidad*.

5 ▼▼▽ Una libra (unidad de peso) equivale a 0,45 kg.

a) Completa la tabla siguiente:

x (LIBRAS)	0,5	1	1,5	2	3	4	x
y (KILOS)		0,45					

b) Representa la función *libras-kilogramos*.

c) Obtén su expresión analítica.

6 ▼▼▽ Luis ha tardado 2 horas en llegar desde su casa a una ciudad situada a 150 km de distancia, en la que tenía que asistir a una reunión. Ha permanecido 2 horas en la ciudad y ha vuelto a su casa, invirtiendo 2 horas y media en el viaje de vuelta.

a) Representa la gráfica *tiempo-distancia* a su casa.

b) Si suponemos que la velocidad es constante en el viaje de ida, ¿cuál sería esa velocidad?

c) Si también suponemos que la velocidad es constante en el viaje de vuelta, ¿cuál sería esa velocidad?

7 ▼▼▽ La tabla recoge la medida del perímetro del cráneo de un niño en los primeros meses de vida:

TIEMPO (meses)	0	3	9	15	21	27	33
PERÍMETRO (cm)	34	40	44	46	47	48	49

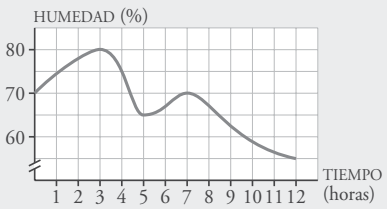
a) Haz una gráfica relacionando estas dos variables. Elige una escala adecuada.

b) ¿Qué tendencia se observa en el crecimiento del cráneo de un niño?

c) ¿Cuánto crees que medirá el perímetro craneal de un niño de 3 años?

Autoevaluación

1 Esta gráfica muestra la humedad relativa del aire en una ciudad.



a) ¿Cuáles son las variables dependiente e independiente? ¿Qué escalas se utilizan?

b) ¿Durante cuánto tiempo se midió la humedad?

c) Indica la humedad relativa a las 2 h, a las 5 h y a las 7 h. ¿Cuándo fue superior al 75%?

d) Indica cuándo crece y cuándo decrece, y los valores máximo y mínimo que alcanza.

2 Desconectamos una plancha que está a 120 °C. Su temperatura desciende hasta 60 °C en los dos primeros minutos, y después lo hace más lentamente hasta alcanzar la temperatura ambiente, 20 °C, en 10 min.

a) Representa la función *tiempo* → *temperatura*.

b) ¿Aprecias alguna tendencia en esa función?

3 Esta tabla indica cómo varía la cantidad de agua de un depósito de 30 litros cuando se abre un grifo:

TIEMPO (min)	0	1	2	3	4
VOLUMEN (*l*)	0	5	10	15	20

a) Representa la función *tiempo* → *volumen*.

b) ¿Cuál de estas tres expresiones corresponde a esta función?

$y = 2x$ $\quad y = 5x$ $\quad y = 5/x$

4 Un depósito de 5 litros de agua se llena en 2 minutos, permanece lleno 1 minuto y se vacía en otro minuto. Sigue vacío durante 2 minutos y vuelve a repetirse el proceso de llenado y vaciado.

a) Representa la función *tiempo* → *cantidad de agua*.

b) Explica si es una función periódica.

c) Durante el primer cuarto de hora, ¿en qué periodos de tiempo está lleno?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.° ESO. Material fotocopiable autorizado.