8 Funciones lineales

René Descartes (1596-1650), filósofo y matemático francés, influyó notablemente en el pensamiento de su época y en el de siglos posteriores.

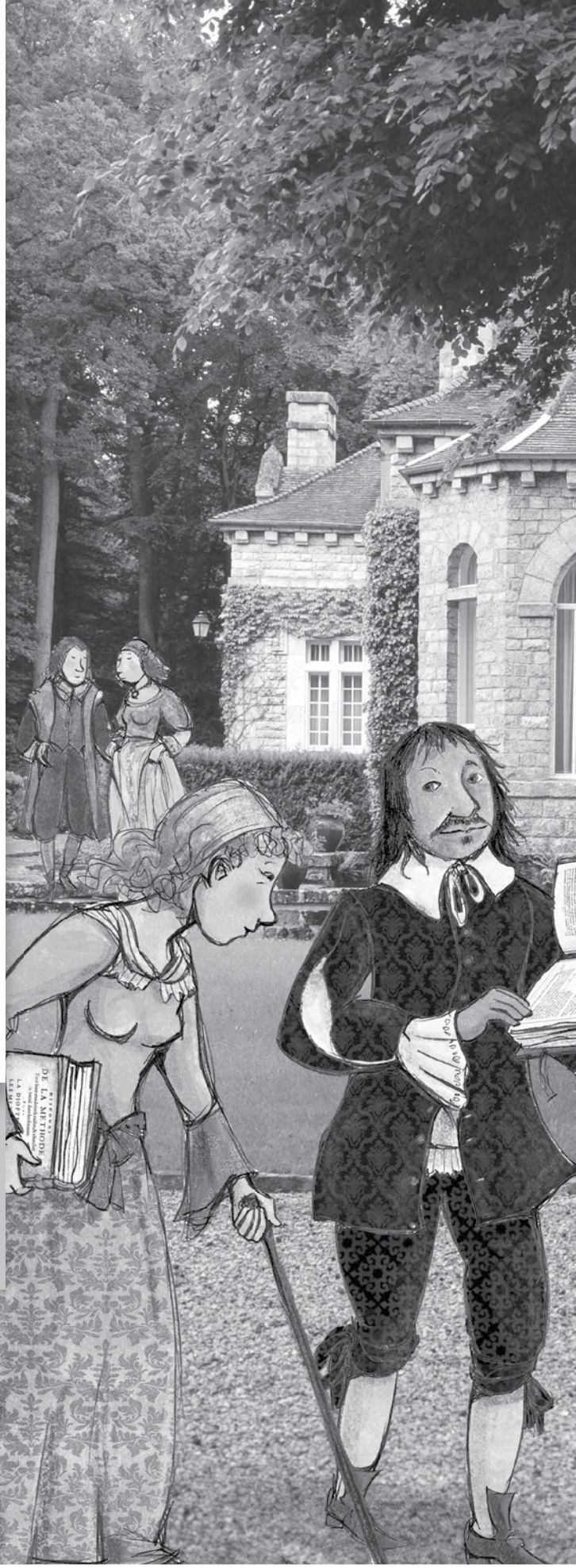
Durante toda su vida tuvo una salud delicada. Por eso, en el colegio donde estudió interno se le permitió estudiar acostado. Esto se convirtió en hábito, de modo que una gran parte de su obra la elucubró e incluso la elaboró en la cama. Y en la cama se le ocurrió su sistema de coordenadas: un día se entretuvo siguiendo el vuelo de una mosca e imaginó cómo se designaría su posición en cada instante mediante la distancia a la que se encontrara de cada pared.

Aunque esta idea no era del todo original, pues ya para entonces se manejaban las coordenadas geográficas, *longitud* y *latitud*, la invención de Descartes le permitió expresar las curvas mediante ecuaciones que ligan sus coordenadas. Esta ha sido una de las mayores aportaciones al mundo de la ciencia.

Como en aquella época los científicos escribían en latín, Descartes era conocido por la forma latina de su nombre: *Cartesius*. De ahí vienen las expresiones *pensamiento cartesiano* o *coordenadas cartesianas*.

Las funciones lineales, que veremos en esta unidad, responden a ecuaciones de primer grado y se representan por una recta.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.



DEBERÁS RECORDAR

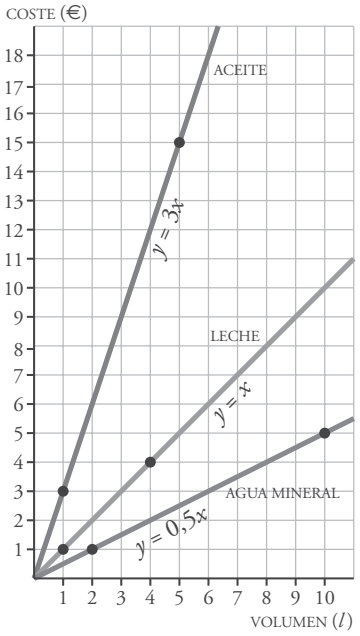
- Cuándo dos magnitudes son proporcionales.
- Cómo se representan las relaciones de proporcionalidad.

1 Función de proporcionalidad $y = mx$

Vamos a estudiar funciones en las que las dos variables son proporcionales. Por ejemplo: *cantidad comprada de un producto* → *coste de la compra*

volumen de una sustancia → *peso de la sustancia*

Son funciones que se representan mediante rectas y tienen una expresión analítica similar: $y = mx$.



Analicemos tres funciones que responden al modelo: *volumen* → *coste*

LECHE: Su precio es de 1 €/*l*.

$1\ l \rightarrow 1\ €$ Pasa por el punto (1, 1).
$4\ l \rightarrow 4\ €$ Pasa por el punto (4, 4).
La y (coste en €) es igual a la x (volumen en l).

Función: $x \rightarrow x$
Ecuación: $y = x$
Pendiente: $m = 1$

ACEITE: Su precio es de 3 €/*l*.

$1\ l \rightarrow 3\ €$ Pasa por el punto (1, 3).
$5\ l \rightarrow 15\ €$ Pasa por el punto (5, 15).
y (coste) es igual al triple de x (volumen).

Función: $x \rightarrow 3x$
Ecuación: $y = 3x$
Pendiente: $m = 3$

AGUA MINERAL: Su precio es de 0,5 €/*l*.

$2\ l \rightarrow 1\ €$ Pasa por el punto (2, 1).
$10\ l \rightarrow 5\ €$ Pasa por el punto (10, 5).
y (coste) es igual a la mitad de x (volumen).

Función: $x \rightarrow \frac{1}{2}x$
Ecuación: $y = \frac{1}{2}x$
Pendiente: $m = \frac{1}{2}$

Importante

La pendiente de una recta $y = mx$ es el coeficiente de la x cuando está despejada la y.

La **función de proporcionalidad** tiene por ecuación $y = mx$.

Se representa mediante **una recta** que pasa por (0, 0).

La constante de proporcionalidad, m (que puede ser positiva o negativa), se llama **pendiente** de la recta y tiene que ver con su inclinación.

Actividades

1 El precio de un kilogramo de arroz es de 1,5 €. Representa, como en los ejemplos anteriores, la función *peso* → *coste*.

2 Un litro de aceite pesa 0,9 kg. Representa la función *volumen de aceite* → *peso del aceite*.

3 ¿Cuál es la pendiente de cada recta?

a) $y = 2x$ b) $y = 1{,}5x$
c) $y = 0{,}9x$ d) $y = -\frac{3}{4}x$
e) $y = -4x$ f) $y - 2x = 0$

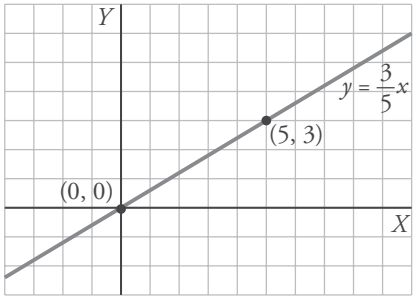
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 2.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Representación de la gráfica a partir de su ecuación

Para representar una función de proporcionalidad, $y = mx$, tendremos en cuenta lo siguiente:

— **Es una recta,** pues a variaciones iguales de x corresponden variaciones iguales de y.

— **Pasa por el punto (0, 0),** pues si $x = 0$, entonces $y = m \cdot 0 = 0$.



Por tanto, para representarla solo falta **obtener otro punto.** Esto se consigue dándole un valor a x y obteniendo el correspondiente valor de y.

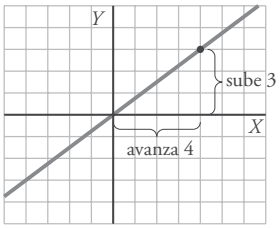
Por ejemplo, para representar $y = \frac{3}{5}x$, obtenemos el punto correspondiente a $x = 5$:

$$\text{Si } x = 5, \text{ entonces } y = \frac{3}{5} \cdot 5 = 3$$

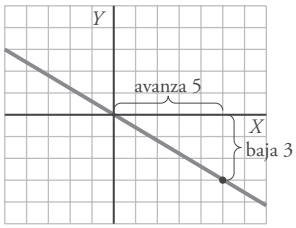
Es una recta que pasa por (0, 0) y (5, 3).

Ecuación a partir de la gráfica. Obtención de la pendiente

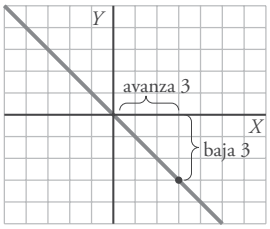
Si la gráfica de una función es una recta que pasa por el origen, entonces es una función de proporcionalidad, $y = mx$. Para determinar su ecuación, solo falta averiguar el valor de m (la pendiente).



Pendiente $m = \frac{3}{4}$



Pendiente $m = -\frac{3}{5}$



Pendiente $m = \frac{-3}{3} = -1$

La **pendiente** (coeficiente de la x) es la variación (positiva o negativa) que experimenta la y cuando la x aumenta una unidad. Para hallarla, se divide la variación de la y por la variación de la x entre dos de sus puntos.

Entrénate

1 Completa las tablas, representa los puntos y traza las rectas que determinan.

a) $y = \frac{1}{2}x$

x	–4	–2	0	4	6
y					

b) $y = \frac{3}{2}x$

x	–4	–2	0	2	4
y					

c) $y = -3x$

x	–2	–1	0	1	2
y					

d) $y = -\frac{2}{3}x$

x	–6	–3	0	3	6
y					

Actividades

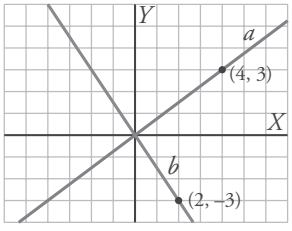
2 Representa las funciones siguientes:

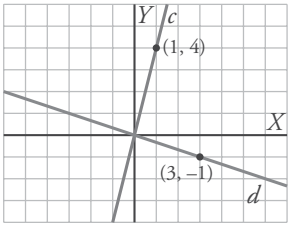
a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = -x$

d) $y = -2x$ e) $y = \frac{1}{3}x$ f) $y = -\frac{1}{3}x$

g) $y = \frac{3}{2}x$ h) $y = \frac{-3}{2}x$ i) $y = \frac{2}{3}x$

3 Halla las ecuaciones de las rectas siguientes:





© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

2 La función $y = mx + n$

Ten en cuenta

En lugar de utilizar las variables x e y, podríamos utilizar otras. Por ejemplo:

tiempo: t; coste: c

La ecuación quedaría así:

$c = 3 + 0{,}5t$

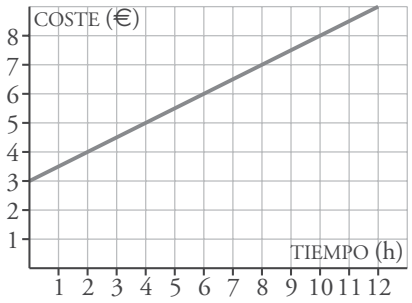
El uso de una pista de patinaje cuesta 3 € de entrada más 0,5 € por cada hora.

En este enunciado vemos que, una vez pagada la cantidad inicial, 3 €, el coste añadido es proporcional al tiempo que estamos sobre la pista.

La función *tiempo* → *coste* tiene por ecuación $y = 3 + 0{,}5x$.

Su gráfica es una recta cuya pendiente es 0,5 (lo que aumenta el coste cuando el tiempo aumenta 1).

La cantidad inicial, 3 €, es el punto del eje Y del cual arranca la función.



La ecuación $y = mx + n$ se representa por una recta con estas características:

— Su **pendiente** es m (la pendiente es el coeficiente de la x en la ecuación $y = mx + n$). Representa la variación de y por cada unidad de x.

— Su **ordenada en el origen** es n. Es decir, si $x = 0$, entonces $y = n$. Por tanto, corta al eje Y en el punto $(0, n)$.

Cuando la pendiente es $m = 0$, la recta $y = n$ es paralela al eje X. Se llama **función constante** porque y siempre vale lo mismo (n) aunque varíe la x.

Todas estas funciones, que se representan mediante rectas, se llaman **funciones lineales.**

Actividades

1 Representa las rectas de ecuaciones:

a) $y = 2x - 3$ b) $y = 7 - 4x$ c) $y = x - 1$

d) $y = -\frac{3}{4}x + 2$ e) $y = 5$ f) $y = -2$

2 Completa las tablas y representa estas rectas. Determina sus pendientes y sus ordenadas en el origen.

a) $y = 3x + 2$

x	–2	–1	0	1	2
y					

b) $y = 2 - 2x$

x	–2	–1	0	1	2
y					

c) $y = \frac{1}{2}x - 1$

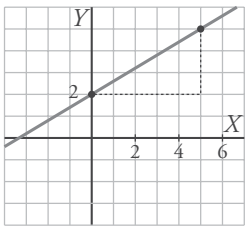
x	–4	–2	0	2	4
y					

d) $y = 1 - \frac{1}{4}x$

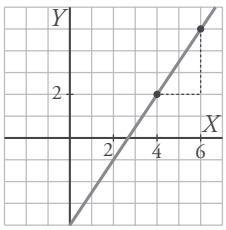
x	–8	–4	0	4	8
y					

3 Escribe la pendiente, la ordenada en el origen y la ecuación de cada una de estas rectas:

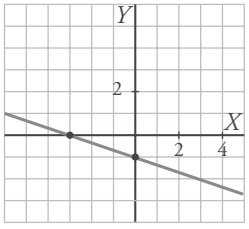
a)



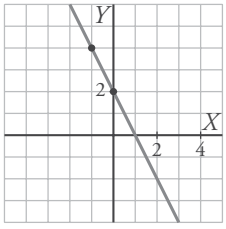
b)



c)



d)



© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

3 Recta de la que se conoce un punto y la pendiente

Supongamos que de una recta conocemos un punto (x_0, y_0) y su pendiente, m. Entonces, su ecuación puede ponerse así:

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$ ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE

• La recta que pasa por $(4, 3)$ y tiene pendiente $m = 2$, se escribe así:

$$y = 3 + 2(x - 4)$$

Esta ecuación puede simplificarse hasta llegar a la forma $y = mx + n$:

$$y = 3 + 2(x - 4) \rightarrow y = 3 + 2x - 8 \rightarrow y = 2x - 5$$

Ejercicios resueltos

1. Escribir las ecuaciones de las rectas siguientes dadas por un punto y su pendiente:

a) $P(3, 7)$ $\quad m = 4$

b) $P(-2, 5)$ $\quad m = -\frac{2}{3}$

c) $P(4, -1)$ $\quad m = 1{,}2$

d) $P(-3, 0)$ $\quad m = \frac{1}{5}$

1. Obtenemos, para cada una de las rectas, su ecuación punto-pendiente.

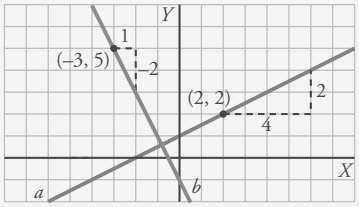
a) ECUACIÓN: $y = 7 + 4(x - 3)$ Es decir, $y = 4x - 5$

b) ECUACIÓN: $y = 5 - \frac{2}{3}(x + 2)$ Es decir, $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

c) ECUACIÓN: $y = -1 + 1{,}2(x - 4)$ Es decir, $y = 1{,}2x - 5{,}8$

d) ECUACIÓN: $y = \frac{1}{5}(x + 3)$ Es decir, $y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$

2. Escribir la ecuación de las rectas *a* y *b*.



2. a) La recta a pasa por (2, 2). Su pendiente es $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

ECUACIÓN: $y = 2 + \frac{1}{2}(x - 2)$ Es decir, $y = \frac{1}{2}x + 1$

b) La recta b pasa por (–3, 5). Su pendiente es $\frac{-2}{1} = -2$.

ECUACIÓN: $y = 5 - 2(x + 3)$ Es decir, $y = -2x - 1$

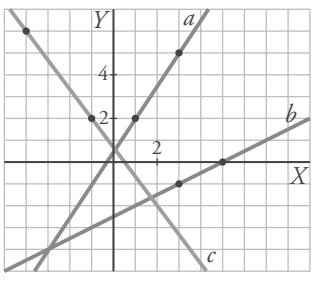
Actividades

1 Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por P y tiene pendiente m:

a) $P(4, -3)$, $m = 4$ b) $P(0, 2)$, $m = -\frac{1}{2}$

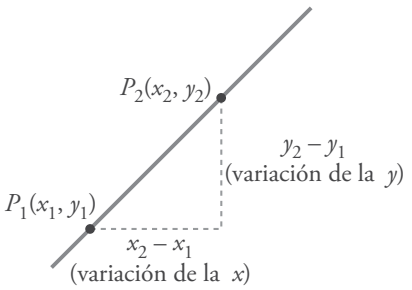
c) $P(-3, 1)$, $m = \frac{5}{4}$ d) $P(0, 0)$, $m = -1$

2 Determina la ecuación de las siguientes rectas:



© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

4 Ecuación de la recta que pasa por dos puntos



Si de una recta conocemos dos puntos, podemos obtener su pendiente a partir de ellos y, después, con la pendiente y uno de los puntos, hallar su ecuación tal como hemos visto en la página anterior.

Obtención de la pendiente conociendo dos puntos

Para hallar la pendiente de la recta que pasa por dos puntos conocidos, se puede proceder gráficamente, midiendo (o contando cuadraditos) la variación de la x y la variación de la y.

Pero también se obtiene (más rápida y eficazmente) mediante este cálculo:

$$\left.\begin{matrix} P_1(x_1, y_1) \\ P_2(x_2, y_2) \end{matrix}\right\} \quad m = \frac{\text{Variación de la } y}{\text{Variación de la } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejercicios resueltos

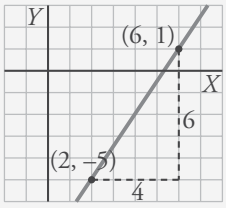
1. Hallar las pendientes de las siguientes rectas dadas por dos puntos:

a) (2, –5), (6, 1)

b) (–3, –1), (2, –2)

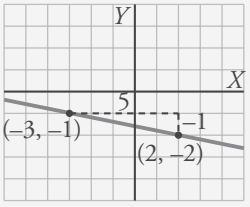
1. GRÁFICAMENTE:

a)



$$m = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

b)



$$m = -\frac{1}{5}$$

OPERANDO:

a) $m = \dfrac{1 - (-5)}{6 - 2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

b) $m = \dfrac{-2 - (-1)}{2 - (-3)} = -\dfrac{1}{5}$

2. Obtener la ecuación de la recta que pasa por P y Q:

a) $P(5, 3)$, $Q(-3, 4)$

b) $P(-3, 5)$, $Q(-2, 3)$

2. a) $m = \dfrac{4 - 3}{-3 - 5} = \dfrac{1}{-8} = -\dfrac{1}{8}$ ECUACIÓN: $y = 3 - \dfrac{1}{8}(x - 5)$

b) $m = \dfrac{3 - 5}{-2 - (-3)} = \dfrac{-2}{1} = -2$ ECUACIÓN: $y = 5 - 2(x + 3)$

Actividades

1 Calcula, en cada caso, la pendiente de la recta que pasa por los puntos P y Q, y escribe la ecuación de dicha recta usando el punto P.

a) $P(4, 6)$, $Q(3, 3)$ b) $P(2, 1)$, $Q(-4, 4)$

c) $P(2, 4)$, $Q(-3, -1)$ d) $P(-1, -1)$, $Q(2, -3)$

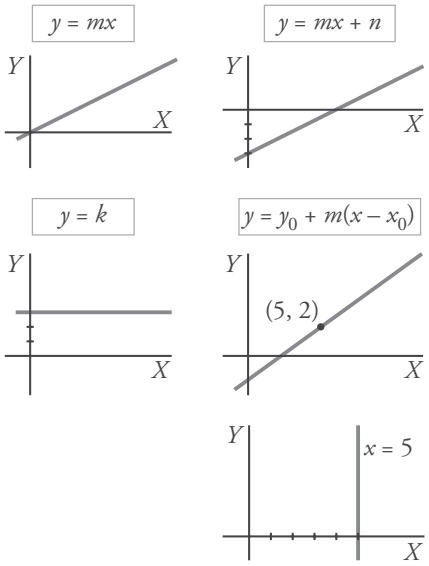
2 Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q:

a) $P(2, 5)$, $Q(-3, 6)$ b) $P(3, -4)$, $Q(-2, -1)$

c) $P(-1, 0)$, $Q(5, 5)$ d) $P(-7, 1)$, $Q(3, 4)$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

5 Forma general de la ecuación de una recta



Hasta ahora hemos visto varias formas de dar la ecuación de una recta. Veamos que, operando, todas ellas pueden ponerse en la forma $ax + by = c$.

TIPO DE FUNCIÓN	EJEMPLO	TRANSFORMACIÓN $ax + by = c$
$y = mx$	$y = 2x$	$\mathbf{2x - y = 0;}$ $a = 2,\ b = -1,\ c = 0$
$y = mx + n$	$y = 2x - 3$	$\mathbf{2x - y = 3;}$ $a = 2,\ b = -1,\ c = 3$
$y = k$ (paralela al eje X)	$y = 3$	$\mathbf{0x + y = 3;}$ $a = 0,\ b = 1,\ c = 3$
$y = y_0 + m(x - x_0)$	$y = 2 + 3(x - 5)$	$\mathbf{3x - y = 13;}$ $a = 3,\ b = -1,\ c = 13$

También adoptan esta expresión las rectas paralelas al eje Y: $x = k$. Pero **estas rectas no son gráficas de funciones,** pues a un valor de x le corresponden muchos (infinitos) valores de y.

Operando, cualquier ecuación de una recta puede ponerse en la forma $ax + by = c$. Por eso se llama **forma general** de la ecuación de la recta.

Cuando $a \neq 0$ y $b = 0$, la recta es paralela al eje Y y no corresponde a la gráfica de una función.

Cuando $b \neq 0$, en todos los casos, la recta corresponde a una función. Todas ellas se llaman **funciones lineales.**

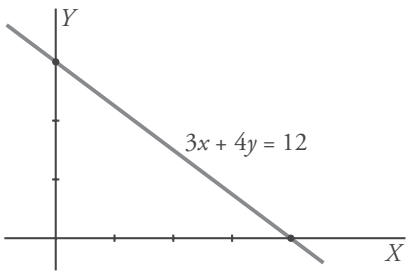
Para representar una recta dada en forma general, podemos:

— Obtener dos puntos suyos, dando valores a las variables.

— Despejar y para obtener una expresión de la forma $y = mx + n$.

Ejercicio resuelto

Representar $3x + 4y = 12$. ¿Cuál es su pendiente?



- Dando valores: $x = 0 \Rightarrow y = 3$. Pasa por $(0, 3)$.
  $x = 4 \Rightarrow y = 0$. Pasa por $(4, 0)$.
- Despejando la y: $y = -\frac{3}{4}x + 3$

} Mediante cualquiera de las dos informaciones podemos representar la recta.

La pendiente es $-\frac{3}{4}$. Es el coeficiente de la x teniendo despejada la y.

Actividades

1 Representa estas rectas:

a) $2x + 5y = 0$ b) $x - 3y = 6$ c) $3x = 12$ d) $y = 5 - \frac{5}{6}(x + 4)$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

6 Aplicaciones de la función lineal

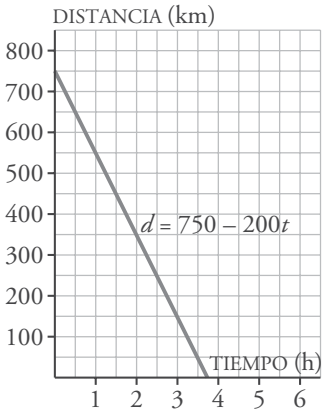
Escalas en los ejes

Las funciones extraídas de situaciones cotidianas requieren la utilización de números grandes o muy pequeños. En tales casos, para que la representación gráfica sea razonable, conviene elegir escalas adecuadas en los ejes coordenados.

Las funciones lineales, como hemos visto, sirven para describir multitud de fenómenos en los que se relacionan dos magnitudes que varían proporcionalmente.

Por ejemplo: *volumen de un alimento* → *coste de este*
volumen de una cierta sustancia → *peso de esta*
tiempo de movimiento uniforme → *distancia recorrida*

Todas ellas se representan mediante rectas sobre las cuales se aprecia cómo varía una magnitud respecto a la otra.



Problemas resueltos

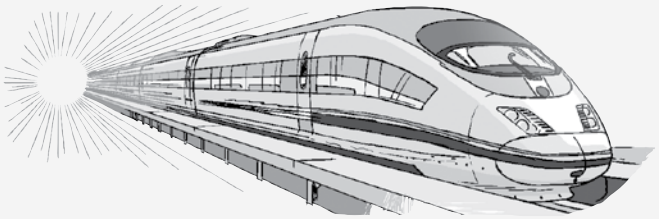
1. Un tren AVE acaba de salir de una ciudad situada a 750 km de la nuestra y viene hacia aquí a 200 km/h. Expresar mediante una ecuación la distancia a la que se encontrará de nosotros dentro de t horas.

El espacio recorrido por el tren en t horas es $200t$. Por tanto, la distancia a la que está de nosotros se va acortando en esa cantidad:

$$d = 750 - 200t$$

Esta es la ecuación de la función que relaciona el tiempo transcurrido con la distancia a la que se encuentra el tren de nosotros.

(Observa que en la representación gráfica del margen hemos tomado en el eje Y la escala siguiente: 1 cuadradito = 50 km).



Actividades

1 El coste de las llamadas provinciales en cierta compañía telefónica es de 0,30 € de establecimiento de llamada más 0,05 €/min.

Dibuja la gráfica de la función que expresa el coste de las llamadas en euros al cabo de x minutos.

2 Sara, vendedora de coches, tiene un sueldo fijo de 1 000 € todos los meses más una comisión por cada coche que venda de 250 €.

Halla la función que expresa el sueldo de Sara un mes que haya vendido x coches y dibuja su gráfica.

3 El coste de las llamadas a móviles en cierta compañía telefónica es de 0,80 € de establecimiento de llamada más 0,50 €/min.

Dibuja la gráfica de la función que expresa el coste de las llamadas en euros al cabo de x minutos.

4 La paga que le dan a Raquel sus padres es de 5 € al mes más 0,50 € cada día que haga la cama.

Halla la función que expresa el dinero que recibe Raquel al final del mes habiendo hecho la cama x días y dibuja su gráfica.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

7 Estudio conjunto de dos funciones

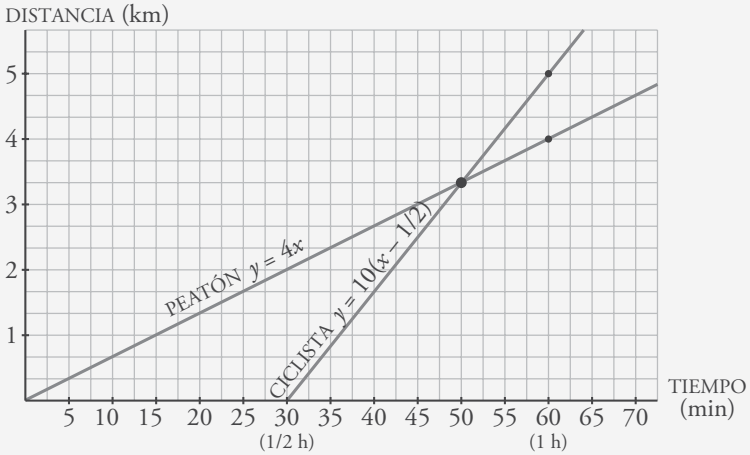
Para estudiar conjuntamente dos funciones lineales, representamos las dos rectas sobre los mismos ejes. Las coordenadas del punto de corte se hallan resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones. Este punto tiene gran importancia en la interpretación simultánea de las dos funciones.

Problema resuelto

Un peatón sale a dar un paseo caminando a 4 km/h. Media hora más tarde sale en su busca un ciclista a 10 km/h. ¿Cuánto tardará en darle alcance?

Espacio recorrido por el peatón (y) en función del tiempo transcurrido (x) en horas. $\Rightarrow y = 4x$

Espacio recorrido por el ciclista (y) en función del tiempo transcurrido (x) en horas. $\Rightarrow y = 10\left(x - \frac{1}{2}\right)$



El encuentro se produce cuando ambos hayan recorrido la misma distancia. Por tanto, el encuentro se produce a los 50 minutos de la salida del peatón.

Para hallar las coordenadas del punto de corte sin recurrir a la representación gráfica, se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = 4x \\ y = 10(x - 1/2) \end{array}\right\} \; 4x = 10x - 5 \;\Rightarrow\; 6x = 5 \;\Rightarrow\; x = \frac{5}{6}\text{ h} = 50 \text{ minutos}$$

Actividades

1 Un depósito contiene 240 l de agua y recibe el caudal de un grifo que aporta 9 l por minuto. Un segundo depósito contiene 300 l y recibe un caudal de 4 l por minuto. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que ambos depósitos tengan la misma cantidad de agua?

2 Un depósito contiene 350 l de agua. Se le conecta una bomba que aporta 30 litros de agua cada minuto, a la vez que se abre un desagüe que evacúa 80 litros por minuto. ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse el depósito?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Funciones lineales

1 ▼▽▽ La altura del agua de un depósito varía con el tiempo según la función $a = (5/4)t$ (a en metros, t en segundos).

a) Represéntala. Si la altura del depósito es 5 m, ¿cuál es el dominio de definición de la función?

b) ¿Es una función de proporcionalidad?

c) Di cuál es la pendiente y explica su significado.

2 ▼▽▽ Esta tabla muestra la longitud de la sombra de unos postes en un momento determinado:

ALTURA DEL POSTE (m)	0,5	1	1,5	2	2,5
LONGITUD DE SU SOMBRA (m)	1,25	2,5	3,75	5	6,25

a) Representa la función *longitud del poste* → *longitud de la sombra*.

b) Escribe su ecuación y di cuál es la pendiente.

3 ▼▽▽ Una milla equivale, aproximadamente, a 1,6 km.

a) Haz una tabla para convertir millas en kilómetros.

b) Dibuja la gráfica y escribe su ecuación.

4 ▼▽▽ Una receta para hacer helados recomienda poner 10 g de vainilla por cada 200 cm^3 de leche. Encuentra la relación entre la cantidad de leche y de vainilla, y representa la función.

5 ▼▽▽ El coste de una línea de telefonía móvil para internet es $C = 10 + 1{,}5t$ (C, en €; t, en horas).

a) Representa la función.

b) Di cuál es la pendiente y explica su significado.

6 ▼▽▽ La tarifa de un técnico en reparación de electrodomésticos es de 20 € por desplazamiento y 10 € por hora de trabajo.

a) Representa la función *tiempo* (h) → *importe* (€).

b) Escribe su ecuación.

c) Di cuál es su pendiente y qué significa.

7 ▼▽▽ Esta tabla muestra cómo varía la cantidad de agua de un depósito cuando se abre un desagüe:

t (min)	0	1	2	3	5
V (l)	20	18	16	14	10

a) Representa la función *tiempo* → *volumen*.

b) Escribe su ecuación y su dominio de definición.

c) Di cuál es su pendiente y qué significa.

Rectas

8 ▼▽▽ Representa las rectas siguientes:

a) $y = 4x$ b) $y = -\frac{x}{2}$ c) $y = -4$

9 ▼▽▽ Representa las rectas siguientes:

a) $y = -2x + 1$ b) $y = -\frac{x}{2} + 3$ c) $y = -\frac{8}{5}$

10 ▼▽▽ Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y por P en cada caso:

a) $P(12, -3)$ b) $P(-7, -21)$

11 ▼▽▽ Halla la ecuación de la función de proporcionalidad que pasa por el punto $(-5, 25)$.

12 ▼▽▽ Escribe la ecuación de la recta de la que conocemos un punto y la pendiente, en cada caso:

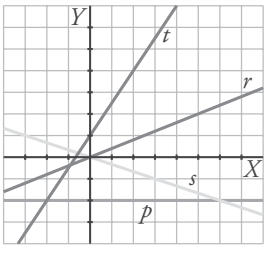
a) $P(-2, 5)$, $m = 3$ b) $P(0, -5)$, $m = -2$

c) $P(0, 0)$, $m = \frac{3}{2}$ d) $P(-2, -4)$, $m = -\frac{2}{3}$

13 ▼▽▽ Halla la pendiente de la recta que pasa por A y B, y escribe su ecuación en cada caso:

a) $A(2, -1)$, $B(3, 4)$ b) $A(-5, 2)$, $B(-3, 1)$

14 ▼▽▽ Asocia cada una de las rectas r, s, t y p a una de las ecuaciones:



a) $y = -\frac{1}{3}x$

b) $y = \frac{3}{2}x + 1$

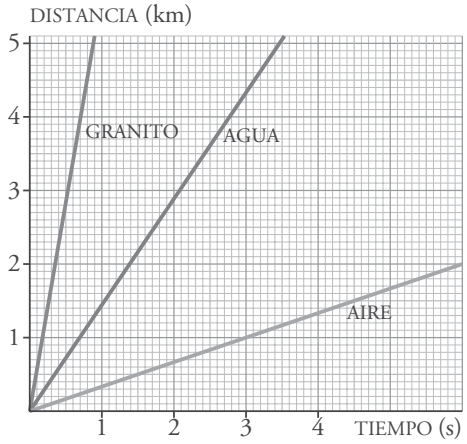
c) $y = \frac{2}{5}x$

d) $y = -2$

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 2.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Aplica lo aprendido

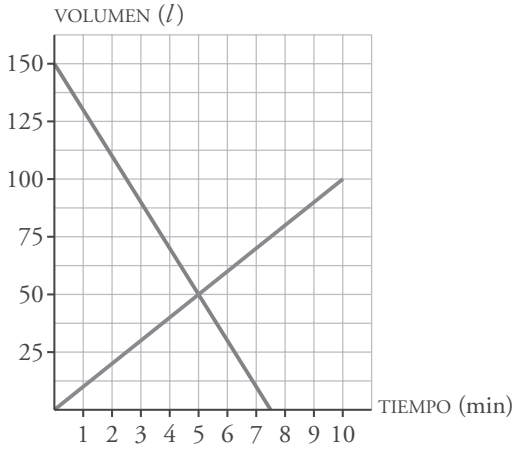
15 ▼▼▽ Las gráficas siguientes muestran la distancia que recorre el sonido en función del tiempo, al propagarse a través de diferentes medios:



a) Halla la pendiente de cada una y explica su significado.

b) Escribe sus ecuaciones.

16 ▼▼▽ Dos depósitos de agua, *A* y *B*, funcionan de la forma siguiente: a medida que *A* se vacía, *B* se va llenando. Estas son las gráficas:

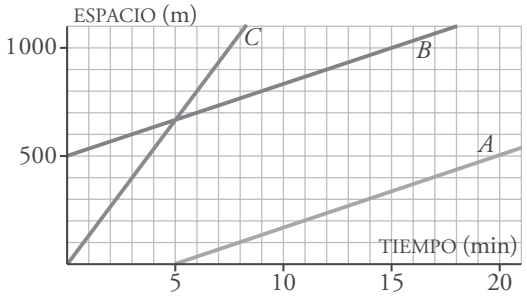


a) Indica cuál es la gráfica de *A*, cuál la de *B* y escribe sus ecuaciones.

b) ¿Cuál es la velocidad de entrada del agua? ¿Y la de salida?

c) ¿En qué momento los dos depósitos tienen igual cantidad de agua?

17 ▼▼▽ Esta es la gráfica del espacio que recorren tres montañeros que van a velocidad constante:



a) ¿Qué velocidad lleva cada uno?

b) Escribe la expresión analítica de estas funciones.

Resuelve problemas

18 ▼▼▽ Israel y Susana, para su próximo viaje a Estados Unidos, han ido a cambiar euros por dólares. A Susana le han cambiado 189 dólares por 150 euros y a Israel le han cambiado 151,2 dólares por 120 euros.

a) Halla la ecuación de la función que nos permite obtener cuántos dólares recibimos según los euros que entreguemos.

b) ¿Cuántos dólares nos darían por 200 euros? ¿Y por 350 euros?

c) ¿Cuántos euros tendríamos si nos hubieran dado 220,5 dólares?

19 ▼▼▽ En una agencia de alquiler de coches cobran, para un modelo concreto, 50 € fijos más 0,20 € por cada kilómetro recorrido.

En otra agencia, por alquilar el mismo modelo, cobran 20 € fijos más 0,30 € por cada kilómetro recorrido.

a) Obtén, en cada uno de los dos casos, la expresión analítica de la función que nos da el gasto total según los kilómetros recorridos.

b) Representa, en los mismos ejes, las dos funciones anteriores. (Elige una escala adecuada, tomando los kilómetros de 100 en 100).

c) Analiza cuál de las dos opciones es más ventajosa, según los kilómetros que vayamos a recorrer.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

20 ▼▼▽ En el contrato de trabajo, a un vendedor de libros se le ofrecen dos alternativas:

A: Sueldo fijo mensual de 1 000 €.

B: Sueldo fijo mensual de 800 € más el 20% de las ventas que haga.

a) Haz una gráfica que muestre lo que ganaría en un mes según la modalidad del contrato. Toma, como x, las ventas que haga, y como y, el sueldo.

b) Escribe la expresión analítica de cada función.

c) ¿A cuánto tienen que ascender sus ventas mensuales para ganar lo mismo con las dos modalidades del contrato? ¿Qué ganancias obtendrá?

21 ▼▼▽ El precio de un viaje en tren depende de los kilómetros recorridos. Por un trayecto de 140 km pagamos 17 €, y si se recorren 360 km, cuesta 39 €. Escribe y representa la ecuación de la recta que relaciona los kilómetros recorridos, x, con el precio del billete, y.

22 ▼▼▽ En un recibo de la luz aparece la siguiente información:

CONSUMO: 1 400 kWh PRECIO DEL kWh: 0,2 €

a) ¿Cuánto cobrarán por la energía consumida?

b) Haz una gráfica y escribe la ecuación de la relación *consumo-coste*.

Utiliza estas escalas:

Eje horizontal → 1 cuadradito = 100 kWh

Eje vertical → 1 cuadradito = 20 €

c) Si, además, nos cobran al mes 20 € por el alquiler del equipo, ¿cómo queda la relación *consumo-coste*? Represéntala junto a la anterior y escribe su ecuación.

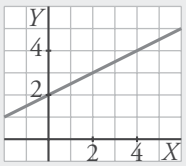
d) ¿Qué transformación sufre el precio si añadimos el 18% de IVA? ¿Cómo se transforma el alquiler del equipo? Representa, junto a las otras, la gráfica de la función resultante y escribe su ecuación.

Autoevaluación

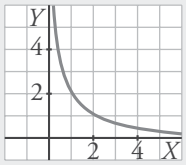
1 Di cuáles de las siguientes fórmulas y gráficas corresponden a funciones lineales:

a) $y = 3 - 2x$ b) $y = \frac{x}{5}$ c) $y = 7$ d) $y = x^2 - 1$

e)



f)



2 Di cuál es la pendiente de las funciones lineales del ejercicio 1.

3 Halla la ecuación de las siguientes rectas:

r: pasa por $P(-3, 2)$ y su pendiente es 3/2.

s: pasa por los puntos $A(5, 0)$ y $B(2, -3)$.

4 La tarifa de los taxis de una ciudad se calcula mediante la fórmula $C = 2 + 1{,}8x$ (C, en €; x, en km).

a) ¿Cuánto pagaremos por un recorrido de 5 km?

b) ¿Cuál es la pendiente de esa función? Explica su significado.

c) Represéntala gráficamente.

5 La temperatura de hoy es de 20 ºC, y vamos a hacer una excursión en globo. Sabemos que la temperatura del aire desciende, aproximadamente, 6 ºC por cada kilómetro de ascensión.

a) ¿Qué temperatura habrá si ascendemos 3 km?

b) Representa la función *altura* → *temperatura* y escribe su expresión analítica.

6 El recibo de la luz de un mes en el que consumimos 120 kWh fue de 34 €. Otro mes, el consumo fue 250 kWh, y el importe de 60 €.

a) Escribe la ecuación de la función que relaciona los kWh consumidos con el importe que habría que pagar.

b) ¿Cuánto pagaremos si consumimos 400 kWh?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

9 Problemas métricos en el plano

Los griegos recogieron el saber matemático (práctico, utilitario, pero muy extenso) acumulado durante milenios por egipcios y babilonios. Y le dieron un impulso y una calidad extraordinarios, muy especialmente a la geometría. Cultivaron el conocimiento por sí mismo (*filosofía* significa *amor a la sabiduría*), sin buscar ninguna utilidad práctica. Y la geometría fue una bella ocupación en la que llegaron muy lejos.

Tales de Mileto (640 a.C.-546 a.C.), gran filósofo, el primero de "los siete sabios de Grecia", marcó la pauta de todo el pensamiento griego posterior. Además de asimilar y mejorar lo que aprendió de los egipcios, inventó y cultivó la matemática deductiva. Su estilo fue sistematizado y mejorado por **Euclides,** dos siglos y medio después.

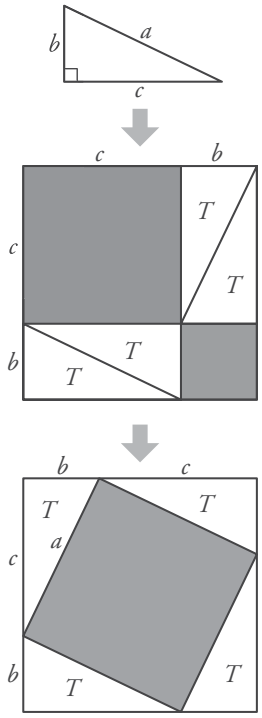
Posterior a Pitágoras y contemporáneo de Arquímedes, el último gran geómetra griego fue **Apolonio** (siglo III a.C.). Con un estilo pulido y sistemático, escribió un tratado dedicado a las cónicas (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola). Siguiendo el espíritu de los griegos, su estudio sobre estas curvas, completísimo, fue meramente especulativo. Le hubiera causado asombro saber que dieciocho siglos después se demostraría que planetas y cometas describen alrededor del Sol órbitas elípticas y, algunos de ellos, hiperbólicas. Y que, posteriormente, las cónicas han sido referentes habituales en la tecnología y en el arte.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

DEBERÁS RECORDAR

- Propiedades de los ángulos en los polígonos.
- La importancia de los triángulos rectángulos en las figuras planas.

1 Teorema de Pitágoras. Aplicaciones



Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo cualquiera, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$$b^2 + c^2 = a^2$$

En el margen hay una bonita demostración de este teorema:

- Los dos cuadrados grandes son iguales. Su lado es $c + b$.
- En el primero, hay dos cuadrados de áreas c^2 y b^2 y cuatro triángulos T.
- En el segundo, hay un cuadrado de área a^2 y cuatro triángulos T.
- Por tanto, al suprimir los cuatro triángulos de cada uno, las áreas de lo que queda coinciden: $b^2 + c^2 = a^2$.

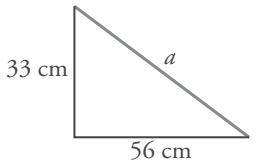
Veamos algunas **aplicaciones del teorema de Pitágoras.**

Cálculo del lado desconocido en un triángulo rectángulo

Aunque el teorema de Pitágoras es una igualdad entre áreas, se utiliza sobre todo para relacionar los lados de un triángulo rectángulo:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2} \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

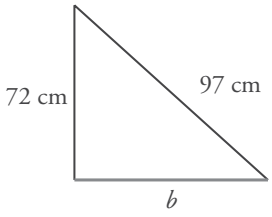
Ejercicios resueltos



1. Calcular la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que los catetos miden 33 cm y 56 cm, respectivamente.

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{33^2 + 56^2} = \sqrt{4\,225} = 65$

La hipotenusa mide 65 cm.



2. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 97 cm, y uno de los catetos, 72 cm. Calcular la longitud del otro cateto.

$b = \sqrt{97^2 - 72^2} = \sqrt{4\,225} = 65$

El cateto desconocido mide 65 cm.

Actividades

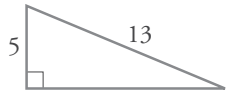
1 En los siguientes triángulos rectángulos, se dan dos catetos y se pide la hipotenusa (si su medida no es exacta, dala con una cifra decimal):

a) 37 cm y 45 cm b) 16 cm y 30 cm

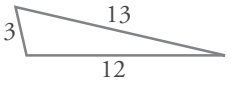
2 En los siguientes triángulos rectángulos, se da la hipotenusa y un cateto, y se pide el otro cateto (exactamente o con una cifra decimal):

a) 45 cm y 37 cm b) 39 cm y 15 cm

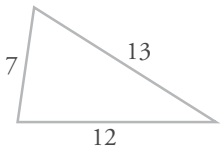
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.



$5^2 + 12^2 = 13^2$



$3^2 + 12^2 < 13^2$



$7^2 + 12^2 > 13^2$

Cómo saber si un triángulo es rectángulo

a, b, c son los lados de un triángulo, y a es el mayor.

— Si $b^2 + c^2 = a^2$, el triángulo es rectángulo.

— Si $b^2 + c^2 < a^2$, el triángulo es obtusángulo.

— Si $b^2 + c^2 > a^2$, el triángulo es acutángulo.

Obtención de un segmento en una figura

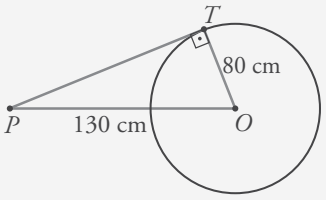
Hay muchas figuras en las que algunos de sus elementos son los lados de un triángulo rectángulo. Esto permite relacionarlos mediante el teorema de Pitágoras. Veamos algunos ejemplos.

Ejercicios resueltos

1. Una circunferencia de centro O tiene un radio de 80 cm. Desde un punto P que dista 130 cm de O trazamos una tangente. ¿Cuál es la longitud del segmento de tangente, PT?

2. Dos circunferencias de centros O y O' y radios 9 cm y 5 cm tienen sus centros a 20 cm. Hallar la longitud del segmento tangente exterior común.

1.

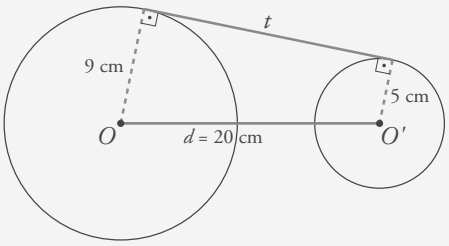


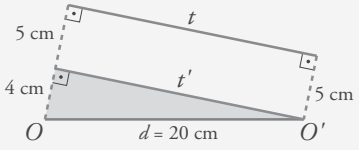
El segmento tangente, PT, es perpendicular al radio, OT.

PT y OT son catetos del triángulo PTO. PO es la hipotenusa. Por tanto:

$\overline{PT} = \sqrt{130^2 - 80^2} = \sqrt{10\,500} = 102{,}47$ cm

2.





$t' = \sqrt{20^2 - 4^2} = 19{,}6$ cm

El trozo de tangente común mide 19,6 cm.

Actividades

3 De un rombo conocemos una diagonal, 24 cm, y el lado, 13 cm. Halla la otra diagonal.

4 Una circunferencia tiene un radio de 15 cm. Una recta, r, corta a la circunferencia en dos puntos, A y B. La distancia entre A y B es de 18 cm. ¿Cuál es la distancia del centro de la circunferencia a la recta?

5 Averigua cómo son los triángulos de lados:

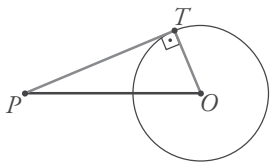
a) 7 cm, 8 cm, 11 cm b) 11 cm, 17 cm, 15 cm

c) 34 m, 16 m, 30 m d) 65 m, 72 m, 97 m

6 Halla el radio de la circunferencia sabiendo que:

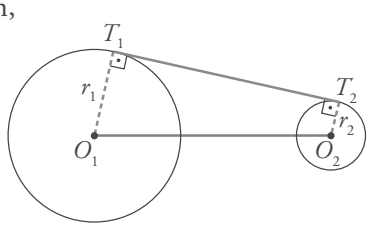
$\overline{OP} = 39$ cm

$\overline{PT} = 36$ cm



7 $r_1 = 15$ cm, $r_2 = 6$ cm, $\overline{O_1O_2} = 41$ cm

Halla la longitud del segmento T_1T_2.



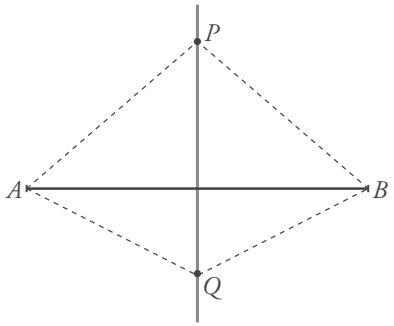
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

2 Lugares geométricos

Se llama **lugar geométrico** a un conjunto de puntos que cumplen una cierta propiedad.

Veamos algunos lugares geométricos conocidos.

Mediatriz de un segmento

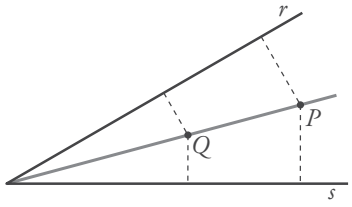


Recuerda que la **mediatriz** de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio.

Los puntos de la mediatriz **equidistan** de los extremos del segmento. Es decir, si P es un punto cualquiera de la mediatriz de AB, se cumple que $\overline{PA} = \overline{PB}$. Además, los puntos de la mediatriz son los únicos que cumplen esta propiedad.

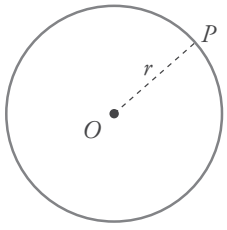
La **mediatriz** de un segmento es el **lugar geométrico** de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Bisectriz de un ángulo



La **bisectriz** de un ángulo es el **lugar geométrico** de los puntos que equidistan de los lados del ángulo, pues los puntos P de la bisectriz cumplen que $dist(P, r) = dist(P, s)$.

Circunferencia

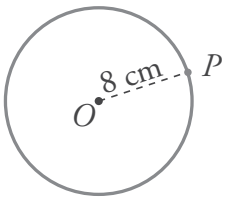


Los puntos P de la circunferencia cumplen la propiedad de que su distancia a O es igual a r. Por tanto:

La circunferencia de centro O y radio r es el lugar geométrico de los puntos P cuya distancia a O es r: $\overline{OP} = r$.

Actividades

1 Define como lugar geométrico una circunferencia de centro C y radio 8 cm.

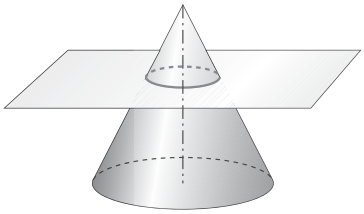


2 Dadas dos rectas paralelas, r y s, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ambas? Dibújalo.

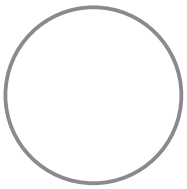
3 Dibuja en negro una recta r. Dibuja en rojo el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a r es 1 cm. (ATENCIÓN: son dos rectas).

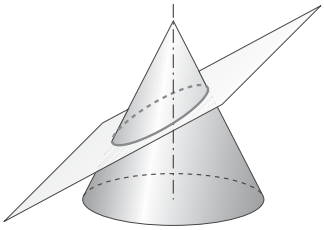
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 2.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

3 Las cónicas como lugares geométricos

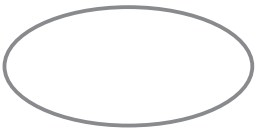


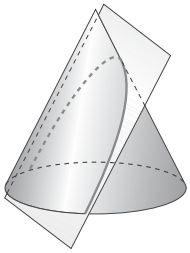
Si cortamos un cono por un plano perpendicular a su eje, la línea de corte es una **circunferencia.**



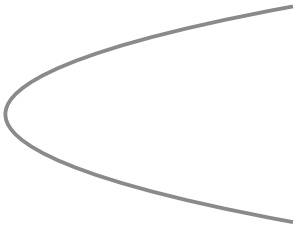


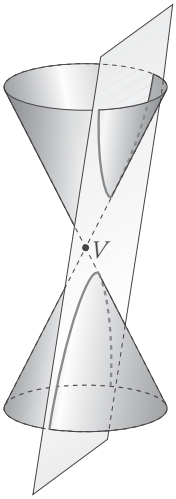
Si el plano que corta al cono tiene una cierta inclinación respecto a su eje, la línea de corte es una **elipse.**



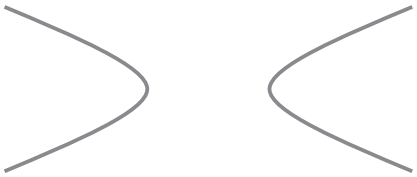


Si el plano que corta al cono es paralelo a una de sus generatrices, se obtiene una curva abierta llamada **parábola.**





Si tomamos dos conos "opuestos por el vértice" y los cortamos por un plano, la línea de corte es una curva con dos ramas llamada **hipérbola.**

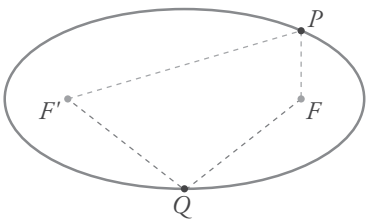


Estas cuatro curvas se llaman **cónicas.** Todas ellas pueden definirse como lugares geométricos. Ya hemos visto cómo se hace con la circunferencia. Veámoslo con las demás.

Elipse

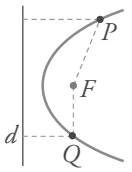
Tenemos dos puntos fijos, llamados **focos,** F y F', y una distancia constante, d. La **elipse** es el lugar geométrico de los puntos P cuya suma de distancias a F y a F' es igual a d:

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = d$$



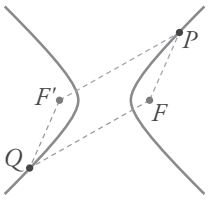
Observa cómo dibuja elipses un jardinero: clava dos estacas en el suelo y ata a ellas una cuerda suficientemente larga. Luego, marca con un punzón sobre la tierra la línea que resulta de moverse manteniendo la cuerda tensa. Esto podrías hacerlo tú con dos chinchetas, un hilo y un lápiz en un papel sobre una madera.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.° ESO. Material fotocopiable autorizado.



Parábola

Tenemos un punto, F, llamado foco, y una recta, d, directriz. **Parábola** es el lugar geométrico de los puntos, P, que equidistan de F y de d: $\overline{PF} = dist(P, d)$.



Hipérbola

Tenemos dos puntos fijos, llamados focos, F y F', y una distancia constante, d. La **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a los focos es d: $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = d$.

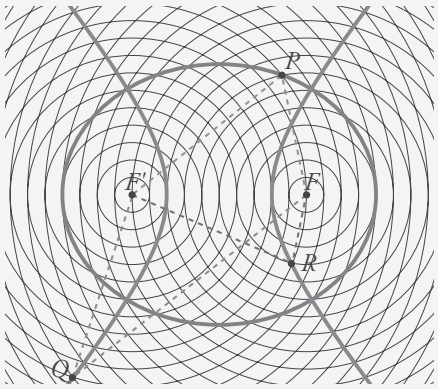
Ejercicios resueltos

1. Utilizar la trama adjunta para dibujar:

a) Una elipse de focos F y F' y constante $d = 18$ (tomamos como unidad la distancia entre dos circunferencias consecutivas).

b) Una hipérbola de focos F y F' y constante $d = 6$.

1.



a) $\left.\begin{matrix}\overline{PF} = 7 \\ \overline{PF'} = 11\end{matrix}\right\}$ $\overline{PF} + \overline{PF'} = 7 + 11 = 18$

Podemos comprobar que cualquier punto de la elipse dibujada cumple esa condición.

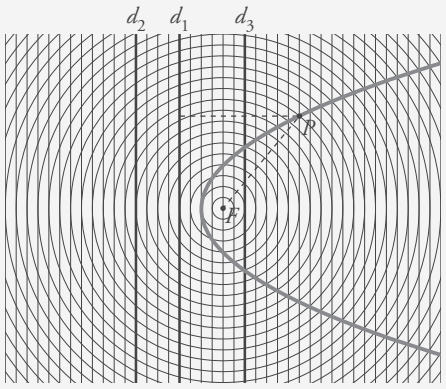
b) $\left.\begin{matrix}\overline{QF} = 17 \\ \overline{QF'} = 11\end{matrix}\right\}$ $\overline{QF} - \overline{QF'} = 17 - 11 = 6$

$\left.\begin{matrix}\overline{RF'} = 10 \\ \overline{RF} = 4\end{matrix}\right\}$ $\overline{RF'} - \overline{RF} = 10 - 4 = 6$

Podemos comprobar que los puntos P de la rama izquierda de la hipérbola cumplen que $\overline{PF} - \overline{PF'} = 6$ y los de la rama derecha $\overline{PF'} - \overline{PF} = 6$. Por tanto, cualquier punto de la hipérbola cumple $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 6$.

2. Utilizar la trama adjunta para dibujar una parábola de foco F y directriz d_1.

2.



$\left.\begin{matrix}dist(P, d_1) = 11 \\ \overline{PF} = 11\end{matrix}\right\}$ $\overline{PF} = dist(P, d_1)$

Podemos comprobar que cualquier punto de la parábola dibujada está a la misma distancia del foco F que de la directriz d_1.

www **6.** Tramas de circunferencias.

Actividades

1 Toma una trama como la del ejercicio resuelto 1 y dibuja en ella:

a) Dos elipses con $d = 14$ y $d = 24$.

b) Dos hipérbolas con $d = 8$ y $d = 4$.

2 Toma una trama como la del ejercicio resuelto 2 y dibuja en ella:

a) Una parábola de foco F y directriz d_2.

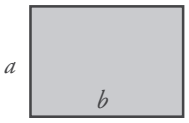
b) Una parábola de foco F y direcctriz d_3.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

4 Áreas de los polígonos

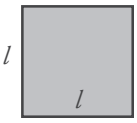
Áreas conocidas

RECTÁNGULO



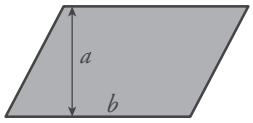
$A = b \cdot a$

CUADRADO



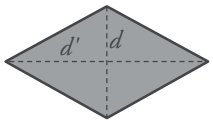
$A = l^2$

PARALELOGRAMO



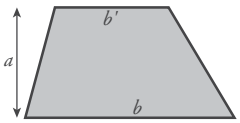
$A = b \cdot a$

ROMBO



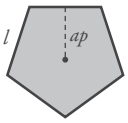
$A = \dfrac{d \cdot d'}{2}$

TRAPECIO



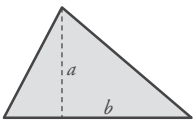
$A = \dfrac{b + b'}{2} \cdot a$

POLÍGONO REGULAR



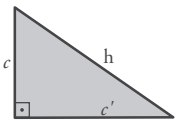
$A = \dfrac{\text{perímetro} \cdot ap}{2}$

TRIÁNGULO



$A = \dfrac{b \cdot a}{2}$

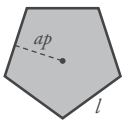
TRIÁNGULO RECTÁNGULO



$A = \dfrac{c \cdot c'}{2}$

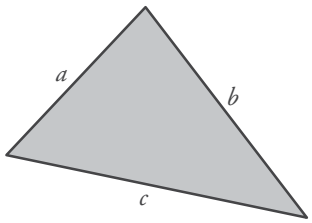
Apotema del pentágono regular

Calcular el área de un polígono regular del que solo conocemos el lado es tarea fácil en algunos casos (triángulo, cuadrado, hexágono, octógono). Pero en el pentágono es difícil obtener la apotema conociendo el lado. Por eso, te damos aquí, sin más, el resultado:



$$ap = l \cdot \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{10} \approx 0{,}6882\ l$$

Área de un triángulo en función de sus lados



La fórmula siguiente es muy útil, pues para aplicarla basta con conocer la longitud de los lados del triángulo.

Perímetro: $p = a + b + c$

Semiperímetro: $s = \dfrac{p}{2}$

$\rightarrow$ $A_{\text{TRIÁNGULO}} = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$

Se llama FÓRMULA DE HERÓN.

Ejercicios resueltos

1. Calcular el área del triángulo de lados 11 cm, 13 cm y 20 cm.

1. Aplicaremos la fórmula de Herón:

Perímetro: $p = 11 + 13 + 20 = 44$ cm $\rightarrow$ $s = 22$ cm

$A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \sqrt{22 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 2} = \sqrt{4\,356} = 66\ \text{cm}^2$

2. Hallar el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 37 cm y 55 cm, y el lado oblicuo, 14 cm.

2.

$(55 - 37) : 2 = 9$ cm

$a = \sqrt{14^2 - 9^2} = \sqrt{115} = 10{,}7$ cm

$A = \dfrac{37 + 55}{2} \cdot 10{,}7 = 492{,}2\ \text{cm}^2$

Actividades

1 Halla el área de un triángulo cuyos lados miden 10 m, 17 m y 21 m.

2 Halla el área del hexágono regular en el que cada uno de sus lados mide 10 cm.

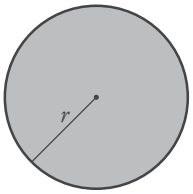
3 Halla el área de un rombo de lado 3 dm, sabiendo que una diagonal mide 46 cm.

4 Dos de los lados de un triángulo isósceles miden 30 cm y 13 cm. Halla su área.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

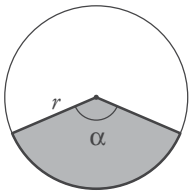
5 Áreas de figuras curvas

CÍRCULO



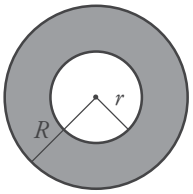
$A = \pi r^2$

SECTOR CIRCULAR



$A = \pi r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360}$

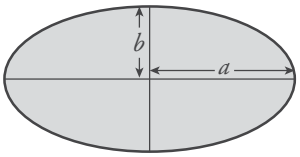
CORONA CIRCULAR



$A = \pi(R^2 - r^2)$

Área de la elipse

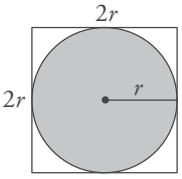
La **elipse** queda caracterizada por sus ejes, cuyas longitudes llamamos $2a$ y $2b$.



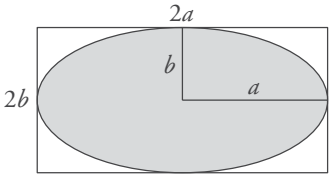
$$A_{\text{ELIPSE}} = \pi ab$$

Observa:

El círculo ocupa $\pi/4$ del cuadrado que lo contiene. La misma proporción que la elipse respecto al rectángulo que la circunscribe:



$$A_{\text{CÍRC.}} = \pi r^2$$
$$A_{\text{CUAD.}} = 4r^2$$
$$\frac{A_{\text{CÍRC.}}}{A_{\text{CUAD.}}} = \frac{\pi}{4}$$



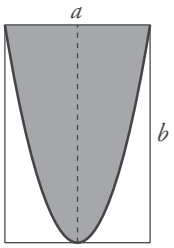
$$A_{\text{ELIPSE}} = \pi ab$$
$$A_{\text{RECT.}} = 4ab$$
$$\frac{A_{\text{ELIPSE}}}{A_{\text{RECT.}}} = \frac{\pi}{4}$$

Es como si, al estirar el cuadrado para que se convierta en rectángulo, el círculo se convirtiera en elipse.

Área de un segmento de parábola

El área de un **segmento de parábola** es igual a 2/3 del rectángulo que lo contiene.

$$A_{\text{SEGM. DE PARÁBOLA}} = \frac{2}{3}ab$$

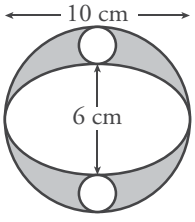


SEGMENTO DE PARÁBOLA

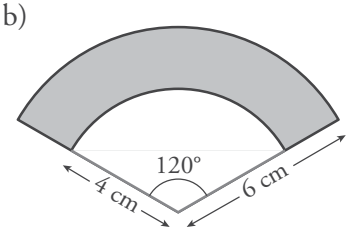
Actividades

1 Halla el área de la parte coloreada en las figuras siguientes:

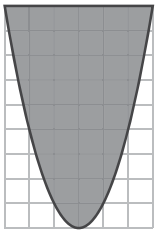
a)



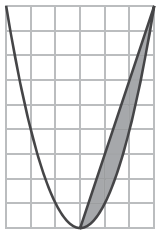
b)



c)



d)



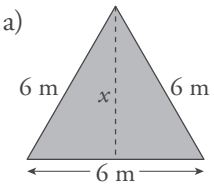
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

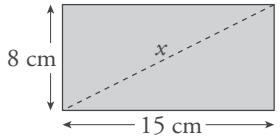
Ejercicios y problemas

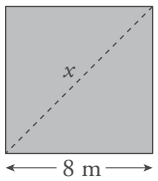
Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

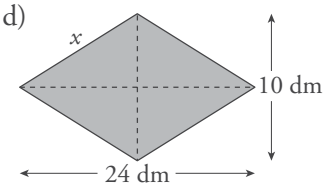
Teorema de Pitágoras

1 ▼▽▽ Calcula el valor de x en estos polígonos:

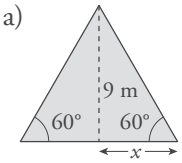
a) 

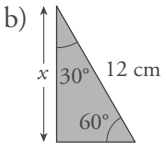
b) 

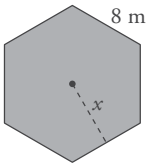
c) 

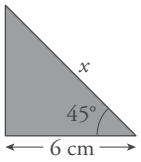
d) 

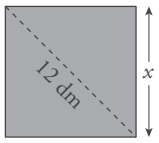
2 ▼▽▽ Calcula x en cada caso:

a) 

b) 

c) 

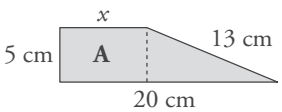
d) 

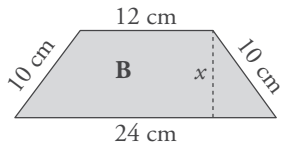
e) 

3 ▼▼▽ La diagonal de un rectángulo mide 37 cm, y uno de sus lados, 12 cm. Calcula su perímetro y su área.

4 ▼▼▽ La diagonal de un rectángulo de lados 7 cm y 24 cm mide igual que el lado de un cuadrado. Halla la diagonal de ese cuadrado.

5 ▼▼▽ Calcula x en estos trapecios y halla su área:





6 ▼▽▽ Clasifica en rectángulos, acutángulos u obtusángulos los triángulos de lados:

a) 11 m, 13 m, 20 m.
b) 20 m, 21 m, 29 m.
c) 25 m, 29 m, 36 m.
d) 7 m, 24 m, 25 m.

Lugares geométricos y cónicas

7 ▼▽▽ ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a una recta r es de 2 cm? Dibújalo.

8 ▼▽▽ Define como lugar geométrico una circunferencia de centro O y radio 5 cm.

9 ▼▽▽ ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es 26 cm? ¿Cómo se llaman los dos puntos fijos?

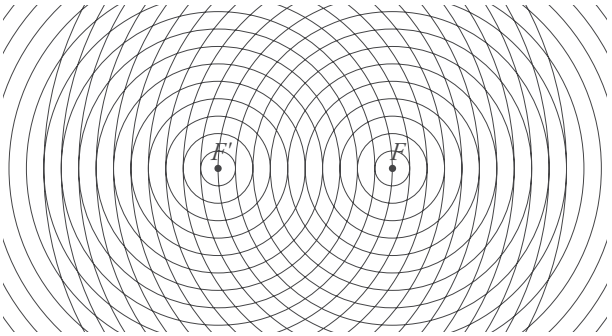
10 ▼▽▽ ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a otros dos puntos fijos es 4 cm? ¿Cómo se llaman los dos puntos fijos?

11 ▼▽▽ ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo y de una recta dada? ¿Cómo se llaman el punto fijo y la recta?

12 ▼▼▽ Utiliza una trama como esta para dibujar:

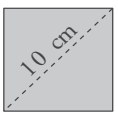
a) Dos elipses de focos F y F' y constantes $d = 16$ y $d = 20$, respectivamente (toma como unidad la distancia entre dos circunferencias consecutivas).

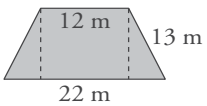
b) Dos hipérbolas de focos F y F' y constantes $d = 2$ y $d = 7$.

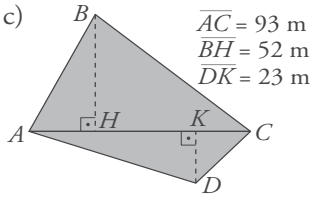


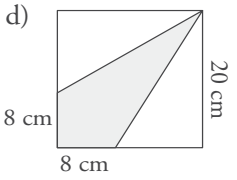
Áreas

13 ▼▼▽ Halla el área de las figuras coloreadas.

a) 

b) 

c) 

d) 

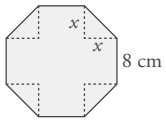
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

14 ▼▼▽ Calcula la longitud de la apotema y el área de un pentágono regular de 10 cm de lado.

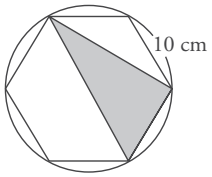
15 ▼▼▽ Observa el octógono regular de la figura, que tiene 8 cm de lado, y calcula su área:



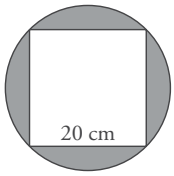
16 ▼▼▽ El lado de un octógono regular mide 6 cm. Calcula la longitud de su apotema y su área.

17 ▼▼▽ Calcula el área de las figuras coloreadas:

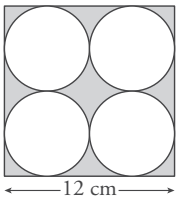
a)



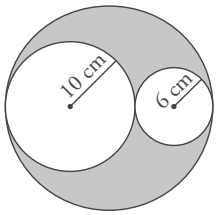
b)



c)



d)

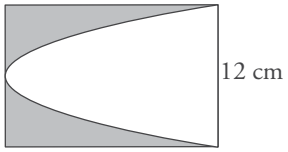


18 ▼▼▽ Halla, en cada caso, el área y el perímetro de un sector circular de 15 cm de radio y de amplitud:

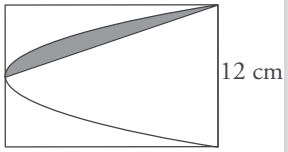
a) 90° b) 120° c) 65° d) 140°

19 ▼▽▽ Halla el área de la zona coloreada en cada figura:

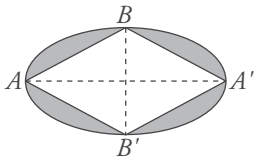
a)



b)



20 ▼▼▽ Las diagonales del rombo inscrito en la elipse miden 16 cm y 30 cm. Halla el área de la parte coloreada.



21 ▼▽▽ Comprueba que los siguientes triángulos son rectángulos y calcula sus áreas de dos formas: a partir de sus catetos y aplicando la fórmula de Herón.

a) 51 cm, 68 cm y 85 cm.

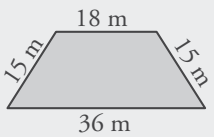
b) 110 m, 264 m y 286 m.

c) 72 dam, 135 dam y 153 dam.

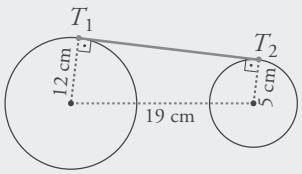
d) 48 m, 140 m y 148 m.

Autoevaluación

1 Halla la altura de esta figura:



2 Halla la longitud del segmento T_1T_2 aproximando hasta los milímetros.



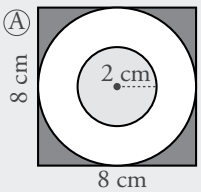
3 Completa:

a) El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento es…

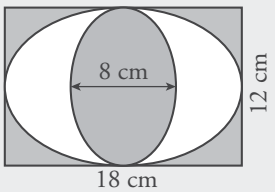
b) Una elipse es el lugar geométrico de los puntos tales que…

4 Calcula el área de la zona coloreada en cada caso:

Ⓐ



Ⓑ

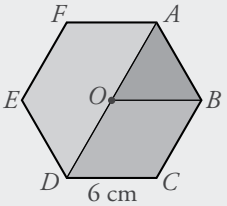


5 En el hexágono regular de lado 6 cm, calcula:

a) El área del triángulo *OAB*.

b) El área del trapecio *ADEF*.

c) El área del rombo *OBCD*.



© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

10 Cuerpos geométricos

Entre las formas poliédricas que vamos a ver en esta unidad están los sólidos platónicos y los arquimedianos. Platón y Arquímedes: ¿qué papel desempeñaron estos dos genios en la historia de la matemática?

Platón (427 a.C.-347 a.C.) fue un filósofo ateniense que se interesó, sobre todo, por la filosofía moral, y consideraba la ciencia como una clase de conocimiento inferior. Le gustaban las matemáticas por sus abstracciones idealizadas y su separación de lo meramente material. Aunque su especialidad no fueron las matemáticas, impulsó su estudio hasta el punto de que, en la entrada de la Academia (especie de universidad ateniense que él fundó) había un letrero que decía "No entre aquí quien no sepa matemáticas".

Atribuyó a los poliedros regulares una estrecha relación con el universo: los cielos debían reflejar la perfección de la matemática abstracta en su forma más sencilla.

Platón ejerció una gran influencia en el pensamiento posterior.

Arquímedes (287 a.C.-212 a.C.) fue ingeniero, matemático e inventor. A lo largo de su vida diseñó y construyó multitud de ingenios mecánicos. Y se valió de la experimentación para descubrir propiedades físicas o matemáticas que, después, se esmeraba en probar con rigor.

Gran calculista, dedujo las fórmulas para la obtención de áreas y volúmenes de figuras geométricas. Y estudió los 13 sólidos que llevan su nombre.

Aunque, posiblemente, su manera de enfocar las matemáticas habría horrorizado a Platón, Arquímedes fue el más grande matemático de la Antigüedad.

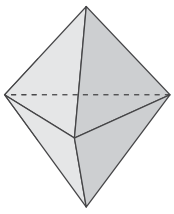
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

DEBERÁS RECORDAR

- Poliedros. Características.
- Cuerpos de revolución. Características.

1 Poliedros regulares (sólidos platónicos)

Los sólidos platónicos

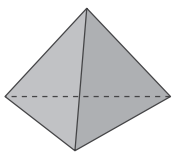


Aunque sus seis caras son triángulos equiláteros idénticos, este poliedro **no es regular,** porque en unos vértices concurren tres caras y en otros, cuatro.

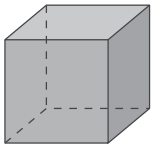
Un **poliedro** se llama **regular** cuando cumple las dos condiciones siguientes:

1. Sus caras son polígonos regulares idénticos.
2. En cada vértice del poliedro concurre el mismo número de caras.

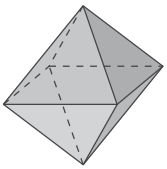
Solo hay cinco poliedros regulares:



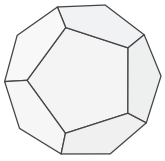
TETRAEDRO
4 caras, triángulos



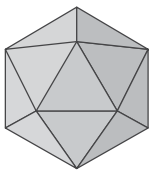
CUBO o HEXAEDRO
6 caras, cuadrados



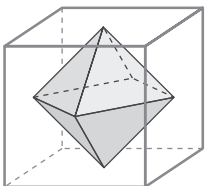
OCTAEDRO
8 caras, triángulos

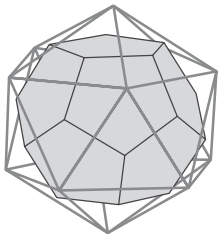


DODECAEDRO
12 caras, pentágonos



ICOSAEDRO
20 caras, triángulos





Poliedros duales

Al unir mediante segmentos los centros de cada dos caras contiguas de un cubo, se forma un octaedro.

Si hiciéramos lo mismo con un octaedro, se formaría un cubo. Por eso decimos que el octaedro y el cubo son **poliedros duales.**

El número de caras de un poliedro coincide con el número de vértices de su dual. Y ambos tienen el mismo número de aristas.

	CUBO	OCTAEDRO
CARAS	6	8
VÉRTICES	8	6
ARISTAS	12	12

Actividades

1 Haz una tabla con el número de caras, vértices y aristas de los cinco poliedros regulares.

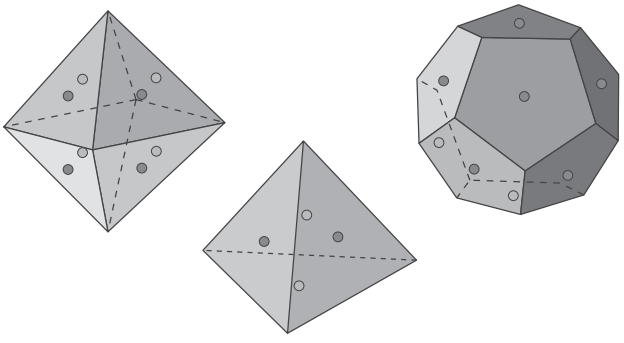
	TETR.	CUBO	OCT.	DODEC.	ICOS.
CARAS					
VÉRTICES					
ARISTAS					

a) Comprueba que los cinco cumplen la fórmula de Euler. [Recuerda: $c + v = a + 2$].

b) Comprueba que el dodecaedro y el icosaedro cumplen las condiciones necesarias para ser duales.

c) Comprueba que el tetraedro cumple las condiciones para ser dual de sí mismo.

2 Hemos señalado en rojo los centros de las caras "frontales" de estos poliedros, y más claro, los centros de algunas caras "ocultas". Uniéndolos convenientemente se obtienen los poliedros duales. Hazlo en tu cuaderno.



© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

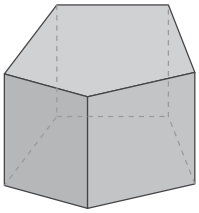
2 Poliedros semirregulares

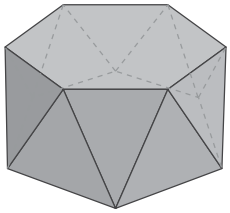
Se llama **poliedro semirregular** a aquel cuyas caras son polígonos regulares de dos o más tipos y tal que en todos los vértices concurren los mismos polígonos.

Interesante

Un poliedro semirregular tiene, necesariamente, todas sus aristas iguales. No es difícil razonar por qué. Inténtalo.

Por ejemplo, estos dos poliedros son semirregulares:

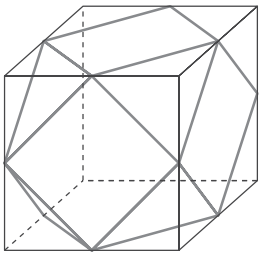


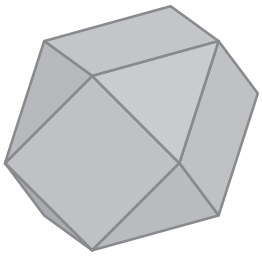


El de la izquierda es un prisma pentagonal regular con caras laterales cuadradas. El de la derecha se llama **antiprisma.** Este, en concreto, es hexagonal regular y en cada vértice concurren un hexágono y tres triángulos equiláteros.

Truncando poliedros regulares

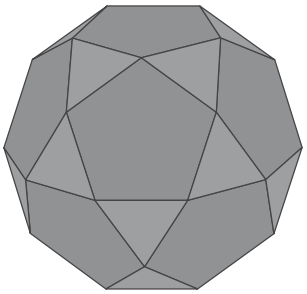
Truncar es, mediante un corte plano, suprimir un vértice de un poliedro. Analicemos la figura que se obtiene al truncar todos los vértices de un cubo mediante *planos que pasan por los puntos medios de las aristas* adyacentes.





La figura resultante, llamada **cuboctaedro,** tiene 6 caras cuadradas (una por cada cara del cubo) y 8 caras triangulares (una por cada vértice truncado). En cada vértice de la nueva figura concurren dos cuadrados y dos triángulos equiláteros. Es, pues, un poliedro semirregular.

En las actividades que se proponen a continuación se reflexiona sobre el nombre de esta figura, **cuboctaedro,** y de la que se obtiene de forma similar a partir del dodecaedro o del icosaedro: el **icosidodecaedro.**



ICOSIDODECAEDRO

Actividades

1 Vamos a truncar, dando cortes que pasen por los puntos medios de las aristas, los restantes poliedros regulares.

a) Al truncar de este modo un tetraedro, se obtiene una figura conocida. ¿Cuál?

b) El resultado de truncar el octaedro también es conocido. ¿Comprendes, ahora, por qué a esta figura se la llama cuboctaedro?

c) Describe la figura que resulta de truncar (puntos medios de las aristas) un dodecaedro y explica por qué es un poliedro semirregular (se llama icosidodecaedro).

d) Describe la figura que resulta de truncar (puntos medios de las aristas) un icosaedro.

e) Relaciona los resultados anteriores con la dualidad de poliedros estudiada en la página anterior.

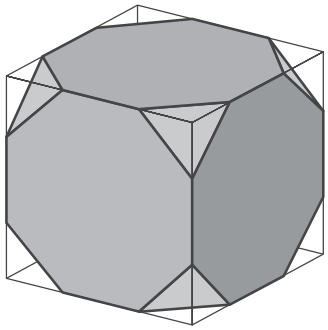
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Otro tipo de truncamiento

Sólidos arquimedianos

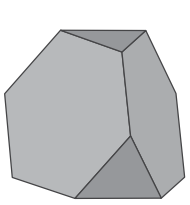
Arquímedes estudió un tipo de poliedros semirregulares que se conocen como *sólidos arquimedianos*. Son un total de 13: los 5 estudiados en esta página, los 2 truncados de la página de la izquierda y otros 6 más complicados.

Si truncamos los vértices de un cubo dejando parte de las aristas, las caras se tornan en octógonos. Cortando a distancias adecuadas, los octógonos serán regulares y, así, el cuerpo obtenido, **cubo truncado,** es un poliedro semirregular.

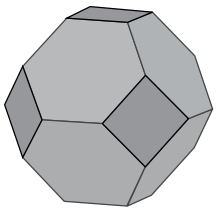


Truncando los vértices de un cubo a distancias adecuadas de los vértices se obtiene un poliedro semirregular (llamado **cubo truncado**), en cada uno de cuyos vértices concurren dos octógonos y un triángulo.

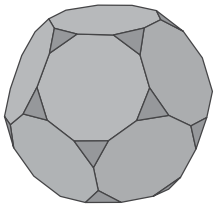
Análogamente, el tetraedro truncado, el octaedro truncado, el dodecaedro truncado y el icosaedro truncado son poliedros semirregulares.



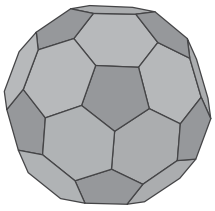
TETRAEDRO TRUNCADO



OCTAEDRO TRUNCADO



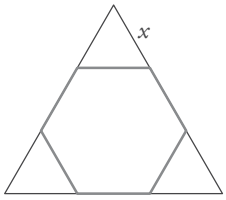
DODECAEDRO TRUNCADO



ICOSAEDRO TRUNCADO

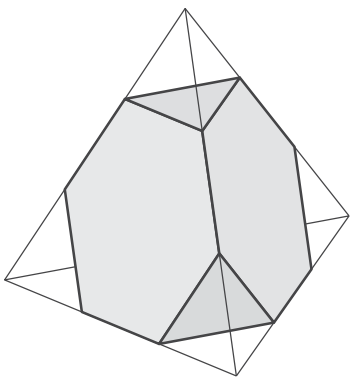
Actividades

2



¿A qué distancia del vértice hemos de cortar los triángulos pequeños para que el hexágono resultante sea regular?

3 Describe el tetraedro truncado.



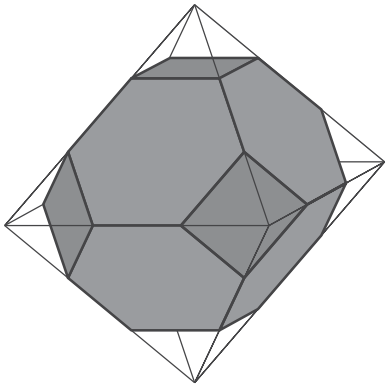
¿Cuántas caras tiene?

¿Cuántas son de cada tipo?

¿Cuántos vértices? ¿Cuántas aristas?

¿Cuánto mide la arista del tetraedro truncado con relación a la del tetraedro original?

4 Describe el octaedro truncado.



Caras, tipos.

Vértices.

Aristas.

5 Conociendo las características de un dodecaedro (caras, vértices), describe cómo será el dodecaedro truncado.

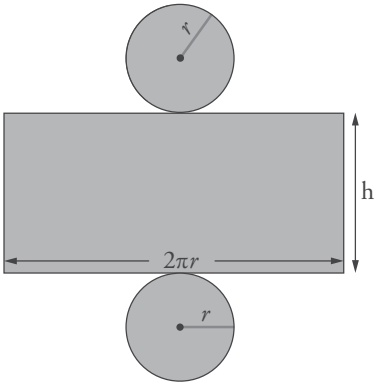
6 Conocidas las características de un icosaedro, describe cómo será el icosaedro truncado.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

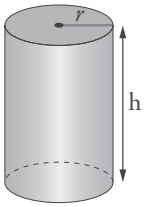
3 Superficie de los cuerpos geométricos

Área de un poliedro

El área de un poliedro se obtiene sumando el área de todas sus caras. El proceso se facilita partiendo del desarrollo del poliedro.



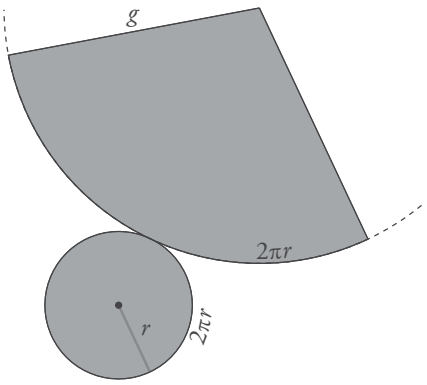
Área de un cilindro

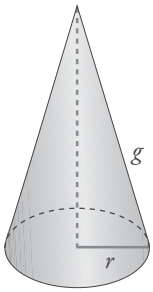


La superficie lateral de un cilindro es un rectángulo cuya base es igual al perímetro del círculo, $2\pi r$, y cuya altura, h, es la del cilindro.

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{LATERAL}} = 2\pi r \cdot \text{h} \\ A_{\text{BASE}} = \pi r^2 \end{array}\right\} A_{\text{TOTAL}} = 2\pi r\text{h} + 2\pi r^2$$

Área de un cono





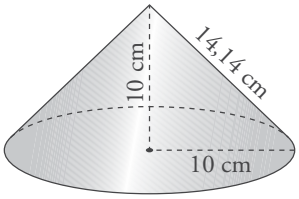
El desarrollo lateral de un cono es un sector circular de un círculo de radio g, y abarca un arco cuya longitud coincide con la de la circunferencia base del cono $(2\pi r)$.

$$A_{\text{LATERAL}} = \pi rg$$

$$A_{\text{TOTAL}} = \pi rg + \pi r^2$$

Ejercicio resuelto

Hallar el área total de un cono rectángulo (altura = radio) de radio 10 cm. ¿Qué ángulo tiene el sector circular con el cual se construye?



La generatriz mide $g = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14{,}14$ cm

$A_{\text{LATERAL}} = \pi rg = \pi \cdot 10 \cdot 14{,}14 = 444$ cm^2

$A_{\text{TOTAL}} = 444 + \pi \cdot 10^2 = 758$ cm^2

Perímetro de la base del cono = $2\pi \cdot 10 = 62{,}83$ cm

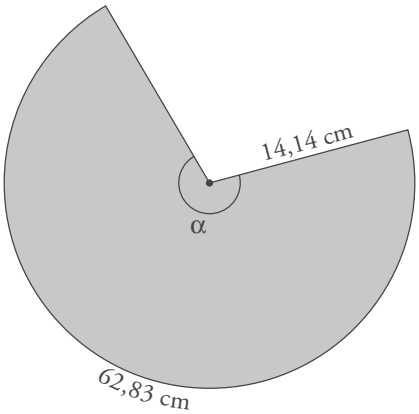
El sector circular está dibujado con un radio de 14,14 cm.

Con ese radio, la circunferencia completa mide:

$$l = 2 \cdot \pi \cdot 14{,}14 = 88{,}84 \text{ cm}$$

Por tanto, podemos establecer la siguiente proporción:

$$\frac{\alpha}{62{,}83} = \frac{360°}{88{,}84} \rightarrow \alpha = 254{,}60° = 254°\ 36'$$

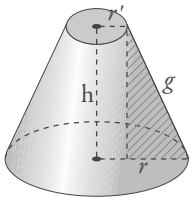


CON CALCULADORA:

62,83 × 360 ÷ 88,84 = 254.60... °''' 254°36°5.51°

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

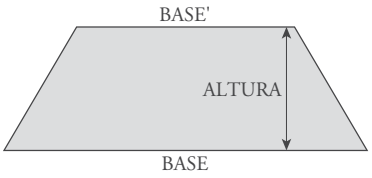
Área de un tronco de cono



En un tronco de cono, la altura, h, la diferencia de los radios, $r - r'$, y la generatriz, g, forman un triángulo rectángulo. Por tanto:

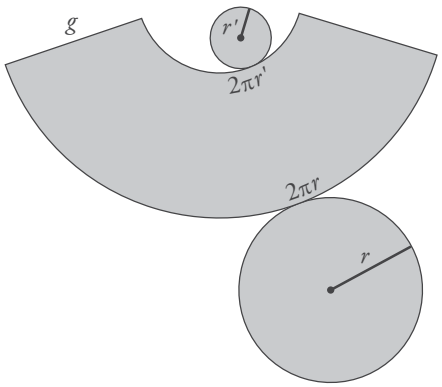
$$g^2 = h^2 + (r - r')^2$$

Recuerda: área de un trapecio



$$\text{ÁREA} = \frac{\text{BASE} + \text{BASE}'}{2} \cdot \text{ALTURA}$$

La fórmula para el cálculo del área lateral de un tronco de cono recuerda la del área de un trapecio. Observa:



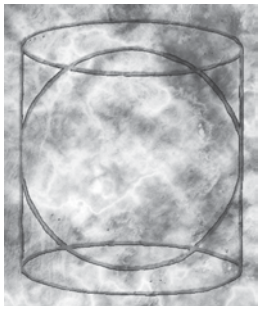
$$A_{\text{LATERAL}} = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} \cdot g = \pi(r + r')g$$

$$A_{\text{TOTAL}} = \pi(r + r')g + \pi r^2 + \pi r'^2$$

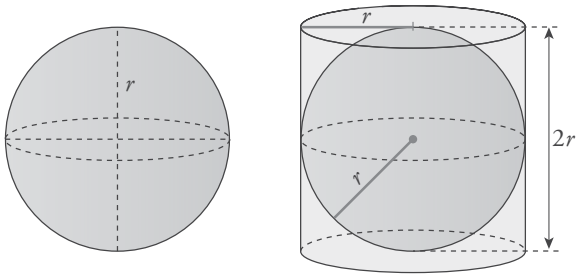
Áreas en la esfera

Arquímedes. Esfera y cilindro

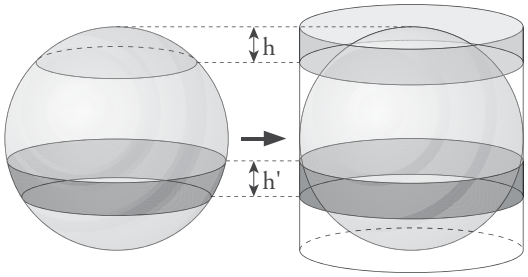
Arquímedes se sentía especialmente orgulloso de las relaciones que encontró entre las áreas de la esfera y el cilindro, así como entre los volúmenes de los mismos cuerpos. Hasta el punto de que pidió que en su tumba se grabara esta figura:



El área de la superficie esférica es igual al área lateral del cilindro que envuelve a la esfera. Y lo mismo ocurre con las superficies de ambos cuerpos comprendidas entre secciones planas paralelas.



$$A_{\text{ESFERA}} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$$



$$A_{\text{CASQUETE ESFÉRICO}} = 2\pi r \cdot h$$

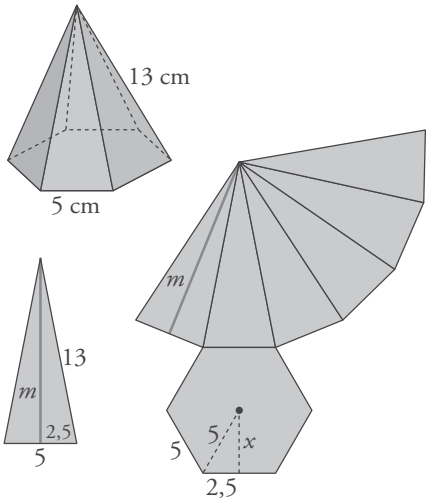
$$A_{\text{ZONA ESFÉRICA}} = 2\pi r \cdot h'$$

Estas relaciones entre esfera y cilindro son muy interesantes. Pero más aún es lo siguiente: cualquier figura que dibujemos en la esfera, al proyectarla sobre el cilindro, da lugar a otra figura que puede ser muy distinta pero tiene la misma superficie.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios resueltos

1. Calcular el área total de una pirámide recta hexagonal regular, sabiendo que la arista de la base mide 5 cm, y la arista lateral, 13 cm.



- Cálculo de la apotema de la pirámide (m) y de la apotema de la base (x):

$$m = \sqrt{13^2 - 2{,}5^2} \approx 12{,}76 \text{ cm} \qquad x = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} \approx 4{,}33 \text{ cm}$$

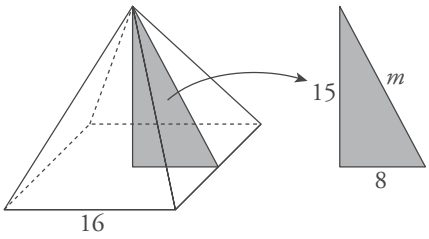
- Cálculo del área:

$$A_{\text{LATERAL}} = 6 \cdot \frac{5 \cdot m}{2} = 6 \cdot \frac{5 \cdot 12{,}76}{2} = 191{,}4 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{BASE}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot x}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4{,}33}{2} = 64{,}95 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LATERAL}} + A_{\text{BASE}} = 191{,}4 + 64{,}95 = 256{,}35 \text{ cm}^2$$

2. Calcular el área total de una pirámide recta de 15 cm de altura, cuya base es un cuadrado de 16 cm de lado.

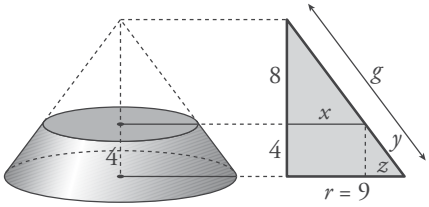


$$m = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$$

$$A_{\text{CARA LATERAL}} = \frac{16 \cdot 17}{2} = 136 \text{ cm}^2 \qquad A_{\text{BASE}} = 16^2 = 256 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot A_{\text{CARA LATERAL}} + A_{\text{BASE}} = 4 \cdot 136 + 256 = 800 \text{ cm}^2$$

3. Un cono tiene 12 cm de altura y 9 cm de radio en la base. Calcular el área lateral y el área total del tronco de cono que se obtiene al cortar el cono por un plano paralelo a la base a 4 cm de altura.



- Primero es necesario conocer la generatriz: $g = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$ cm
- Necesitamos calcular el radio de la base menor (x) y la generatriz del tronco (y). Recurriendo a la semejanza y al teorema de Pitágoras:

$$\frac{12}{9} = \frac{8}{x} \rightarrow x = 6 \text{ cm} \qquad z = 9 - x \rightarrow z = 9 - 6 = 3 \text{ cm}$$

$$y = \sqrt{4^2 + z^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$$

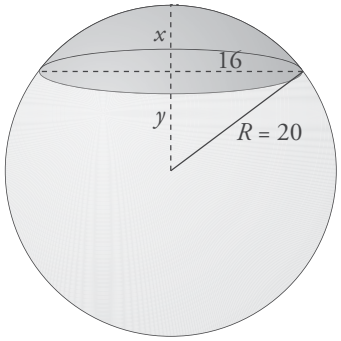
- Cálculo del área:

$$A_{\text{LATERAL}} = \pi(r + x)y = 3{,}14 \cdot (9 + 6) \cdot 5 = 235{,}5 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{BASES}} = \pi r^2 + \pi x^2 = 3{,}14 \cdot 9^2 + 3{,}14 \cdot 6^2 = 367{,}38 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LATERAL}} + A_{\text{BASES}} = 235{,}5 + 367{,}38 = 602{,}88 \text{ cm}^2$$

4. Cortamos una esfera de 20 cm de radio obteniendo, en la sección, un círculo de 16 cm de radio. ¿Cuál es el área del casquete esférico que hemos separado de la esfera?



- Calculamos la altura, x, del casquete:

$$y = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12 \text{ cm} \qquad x = 20 - y = 20 - 12 = 8 \text{ cm}$$

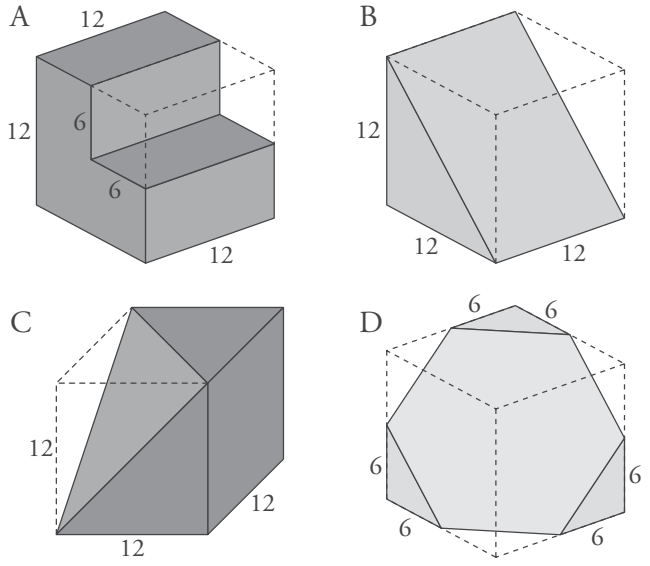
- Calculamos el área del casquete:

$$A = 2\pi Rx = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 20 \cdot 8 = 1\,004{,}8 \text{ cm}^2$$

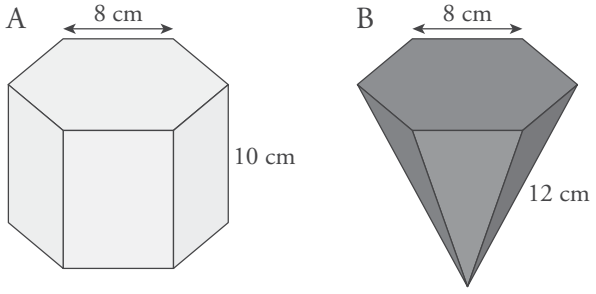
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Actividades

1 Calcula el área de estos poliedros obtenidos a partir de un cubo de 12 cm de arista:



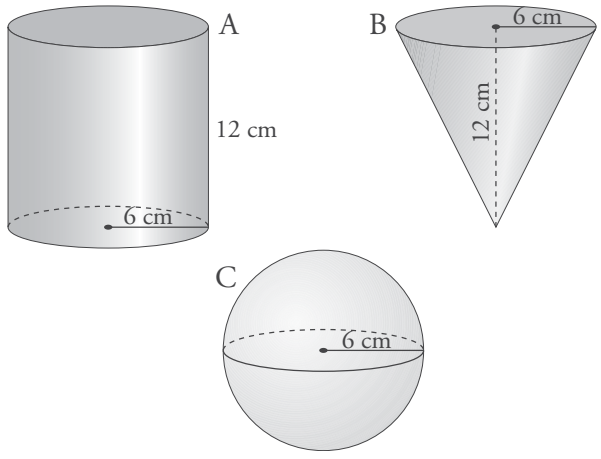
2 Obtén la medida de la superficie del prisma y de la pirámide. La base de ambos es un hexágono regular.



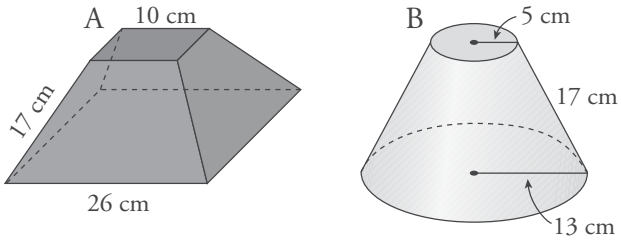
ARISTA BASE → 8 cm
ALTURA PRISMA → 10 cm

ARISTA BASE → 8 cm
ARISTA LATERAL → 12 cm

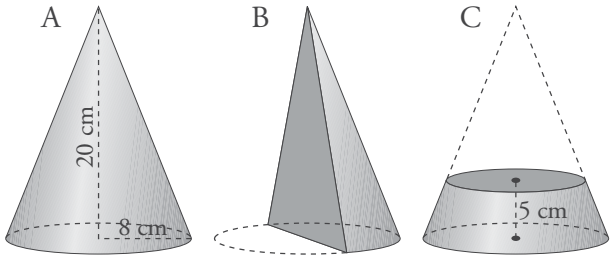
3 Calcula el área de estos cuerpos:



4 Calcula el área de los siguientes cuerpos:



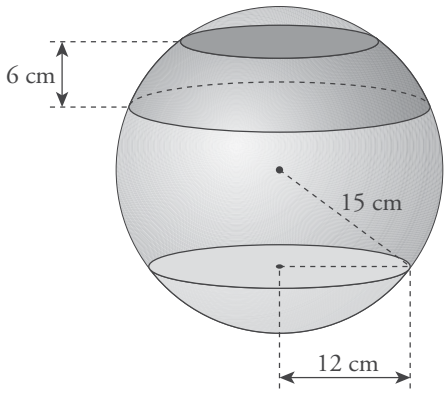
5 Calcula el área total del cono, del cuerpo que resulta de partirlo por la mitad y del tronco de cono obtenido al cortar por una sección paralela a la base, a 5 cm de la misma.



6 En una esfera de 30 cm de diámetro, calcula:

a) El área de una zona esférica de 6 cm de altura.

b) El área de un casquete esférico cuya base tiene un radio de 12 cm.



7 Halla el área de:

a) Un prisma recto cuya base es un rombo de diagonales 12 cm y 20 cm, sabiendo que su arista lateral mide 24 cm.

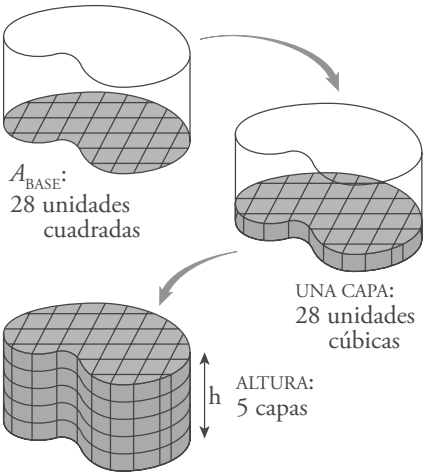
b) Una pirámide recta con la misma base y la misma arista lateral que el prisma anterior.

c) Un cuboctaedro de 10 cm de arista.

d) Un dodecaedro truncado de 10 cm de arista.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

4 Medida del volumen de los cuerpos geométricos

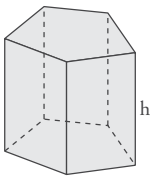


VOLUMEN = $A_{BASE} \cdot h$

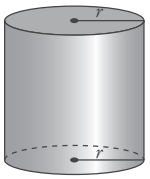
$V = 28 \cdot 5 = 140$ unidades cúbicas

Volumen de prismas y cilindros

El volumen de cualquier figura con dos bases iguales y paralelas entre sí (figura prismática) se obtiene multiplicando el área de la base por la altura.



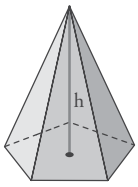
$V = A_{BASE} \cdot h$



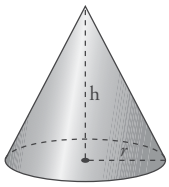
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ ($\pi \cdot r^2 = A_{BASE}$)

Volumen de pirámides y conos

El volumen de una pirámide o de un cono es igual a un tercio del área de la base por la altura.



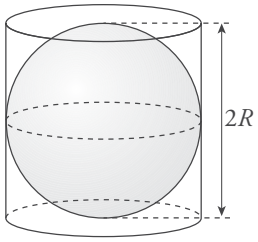
$V = \frac{1}{3} A_{BASE} \cdot h$



$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$

Volumen de la esfera

El volumen de la esfera de radio R es: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

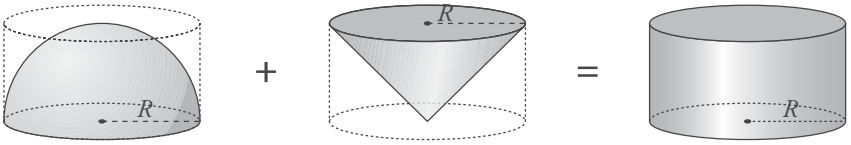


$V_{CILINDRO} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$

- Observa que el volumen de la esfera es igual a dos tercios del volumen del cilindro que la envuelve.

$$V_{ESFERA} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}(2\pi R^3) = \frac{2}{3} V_{CILINDRO}$$

- Una relación interesante:

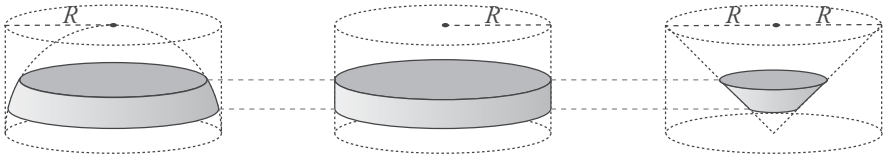


$V_{SEMIESFERA}$ + V_{CONO} = $V_{CILINDRO}$

$\left(\frac{2}{3} V_{CILINDRO}\right)$ $\left(\frac{1}{3} V_{CILINDRO}\right)$

Volumen de una zona esférica

La relación anterior, entre los volúmenes de la semiesfera, el cono y el cilindro, se cumple también para las correspondientes porciones determinadas por planos paralelos.



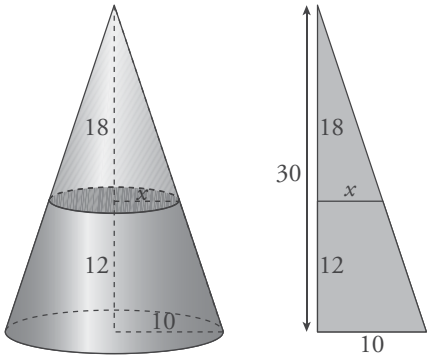
$V_{PORCIÓN\ DE\ ESFERA}$ = $V_{PORCIÓN\ DE\ CILINDRO}$ − $V_{TRONCO\ DE\ CONO}$

No lo olvides

La relación de la derecha permite calcular el volumen de una zona esférica restando al volumen de un cilindro el volumen de un tronco de cono.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios resueltos



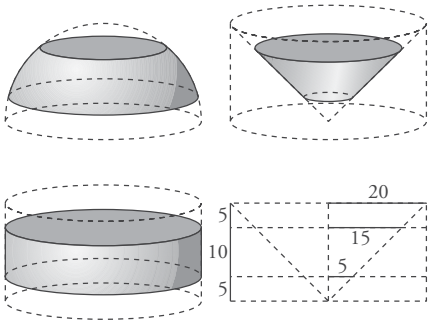
1. Un cono de 10 cm de radio en la base y 30 cm de altura se corta por un plano paralelo a la base a 12 cm de ella. Calcular el volumen del tronco de cono obtenido.

- Calculamos el radio de la base menor (x): $\left.\begin{array}{l}\\\end{array}\right\} \dfrac{18}{x} = \dfrac{30}{10} \rightarrow x = \dfrac{18 \cdot 10}{30} = 6$ cm

- Calculamos el volumen:

$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = V_{\text{CONO MAYOR}} - V_{\text{CONO MENOR}} =$

$= \dfrac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 30 - \dfrac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 18 = 3\,140 - 678{,}24 = 2\,461{,}76 \text{ cm}^3$



2. Una esfera de 20 cm de radio se corta por dos planos paralelos que distan del centro 5 cm y 15 cm, respectivamente. Calcular el volumen de la porción de esfera comprendida entre ambos planos.

$V_{\text{PORCIÓN DE CILINDRO}} = \pi \cdot 20^2 \cdot 10 = 4\,000\pi \text{ cm}^3$

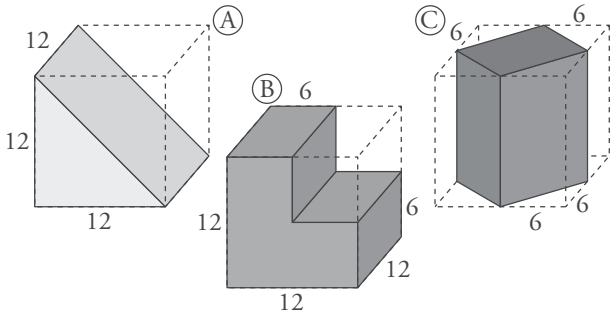
$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 15^2 \cdot 15 - \dfrac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 5 = 1\,083{,}33\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{PORCIÓN DE ESFERA}} = V_{\text{PORCIÓN DE CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}} =$

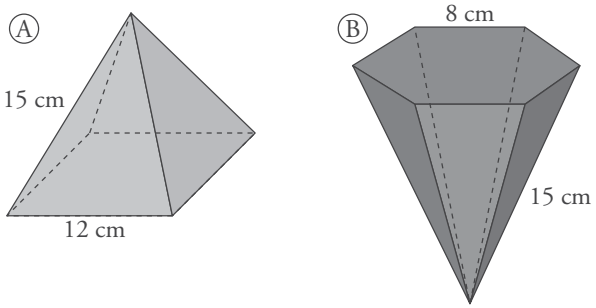
$= 4\,000\pi - 1\,083{,}33\pi = 9\,158{,}34 \text{ cm}^3$

Actividades

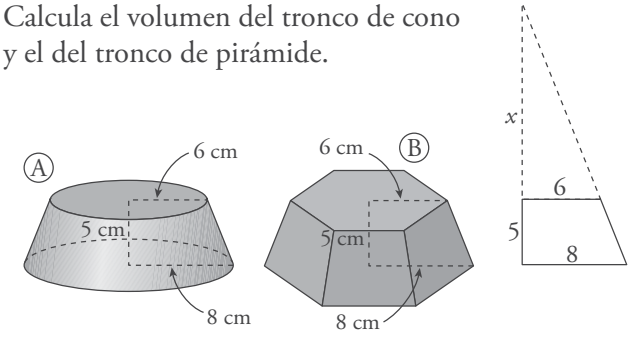
1 Calcula el volumen de estos prismas, obtenidos cortando un cubo de 12 cm de arista:



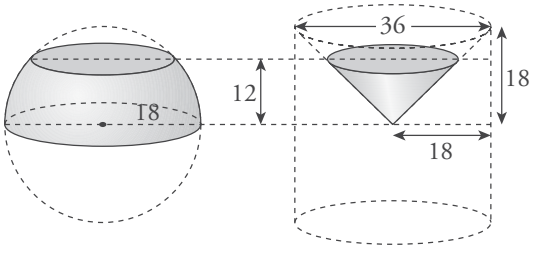
2 Calcula el volumen de estas pirámides cuyas bases son polígonos regulares:



3 Calcula el volumen del tronco de cono y el del tronco de pirámide.



4 Se corta una esfera de 36 cm de diámetro por dos planos paralelos: uno pasa por el centro y el otro dista 12 cm del centro.



Calcula el volumen de cada una de las tres porciones en las que ha quedado dividida la esfera.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

5 Coordenadas geográficas

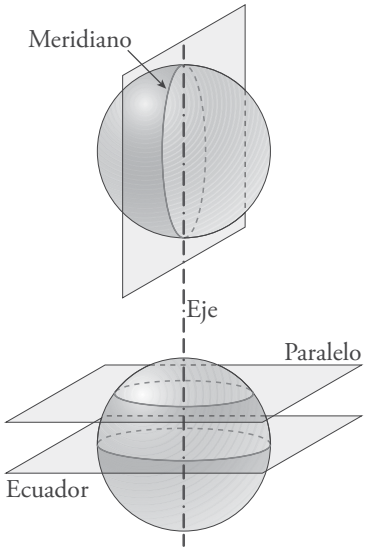
La esfera terrestre

La Tierra es una esfera que gira como una peonza. Al arrastrarnos en su giro, nos permite contemplar todos los cuerpos celestes que nos rodean. De ellos, el más importante es el Sol. Nuestro ritmo de vida está regido por sus apariciones y desapariciones en el horizonte: los días y las noches.

El **giro de la Tierra** se produce alrededor de un **eje,** línea imaginaria que pasa por su centro y la corta en dos puntos: los **polos.**

Los planos que contienen el eje cortan a la superficie de la Tierra en unos círculos máximos llamados **meridianos.** Todos ellos pasan por los polos.

Los planos perpendiculares al eje de la Tierra la cortan en circunferencias llamadas **paralelos.** De ellas, la que tiene su centro en el centro de la esfera se llama **ecuador.** Es una circunferencia máxima que divide la superficie de la Tierra en dos mitades: los hemisferios norte y sur.



Etimología

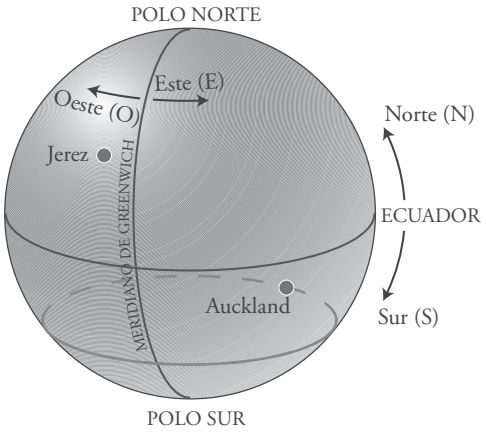
Ecuador: De *aequus*, "igual". El ecuador es un plano "equitativo" que deja la misma cantidad de esfera arriba que abajo.

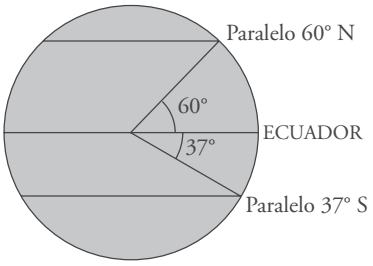
Meridiano: De *meridies*, "mediodía". Porque el Sol pasa por el meridiano de un lugar al mediodía.

Coordenadas geográficas

Por cada punto de la Tierra (por ejemplo, Auckland, Nueva Zelanda) pasan un paralelo y un meridiano. Se designan por la posición que ocupan respecto a dos círculos máximos:

- El ecuador.
- Un cierto meridiano. Concretamente el que pasa por Greenwich, localidad próxima a Londres en la cual hay un importante observatorio astronómico.

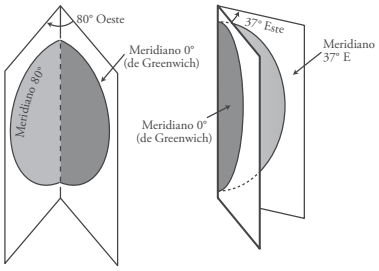




Latitud

La latitud de un punto de la Tierra es la medida angular del arco de meridiano que va de dicho punto al ecuador. Hay que añadir si está al norte (N) o al sur (S). Auckland está en el paralelo 37° S.

Todos los puntos de un paralelo tienen la misma latitud.



Longitud

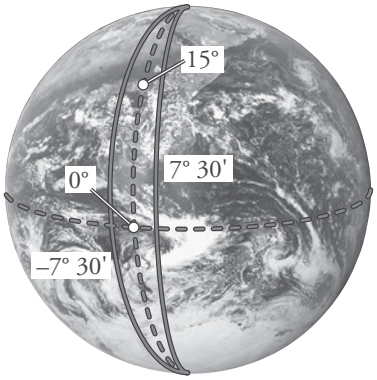
La longitud de un punto de la Tierra es el ángulo que forma el plano que determina el meridiano del lugar con el plano que determina el meridiano de Greenwich. Auckland está en el meridiano 174° E.

Las **coordenadas geográficas** de un lugar son su **longitud** y su **latitud.** Las coordenadas geográficas de Auckland son 174° E 37° S, que está en las antípodas de Jerez de la Frontera, de coordenadas geográficas 6° O 37° N.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Husos horarios

Ten en cuenta



La superficie terrestre se ha dividido en 24 husos horarios.

El meridiano de Jerez es el antimeridiano de Auckland. Por eso, en todo momento, difieren 12 horas.

El tiempo que tarda el Sol en *dar una vuelta* en su movimiento aparente alrededor de la Tierra (es decir, el tiempo que media entre dos pasos consecutivos por el meridiano de un lugar) se llama día. Cuando el Sol pasa por el meridiano de un lugar, se dice que es mediodía. Cuando pasa por su antimeridiano, medianoche.

Según eso, en cada longitud será mediodía en un momento distinto y, por tanto, si los relojes se ajustasen a ese hecho, lugares próximos tendrían horas parecidas pero no iguales, lo cual supondría un caos horario. Por ello se establecen saltos que van de hora en hora, del siguiente modo:

Centrado en el meridiano 0°, se forma un huso esférico de 15° (360° : 24 h = 15° cada hora). En ese huso, serán las 12 h cuando el Sol pase por el meridiano 0°. Este es el huso horario que corresponde a España, salvo a la Comunidad Autónoma de Canarias. A partir de él se forman los otros 23 husos.

Los distintos países se amoldan más o menos a esta regla, con algunos reajustes para evitar, por ejemplo, que un país pequeño tenga dos horas distintas en su territorio.

Problema resuelto

En Bilbao son las 12 h. ¿Qué hora es en Estambul? ¿Y cuál es en Monterrey?

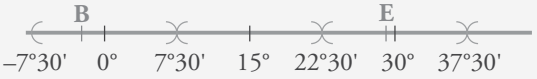
Latitudes:

Bilbao → 3° Oeste

Estambul → 29° Este

Monterrey → 100° Oeste

- Bilbao está en el huso horario cero. Estambul está dos husos horarios al este.



En Estambul serán 2 h más que en Bilbao: las 14 h.

- Monterrey: 100° = 15° · 6 + 10°. Monterrey está 7 husos horarios al oeste de Bilbao. Por tanto, son 7 horas menos: las 5 h.

Actividades

1 El metro, unidad de medida de longitud, se definía antiguamente como *la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano terrestre*. Es decir, un meridiano terrestre tiene 40 000 000 de metros. Según esto:

a) Calcula el radio de la Tierra en kilómetros.

b) Su superficie en kilómetros cuadrados.

c) Su volumen en kilómetros cúbicos.

d) Calcula el área de un huso horario.

2 Los paralelos son circunferencias menores. Calcula lo que mide el perímetro de los siguientes paralelos:

a) 60° b) 30° c) 45°

3 Un barco va de un punto *A*, situado en las costas de África de 30° latitud norte y 10° longitud oeste, a otro *B*, en las costas de América de 30° latitud norte y 80° longitud oeste, siguiendo el paralelo común.

a) ¿Qué distancia ha recorrido?

b) ¿Qué distancia recorrería si la diferencia de longitudes de los dos puntos fuera de 180°?

c) ¿Qué distancia recorrería en este último caso si pudiera navegar de un punto a otro siguiendo un arco de círculo máximo?

4 En Río de Janeiro (43° O) son las 7 de la mañana. ¿Qué hora es en Hiroshima (132° E)?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

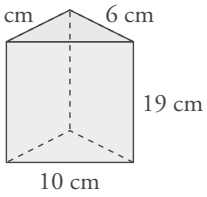
Ejercicios y problemas

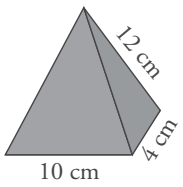
Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

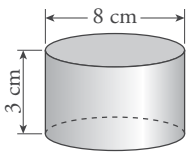
Desarrollos y áreas

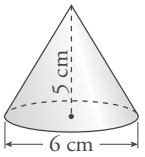
1 ▼▽▽ Dibuja el desarrollo plano y calcula el área total de los siguientes cuerpos geométricos:

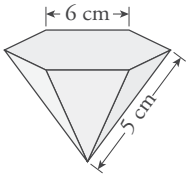
a) 

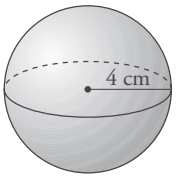
b) 

2 ▼▽▽ Calcula la superficie total de cada cuerpo:

a) 

b) 

c) 

d) 

3 ▼▽▽ Dibuja estos cuerpos y calcula su área:

a) Prisma de altura 20 cm y cuya base es un rombo de diagonales 18 cm y 12 cm.

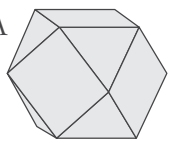
b) Pirámide hexagonal regular de arista lateral 18 cm y arista básica 6 cm.

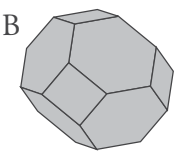
4 ▼▽▽ Dibuja estos cuerpos y calcula su área:

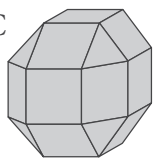
a) Cilindro de altura 27 cm y cuya circunferencia básica mide 44 cm.

b) Tronco de cono generado al girar, alrededor de su altura, un trapecio rectángulo de bases 10 cm y 12 cm y altura 5 cm.

5 ▼▽▽ Calcula el área total de los siguientes poliedros semirregulares de arista 8 cm:

A 

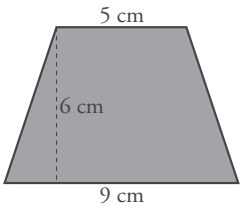
B 

C 

6 ▼▽▽ Halla el área total de un tronco de pirámide cuadrangular regular cuyas bases tienen de lado 30 cm y 14 cm y cuya arista lateral mide 17 cm.

7 ▼▽▽ Haciendo girar un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 9 cm y 12 cm alrededor de cada uno de ellos, se obtienen dos conos. Dibújalos y halla el área total de cada uno de ellos.

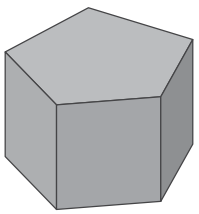
8 ▼▽▽ Calcula el área total del tronco de cono generado al girar este trapecio isósceles alrededor de una recta perpendicular a sus bases en su punto medio:

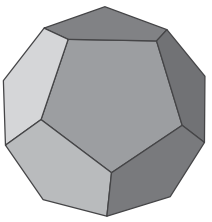


9 ▼▽▽ Calcula la superficie de:

a) Un prisma recto pentagonal regular cuyas aristas miden, todas, 10 cm.

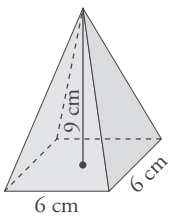
b) Un dodecaedro regular de arista 10 cm.

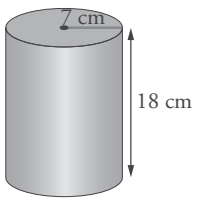


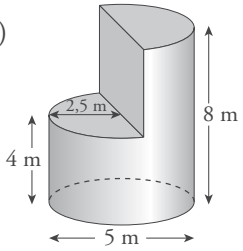


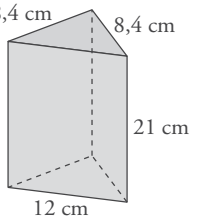
Volúmenes

10 ▼▽▽ Calcula el volumen de estos cuerpos:

a) 

b) 

c) 

d) 

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

11 ▼▽▽ Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

a) Octaedro regular de arista 10 cm.

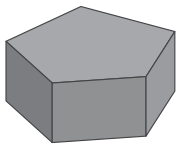
b) Pirámide hexagonal regular cuya arista lateral mide 15 cm y la arista de la base 8 cm.

c) Cono de radio 9 cm y generatriz 15 cm.

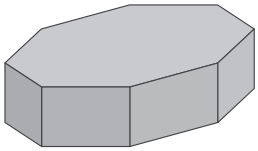
d) Semiesfera de radio 10 cm.

e) Cilindro inscrito en un prisma recto de base cuadrada de lado 6 cm y altura 18 cm.

12 ▼▽▽ Calcula el volumen de estos dos prismas regulares. En ambos, la arista de la base mide 10 cm y la altura, 8 cm.

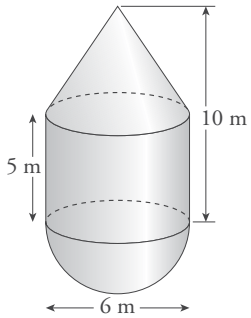


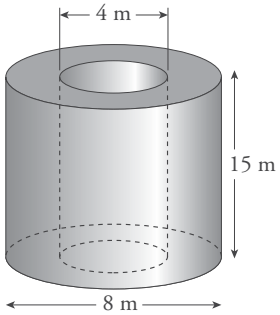
P. PENTAGONAL



P. OCTOGONAL

13 ▼▽▽ Calcula el volumen de estos cuerpos:





Coordenadas geográficas

14 ▼▽▽ Dos ciudades tienen la misma longitud, 15° E, y sus latitudes son 37° 25' N y 22° 35' S. ¿Cuál es la distancia entre ellas?

15 ▼▽▽ Cuando en el huso 0 son las 8 a.m., ¿qué hora es en el tercer huso al E? ¿Y en el quinto al O?

Autoevaluación

1 Describe el poliedro que se obtiene truncando un octaedro regular mediante planos que cortan las aristas a un tercio del vértice. ¿Se trata de un poliedro semirregular? Explica por qué.

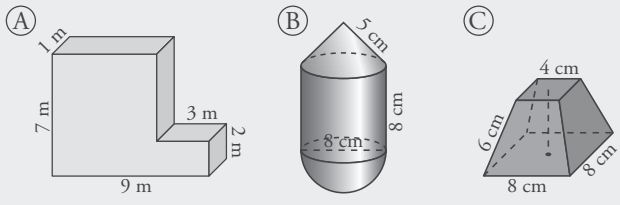
2 Calcula la superficie total de:

a) Una pirámide de base cuadrada en la que la arista lateral y la arista de la base son iguales y miden 10 cm.

b) Un tronco de cono cuyas bases tienen radios de 9 m y 6 m, y la generatriz, 5 m.

3 En una esfera de 8 cm de radio se dan dos cortes paralelos a distinto lado del centro, alejados de él 2 cm y 3 cm respectivamente. Calcula la superficie de la zona esférica comprendida entre ambos cortes.

4 Calcula el volumen de estos cuerpos:



5 Dos ciudades están en el ecuador y sus longitudes se diferencian en 10°. ¿Cuál es la distancia entre ellas?

6 Las coordenadas geográficas de Melilla son 35° 17' N 2° 56' O, y las de Tokio, 35° 42' N 139° 46' E.

a) ¿Cuál es el uso horario de cada una?

b) ¿Qué hora es en Tokio cuando en Melilla son las 8 de la mañana?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

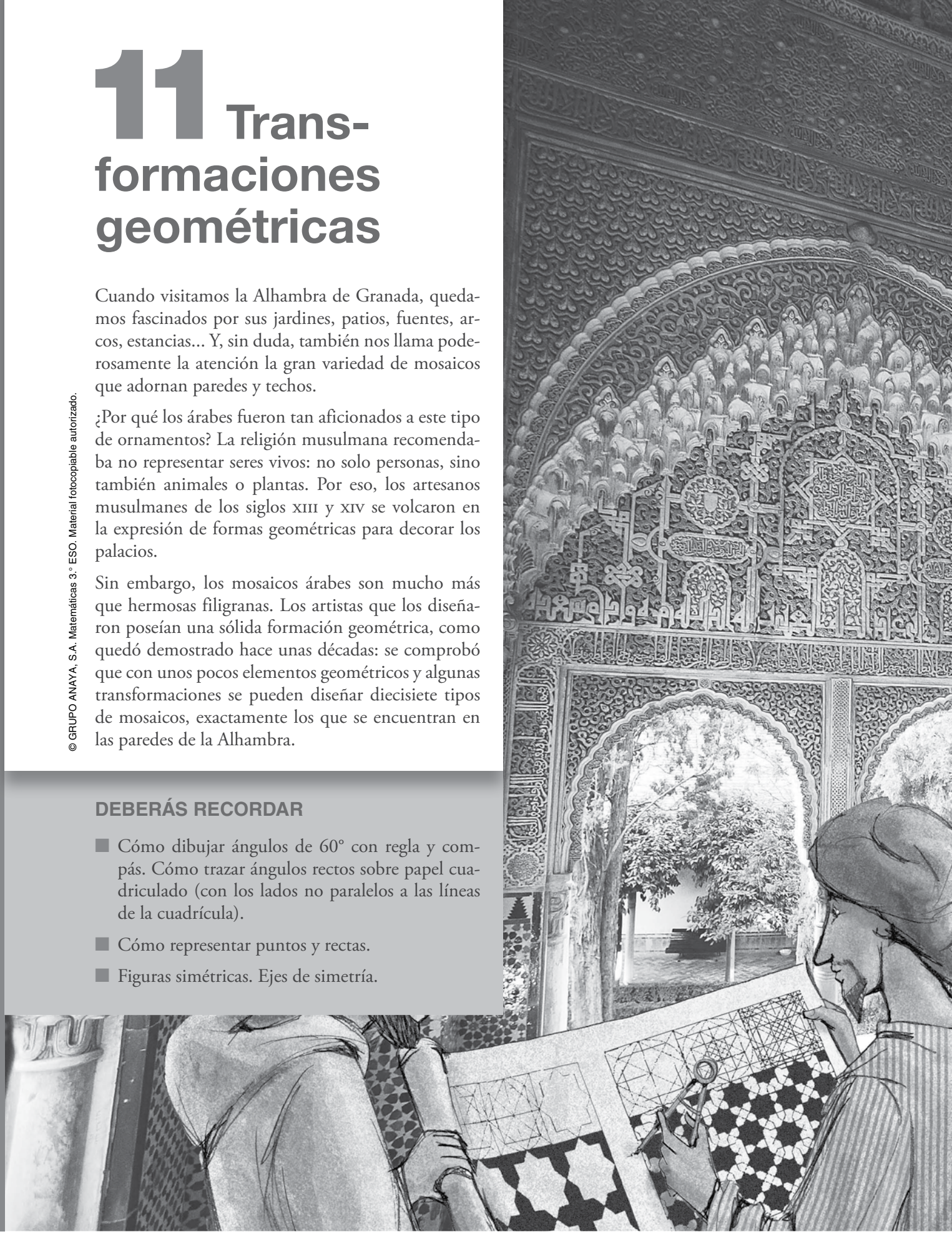
11 Transformaciones geométricas

Cuando visitamos la Alhambra de Granada, quedamos fascinados por sus jardines, patios, fuentes, arcos, estancias... Y, sin duda, también nos llama poderosamente la atención la gran variedad de mosaicos que adornan paredes y techos.

¿Por qué los árabes fueron tan aficionados a este tipo de ornamentos? La religión musulmana recomendaba no representar seres vivos: no solo personas, sino también animales o plantas. Por eso, los artesanos musulmanes de los siglos XIII y XIV se volcaron en la expresión de formas geométricas para decorar los palacios.

Sin embargo, los mosaicos árabes son mucho más que hermosas filigranas. Los artistas que los diseñaron poseían una sólida formación geométrica, como quedó demostrado hace unas décadas: se comprobó que con unos pocos elementos geométricos y algunas transformaciones se pueden diseñar diecisiete tipos de mosaicos, exactamente los que se encuentran en las paredes de la Alhambra.

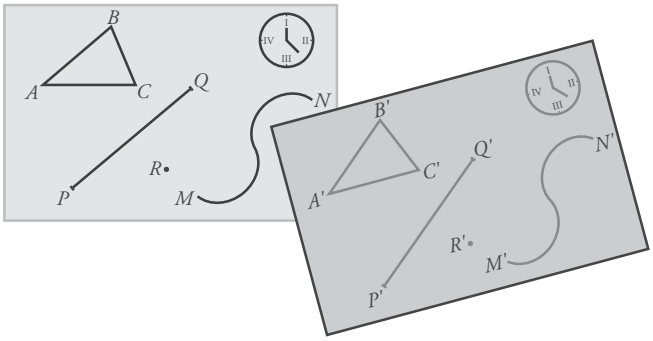
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.



DEBERÁS RECORDAR

- Cómo dibujar ángulos de 60° con regla y compás. Cómo trazar ángulos rectos sobre papel cuadriculado (con los lados no paralelos a las líneas de la cuadrícula).
- Cómo representar puntos y rectas.
- Figuras simétricas. Ejes de simetría.

1 Movimientos en el plano



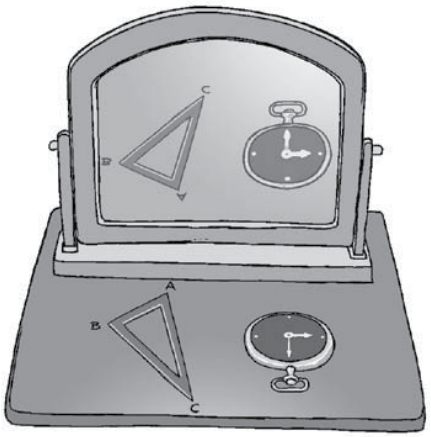
Sobre una tarjeta hemos dibujado varias figuras. Arrastramos la tarjeta sobre la mesa haciendo que ocupe otra posición.

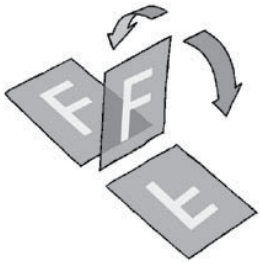
Las figuras que hay en la tarjeta se han limitado a moverse. Mantienen su forma y su tamaño. Esta transformación se llama movimiento.

Un **movimiento** es una transformación del plano en la cual todas las figuras mantienen su forma y su tamaño.

En un movimiento, la distancia entre dos puntos cualesquiera se mantiene invariable.

Movimientos directos y movimientos inversos





Si miramos una serie de figuras y sus imágenes en un espejo, observamos que las figuras reflejadas tienen la misma forma y el mismo tamaño que la original. La transformación producida por el espejo es, pues, un movimiento.

Sin embargo, las agujas del reloj reflejado giran en sentido contrario a las del reloj original. Este movimiento que cambia el sentido de giro de las agujas del reloj se llama movimiento inverso.

El movimiento descrito arriba mediante una tarjeta que se deslizaba mantiene el sentido de giro. Era un movimiento directo.

Hay dos tipos de movimientos:

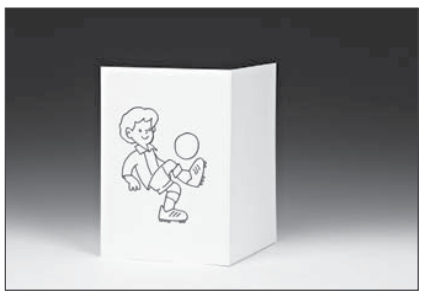
Movimientos directos, que mantienen el sentido de giro.

Movimientos inversos, que cambian el sentido de giro.

Los **movimientos directos** se llaman también **deslizamientos,** pues, como hemos hecho con la tarjeta de arriba, las figuras *se deslizan* hasta su nueva posición. Sin embargo, en los **movimientos inversos** hay que *sacar del plano* cada figura para llevarla a su posición final.

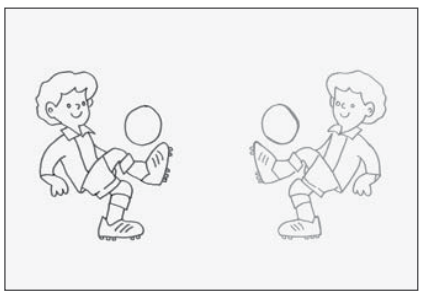
Actividades

1



Toma una hoja y dibuja una figura en la mitad izquierda.

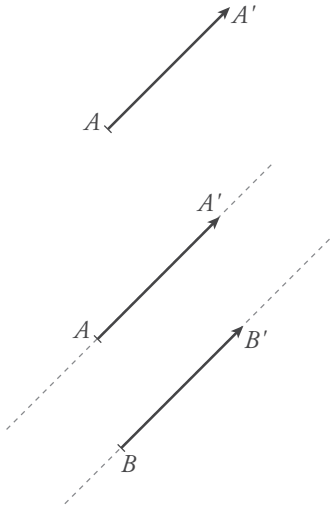
Pliégala por la mitad y cálcala (apóyate en una ventana).



Despliega. Observa que has efectuado un movimiento inverso.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

2 Estudio de las traslaciones



Estas dos flechas son el mismo vector.

Vectores

Una flecha $\overrightarrow{AA'}$ se llama **vector.** A es el **origen** y A' el **extremo.** La longitud del vector, $\overline{AA'}$, es su **módulo.**

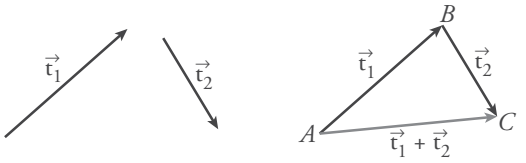
Las flechas $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{BB'}$ son el mismo vector si tienen:

— El mismo módulo (es decir, si $\overline{AA'} = \overline{BB'}$).

— La misma dirección (son paralelas o están sobre la misma recta).

— El mismo sentido (las puntas de las flechas van hacia el mismo lado).

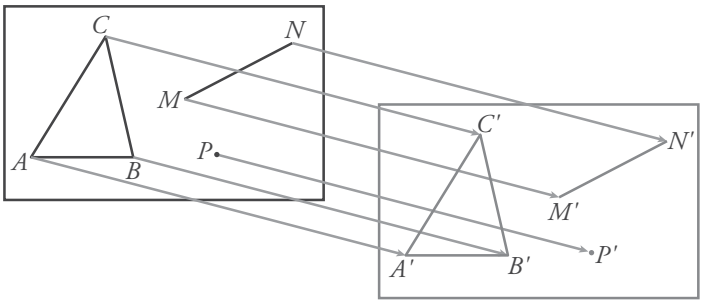
Para **sumar dos vectores,** $\vec{t}_1$ y $\vec{t}_2$, situamos el origen del segundo coincidiendo con el extremo del primero.



$\overrightarrow{AC}$ es el vector suma:
$\overrightarrow{AC} = \vec{t}_1 + \vec{t}_2$

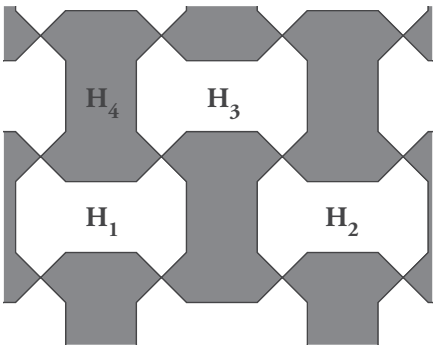
Concepto de traslación

Sobre una tarjeta hemos dibujado varias figuras geométricas. Si deslizamos la tarjeta de modo que sus bordes se mantengan paralelos a sus posiciones iniciales, diremos que la hemos sometido a una **traslación.**



Si unimos cada punto con su homólogo mediante una flecha, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, todas ellas tienen la misma longitud y la misma dirección. Es decir, son el mismo vector.

Se llama **traslación T,** según un vector $\vec{t}$, a una transformación que asocia a cada punto P otro punto P' tal que $\overrightarrow{PP'} = \vec{t}$.



Actividades

1 Observa el mosaico de arriba, al que se le llama multihueso. De las transformaciones que llevan $\mathbf{H_1}$ a $\mathbf{H_2}$, $\mathbf{H_3}$ y $\mathbf{H_4}$:

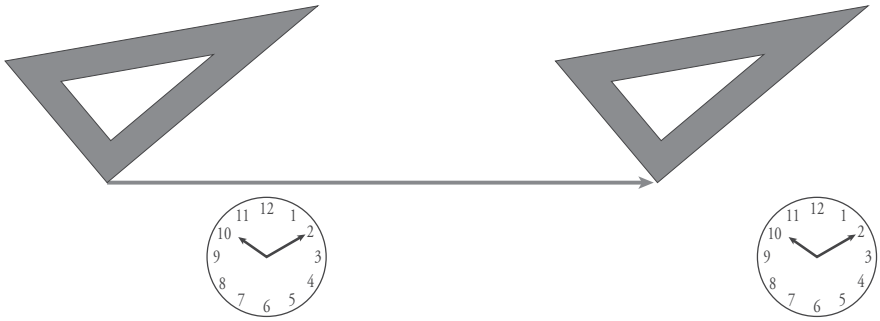
a) ¿Cuál o cuáles de ellas son traslaciones?

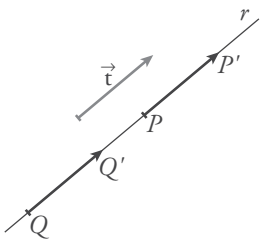
b) ¿Cuál es el vector que caracteriza la traslación que transforma $\mathbf{H_1}$ en $\mathbf{H_2}$? ¿Y el que transforma $\mathbf{H_2}$ en $\mathbf{H_3}$? ¿Y el que transforma $\mathbf{H_3}$ en $\mathbf{H_1}$?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Las traslaciones son movimientos directos

Las traslaciones son, evidentemente, deslizamientos, es decir, movimientos directos: mantienen la forma y el tamaño de las figuras y, además, conservan el giro de las agujas de un reloj.





Las rectas paralelas al vector traslación son invariantes, pues un punto de r se transforma en otro punto de r.

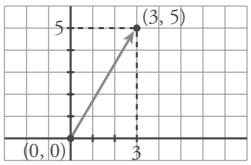
Elementos dobles (invariantes) en una traslación

En una traslación **no hay puntos dobles** (es decir, **puntos que se transformen en sí mismos**), pues todos los puntos se desplazan.

Cualquier recta paralela al vector traslación es doble (se transforma en sí misma), pues cada punto P de la recta se transforma en otro punto P' de la recta.

Actividades

2 En unos ejes coordenados considera el vector $\vec{t}$ de origen (0, 0) y extremo (3, 5).

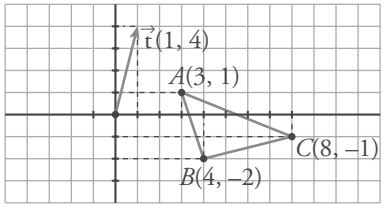


Lo designaremos, simplemente, $\vec{t}(3, 5)$.

a) Traslada los puntos $A(0, -4)$, $B(-3, -5)$, $C(0, 0)$ y $D(5, -1)$ mediante este vector.

b) Comprueba que los puntos $M(1, 3)$, $N(7, -1)$ y $X(4, 1)$ están alineados. Trasládalos mediante el vector $\vec{t}$ y comprueba que sus correspondientes también están alineados.

3 a) Traslada el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(4, -2)$ y $C(8, -1)$ según el vector $\vec{t}(1, 4)$.

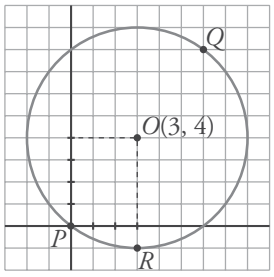


Comprueba que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales.

b) Comprueba que la recta $r: y = -3 + 4x$ se transforma en sí misma (es doble) según la traslación descrita en el apartado a).

Para ello, toma varios puntos de r [por ejemplo, $(0, -3)$, $(1, 1)$, $(2, 5)$] y comprueba que sus transformados están también en r.

4 Dibuja unos ejes coordenados sobre papel cuadriculado. Traza con compás la circunferencia de centro $O(3, 4)$ y radio 5.



a) Comprueba que la circunferencia pasa por $P(0, 0)$, $Q(6, 8)$ y $R(3, -1)$.

b) Traslada los puntos O, P, Q y R mediante la traslación **T** de vector $\vec{t}(6, -2)$.

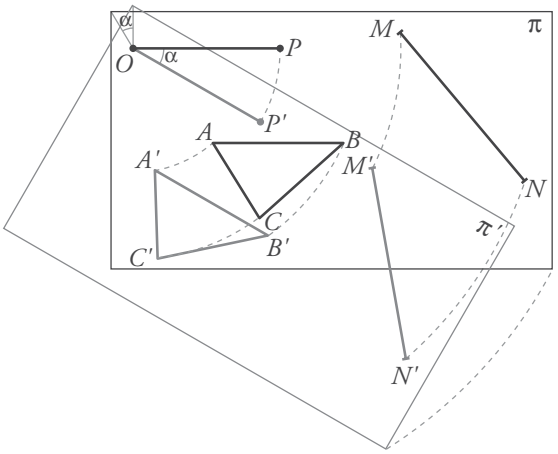
c) Comprueba que la circunferencia cuyo centro es $O' = \mathbf{T}(O)$ y radio 5 pasa por P', Q' y R'.

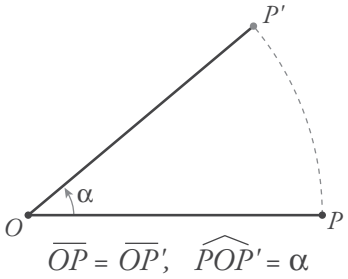
d) Trasladando algunos de sus puntos, averigua en qué rectas se transforman el eje X y el eje Y.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

3 Estudio de los giros

El plano π, representado por un rectángulo, aparece girado sobre sí mismo un ángulo α alrededor del punto O. En el movimiento arrastra a todas las figuras situadas sobre él.



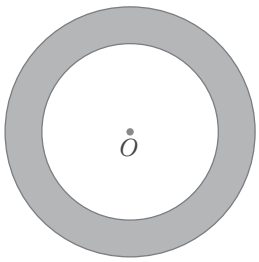


$\overline{OP} = \overline{OP'}$, $\widehat{POP'} = \alpha$

Dados un punto O y un ángulo α, se llama **giro de centro O y ángulo α** a una transformación **G** que hace corresponder a cada punto P otro punto $P' = \mathbf{G}(P)$ de modo que:

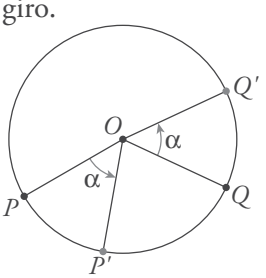
$$\overline{OP} = \overline{OP'} \quad \text{y} \quad \widehat{POP'} = \alpha$$

α debe ser un ángulo orientado. Consideramos sentido de giro positivo al contrario al movimiento de las agujas del reloj. El giro del ejemplo de más arriba es de ángulo negativo.



Una corona circular con centro en el centro de giro es invariante.

- Los giros son movimientos directos (deslizamientos): mantienen la forma y el tamaño de las figuras y, además, conservan el sentido de giro.
- El centro de giro es el único **punto doble**.
- Las circunferencias de centro O son **figuras dobles**.



Actividades

1 Dibuja unos ejes coordenados en una hoja de papel cuadriculado. Considera el giro **G** de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = 90°$.

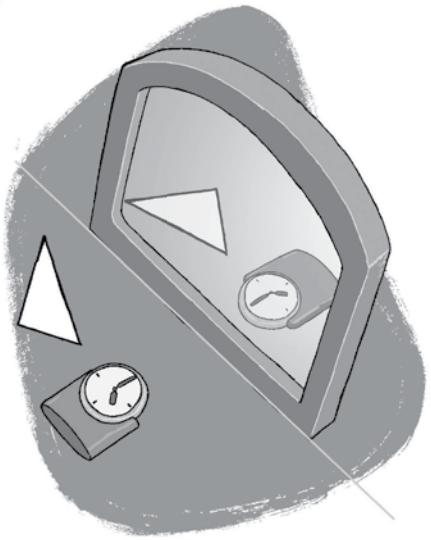
a) Transforma mediante **G** los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 5)$, $C(4, 3)$ y señala el triángulo $A'B'C'$ transformado del triángulo ABC.

b) ¿En qué se transforma la recta r que pasa por A y por B?

c) ¿En qué se transforma la circunferencia de centro O y radio 7?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

4 Simetrías axiales

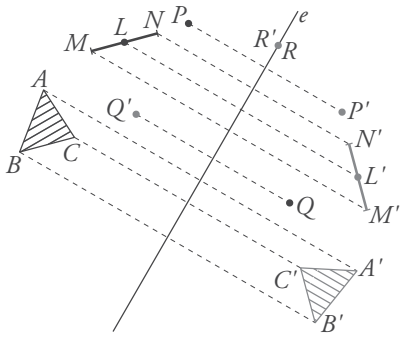


En una simetría, las figuras "se reflejan" en e como si fuera un espejo.

Dada una recta e, a cada punto, P, le hacemos corresponder otro punto, P', de modo que:

- El segmento PP' sea perpendicular a e.
- La distancia de P a e es igual a la distancia de P' a e.

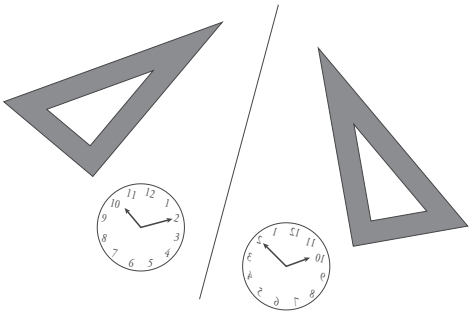
Es decir, e es mediatriz del segmento PP'.



Se llama **simetría de eje** e a una transformación, **S,** que hace corresponder a cada punto P del plano otro punto $\mathbf{S}(P) = P'$ tal que la recta e es mediatriz del segmento PP'.

Las simetrías son movimientos inversos

Las simetrías son **movimientos,** pues conservan la forma y el tamaño de las figuras. Pero son movimientos **inversos,** porque cambian el sentido de giro de las agujas de un reloj.



Elementos dobles en una simetría

En una simetría de eje e, todos los puntos de e son dobles. Por tanto, e es una recta invariante.

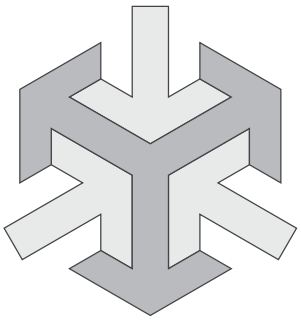
También son invariantes las rectas perpendiculares a e.

Figuras simétricas

Si una figura es invariante respecto a una simetría axial, se dice que es una **figura simétrica** y al eje se le llama **eje de simetría** de la figura.

Actividades

1 Señala los ejes de simetría de esta figura.



2 Consideramos la simetría **S** de eje la recta $y = x$. Dibuja los transformados mediante **S** de:

a) Los puntos $A(3, 1)$, $B(4, 0)$, $C(0, 4)$, $D(5, 5)$.

b) El eje X.

c) El eje Y.

d) La circunferencia C_1 de centro (1, 4) y radio 2.

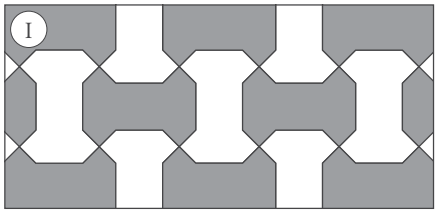
e) La circunferencia C_2 de centro (3, 3) y radio 5.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

5 Estudio de los mosaicos

Mosaicos

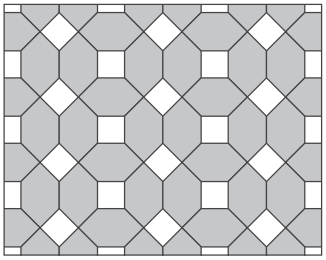
I



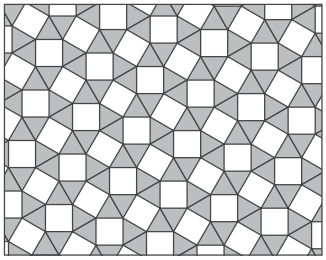
El *multihueso* que viste al inicio de la unidad es un **mosaico:** una configuración geométrica con la que se puede llenar el plano.

Hay mosaicos formados con una sola pieza y otros formados con dos o más piezas. Observa los siguientes:

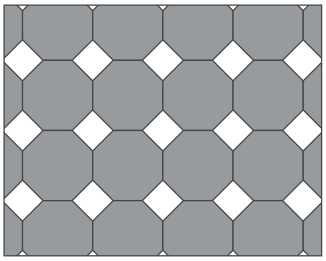
II



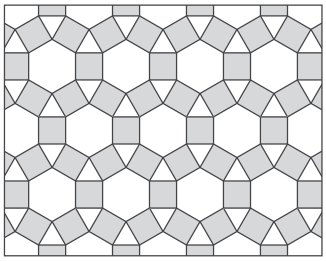
III

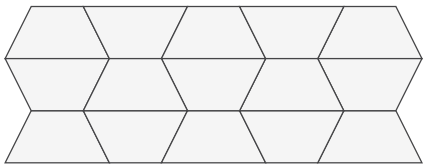


IV



V

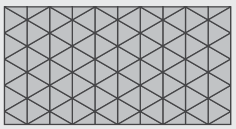




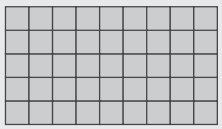
Este mosaico está formado por un único tipo de piezas. Pero no es regular porque los trapecios no son polígonos regulares.

Mosaicos regulares son los formados por un único tipo de **polígono regular.** Solo hay tres: con triángulos, con cuadrados y con hexágonos.

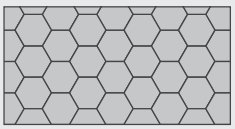
VI



VII



VIII

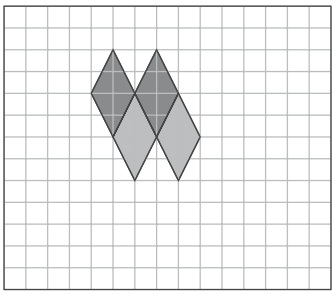


Mosaicos semirregulares son los formados por dos o más tipos de polígonos regulares. Por ejemplo, los mosaicos III, IV y V de arriba.

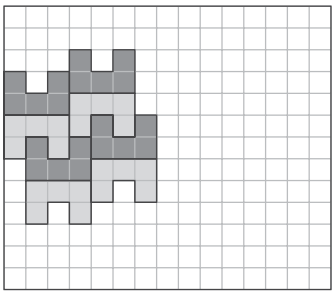
Actividades

1 Completa, en tu cuaderno, los siguientes mosaicos:

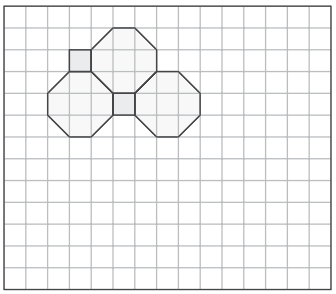
a)



b)



c)

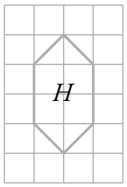


© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica



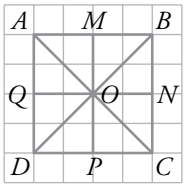
1 ▼▽▽ a) Representa en papel cuadriculado la figura H_1 obtenida a partir de H mediante la traslación del vector $\vec{t}_1(3, 2)$.

b) Dibuja la figura H_2 transformada de H_1 mediante la traslación $\vec{t}_2(2, -6)$.

c) Di cuál es el vector de la traslación que permite obtener H_2 a partir de H.

d) ¿Qué traslación habría que aplicar a H_2 para que se transformase en H?

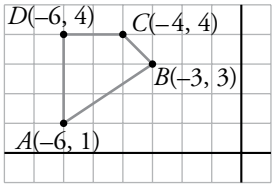
2 ▼▽▽ Hacemos un giro de centro O que transforma M en N.



a) Indica en qué puntos se transforman los puntos O, A, B, N y P.

b) ¿En qué se transforma la recta que pasa por A y C? ¿Y el triángulo OPD?

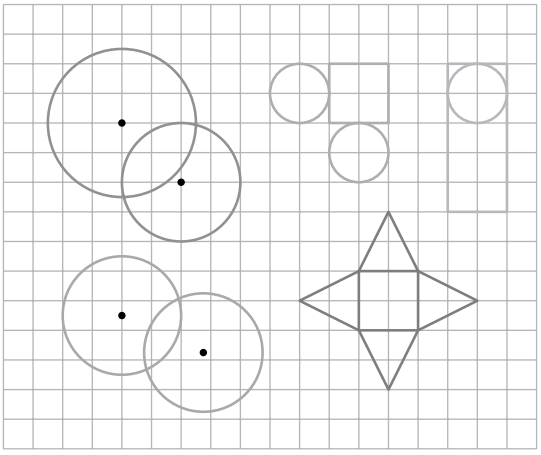
3 ▼▼▽ Halla las coordenadas de los vértices del cuadrilátero $ABCD$, transformado mediante:



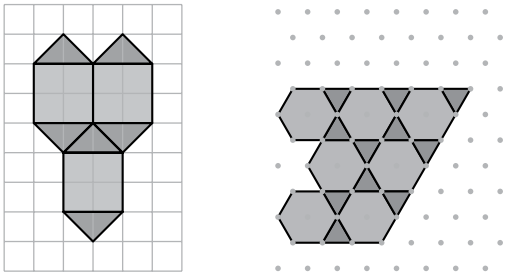
a) La simetría de eje X.

b) La simetría de eje Y.

4 ▼▼▽ ¿Cuáles son los ejes de simetría de las siguientes figuras?



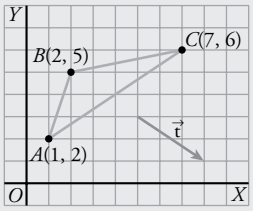
5 ▼▽▽ a) Completa en tu cuaderno estos mosaicos:



b) Identifica, en cada uno de ellos, algunos movimientos que lo transformen en sí mismo.

Autoevaluación

1 Averigua las coordenadas de los vértices del triángulo transformado del ABC mediante cada uno de los siguientes movimientos:



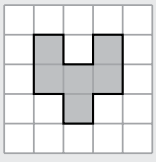
a) La traslación de vector $\vec{t}$.

b) La simetría de eje X.

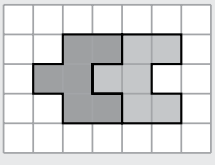
c) La simetría de eje Y.

d) El giro de centro O y ángulo –90° (90° en el sentido de las agujas del reloj).

2 Dibuja en papel cuadriculado un mosaico a partir de esta pieza:



Busca una forma de engranarlas distinta de esta:



© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

12
Estadística

En todas las épocas, los gobernantes han querido tener controladas sus posesiones, ya fueran bienes o personas.

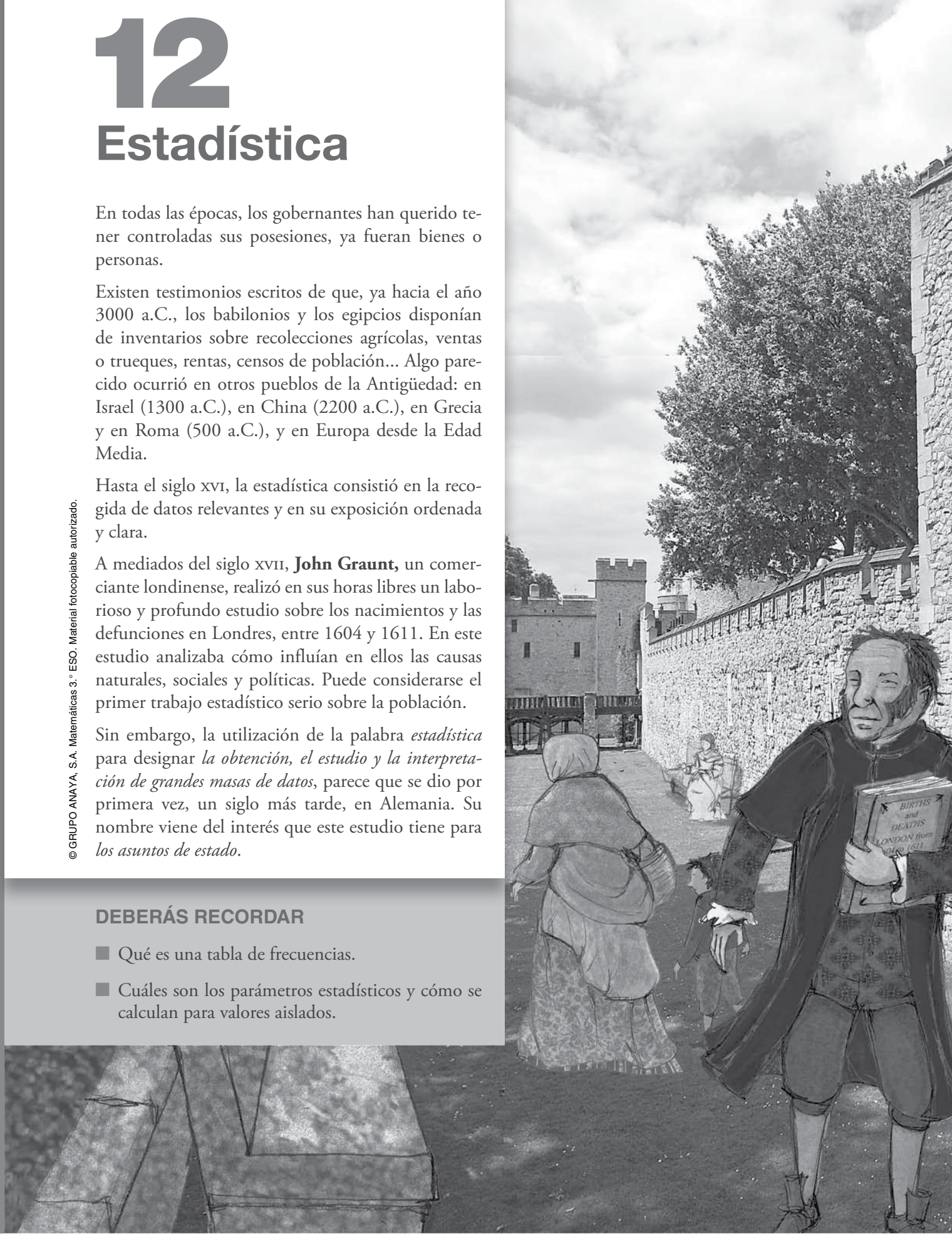
Existen testimonios escritos de que, ya hacia el año 3000 a.C., los babilonios y los egipcios disponían de inventarios sobre recolecciones agrícolas, ventas o trueques, rentas, censos de población... Algo parecido ocurrió en otros pueblos de la Antigüedad: en Israel (1300 a.C.), en China (2200 a.C.), en Grecia y en Roma (500 a.C.), y en Europa desde la Edad Media.

Hasta el siglo XVI, la estadística consistió en la recogida de datos relevantes y en su exposición ordenada y clara.

A mediados del siglo XVII, **John Graunt,** un comerciante londinense, realizó en sus horas libres un laborioso y profundo estudio sobre los nacimientos y las defunciones en Londres, entre 1604 y 1611. En este estudio analizaba cómo influían en ellos las causas naturales, sociales y políticas. Puede considerarse el primer trabajo estadístico serio sobre la población.

Sin embargo, la utilización de la palabra *estadística* para designar *la obtención, el estudio y la interpretación de grandes masas de datos*, parece que se dio por primera vez, un siglo más tarde, en Alemania. Su nombre viene del interés que este estudio tiene para *los asuntos de estado*.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.



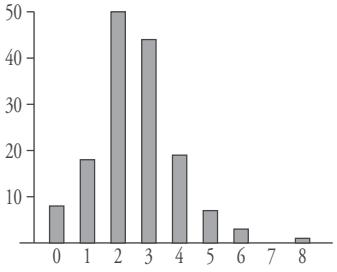
DEBERÁS RECORDAR

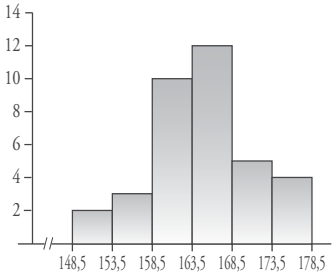
- Qué es una tabla de frecuencias.
- Cuáles son los parámetros estadísticos y cómo se calculan para valores aislados.

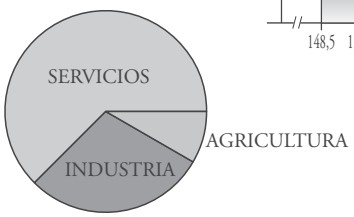
1 Población y muestra

En la página anterior hemos visto tres distribuciones. Cada una de ellas se refiere a un colectivo:

- 150 *familias* de una ciudad.
- Los 36 *alumnos y alumnas* de una clase.
- Los 600 000 *trabajadores* de una cierta comarca.







El colectivo objeto de un estudio estadístico se llama **población.**

A veces, el conjunto que interesa es demasiado numeroso para poder analizar cada uno de sus elementos; entonces se extrae una **muestra.** Por ejemplo, es posible que las 150 familias estudiadas sean una muestra extraída de una población más numerosa: todas las familias de esa ciudad.

De modo que un colectivo es población o muestra según nos interese por sí mismo, o bien sea un medio para inferir información sobre un colectivo más extenso.

Población es el conjunto de todos los elementos objeto de nuestro estudio.

Muestra es un subconjunto, extraído de la población, cuyo estudio sirve para inferir características de toda la población.

Individuo es cada uno de los elementos que forman la población o la muestra.

Por ejemplo: en una gasolinera se pretende hacer un estudio de su clientela. Para ello, se observan y se anotan ciertas características de algunos de los coches que repostan, elegidos al azar.

El conjunto de todos los coches que forman su clientela es la *población*. Los coches seleccionados para ser analizados forman la *muestra*. Cada coche es un *individuo*.

Actividades

1 Un fabricante de tornillos desea hacer un control de calidad. Para ello, recoge 1 de cada 100 tornillos producidos y lo analiza.

a) ¿Cuál es la población?
b) ¿Cuál es la muestra?
c) ¿Cuáles son los individuos?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

2 Variables estadísticas

NÚMERO DE HIJOS

ESTATURA

SECTOR DE PRODUCCIÓN

El *número de hijos*, la *estatura* y el *sector de producción* son las variables que hemos estudiado en las distribuciones anteriores.

Las dos primeras **variables** son **cuantitativas,** porque sus valores se expresan con números (cantidades).

La tercera **variable** es **cualitativa,** porque el sector de producción al que pertenece un trabajador no se expresa mediante un número, sino mediante una cualidad.

Una **variable cuantitativa** es **discreta** cuando solo admite valores aislados (el número de hijos puede ser 2 ó 3, pero no una cantidad intermedia).

Una **variable cuantitativa** es **continua** cuando entre cada dos valores pueden darse todos los intermedios (una persona puede medir 172,4 cm, aunque habitualmente se redondea y se da un número entero de centímetros).

TIPOS DE VARIABLES ESTADÍSTICAS

- **Cuantitativa:** Numérica.
  - **Discreta:** Solo puede tomar valores aislados.
  - **Continua:** Podría tomar todos los valores de un intervalo.
- **Cualitativa:** No numérica.

En el ejemplo de la página anterior, supongamos que en cada coche se observa el *número de ocupantes*, el *tipo de carburante* y el *coste* del producto repostado. Estas tres variables son:

— Número de ocupantes (1, 2, 3, …): cuantitativa discreta.

— Tipo de carburante (gasóleo, súper, …): cualitativa.

— Coste (37,42 €): cuantitativa continua.

Actividades

1 El fabricante de tornillos descrito en la página anterior estudia en cada tornillo si es *correcto* o *defectuoso*, su *longitud* y el *número de pasos de rosca*. Di de qué tipo es cada una de estas variables.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

3 Confección de una tabla de frecuencias

DATOS DESORDENADOS

↓

TABLA CON LOS DATOS ORGANIZADOS

Una vez recogidos los datos, hay que **tabularlos;** es decir, hay que confeccionar una tabla para organizarlos. Esto se consigue con una **tabla de frecuencias.**

Recuento

Para hacer el recuento, se leen las notas una a una y se hace una señal donde corresponda.

Si las señales se agrupan de cinco en cinco, se cuentan mejor. (La quinta es la horizontal y sirve para cerrar el manojo).

Notación

En las tablas de frecuencias se suele designar:

$x_i \rightarrow$ valores de la variable

$f_i \rightarrow$ frecuencia de cada valor

Confección de una tabla con datos aislados

Si la variable toma un número reducido de valores, se procede como en el ejemplo siguiente. En él, la variable, x_i, toma los valores 1, 2, 3, …, 10.

NOTAS OBTENIDAS POR UN GRUPO DE ALUMNAS				
9	4	8	5	5
4	1	7	2	2
3	9	6	4	10
8	2	1	6	7
6	10	10	8	8
4	6	5	5	10
6	7	2	5	5
3	5	3	6	8

RECUENTO	
1	||
2	𝍸
3	|||
4	𝍸
5	𝍸||
6	𝍸|
7	|||
8	𝍸
9	||
10	𝍸

TABLA DE FRECUENCIAS	
x_i	f_i
1	2
2	4
3	3
4	4
5	7
6	6
7	3
8	5
9	2
10	4

Confección de una tabla con datos agrupados en intervalos

Si la variable toma muchos valores, conviene agruparlos en intervalos.

ALTURA DE 30 ALUMNAS Y ALUMNOS DE UNA CLASE				
168	160	168	175	168
168	158	149	160	178
158	163	171	162	163
156	154	160	165	165
161	162	166	163	170
164	165	173	172	168

RECUENTO	
Entre 148,5 y 153,5	|
Entre 153,5 y 158,5	𝍸
Entre 158,5 y 163,5	𝍸||||
Entre 163,5 y 168,5	𝍸𝍸
Entre 168,5 y 173,5	𝍸
Entre 173,5 y 178,5	||

TABLA DE FRECUENCIAS	
INTERVALO	f_i
148,5 y 153,5	1
153,5 y 158,5	4
158,5 y 163,5	9
163,5 y 168,5	10
168,5 y 173,5	4
173,5 y 178,5	2

Actividades

1 Lanzamos dos dados, sumamos las puntuaciones y anotamos los resultados. Repetimos la experiencia 30 veces:

11, 8, 9, 9, 3 4, 11, 7, 7, 8 7, 5, 6, 4, 4

7, 10, 2, 6, 10 7, 7, 6, 2, 8 7, 5, 8, 6, 9

Confecciona una tabla de frecuencias.

2 Con los datos del ejemplo anterior (altura de 30 alumnas y alumnos), efectúa una tabla de frecuencias con los datos agrupados en los intervalos siguientes:

147,5 - 151,5 - 155,5 - 159,5 - 163,5 -

167,5 - 171,5 - 175,5 - 179,5

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

4 Gráfico adecuado al tipo de información

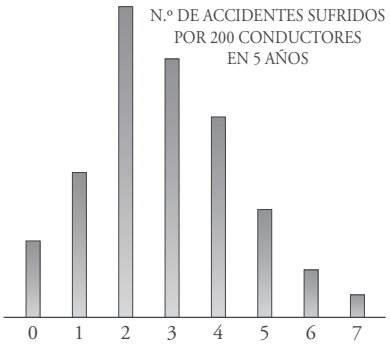
La elaboración de gráficos estadísticos es un arte. En los medios de comunicación encontramos espléndidas representaciones que nos permiten, con un solo golpe de vista, entender de qué se nos habla y asimilar la información que se nos da.

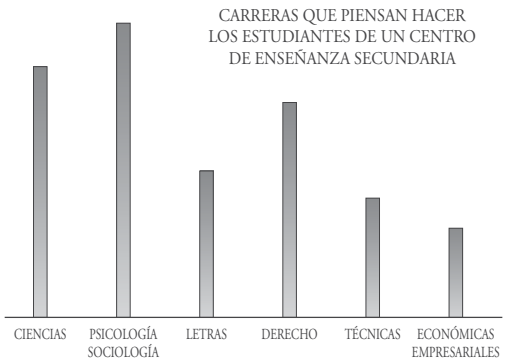
Sin pretender llegar a ese grado de virtuosismo, podemos reflexionar sobre algunas de las claves para utilizar con corrección los tipos de gráficos de uso más frecuente.

Diagrama de barras

El **diagrama de barras** se utiliza para representar tablas de frecuencias correspondientes a **variables cuantitativas discretas.** Por eso, las barras son estrechas y se sitúan sobre los valores puntuales de la variable.

También se utiliza para representar distribuciones de **variables cualitativas.**



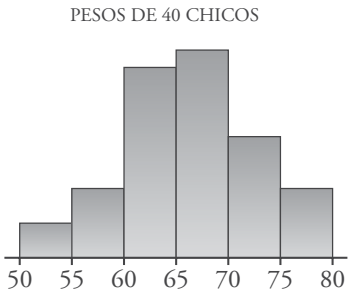


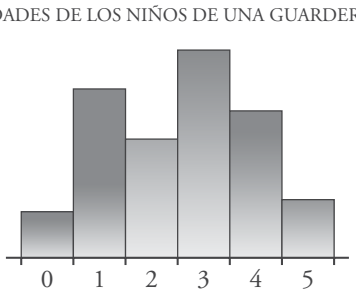
Histograma de frecuencias

El **histograma** se utiliza para distribuciones de **variable continua.** Por eso se usan rectángulos tan anchos como los intervalos.

Etimología

Histograma: Viene del griego *histos*, que significa "barra" y también "mástil de barco".





Aunque los datos no vengan dados por intervalos (como en el caso de las edades de los niños de una guardería), cuando se trata de una variable continua (1 año significa que aún no ha cumplido 2) es razonable usar el histograma y no el diagrama de barras.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Polígono de frecuencias

El **polígono de frecuencias** se utiliza en los mismos casos que el histograma. Se construye uniendo los puntos medios de los lados superiores de los rectángulos y prolongando, al principio y al final, hasta llegar al eje.

Su sentido es suavizar los escalones que se producen en el histograma.

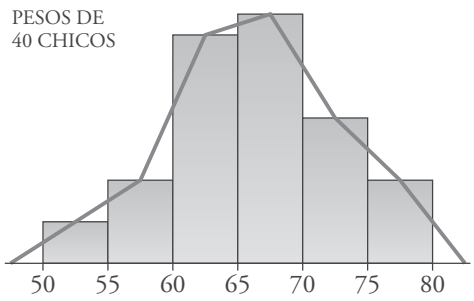
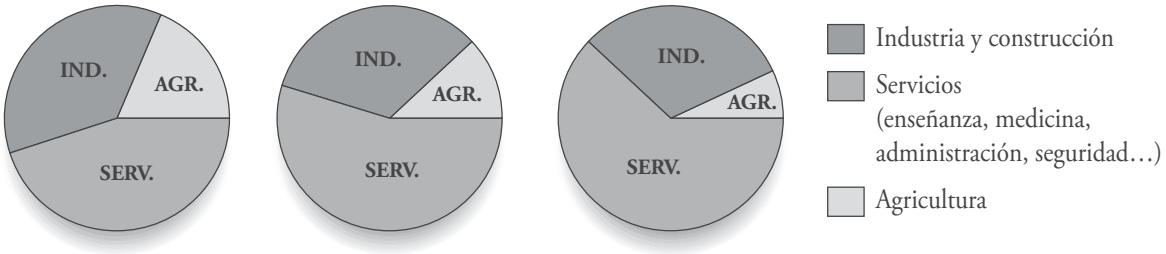


Diagrama de sectores

En un **diagrama de sectores,** el ángulo de cada sector es proporcional a la frecuencia correspondiente.

Se puede utilizar para todo tipo de variables, pero se usa muy frecuentemente para las variables cualitativas.

Este tipo de diagrama es especialmente adecuado para representar, en varios de ellos, diversas situaciones similares y poder establecer comparaciones. Por ejemplo, podemos comparar el reparto de la población laboral de una cierta comunidad autónoma, según el tipo de trabajo, en los años 1990, 2000 y 2010: observamos que la proporción de trabajadores en el sector de agricultura disminuye, mientras que en el sector de servicios, aumenta.



Actividades

1 Representa, mediante el gráfico adecuado, las tablas estadísticas siguientes:

a) Tiempo que emplean los alumnos y las alumnas de un curso en ir desde su casa al colegio.

TIEMPO (min)	N.º DE ALUMNOS
0 – 5	2
5 – 10	11
10 – 15	13
15 – 20	6
20 – 25	3
25 – 30	1

b) Número de alumnos y alumnas en el curso 2009/10 en una cierta comunidad autónoma, según la etapa de estudios en la que estaban.

INFANTIL	55 000
PRIMARIA	125 000
SECUNDARIA OBLIGATORIA	100 000
BACHILLERATO Y FORMACIÓN PROFESIONAL	60 000
UNIVERSIDAD	80 000
TOTAL	420 000

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

5 Parámetros estadísticos

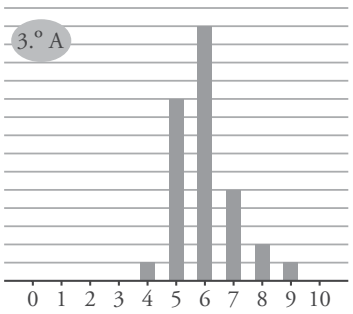
Los parámetros estadísticos sirven para sintetizar la información dada por una tabla o por una gráfica. Los hay de dos tipos: de **centralización** y de **dispersión.**

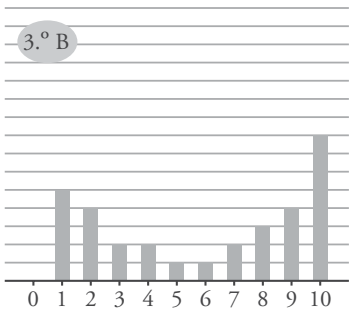
Los parámetros de centralización nos indican en torno a qué valor (centro) se distribuyen los datos.

Los parámetros de dispersión nos informan sobre cuánto se alejan del centro los valores de la distribución.

La media no es suficiente

Las gráficas de la derecha corresponden a las notas de dos clases. En ambas, la nota media es, aproximadamente, 6. La **media** es un parámetro que nos informa sobre el centro alrededor del cual se distribuyen los valores. Pero observa que, aun teniendo la misma media, estas distribuciones son muy distintas. Necesitamos otros parámetros que señalen esas diferencias.





Medidas de centralización

Media

Si llamamos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a los valores que toma una distribución estadística, la **media,** o promedio, se designa por $\bar{x}$ y se calcula así:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \qquad \text{Abreviadamente,} \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Notación

$\sum$ El signo $\sum$ se utiliza para indicar sumas de varios sumandos.

$\sum x_i$ se lee:

"suma de los x_i"

Mediana

Si ordenamos los datos de menor a mayor, la **mediana,** Me, es el valor que está en medio; es decir, tiene tantos individuos por debajo como por encima.

Si el número de datos fuera par, a la mediana se le asigna el valor medio de los dos términos centrales.

Moda

La **moda,** Mo, es el valor con mayor frecuencia.

Los parámetros media, mediana y moda se llaman **medidas de centralización,** porque alrededor de ellos se distribuyen los valores de la distribución.

Actividades

1 Nos dan la distribución de notas siguiente:

2, 4, 4, 4, 5, 7, 9, 9, 10

a) Comprueba, calculándola, que la nota media es $\bar{x} = 6$.

b) Comprueba que la mediana es $Me = 5$.

c) ¿Cuál es la mediana si suprimimos el 10?

d) ¿Cuál es la moda?

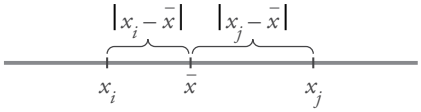
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Medidas de dispersión

Vamos a estudiar ahora parámetros que sirven para medir cómo de dispersos están los datos. En todos ellos, la idea clave es medir el grado de separación de los datos a la media.

Recorrido o rango

Es la diferencia entre el dato mayor y el menor. Es decir, es la longitud del tramo dentro del cual están los datos.



Desviación media

Es el promedio de las distancias de los datos a la media:

$$\text{DM} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{\Sigma |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Varianza

Es el promedio de los cuadrados de las distancias de los datos a la media:

$$\text{Varianza} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Esta fórmula es equivalente a la siguiente:

$$\text{Varianza} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

Desviación típica, σ

Es la raíz cuadrada de la varianza: $\sigma = \sqrt{\text{varianza}}$

A partir de ahora prestaremos especial atención a los parámetros media ($\bar{x}$) y desviación típica (σ). La información que da cada uno de ellos complementa a la del otro.

¿Por qué la desviación típica?

La varianza tiene un grave inconveniente. Imagina que estamos tratando con una distribución de estaturas dadas en cm. La media vendría dada en cm, pero la varianza vendría en cm^2 (es decir, una superficie en lugar de una longitud). Por eso, extraemos su raíz cuadrada, obteniendo la desviación típica que, en nuestro ejemplo, sí sería una longitud dada en cm.

Ejercicio resuelto

Obtener las medidas de dispersión de la siguiente distribución de notas:

2, 4, 4, 4, 5, 7, 9, 9, 10

RECORRIDO: $10 - 2 = 8$ MEDIA: $\bar{x} = 6$

DESVIACIÓN MEDIA: $\text{DM} = \dfrac{|2-6| + |4-6| + |4-6| + \ldots}{9} = \dfrac{22}{9} = 2{,}44$

VARIANZA: $\text{Var} = \dfrac{(2-6)^2 + (4-6)^2 + (4-6)^2 + \ldots}{9} = \dfrac{64}{9} = 7{,}11$

o bien: $\text{Var} = \dfrac{2^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots}{9} - 6^2 = \dfrac{388}{9} - 36 = 7{,}11$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{\text{varianza}} = \sqrt{7{,}11} = 2{,}67$

Actividades

2 Halla las medidas de dispersión de esta distribución de pesos:

83, 65, 75, 72, 70, 80, 75, 90, 68, 72

3 Halla la varianza de la distribución siguiente:

8, 7, 11, 15, 9, 7, 13, 15

Calcúlala utilizando las dos fórmulas de la varianza. Comprueba que es mucho más cómoda la segunda.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

6 Obtención de $\bar{x}$ y σ con calculadora

x_i	f_i
151	1
156	4
161	9
166	10
171	4
176	2

Estudiemos con un ejemplo (observa la tabla de la izquierda) los pasos que hay que dar para introducir eficazmente unos datos en la calculadora y conseguir los correspondientes resultados.

PASOS QUE SE DEBEN DAR	EJEMPLO
① **Preparación.** Pon el aparato en disposición de realizar cálculos estadísticos: * MODO SD. Analiza en tu calculadora cómo se consigue este modo.	[MODE] * → SD
② **Borra** los datos que puedan haberse quedado acumulados de un trabajo anterior. (En algunas calculadoras, aunque se apaguen, estos datos no se borran).	[INV] [AC]
③ **Introduce** los datos. Cada dato se introduce poniéndolo en la pantalla y pulsando la tecla [DATA]. Si el dato está n veces, se pulsará n veces la tecla [DATA]; o bien se hará: dato [×] n [DATA] Sigue hasta cargar todos los datos.	151 [×] 1 [DATA] → 151 156 [×] 4 [DATA] → 156 161 [×] 9 [DATA] → 161 166 [×] 10 [DATA] → 166 171 [×] 4 [DATA] → 171 176 [×] 2 [DATA] → 176
④ **Corrige.** Posibilidad de borrar. Si has introducido un dato erróneamente, puedes eliminarlo escribiéndolo en pantalla y pulsando [INV] [DATA].	Dato erróneo: 181 [×] 6 [DATA] Bórralo: 181 [×] 6 [INV] [DATA]
⑤ **Resultados.** Pulsa las teclas:	
[n] → número de individuos → $n = \sum f_i$	[n] → 30
[Σx] → suma de todos los valores → $\rightarrow \sum x = \sum f_i x_i$	[Σx] → 4920
[Σx²] → suma de los cuadrados de los valores $\rightarrow \sum x^2 = \sum f_i x_i^2$	[Σx²] → 807910
[$\bar{x}$] → media	[$\bar{x}$] → 164
[σ_n] → desviación típica	[σ_n] → 5.859465

Esta consulta la puedes hacer en cualquier momento del proceso. Después, si lo deseas, puedes seguir introduciendo datos.

Calculadora

Casi todas las calculadoras científicas están preparadas para el cálculo de los parámetros $\bar{x}$ y σ.

Las orientaciones que aquí se ofrecen son generales, ya que cada modelo de calculadora tiene una nomenclatura y unos procedimientos propios. Por tanto, **investiga en tu calculadora** y consulta su manual de instrucciones.

Ayuda

Si en el teclado de tu calculadora no aparecen explícitamente las teclas de resultados:

n, $\sum x$ y $\sum x^2$

búscalos mediante las secuencias

[RCL] 3, [RCL] 2, [RCL] 1

Actividades

1 Sigue el proceso anterior para calcular $\bar{x}$ y σ en cada una de las distribuciones siguientes:

a) NOTAS (corresponde a la gráfica de 3.º B, página 125):

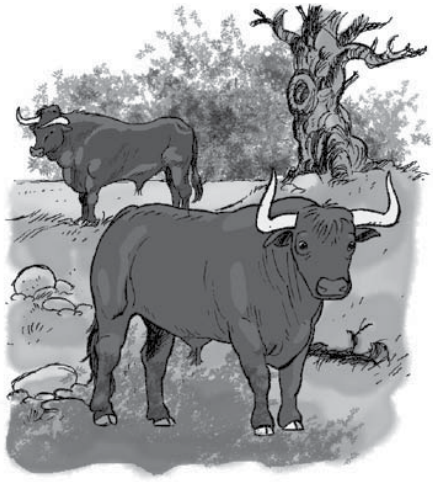
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	0	5	4	2	2	1	1	2	3	4	8

b) ESTATURAS (en cm):

x_i	151	156	161	166	171	176
f_i	2	5	11	14	5	3

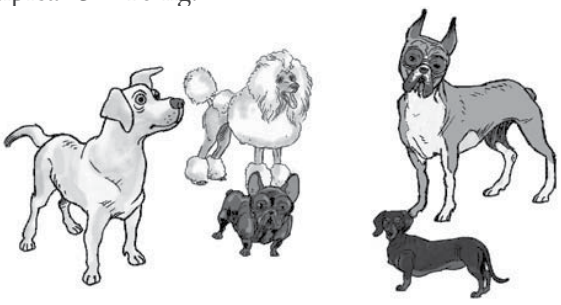
© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

7 Coeficiente de variación



Los pesos de los toros de lidia de una ganadería se distribuyen con una media $\bar{x} = 500$ kg y una desviación típica $\sigma = 40$ kg.

Los pesos de los perros de una exposición canina tienen una media $\bar{x} = 20$ kg y una desviación típica $\sigma = 10$ kg.



La desviación típica de los pesos de la manada de toros bravos (40 kg) es superior a la de los perros (10 kg). Sin embargo, los 40 kg son poca cosa para el enorme tamaño de los toros (es decir, los toros de esa manada son *muy parecidos* en peso), mientras que 10 kg es mucho en relación con el peso de un perro. En casos como este, la desviación típica no es una medida adecuada para comparar dispersiones. Por ello, definimos un nuevo parámetro estadístico.

	$\bar{x}$	σ
TOROS	500	40
PERROS	20	10

40 con relación a 500 es menor que 10 con relación a 20.

Para comparar la dispersión de dos poblaciones heterogéneas, se define el **coeficiente de variación** así:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

Al dividir σ entre $\bar{x}$ estamos relativizando la dispersión.

El resultado se da, a veces, en tantos por ciento.

En el ejemplo de los toros y los perros, obtenemos:

	$\bar{x}$	σ	CV
TOROS	500	40	8%
PERROS	20	10	50%

- Para los toros: $CV = \frac{40}{500} = 0{,}08$ Es decir, el 8%.
- Para los perros: $CV = \frac{10}{20} = 0{,}50$ Es decir, el 50%.

De este modo sí se aprecia claramente que la variación de los pesos de los perros (50%) es mucho mayor que la de los pesos de los toros (8%).

Actividades

1 En distintas tiendas de instrumentos musicales preguntamos el precio de ciertos modelos concretos de piano, flauta travesera y armónica. Los resultados obtenidos tienen las siguientes medias y desviaciones típicas:

	PIANOS	FLAUTAS	ARMÓNICAS
MEDIA	943 €	132 €	37 €
DESV. TÍPICA	148 €	22 €	12 €

Compara la dispersión relativa de los precios de estos tres productos.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Población y muestra. Variables

1 ▼▽▽ Indica, para cada caso propuesto:

- Cuál es la población.
- Cuál es la variable.
- Tipo de variable: cualitativa, cuantitativa discreta o cuantitativa continua.

a) Peso de los recién nacidos en Murcia a lo largo del año pasado.

b) Profesiones que quieren tener los estudiantes de un centro escolar.

c) Número de animales de compañía que hay en los hogares españoles.

d) Partido al que los electores pueden votar en las próximas elecciones generales.

e) Tiempo semanal que dedican a la lectura los estudiantes de la ESO en España.

f) Número de tarjetas amarillas mostradas en los partidos de fútbol de 1.ª división en la temporada pasada.

2 ▼▽▽ Se ha hecho una encuesta para saber con qué regularidad se lee el periódico en una ciudad. Las respuestas fueron:

RESPUESTA	%
TODOS LOS DÍAS	37,2
UNA VEZ A LA SEMANA	29,2
UNA VEZ AL MES	10,4
ALGUNA VEZ AL AÑO	11,2
NUNCA	…
NO CONTESTA	0,4

a) Completa la tabla calculando el porcentaje de personas que respondieron "nunca".

b) Si hubo 145 personas que respondieron "nunca", ¿a cuántas personas se encuestó?

c) Di cuántas personas dieron cada una de las respuestas.

d) Las personas encuestadas, ¿son población o muestra?

Elaboración de tablas y gráficas

3 ▼▽▽ Al preguntar a los estudiantes de un grupo de 3.º de ESO por el número de libros que han leído en el último mes, hemos obtenido estos datos:

2	1	3	1	1		5	1	2	4	3
1	0	2	4	1		0	2	1	2	1
3	2	2	1	2		3	1	2	0	2

a) Haz la tabla de frecuencias absolutas.

b) Realiza el diagrama de barras que corresponde a estos datos.

4 ▼▽▽ Al preguntar a un grupo de alumnos por el número de horas que suele estudiar cada semana, sus respuestas fueron:

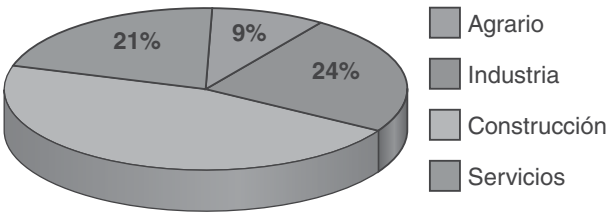
14	9	9	20	18	12	14	6	14	8
15	10	18	20	2	7	18	8	12	10
20	16	18	15	24	10	12	25	24	17
10	4	8	20	10	12	16	5	4	13

a) Reparte estos datos en los intervalos cuyos extremos son: 0 - 4,5 - 9 - 13,5 - 18 - 22,5 - 27

b) Haz la tabla de frecuencias y el histograma correspondiente.

Interpretación gráfica

5 ▼▽▽ En una cierta región se han estudiado los accidentes mortales producidos en el trabajo, según el sector de actividad. Estos han sido los resultados:



a) ¿Cuál es el porcentaje de accidentes mortales producidos en el sector de la construcción?

b) Si hubo 135 accidentes mortales en el sector agrario, ¿cuál fue el número total de accidentes mortales en la región?

c) ¿Cuántos accidentes mortales hubo en cada uno de los sectores?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Parámetros estadísticos. Cálculo

6 ▼▽▽ Calcula los parámetros media, mediana, moda, recorrido, desviación media, varianza y desviación típica de cada una de las distribuciones siguientes:

a) 3, 5, 5, 5, 6, 8, 10, 10, 11

b) 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 8, 10, 10, 11, 14

c) 183, 172, 168, 190, 175, 180, 170, 172, 175, 165

7 ▼▼▽ Contando el número de erratas por página en un libro concreto, David ha obtenido los datos siguientes:

N.º DE ERRATAS (x_i)	0	1	2	3	4	5
N.º DE PÁGINAS (f_i)	50	40	16	9	3	2

a) Halla la media y la desviación típica.

b) ¿Cuál es la moda?

8 ▼▼▽ En un control de velocidad en carretera se obtuvieron los siguientes datos:

VELOCIDAD (km/h)	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120
N.º DE COCHES	5	15	27	38	23	17

a) Haz una tabla reflejando las marcas de clase y las frecuencias.

b) Calcula la media y la desviación típica.

c) ¿Qué porcentaje circula a más de 90 km/h?

9 ▼▼▽ Los puntos conseguidos por Teresa y por Rosa en una semana de entrenamiento, jugando al baloncesto, han sido los siguientes:

TERESA	16	25	20	24	22	29	18
ROSA	23	24	22	25	21	20	19

a) Halla la media de cada una de las dos.

b) Calcula la desviación típica y el coeficiente de variación. ¿Cuál de las dos es más regular?

Autoevaluación

1 Indica, para cada caso, cuáles son los individuos, cuál la población, cuál la variable y de qué tipo es:

- Número de almendras que hay en cada tableta de chocolate de una producción.
- Tiempo de espera de cada paciente en una consulta de un centro de salud.
- Tipo de especialista al que acuden los pacientes a un centro de salud.

2 Para estudiar el "número de almendras que hay en cada tableta de chocolate" de una cierta producción, se analiza una de cada 200 producidas un cierto día. Las tabletas analizadas, ¿son población o muestra?

3 Tiempo, en minutos, que pasaron en la sala de espera los pacientes de un médico cierto día:

28 4 12 35 2 26 45 22 6 23
27 16 18 32 8 47 8 12 34 15
28 37 7 39 15 25 18 17 27 15

Haz una tabla, repartiéndolos en intervalos de extremos 0 - 10 - 20 - 30 - 40 - 50.

Representa los resultados mediante un gráfico adecuado (diagrama de barras o histograma).

4 Número de días que han ido a la biblioteca del Centro los alumnos de un curso:

3 1 2 4 0 2 1 3 1 0 2 0 3 5 2
0 2 4 1 2 1 2 0 5 3 3 1 2 1 0

Haz una tabla de frecuencias y representa los resultados mediante un gráfico adecuado (diagrama de barras o histograma).

5 Halla media, mediana, desviación media, desviación típica y coeficiente de variación de esta distribución:

6 9 1 4 8 2 3 4 4 9

6 Calcula $\bar{x}$, σ y C.V. de las distribuciones…

a) …del ejercicio 4. b) …del ejercicio 3.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

13 Azar y probabilidad

Al principio, la teoría de la probabilidad estuvo estrechamente relacionada con los juegos y las apuestas.

Los primeros estudios matemáticos relativos a juegos de azar se deben a algunos algebristas italianos del siglo XVI. Uno de ellos, **Cardano** (1501-1576), escribió el primer tratado medianamente organizado sobre este tema: *El libro de los juegos de azar*.

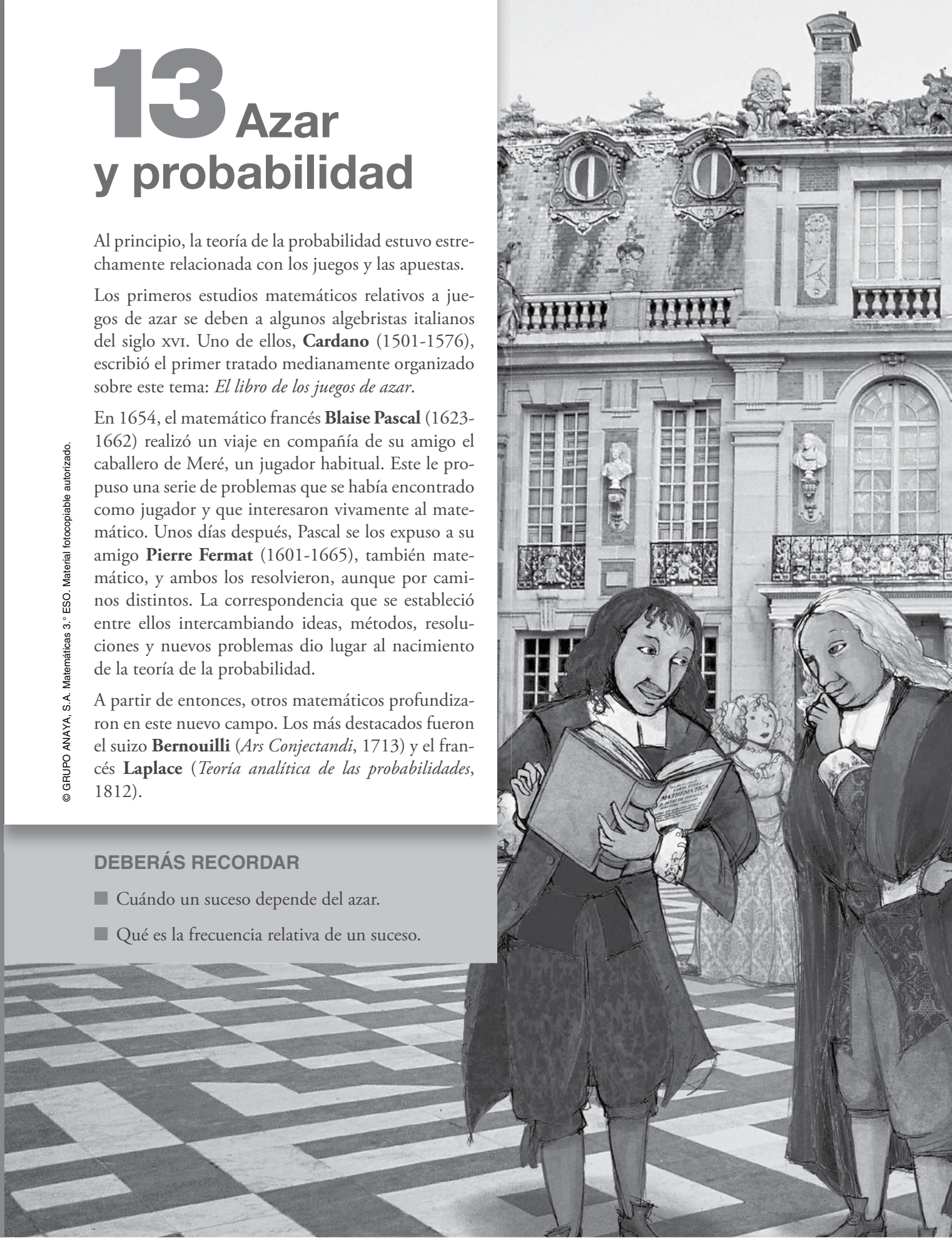
En 1654, el matemático francés **Blaise Pascal** (1623-1662) realizó un viaje en compañía de su amigo el caballero de Meré, un jugador habitual. Este le propuso una serie de problemas que se había encontrado como jugador y que interesaron vivamente al matemático. Unos días después, Pascal se los expuso a su amigo **Pierre Fermat** (1601-1665), también matemático, y ambos los resolvieron, aunque por caminos distintos. La correspondencia que se estableció entre ellos intercambiando ideas, métodos, resoluciones y nuevos problemas dio lugar al nacimiento de la teoría de la probabilidad.

A partir de entonces, otros matemáticos profundizaron en este nuevo campo. Los más destacados fueron el suizo **Bernouilli** (*Ars Conjectandi*, 1713) y el francés **Laplace** (*Teoría analítica de las probabilidades*, 1812).

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

DEBERÁS RECORDAR

- Cuándo un suceso depende del azar.
- Qué es la frecuencia relativa de un suceso.



1 Sucesos aleatorios

Etimología

Aleatorio: Relativo al azar.

En latín, *alea* significa "dado" y también "suerte", "azar".

En nuestras vivencias de cada día nos encontramos con muchos acontecimientos de los que no podríamos predecir si ocurrirán o no. Dependen del azar. Se llaman, pues, **sucesos aleatorios**. Por ejemplo:

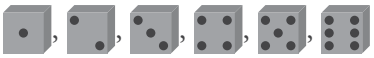
DEPENDEN DEL AZAR	NO DEPENDEN DEL AZAR
Nevará mañana.	Amanecerá mañana.
Ganará mi equipo de baloncesto.	Jugará mi equipo de baloncesto.
Al lanzar un dado, saldrá un cinco.	Al soltar el dado, caerá.
Acertaré más de 11 en la quiniela.	Jugaré a la quiniela.

Lanzar un dado y observar el resultado obtenido es una **experiencia aleatoria** porque el resultado depende del azar.

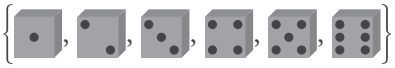
Experiencias aleatorias

Para estudiar el azar y sus propiedades, podemos realizar **experiencias aleatorias,** es decir, experimentos cuyos resultados dependen del azar. Por ejemplo, estudiemos la *experiencia aleatoria* consistente en *lanzar un dado y observar lo que sale*.

- **Caso.** Cada uno de los resultados que puede obtenerse al realizar una experiencia aleatoria se llama **caso.**

  Los posibles casos al *lanzar un dado* son: 

- **Espacio muestral.** El conjunto de todos los casos posibles se llama **espacio muestral,** al que designamos por E.

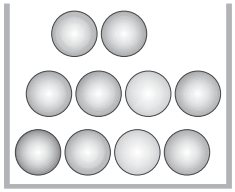
  En el dado, el espacio muestral es: $E =$ 

- **Sucesos.** Los subconjuntos del espacio muestral se llaman **sucesos.** Algunos sucesos (hay muchos más) de la experiencia *lanzar un dado* son:

Actividades

1 En una urna hay 10 bolas de cuatro colores.

Sacamos una bola y anotamos su color.



a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral y cinco sucesos.

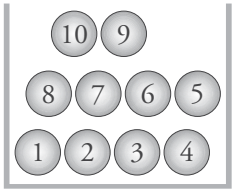
2 *Lanzamos una chincheta y observamos si cae con la punta hacia arriba o no.*

a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

3 En una urna hay 10 bolas numeradas.

Sacamos una bola y anotamos el número.



a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral y seis sucesos.

4 En una bolsa hay 10 bolas, todas rojas.

Sacamos una bola y anotamos su color.

¿Es una experiencia aleatoria?

¿Por qué?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

2 Probabilidad de un suceso

La probabilidad de un suceso indica el grado de confianza que podemos tener en que ese suceso ocurra. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1.

Para designar la probabilidad de un suceso S ponemos $P[S]$.

Por ejemplo, $P[S] = \frac{1}{5}$ significa que, a grandes rasgos, el suceso ocurre una de cada cinco veces que se realiza la experiencia.

- Si $P[S]$ es un número próximo a cero, el suceso es poco probable.
- Si $P[S]$ es próximo a uno, el suceso es muy probable.

Ley fundamental del azar

Recuerda

f (frecuencia) es el número de veces que ocurre un suceso.

f_r (frecuencia relativa) es la proporción de veces que ocurre el suceso.

Al repetir muchas veces, N, una experiencia aleatoria, la frecuencia relativa de cada suceso, S, toma valores muy parecidos a su probabilidad:

$$f_r(S) \approx P[S]$$

Y cuanto más grande sea N más se parece $f_r(S)$ a $P[S]$.

Cómo se mide la probabilidad de un suceso

- Si el suceso pertenece a una **experiencia regular,** como en el caso de una moneda, se puede evaluar la probabilidad sin necesidad de experimentar. Se hará *asignando la misma probabilidad a todos los casos*.

  Por ejemplo, para asignar probabilidades a cada cara de un dado correcto, tenemos en cuenta que son 6 casos, todos con la misma probabilidad. Por tanto, la probabilidad de cada cara es 1/6.

- Si la **experiencia** es **irregular,** *a priori*[1] desconocemos la probabilidad de cada uno de los casos. La única forma de adquirir información sobre tales probabilidades es *experimentar*.

  Por ejemplo, si un cierto jugador de baloncesto ha encestado 187 tiros libres y ha fallado 85 (su número de intentos ha sido 187 + 85 = 272), razonamos así:

  $f_r[\text{ACIERTO}] = 187/272 = 0{,}6875$. Por tanto, $P[\text{ACIERTO}] \approx 0{,}6875$.

  $f_r[\text{FALLO}] = 85/272 = 0{,}3125$. Por tanto, $P[\text{FALLO}] \approx 0{,}3125$.

(1) *a priori*: antes de empezar.

Actividades

1 En una bolsa hay 90 bolas idénticas, numeradas del 1 al 90. ¿Cuál es la probabilidad de extraer la bola con el número 58? ¿Cuál es la probabilidad de extraer cada una de las bolas?

2 En otra bolsa hay bolas de dos tamaños. Sacamos una, miramos si es grande, G, o chica, CH, y la devolvemos a la bolsa. Así observamos 84 bolas G y 36 bolas CH. ¿Qué valores asignarás a $P[G]$ y a $P[CH]$?

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

3 Ley de Laplace para experiencias regulares

Ten en cuenta

$P[\,,\,,\,] =$

$= P[\,] + P[\,] + P[\,] =$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$

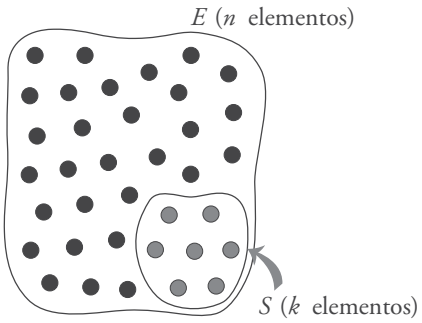
Hemos pintado las caras de un dado de los colores siguientes:

de rojo. El rojo saldrá 3 veces de cada 6: $P[\,] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

de verde. El verde saldrá 2 veces de cada 6: $P[\,] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

de amarillo. El amarillo saldrá 1 vez de cada 6: $P[\,] = \frac{1}{6}$

Estos resultados se pueden generalizar para evaluar la probabilidad de un suceso cualquiera relacionado con un instrumento aleatorio regular.



Realizamos una experiencia aleatoria con un instrumento regular.

El espacio muestral tiene n elementos (casos) y, por tanto, la probabilidad de cada caso es $1/n$.

S es un suceso que consta de k elementos.

Entonces, la probabilidad de S es: $P[S] = \frac{k}{n}$

Esto se expresa del modo siguiente:

$$P[S] = \frac{\text{número de casos favorables a } S}{\text{número total de casos posibles}}$$ LEY DE LAPLACE

Problemas resueltos

ROJAS	40
VERDES	25
AZULES	15
NEGRAS	10

1. En una bolsa tenemos 90 bolas de colores, todas del mismo tamaño, repartidas como indica la tabla del margen. Si sacamos una al azar, calcular las probabilidades de que sea de uno u otro color.

$P[\,] = \frac{\text{n.º de bolas rojas}}{\text{n.º total de bolas}} = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$

$P[\,] = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$ $\quad P[\,] = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$ $\quad P[\,] = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$

2. En una baraja de 40 cartas, hallar la probabilidad de obtener REY.

$$P[\text{REY}] = \frac{\text{número de reyes}}{\text{número total de cartas}} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

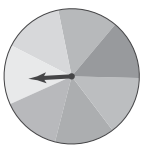
3. En una caja hay 3 586 clavos, de los cuales 311 son defectuosos. Calcular la probabilidad de que, al extraer un clavo, este sea defectuoso.

$$P[\text{DEFECTUOSO}] = \frac{\text{número de clavos defectuosos}}{\text{número total de clavos}} = \frac{311}{3\,586} = 0{,}0867$$

Actividades

1 En un campamento juvenil hay 32 jóvenes europeos, 13 americanos, 15 africanos y 23 asiáticos. Se elige al azar al portavoz de ellos. ¿Qué probabilidad hay de que sea europeo?

2 Al hacer girar la aguja, ¿cuál es la probabilidad de que caiga en alguno de los colores rojo, verde o azul?



© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

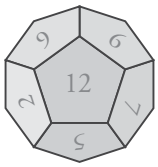
Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Espacios muestrales. Sucesos

1 ▼▽▽ Lanzamos un dado con forma de dodecaedro con las caras numeradas del 1 al 12 y anotamos el número obtenido.



a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Describe los sucesos:

A = "Menos de 5" B = "Más de 4"

C = "Número par" D = "No múltiplo de 3"

2 ▼▽▽ Nos fijamos en la cifra en la que termina el premio gordo de la lotería.

a) Describe el espacio muestral.

b) Describe los sucesos: A = "Menor que 4"

B = "Número impar" C = "Mayor que 5"

3 ▼▽▽ Escribimos cada una de las letras de la palabra JUEGO en un papel diferente y las ponemos en una bolsa. Extraemos una letra al azar.

a) Describe los sucesos elementales de este experimento aleatorio.

b) Describe el suceso "obtener vocal".

c) Si la palabra elegida fuera PROBABILIDAD, ¿cómo responderías a los apartados a) y b)?

4 ▼▼▽ Lanzamos una moneda dos veces y anotamos los resultados ordenadamente.

a) Completa el espacio muestral: E = {CC, C+, …}

b) Describe los sucesos: A = "La primera fue cara"

B = "Ninguna fue cara"

5 ▼▼▽ Lanzamos una moneda tres veces y anotamos los resultados en el orden en que salen.

a) Describe el espacio muestral (hay 8 casos).

b) Describe los sucesos siguientes:

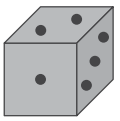
A = "Obtener dos veces cara"

B = "Obtener dos veces cruz"

C = "No obtener ninguna cruz"

Cálculo de probabilidades

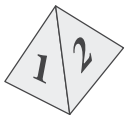
6 ▼▽▽ Halla la probabilidad de obtener un 2 y la probabilidad de obtener un 5, al lanzar un dado correcto en cada uno de estos casos:

a) 

(Cubo numerado del 1 al 6)

b)

(Octaedro numerado del 1 al 8)

c) 

(Tetraedro numerado del 1 al 4)

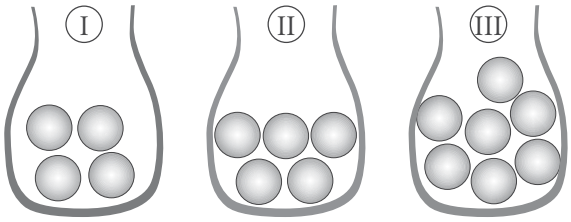
7 ▼▽▽ En una bolsa hay 6 bolas rojas, 4 azules, 7 verdes, 2 amarillas y una negra.

Extraemos una al azar. Halla la probabilidad de que:

a) Sea azul. b) No sea negra.

c) Sea roja o verde. d) No sea amarilla ni negra.

8 ▼▽▽ Razona de cuál de las bolsas siguientes es más probable sacar bola roja:



9 ▼▽▽ Lanzamos un dado correcto. Hallas las probabilidades de que el resultado sea:

a) Múltiplo de 3. b) Múltiplo de 2.

c) Mayor que 1. d) Menor que 5.

e) Menor que 1. f) Potencia de base 2.

10 ▼▽▽ Extraemos una carta de una baraja española de 40 naipes. Halla la probabilidad de que:

a) La carta sea de BASTOS.

b) La carta NO sea ni AS ni FIGURA.

c) La carta sea un número menor que 6.

d) La carta sea de OROS o FIGURA.

© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

11 ▼▼▽ En un libro de 120 páginas, hemos contado el número de erratas en cada una de las páginas. Los resultados se resumen en esta tabla:

N.º ERRATAS	N.º PAGINAS
0	58
1	42
2	16
3	3
4	1

Al elegir una página al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga ninguna errata?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga exactamente dos erratas?

c) ¿Y la de que tenga alguna errata? ¿Y la de que tenga más de tres?

12 ▼▽▽ De una bolsa con 7 bolas rojas, 5 verdes, 3 amarillas, 11 negras y 3 azules, sacamos una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que…

a) … sea roja? b) … no sea negra?

13 ▼▽▽ Extraemos una carta de una baraja española de 40 naipes. Halla la probabilidad de que:

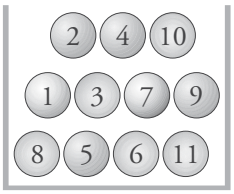
a) Sea un CINCO.

b) No sea un CABALLO.

c) Sea de OROS o de COPAS.

d) No sea de ESPADAS.

14 ▼▼▽ De esta urna extraemos una bola y observamos su número y color.



Halla las probabilidades de cada uno de los siguientes sucesos:

a) Obtener bola verde con número par.

b) Obtener bola roja con número par.

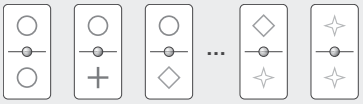
c) Obtener bola amarilla o roja.

d) Obtener una bola con número mayor que 7.

Autoevaluación

1 Describe un dominó con ○ + ◇ ✧.

Las piezas serían como estas:



Dibuja todas.

Deben ser 10 fichas.

Echamos las fichas en una bolsa y extraemos una.

a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

c) Describe el suceso "la ficha extraída tiene el símbolo +".

2 Dejamos caer 1 000 chinchetas. Caen 649 así y el resto así .

Halla las frecuencias absoluta y relativa de los sucesos y . Estima las probabilidades de ambos casos.

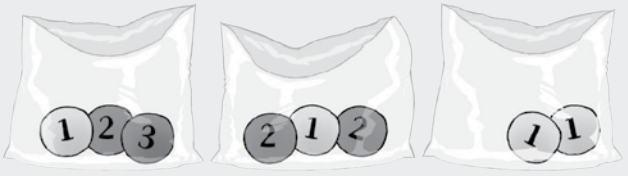
3 En un equipo de natación hay 3 niñas americanas, 5 europeas, 2 asiáticas y 2 africanas.

Si elegimos una de ellas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea asiática? ¿Y la de que no sea europea?

4 Ana tira un dado y su hermana Eva lo tira después.

¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación de Eva sea mayor que la de Ana?

5 De cada una de estas bolsas extraemos una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las tres cifras sea 5?



© GRUPO ANAYA, S.A. Matemáticas 3.º ESO. Material fotocopiable autorizado.