FICHA DE **CONSOLIDACIÓN** | Sucesiones

1. Escribe los cuatro primeros términos y el décimo término de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = 3n - 2$ **c)** $c_n = n^3 - 1$ **e)** $e_n = (-1)^{n+1}$

b) $b_n = 5 - 2n$ **d)** $d_n = \dfrac{3}{n+2}$ **f)** $f_n = 2 \cdot 3^{n-2}$

2. Escribe los tres términos siguientes de estas sucesiones.

a) $\dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{6}{5}\ldots$ **c)** 2, 6, 12, 20, 30…

b) –1, 8, –27, 64… **d)** 4, 8, 12, 16, 20…

3. Escribe los términos generales de las sucesiones del ejercicio anterior.

4. Escribe los términos generales y los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones.

a) A cada número natural le corresponde el cuadrado de su mitad.
b) A cada número natural le corresponde la mitad de su cuadrado.
c) A cada número natural le corresponde la suma de los cuadrados de sí mismo y de su siguiente.

5. Calcula los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia.

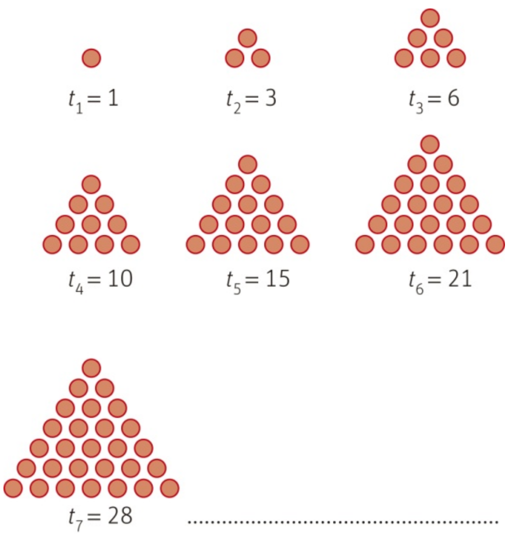
a) $a_1 = 1;\ a_n = a_{n-1} + 3$ **c)** $c_1 = 1;\ c_2 = 7;\ c_n = \dfrac{c_{n-1} + c_{n-2}}{2}$

b) $b_1 = \dfrac{1}{12};\ b_n = 2b_{n-1}$ **d)** $d_1 = 5;\ d_2 = 7;\ d_n = 2 \cdot (d_{n-1} + d_{n-2})$

6. Encuentra la ley de recurrencia de las siguientes sucesiones en función de los dos términos anteriores.

a) $(a_n) = (2, 5, 10, 50, 500, 25\,000\ldots)$ para $n > 2$
b) $(b_n) = \left(2, 16, 8, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{8}, 2\ldots\right)$ para $n > 2$
c) $(c_n) = (1, 2, 9, 121, 16\,900\ldots)$ para $n > 2$

7. Encuentra la ley de recurrencia de los números triangulares que se obtienen como se observa en la siguiente ilustración.



……………………………………………

FICHA DE **CONSOLIDACIÓN** Progresiones aritméticas

1. **Averigua si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas. Calcula la diferencia en aquellas que lo sean.**

a) 1, 7, 13, 19, 25… **c)** $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}...$ **e)** 4, 9, 16, 25, 36…

b) –2, 4, 6, 8, –10… **d)** 8, 5, 2, –1, –4… **f)** 1, 3, 5, 7, 11…

2. **Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas.**

a) 3, 2, –7, –10… **c)** $\frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}...$

b) 11, 13, 15, 17… **d)** 1,2; 1,6; 2; 2,4…

3. **Calcula el término general y los términos 100, 200 y 500 de las siguientes progresiones ariméticas.**

a) $a_1 = 3, d = 2$ **c)** $c_1 = \frac{3}{2}, d = \frac{1}{4}$

b) $b_1 = –5, d = –3$ **d)** $d_1 = 5, d = –4$

4. **Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas.**

a) $a_1 = 3, a_4 = 15$ **c)** $c_3 = 7, c_7 = 9$

b) $b_2 = 6, b_5 = 0$ **d)** $d_1 = –3, d_9 = –19$

5. **Calcula la suma de los veinte primeros términos de las progresiones aritméticas del ejercicio 3.**

6. **Averigua si los siguientes números pertenecen a las progresiones que se indican. En caso afirmativo, indica qué lugar ocupan.**

a) 2702 y $a_n = 3n + 5$

b) 150 y $b_n = 140 – 2n$

c) 106 y $c_n = 10 + 4n$

7. **El primer término de una progresión aritmética es 100, y la suma de sus 40 primeros términos, 7900. ¿Cuál es el término general de la progresión?**

FICHA DE **CONSOLIDACIÓN** Progresiones geométricas

1. Averigua si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas. Calcula la razón en aquellas que lo sean.

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}...$ **c)** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}...$ **e)** 2, –4, 8, –16, 32…

b) $\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{20}{7}, \frac{40}{7}...$ **d)** 1, 3, 3, 9, 27… **f)** $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81}...$

2. Calcula el término general de las siguientes progresiones geométricas.

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}...$ **c)** $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81}...$

b) 2, –4, 8, –16, 32… **d)** 1, –1, 1, –1, 1, –1…

3. Calcula el término general y la posición 12 de las siguientes progresiones geométricas.

a) $a_1 = 3, r = -2$ **c)** $c_1 = 81, r = \frac{1}{3}$

b) $b_1 = 5, r = 0{,}1$ **d)** $d_1 = \frac{1}{4}, r = -2$

4. Calcula el término general de las siguientes progresiones geométricas.

a) $a_1 = 3, a_4 = -24$

b) $b_2 = 0{,}0006, b_6 = 6$ y sus términos son positivos.

5. Calcula la suma de los ocho primeros términos de las progresiones geométricas del ejercicio 3.

6. Calcula la suma de los infinitos términos de las progresiones geométricas siguientes.

a) 81, 27, 9, 3, 1…

b) 50; 5; 0,5; 0,05…

c) 8, 4, 2, 1…

7. Cierto tipo de bacterias se reproducen por fisión cada 30 minutos, es decir, de cada bacteria se obtienen dos en ese plazo de tiempo. Si se introducen 10 bacterias en un cultivo, ¿cuántas habrá al cabo de 24 horas si ninguna de ellas muere?

FICHA DE **PROFUNDIZACIÓN**

La sucesión de Fibonacci y el número de oro

Cuando un segmento se divide en dos segmentos de longitudes *a* y *b* (con *a* > *b*), se dice que esta división es áurea si el mayor es al menor como el total es al mayor. Es decir, $\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}$.

Al valor de la proporción $\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}$ se le conoce como número de oro y se le suele denotar con la letra φ (Fí) en honor a Fidias, que utilizó en varias ocasiones este número en la construcción del Partenón en Atenas.

Pero, ¿qué número es este? Llamemos $\varphi=\frac{a}{b}$ Entonces,

$\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}\Rightarrow\varphi=1+\varphi^{-1}\Rightarrow\varphi^2=\varphi+1\Rightarrow\varphi^2-\varphi-1=0\Rightarrow\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618\cdots$ (Desechando la solución negativa).

Lo sorprendente de este número es como se encuentra presente en diversos campos como la naturaleza, el arte, el diseño, etc.

Además, también está relacionado con la sucesión de Fibonacci que has estudiado en esta Unidad.

Recuerda que la sucesión de Fibonacci es una sucesión recurrente donde $a_1 = a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

De este modo, los primeros términos de la sucesión de Fibonacci serán:

$a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$, $a_6 = 8$, $a_7 = 13$, $a_8 = 21$, $a_9 = 34$, $a_{10} = 55$, $a_{11} = 89\ldots$

Fijémonos en los cocientes de dos términos consecutivos $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ de esta sucesión:

$\frac{a_2}{a_1}=1$ $\quad\frac{a_3}{a_2}=2$ $\quad\frac{a_4}{a_3}=1{,}5$ $\quad\frac{a_5}{a_4}=1{,}67$ $\quad\frac{a_6}{a_5}=1{,}6$

$\frac{a_7}{a_6}=1{,}625$ $\quad\frac{a_8}{a_7}=1{,}615...$ $\quad\frac{a_9}{a_8}=1{,}619...$ $\quad\frac{a_{10}}{a_9}=1{,}618...$ $\quad\frac{a_{11}}{a_{10}}=1{,}618...$

Como puedes observar estos valores tienden sorprendentemente al número de oro.

1. **Encuentra situaciones en distintos contextos en donde aparezca el número de oro.**

2. **Demuestra de una manera más rigurosa que el cociente entre dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci tiende al número de oro.**

FICHA DE **PROFUNDIZACIÓN** Progresiones aritmético-geométricas

Si a_n es una progresión aritmética y b_n es una progresión geométrica, diremos que la sucesión $c_n = a_n \cdot b_n$ de términos $a_1 \cdot b_1$, $a_2 \cdot b_2$, $a_3 \cdot b_3$ es una progresión aritmético-geométrica.

Está claro que el término general de estas progresiones aritmético-geométricas siempre se puede expresar como el producto de los dos términos generales. Operando, siempre podremos expresar su término general como $c_n = (a \cdot n + b) \cdot r^n$, con *a* y *r* no nulos y $r \neq 1$ (ya que en este caso sería una progresión aritmética).

Intentemos calcular la suma de los *m* primeros términos:

$$S_m = (a+b)\cdot r + (2a+b)\cdot r^2 + (3a+b)\cdot r^3 + \cdots + (ma+b)\cdot r^m = a\cdot r + 2a\cdot r^2 + \cdots + ma\cdot r^m + b\cdot r + b\cdot r^2 + \cdots + b\cdot r^m$$

$$rS_m = (a+b)\cdot r^2 + (2a+b)\cdot r^3 + \cdots + (ma+b)\cdot r^{m+1} = a\cdot r^2 + 2a\cdot r^3 + \cdots + ma\cdot r^{m+1} + b\cdot r^2 + b\cdot r^3 + \cdots + b\cdot r^{m+1}$$

Restando las dos expresiones nos queda:

$$S_m - rS_m = a\cdot r + a\cdot r^2 + a\cdot r^3 + \cdots + a\cdot r^m - m\cdot a\cdot r^{m+1} + b\cdot r - b\cdot r^{m+1} = a\cdot r\cdot\left(\frac{1-r^m}{1-r} - m\cdot r^m\right) + b\cdot r\cdot\left(1-r^m\right)$$

$$S_m = \frac{a\cdot r\cdot\left(\frac{1-r^m}{1-r} - m\cdot r^m\right) + b\cdot r\cdot\left(1-r^m\right)}{1-r}$$

Como sucedía con las progresiones geométricas, en estas progresiones se pueden calcular las sumas de los infinitos términos cuando $|r| < 1$. En estos casos, teniendo en cuenta que r^m es un valor muy próximo a cero cuando m toma valores elevados, tendremos que:

$$S = \frac{a\cdot r\cdot\left(\frac{1}{1-r}\right) + b\cdot r}{1-r} = \frac{a\cdot r + b\cdot r\cdot(1-r)}{(1-r)^2}$$

1. **Calcula la suma de los infinitos términos de la sucesión $a_n = \dfrac{(5n+1)\cdot 2^n}{(-3)^n}$.**

2. **Dada la progresión de términos 4, 4, 3, 2, $\dfrac{5}{4}$, ...:**

   a) Comprueba que es una progresión aritmético-geométrica, obtén su término general y halla los dos siguientes términos.

   b) Calcula, si es posible, la suma de los infinitos términos de esta progresión.