



1.- Halla la suma de los ángulos interiores de los siguientes polígonos convexos.

- a) Cuadrilátero
- b) Heptágono
- c) Octógono

2.- Halla la medida de los ángulos interiores de:

- a) Un octógono regular.
- b) Un polígono regular de 15 lados.
- c) Un polígono regular de 30 lados.

3.- Indica el número de lados que tienen los polígonos convexos sabiendo que la suma de sus ángulos interiores es:

- | | |
|-----------------|-----------------|
| a) 2520° | c) 4500° |
| b) 3240° | d) 7200° |

4.- Indica el número de lados que tiene un polígono regular si cada uno de sus ángulos interiores mide:

- | | |
|----------------|------------------|
| a) 108° | c) 140° |
| b) 120° | d) $157,5^\circ$ |

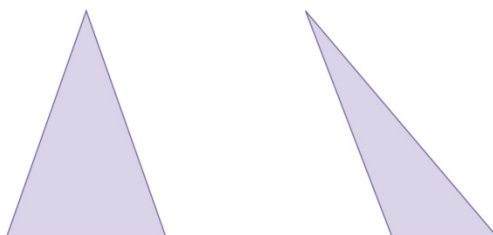
5.- Se conocen cuatro ángulos interiores de un pentágono convexo: 87° , 96° , 100° y 160° . ¿Cuánto mide el ángulo que falta?



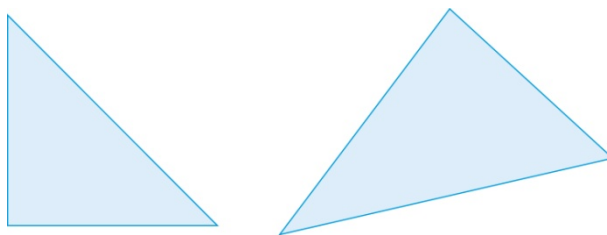
1.- Estudia si existe algún triángulo cuyos lados midan.

- a) 5 cm, 11 cm y 7 cm.
- b) 14 cm, 6 cm y 8 cm.
- c) 10 cm, 2 cm y 4 cm.

2.- Dibuja el ortocentro, el circuncentro y la circunferencia circunscrita de los siguientes triángulos.



3.- Dibuja el baricentro, el incentro y la circunferencia inscrita de los siguientes triángulos.



4.- En un triángulo isósceles, la distancia del baricentro al vértice desigual es de 5 cm, ¿cuánto mide la altura del lado desigual?

5.- Contesta razonadamente las siguientes preguntas

- a) El baricentro de un triángulo siempre está en el interior del triángulo.
- b) ¿Dónde se sitúa el ortocentro de un triángulo rectángulo?
- c) ¿Qué ocurre con las medianas, mediatrices, alturas y bisectrices en un triángulo equilátero?
- d) ¿Cuál es el punto que equidista de tres puntos dados no alineados?



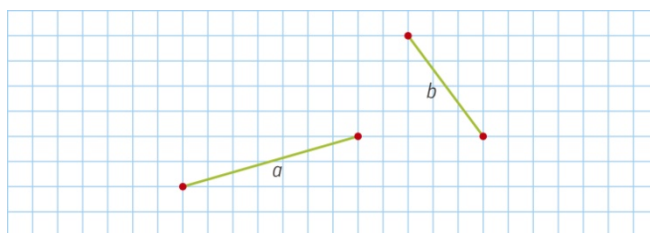
1.- Completa la siguiente tabla en la que tenemos datos de dos de los lados de un triángulo rectángulo.

Cateto b	Cateto c	Hipotenusa a
45 cm	60 cm	
	8 dm	15 dm
20 m		80 m
6 m	6 m	

2.- Estudia si los triángulos cuyas medidas de lados se indican son rectángulos.

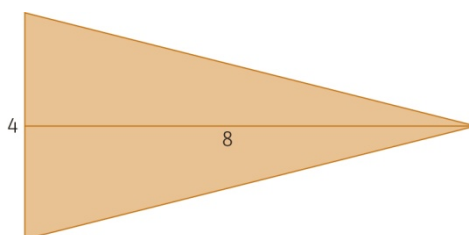
- a) 40 cm, 30 cm y 50 cm
- b) 25 dm, 18 dm y 40 dm
- c) 4 cm, 4 cm y 6 cm
- d) 20 m, 16 m y 12 m

3.- Sabemos que los cuadrados de la cuadrícula siguiente tienen 1 cm de lado. ¿Cuánto miden los segmentos dibujados?



4.- Un triángulo equilátero tiene 10 cm de lado, ¿cuánto mide su altura?

5.- La altura correspondiente al lado desigual de un triángulo isósceles mide 8cm. El lado desigual mide 4 cm, ¿cuánto mide cada uno de los otros lados?

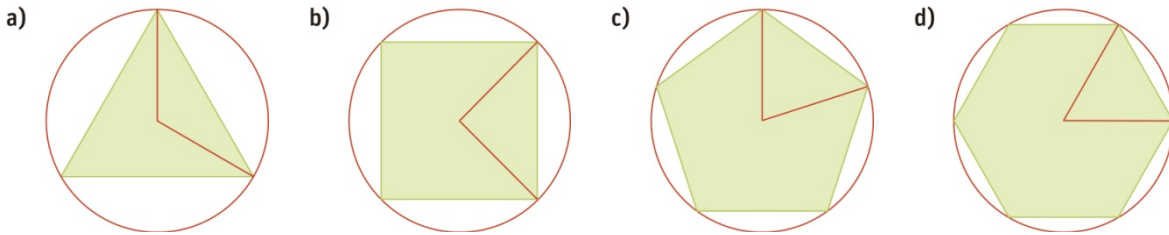


6.-Se quiere sujetar una antena de 25 m de altura mediante un cable al suelo. El punto de sujeción está a 8m de la base de la antena. ¿Cuánto mide el cable?

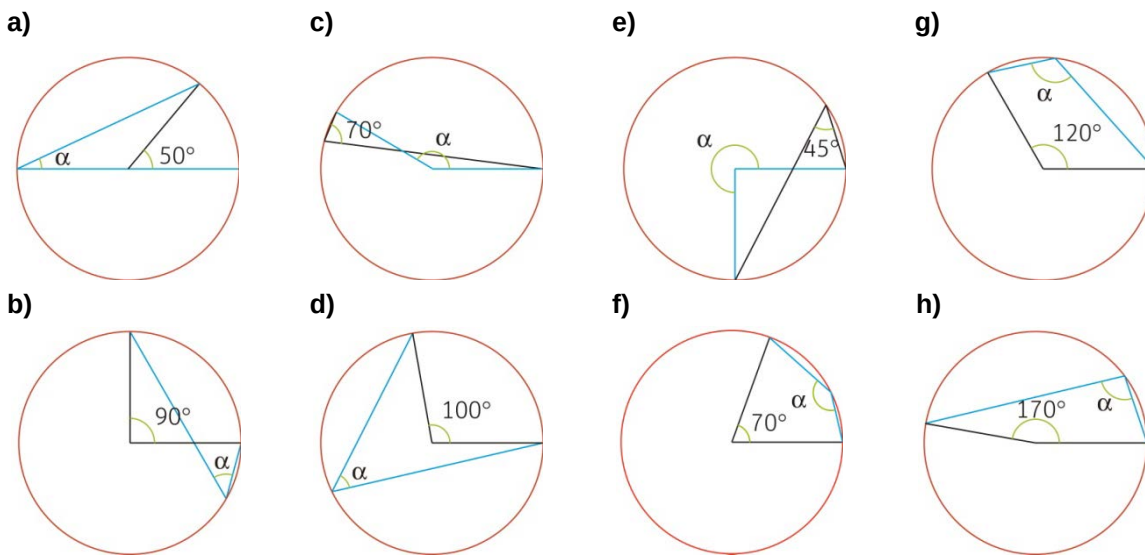
7.- La diagonal de un rectángulo mide 14 dm. Si un lado mide 7 dm, ¿cuánto mide su perímetro?



1.- Calcula la medida de los ángulos centrales de los siguientes polígonos regulares.



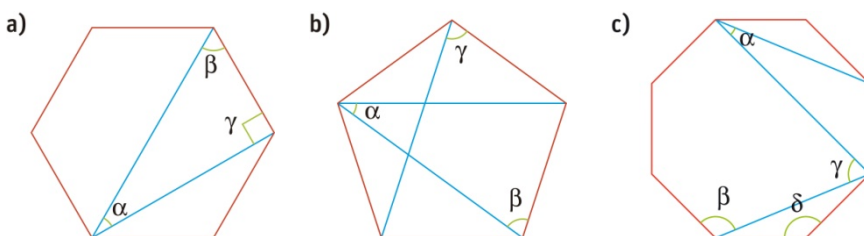
2.- Calcula las medidas de los ángulos desconocidos en las siguientes figuras.



3.- Calcula las medidas de los ángulos semiinscritos en las circunferencias.



4.- Calcula las medidas de los ángulos desconocidos en los siguientes polígonos regulares.



5.- Dibuja un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida 8 cm. ¿Es única la solución?

6.- Responde de forma razonada a las siguientes preguntas.

- ¿Los ángulos inscritos correspondientes al mismo arco tienen la misma medida?
- ¿Un ángulo inscrito en una circunferencia puede ser mayor que 180° ?
- ¿Cómo se puede calcular el ángulo interior de cualquier polígono regular a partir del número de lados usando las propiedades de los ángulos inscritos en una circunferencia?

Unidad 7 Figuras planas

FICHA DE

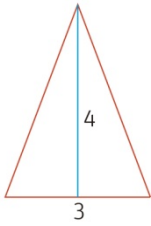
CONSOLIDACIÓN



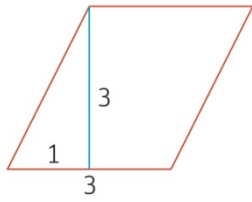
Longitudes y áreas

1.- Calcula los perímetros de las siguientes figuras. Las medidas están en centímetros.

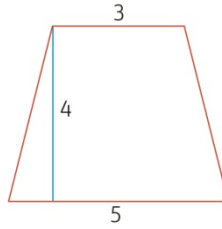
a)



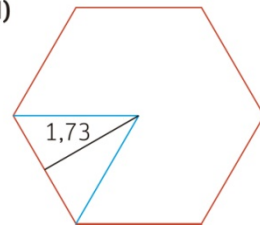
b)



c)

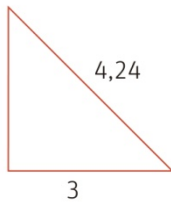


d)

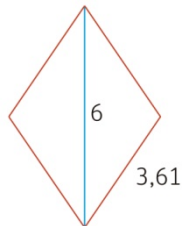


2.- Calcula las áreas de las siguientes figuras. Las medidas están en metros.

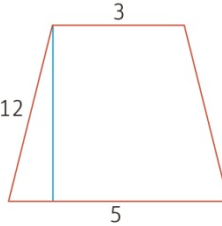
a)



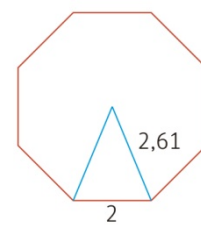
b)



c)

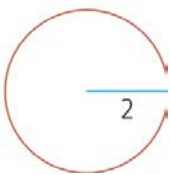


d)

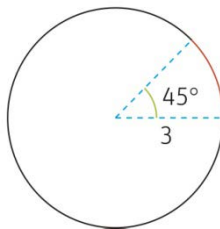


3.- Calcula las longitudes marcadas en rojo. Las medidas están en decímetros.

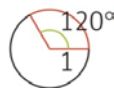
a)



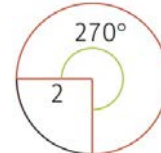
b)



c)

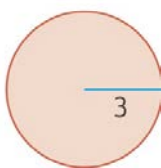


d)

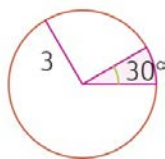


4.- Calcula las áreas sombreadas en las siguientes figuras. Las medidas están en decímetros.

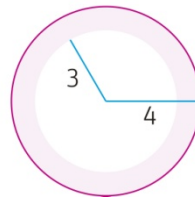
a)



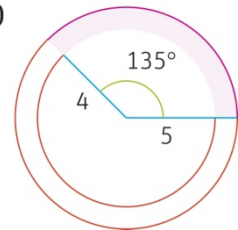
b)



c)



d)

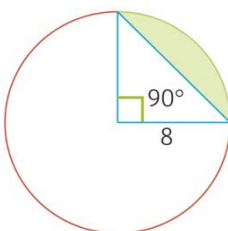


5.- Calcula el área y el perímetro de un triángulo rectángulo que tiene una hipotenusa de 13 cm, y un cateto, de 12 cm.

6.- La diagonal menor de un rombo mide 8 m y su área es 48 m². Calcula su perímetro.

7.- Calcula el área de las figuras sombreadas en verde. Las medidas están en metros.

a)



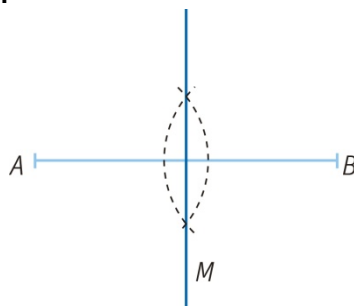
b)



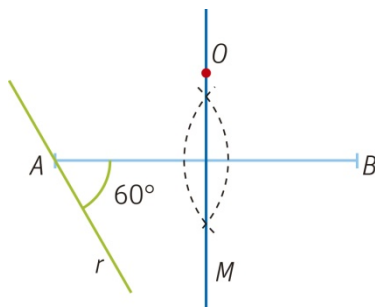


1.- El arco capaz es el lugar geométrico de los puntos del plano desde los cuales se ven los extremos de un segmento desde un mismo ángulo. Para trazar el arco capaz de 60° del segmento AB seguimos los siguientes pasos:

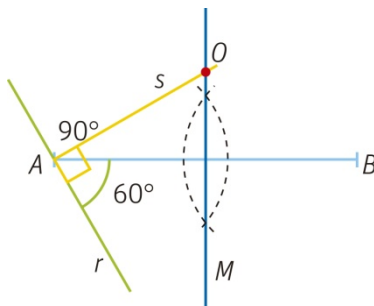
1.º Dibuja la mediatriz del segmento AB .



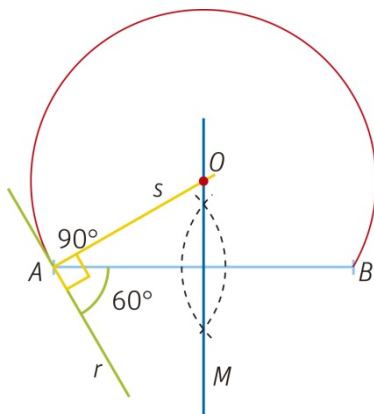
2.º En un extremo del segmento, dibuja una recta r que forme un ángulo de 60° con el segmento.



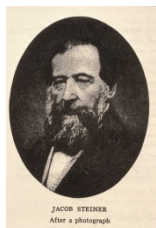
3. Desde ese mismo extremo, dibuja una recta s perpendicular a r , que cortará a la mediatriz en el punto O .



4.º El punto O es el centro de un arco que pasa por A y por B y desde cuyos puntos se ven A y B con un ángulo de 60° . Es decir, O es el centro del arco capaz de 60° del segmento AB . ¿Hay más soluciones?



2. Dibuja el arco capaz de 30° y 45° para el segmento AB .



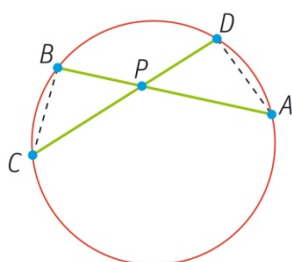
En 1826, el matemático suizo Jakob Steiner definió el concepto de potencia de un punto respecto una circunferencia, aunque este resultado ya se encontraba en *Los Elementos de Euclides*. (300 a. C.)

Dada una circunferencia C y un punto P del plano, se traza una recta r por P que corta a la circunferencia C en dos puntos A y B . Se define potencia del punto P respecto a la circunferencia C como el producto de las distancias $PA \cdot PB$.

Se observa que la potencia de un punto no depende de la recta que se escoja.

Vamos a probarlo.

- Sea P un punto interior a la circunferencia y r y s dos rectas que pasan por P y corten a la circunferencia en A, B y C, D , respectivamente.

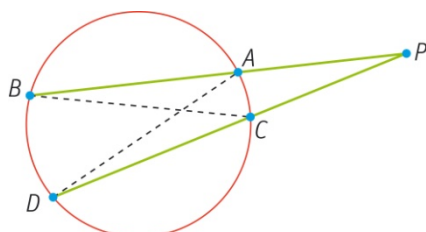


Los triángulos PAC y PDB son semejantes.

- El ángulo en P es el mismo en los dos triángulos, porque son opuestos por el vértice.
- El ángulo en A es el mismo que el ángulo en D , porque abarcan el mismo arco de circunferencia.
- El ángulo en C es el mismo que el ángulo en B , porque abarcan el mismo arco de circunferencia. Por lo tanto:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{PD}{PA} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

- Si el punto P fuera exterior, los triángulos PBC y PDA son semejantes. Por el ángulo en P común y por tener los ángulos B y D iguales, ya que abarcan el mismo arco de circunferencia.



Por lo tanto:

$$\frac{PB}{PD} = \frac{PC}{PA} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

- Sea r el radio de una circunferencia y d la distancia de un punto P al centro de esa circunferencia. Demuestra que:

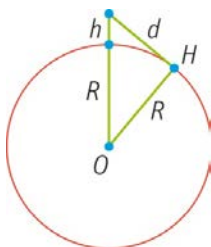
- Si el punto P es interior, la potencia de P respecto de esa circunferencia es $r^2 - d^2$.
- Si el punto P es exterior, la potencia de P respecto de esa circunferencia es $d^2 - r^2$.



El horizonte es la línea que aparentemente separa la tierra y el cielo. Seguramente, si has estado en la playa, habrás visto alejarse un barco poco a poco, hasta el momento en que el barco se pierde por la línea del horizonte. Pero, ¿a qué distancia se encuentra esa línea? ¿Se podrá calcular?

El cálculo de esa distancia se puede hacer utilizando el teorema de Pitágoras.

Observa la figura:



- La circunferencia representa la esfera terrestre,
- R es el radio de la Tierra,
- h la altura del observador sobre la tierra
- d la distancia al horizonte de esa persona

El triángulo es rectángulo en H , porque la recta tangente a una circunferencia es siempre perpendicular al radio en el punto de tangencia.

Por tanto, la distancia d es, en kilómetros:

$$R^2 + d^2 = (R + h)^2 \Rightarrow d^2 = R^2 + h^2 + 2Rh - R^2 \Rightarrow d = \sqrt{2Rh + h^2}$$

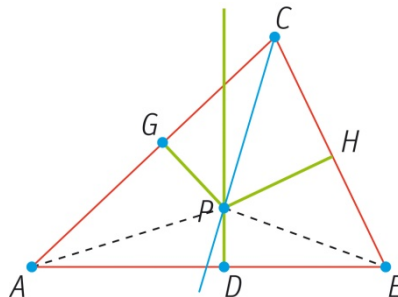
Y como la altura del observador al cuadrado, h^2 , es muy pequeña comparándola con el radio de la Tierra (6371 km), se puede despreciar, por lo que $d \approx \sqrt{2Rh} = \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot h} = \sqrt{12\,742h}$.

1. Calcula a qué distancia se encuentra el horizonte de una persona que está en lo alto de un acantilado de 540 m de altura sobre el nivel del mar.



Hay veces que demostraciones aparentemente bien realizadas, llevan a resultados absurdos. Un ejemplo es la siguiente donde se muestra que todos los triángulos son isósceles.

- 1.º Se considera un triángulo ABC y se traza la mediatriz del lado AB y la bisectriz del ángulo interior $\widehat{C}$. La mediatriz y la bisectriz se cortan en el punto interior P .
- 2.º Desde el punto P se trazan perpendiculares a los lados AC y BC y se obtienen G y H .



- 3.º Los triángulos CPG y CPH son semejantes ya que tienen el lado CP en común y tienen dos ángulos iguales, $\widehat{PGC} = \widehat{PHC} = 90^\circ$ y $\widehat{PCG} = \widehat{PCH}$, este último por estar el punto P en la bisectriz.
- 4.º Son también semejantes los triángulos ADP y BDP ya que ambos son triángulos rectángulos con los mismos catetos. El cateto PD es común y los catetos DA y DB son iguales ya que D es el punto donde la mediatriz del segmento AB corta a dicho segmento.
- 5.º Los triángulos GPA y HPB son también semejantes ya que ambos son triángulos rectángulos que cumplen que $PA = PB$, por pertenecer P a la mediatriz, y $PG = PH$ por pertenecer P a la bisectriz.
- 6.º Con todo lo anterior se tendría que $CG + GA = CH + HB$, con lo que $AC = CB$ y por tanto el triángulo es isósceles.

1. ¿Dónde está el error de esta demostración?
2. A pesar de ser una demostración fraudulenta, esta demostración nos permite probar un interesante resultado geométrico, ¿cuál es?