FICHA DE **CONSOLIDACIÓN** Expresiones algebraicas. Valor numérico

1. Ana decide medir la longitud de distintos objetos comparándolos con su sacapuntas. Expresa las longitudes de los siguientes objetos teniendo en cuenta que el sacapuntas mide *x* cm de largo.

a) La goma mide 1 cm más que el largo del sacapuntas.
b) El estuche mide 12 cm más que la goma.
c) Al compás le faltan 4 cm para medir como el estuche.
d) El lápiz mide la mitad que el compás.
e) La calculadora mide el triple que el sacapuntas.
f) La agenda mide 10 cm más que la calculadora.

2. Asocia cada operación con su expresión algebraica.

El cuadrado de la suma de dos números	$\frac{x}{2}+3$
La suma de los cuadrados de dos números	$2x+3$
El doble de un número más 3 unidades	x^2+y^2
La mitad de un número más 3 unidades	$3x+2y$
El triple de un número más el doble de otro	$(x+y)^2$

3. Expresa algebraicamente las siguientes operaciones.

a) La mitad del cuadrado de un número
b) El triple del resultado de restar 5 unidades a un número
c) El cubo de un número más la quinta parte del mismo número
d) El cuadrado de la tercera parte de un número
e) La cuarta parte de un número más el doble de dicho número

4. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para cada uno de los valores que se indican.

x	$3x+2$	$2x^2+4$	$2x-7$	$-3x+2$	x^3+1
−2					
0					
1					
3					

5. Halla el valor numérico de las expresiones $Q(x,y)=3xy^2-7x+5xy-4y$, $R(y,z)=8y^3z+6y^2+z-3$ y $S(x,z)=-x^4+6x^2z+xz-3z$ para los valores que se indican.

a) $Q(2,-1)$ **b)** $R(0,-2)$ **c)** $S(-3,2)$

6. Sea $P(x)=x^3+4ax^2-2x+3$. Calcula el valor de *a* para que $P(1)=10$.

FICHA DE **CONSOLIDACIÓN** Operaciones con polinomios

1. Dados los polinomios $P(x)=2x^3-3x^2+4x-2$, $Q(x)=x^4-x^3+4$, $R(x)=3x^2-5x+5$ y $S(x)=3x-2$, resuelve las siguientes sumas y restas.

a) $P(x)+Q(x)$

b) $P(x)-R(x)$

c) $P(x)-Q(x)+R(x)$

d) $Q(x)-[R(x)+S(x)]$

2. Considera los polinomios $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ y $S(x)$ del ejercicio anterior y resuelve los siguientes productos y potencias.

a) $R(x)\cdot S(x)$

b) $P(x)\cdot S(x)$

c) $Q(x)\cdot R(x)$

d) $[S(x)]^2$

e) $[R(x)]^2$

f) $[P(x)]^2$

3. Sean $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ y $S(x)$ los polinomios del ejercicio 1. Realiza las siguientes operaciones combinadas.

a) $P(x)-2Q(x)+3R(x)$

b) $P(x)-3[Q(x)+R(x)]$

c) $[Q(x)-R(x)]\cdot S(x)$

d) $-[Q(x)+2R(x)]\cdot S(x)$

4. Calcula las siguientes divisiones.

a) $(8x^3-6x^2+4x):(2x)$

b) $(-3x^4+6x^3-12x^2):(3x^2)$

c) $(-12x^9+2x^5-x^4):(4x^4)$

d) $(8x^8-6x^4-4x^3):(-4x^3)$

5. Saca factor común en las siguientes expresiones algebraicas.

a) $3x^3+6x^2-12x$

b) $12x^4y^2+6x^2y^4-15x^3y$

c) $-5xyz-20xy^2-10x^2yz$

d) $2ab^2-4a^3b+8a^4b^3$

6. Realiza las siguientes operaciones combinadas.

a) $\frac{2x^2}{5}\cdot(x^3-3x^2+x-1)-x^3\cdot\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{2}{3}\right)$

b) $\left(\frac{5x^3}{3}-x^2+\frac{2x}{5}-7\right)\cdot\left(\frac{5x^2}{4}-3x\right)$

FICHA DE **CONSOLIDACIÓN** Identidades notables

1. **Desarrolla los siguientes productos utilizando las identidades notables.**

a) $(x+4)^2$

b) $\left(\frac{3}{5}m+\frac{5}{3}\right)^2$

c) $(2x-3)^2$

d) $\left(\frac{2}{5}p-5\right)^2$

e) $(3x+4)\cdot(3x-4)$

f) $\left(5w+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(5w-\frac{1}{2}\right)$

2. **Desarrolla las siguientes operaciones teniendo en cuenta las identidades notables.**

a) $(xy+4y)^2$

b) $\left(\frac{1}{2}a^3b+\frac{3}{2}ab^3\right)^2$

c) $(5xz-3a)^2$

d) $\left(\frac{3}{5}xy^2z^3-\frac{1}{5}x^4\right)^2$

e) $(7y^3x+2y)\cdot(7y^3x-2y)$

f) $\left(\frac{2}{7}xz^2-\frac{1}{3}y\right)\cdot\left(\frac{2}{7}xz^2+\frac{1}{3}y\right)$

3. **Indica si las igualdades son verdaderas o falsas y, en caso de que sean falsas, corrige los errores.**

a) $(x-3)^2=x^2-9$

b) $(3x+9)^2=3x^2+81$

c) $(4m-n)^2=16m^2-8mn+n^2$

d) $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2=\frac{1}{9}x^2-\frac{10}{3}x+25$

e) $(2x+1)\cdot(2x-1)=4x^2+1$

f) $\left(\frac{1}{2}x^2+2y\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-2y\right)=\frac{1}{4}x^4-4y^2$

4. **Expresa los siguientes polinomios como producto de binomios usando las identidades notables.**

a) x^2-6x+9

b) $4x^2+4x+1$

c) $25x^2-9$

d) $x^2y^2-2xy+1$

e) $4x^2-\frac{4}{9}$

f) $9x^2-30x+25$

5. **Simplifica las siguientes expresiones utilizando las identidades notables.**

a) $(3x-5)^2-x(9x-4)$

b) $(2x+1)^2-(2x-1)^2+x$

c) $(x-4)^2-x(2x-1)^2$

d) $(5x-7)^2-(5x-7)(5x+7)+4$

e) $x-2(x+1)^2-(2x+4)^2$

f) $(3x-1)(3x+1)-(x+8)^2$

6. **Supongamos que tenemos un cuadrado cuyo lado mide *x* metros. Si aumentamos cada lado del cuadrado en 2 m, ¿cuál es la fórmula que nos proporciona su área? ¿Y cuál sería la fórmula del área del cuadrado en caso de disminuir su lado en 1 m?**

FICHA DE **PROFUNDIZACIÓN**

¿Magia?

Antonio ha aprendido un truco con el que puede adivinar números.

Le pide a Marta que piense un número sin decírselo. Después, le pide que lo multiplique por 3. A continuación, debe sumar 3 al resultado anterior. Y después debe seguir con cuatro instrucciones más, tal y como se indica en el siguiente diagrama. Marta debe hacer todas las cuentas sin enseñárselas a Antonio, pues va a intentar adivinar el número.

Elegir un número → Multiplicar por 3 → Sumar 3 → Elevar al cuadrado → Dividir entre 9 → Hacer raíz cuadrada → Restar 1 → **¿?**

1. Si el número con el que decide arrancar Marta es el 7, ¿con cuál termina?

2. Repite el proceso comenzado con los números 5, 3, 0 y 1. ¿Qué sucede?

Este truco no consigue asombrar a Marta, pues está convencida de que siempre se acaba con el mismo número con el que se ha empezado. Para demostrar su hipótesis, decide aplicar las instrucciones sobre una **variable**. Es decir, quiere calcular el resultado que se obtiene a partir de un número inicial cualquiera.

3. Haz como Marta y, llamando x al número inicial, determina las expresiones algebraicas para cada una de las instrucciones intermedias. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el resultado final? ¿Qué significa este resultado final?

Así, Marta dice que siempre queda como resultado el mismo número que se escoge inicialmente. Antonio, que es un gran aficionado al álgebra, ha visto un fallo en las explicaciones de Marta, y le propone aplicar las instrucciones sobre números iniciales negativos.

4. Sigue las instrucciones del diagrama anterior considerando como número inicial $x = -2$. ¿Se cumple la predicción de Marta? ¿Qué ocurre cuando el número inicial es $x = -3$?

Marta confirma que al aplicar las instrucciones del diagrama a algunos números, el resultado final no es el que había predicho.

5. a) ¿Cuál de las operaciones del truco de Antonio, que Marta ha escrito con expresiones algebraicas, es la causa de este comportamiento?

b) Resulta que el truco de Antonio solo funciona cuando el número inicial es mayor o igual que -1. ¿Puedes ofrecer una solución general, admitiendo cualquier número entero como dato inicial, para que el resultado final de las operaciones sea el número de partida?

FICHA DE **PROFUNDIZACIÓN**

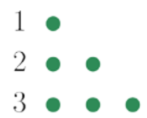
Suma de los primeros naturales

"¿Cuánto suman los 100 primeros números naturales?"

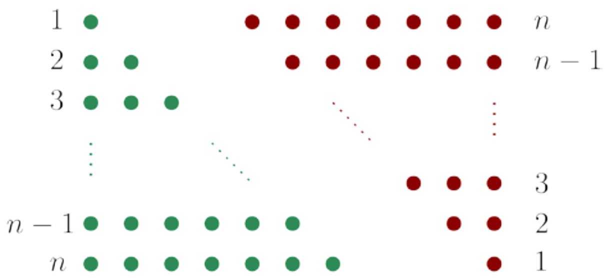
¿Eres capaz de responder a esta pregunta sin usar calculadora? Cuenta la historia que con algo menos de 10 años, Carl Friedrich Gauss acertó la respuesta en tan solo unos segundos. Años después se convertiría en uno de los matemáticos más importantes de la Historia, con aportaciones fundamentales hoy en día en todos los campos de las Matemáticas.

¿Cómo lo hizo? Gauss observó una propiedad que cumplían los 100 primeros números naturales: al sumar el primer número con el último, 1 + 100 = 101, se obtiene lo mismo que al sumar el segundo con el penúltimo, 2 + 99 = 101, y así sucesivamente hasta la pareja central, 50 + 51 = 101. Es decir, se cumple que cada pareja de números equidistante de los extremos suman la misma cantidad, 101.

Es fácil de entender si usamos los **números triangulares**: números que pueden recomponerse en forma de triángulos equiláteros (un tipo de números poligonales, vistos en esta unidad). En la siguiente figura se ha recompuesto el número 3 como número triangular.



Consideremos ahora el número genérico *n* escrito de forma triangular. Si colocamos al lado otra vez el número *n* en forma triangular pero invertido, como en la siguiente figura, podemos comprobar la propiedad anterior.



1. La figura que se compone es un rectángulo.

a) ¿Cuántas filas hay en el rectángulo? ¿Y cuántos puntos en cada fila?

b) ¿Cuántos puntos hay en total en el rectángulo?

En realidad, en el rectángulo hemos sumado 2 veces los *n* primeros números naturales, una por cada triángulo. Teniendo en cuenta el número total de puntos en el rectángulo, podemos concluir que la suma de los *n* primeros números naturales es

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. En la unidad hemos estudiado la fórmula que da el número de puntos de un número poligonal en función del número de puntos por cada lado, y el número de lados.

a) Escribe la fórmula adaptada para números triangulares. ¿Coincide con la fórmula anterior?

b) Calcula el número de puntos que componen un número triangular de lado $n = 100$.

Esta propiedad se cumple para todo conjunto de números que se encuentre en **progresión aritmética** (están ordenados de tal manera que cada número es igual al anterior más una cierta cantidad fija, llamada *diferencia*). En el caso de los 100 primeros números naturales, la diferencia entre dos números consecutivos es igual a la unidad.

3. Calcula la suma de los números naturales comprendidos entre 101 y 200, ambos incluidos.