Temas para la Educación
revista digital para profesionales de la enseñanza
Nº 10 - Septiembre 2010 | Federación de Enseñanza de CC.OO. de Andalucía | ISNN: 1989-4023 | Dep. Leg.: GR 2786-2008

EVOLUCIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO

INTRODUCCIÓN.

El concepto de número es tan antiguo como la matemática misma. Desde el principio el hombre ha sabido diferenciar los conceptos de uno, dos y varios. Esto los puede demostrar cualquier psicólogo, que una persona es capaz de distinguir grupos de hasta tres elementos sin necesidad de contar.

Se cree que los primeros convenios utilizados para crear un sistema de numeración son anteriores a la existencia de la escritura, y, aún las tribus más primitivas que existen disponen de un sistema más o menos rudimentario de contar.

Muy relacionado con el concepto de número natural se encuentra el concepto de magnitud. Por ejemplo, los babilonios consiguen medir longitudes y áreas por comparación con una unidad, creando intuitivamente el concepto de número fraccionario.

I. LOS NÚMEROS EN LA ANTIGÜEAD.

Desde un principio existen diversas concepciones del concepto de número, pero la extendida es la de que los números sirven para contar, aunque a veces no se incluyera al 0. Primeramente los números se representaban de la forma más sencilla que se podía, es decir, haciendo muescas. Esto se demuestra con la aparición de restos arqueológicos, en los que se han encontrado en huesos muescas agrupadas de cinco en cinco. Así surge el sistema de agrupamiento múltiple.

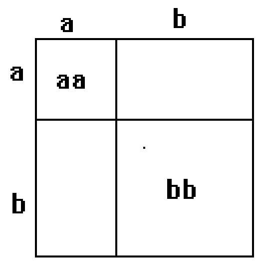
Según demuestra el papiro de Rhind, los egipcios utilizaban los números naturales y las fracciones con numerador 1. Para representar números se basaban en el sistema de agrupación múltiple. Para representar el 1 usaban un palo vertical; un arco parecido al signo de intersección representaba el 10; para el 100 se utilizaba un signo parecido al signo de interrogación; para el 1000 una flor de loto; para 10.000 un dedo doblado; para 100.000 un pez; para 1.000.000 una persona arrodillada con los brazos en alto. Para escribir un número se escribía cada símbolo tantas veces como fuera necesario.

En Mesopotamia, tomaban como números todos los racionales y sabían quitar denominadores multiplicando por el número adecuado. Construían todos los valores entre 1 y 59 utilizando una cuña para representar las unidades, un ángulo para las decenas y el 0 lo escribían con dos cuñas inclinadas. Para representar números mayores que 60 utilizaban el método del valor posicional, haciendo grupos y multiplicando cada uno de los números escritor por la correspondiente potencia de 60. Gracias al hallazgo de tablas, se ha podido comprobar que conocían los desarrollos sexagesimales de los inversos de varios números que pueden expresarse como potencia de 2, 3 y 5 y que algunos desarrollos decimales eran periódicos. Conocían la resta como operación inversa de la suma, resolvían ecuaciones de segundo grado si no tenían raíces negativas y empleaban magnitudes para medir el espacio. Las influencias mesopotámicas se mantienen hoy día con la utilización del sistema sexagesimal en la medida de ángulos y del tiempo.

Los griegos entendían como número a los naturales. Utilizaban el concepto de magnitud y consideraban los números como caso particular de la magnitud. Para ellos una razón es una clase de relación entre dos magnitudes del mismo tipo y por tanto las fracciones las tomaban como razones entre números. Para Thales de Mileto (s. VI a. C.) todas las razones eran iguales a una razón entre números enteros (todos los números son racionales), pero más tarde la escuela pitagórica demostró que era imposible expresar como fracción la raíz cuadrada de dos.

A partir de que hay una razón de magnitudes que no es una razón de enteros surge el concepto de magnitudes inconmensurables. Según Platón dos magnitudes son inconmensurables si su razón no es igual a la razón de dos números y faltaría definir cuándo dos pares de magnitudes están en la misma razón.

Los matemáticos griegos llegaron a demostrar algunas propiedades de los números aunque haciéndolas para magnitudes. Por ejemplo, llegaron a demostrar la propiedad distributiva o el cuadrado de un binomio haciendo representaciones gráficas. Veamos este último ejemplo:



$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

En ningún momento los griegos aceptaron el concepto de número negativo.

En China, se utilizaba el sistema de numeración decimal con dos tipos de cifras que iban alternándose. Las unidades, centenas, decenas de millar ... las formaban líneas verticales hasta un máximo de cinco, añadiendo una línea horizontal que las unía, si la cifra a representar era mayor que cinco. Para las cifras de las decenas, millares ... colocaban hasta cinco líneas horizontales añadiéndole una línea vertical por encima de éstas si se trataba de una cifra mayor que cinco. Los matemáticos chinos manejaban conceptos equivalentes a números positivos y negativos, representando los negativos con color negro y los positivos con rojo. Además cuando resolvían ecuaciones no aceptaban las soluciones negativas.

Los hindúes, aceptaban los números negativos, siendo Brahmagupta el primero en aceptar las raíces negativas de una ecuación cuadrática. Conocían la reglas de los signos, aceptaban como números las raíces irracionales e incluso el 0. Existen afirmaciones, aunque sin mucha base argumental, que fueron los primeros en descubrir segmentos inconmensurables. Además, manejaban bastante bien las cantidades aproximadas.

En la época de mayor esplendor de la cultura árabe, se produjo uno de los hechos más significativos en cuanto a los números se refiere. El matemático Mohammed Al-Khowarizmi adoptó en el siglo IX definitivamente el sistema de numeración hindú que hoy conocemos como sistema decimal o indo-arábigo. Aceptó también el cero como número (sifr). Esta palabra evolucionó en dos sentidos: por un lado se transformó en "zephirum" hasta llegar a nuestro "cero" y, por otro lado, se transformó en la palabra cifra. Por último, los árabes no manejaban los números negativos, aunque conocían las reglas que los rigen.

II. LOS NÚMEROS EN EL RENACIMIENTO.

El principal matemático de principios del Renacimiento fue Johann Müller (Regiomontano) que introdujo los radicales y sus propiedades.

Nicolas Chuquet representaba los números positivos con una p y los negativos con una m y utilizaba exponentes negativos. Además estudiaba ecuaciones de la forma $ax^{n} + bx^{m+n} = cx^{m+2n}$ y encontró soluciones imaginarias. A modo de curiosidad, cada vez que encontraba una exclamaba: "tel nombre est ineperible".

Michael Stifel, en su obra "Arithmetica integra", publicada en 1544, utiliza números negativos (numeri absurdi) aunque no los acepta como soluciones de una ecuación. Los designaba con el signo + para los positivos y el signo – para los negativos.

El matemático italiano Niccolo Tartaglia, descubre en 1541 el método de resolución de las ecuaciones polinómicas de tercer grado basándose en una resolución hecha por Scipione del Ferro. Lo que hacía era transformar la ecuación de tercer grado en una bicúbica mediante dos cambios de variables. Es la primera vez que se utilizan los complejos para obtener resultados reales.

En esta época se aceptaban sin problemas los números irracionales, puesto que se podían aproximar tanto como se quisiera por números racionales, no ocurriendo los mismo para los negativos y los complejos.

En "Invention nouvelle en l'algèbre", Albert Girard acepta las raíces negativas de una ecuación cúbica consiguiendo las relaciones entre los coeficientes y las raíces de un polinomio. Considera que, en geometría, los números negativos suponen un retroceso, mientras que los positivos son un avance. Además Girard conjeturó el teorema fundamental del álgebra, que fue finalmente demostrado por Gauss en 1799 en su tesis doctoral.

III. EL NÚMERO EN LOS SIGLOS XVII Y XVIII.

Descartes es capaz de determinar el número de raíces positivas (raíces verdaderas) y el número de raíces negativas (raíces falsas) de un polinomio mediante la todavía conocida como regla de Descartes. A este matemático también se debe el uso de las coordenadas en el plano, es decir, la algebrización de la geometría.

Jan de Witt, reconoce en su obra "elementa curvarum" los diversos tipos de cónicas según el signo del discriminante.

Johann Hudde acepta totalmente los números negativos con las mismas características que los positivos.

Pierre de Fermat, entre otros muchos resultados sobre teoría de números, hizo una demostración mediante su "descenso infinito" de que la raíz cuadrada de tres es irracional.

Leibnitz ya utiliza los números complejos en sus trabajos. Observa que dado un polinomio f(z) con coeficientes reales, la suma de f(x+yi) y (x+yi) es real cualesquiera que sean los valores de e y.

Los primeros impulsores de los números complejos fueron Leonhard Euler, y poco después Gauss. Euler introduce la notación i para la unidad imaginaria, aunque su uso no es adoptado hasta la publicación de "Disquisitiones Arithmeticae" de Gauss. En sus correspondencias con D'Alembert, Euler utilizaba correctamente los logaritmos de los números negativos, y las potencias con base y exponente complejos. Incluso llegó a calcular la suma de la serie armónica $\Sigma 1/n^2$ utilizando incorrectamente las fórmulas de Cardano, aunque posteriormente se demuestra el teorema de los residuos que hacen correctas sus afirmaciones.

Gauss, en su tesis doctoral, demuestra el teorema fundamental del álgebra que dice que todo polinomio con coeficientes complejos tiene una raíz compleja y por tanto, tantas como indique su grado y para demostrarlo utilizó la intersección de curvas en el plano. Una vez demostrado esto, concluyó que todo polinomio con coeficientes reales puede factorizarse en polinomio de primer y segundo grado, que era su tesis.

IV. SIGLOS XIX Y XX.

Con la publicación en 1801 de las "Disquisitiones Arithmeticae" de Gauss se abre un nuevo panorama en la aritmética. Podríamos exponer múltiples resultados pero solamente citaremos algunas aportaciones de Gauss a la teoría de números. Define el concepto de congruencia (con la misma notación que hoy en día); construye el anillo de los "enteros de Gauss", formado por los números complejos que tienen parte real e imaginaria enteras; da una nueva demostración del teorema de Fermat de que cualquier número primo que sea congruente con 1 módulo 4 es suma de dos cuadrados; demuestra la "ley de reciprocidad cuadrática" que dice que, dados dos números primos impares p y q, se tiene que p es congruente con algún cuadrado módulo p, salvo que p y q sean ambos congruentes con 3 módulo 4, en cuyo caso se verifica exactamente una de las dos afirmaciones; descubre la construcción con regla y compás del heptadecágono regular.

Valléc-Poussin y Jacques Hadamard demuestran en 1896 la "ley asintótica de los números primos" conjeturada por Gauss que decía que $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$ donde π(x) es el número de primos anteriores menores que x.

De Morgan vio que, pasando del álgebra con números reales (álgebra simple) al álgebra de números complejos (álgebra doble) permanecen las reglas de operación. Pensaba que este álgebra doble era posible, pero que era imposible un álgebra triple o cuádruple. Este resultado puede resumirse en el denominado "Teorema final de la aritmética": "El único cuerpo conmutativo que es un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo de los números reales es el cuerpo de los números complejos".

Sir William Rowan Hamilton comprobó que sí era posible un álgebra cuádruple. Veamos la construcción del cuerpo de los cuaterniones:

Se define H = $\mathbb{R}^4$, actuando de manera similar a como se hace al construir el cuerpo de los complejos, se llama 1 = (1, 0, 0, 0), i = (0, 1, 0, 0), j = (0, 0, 1, 0), k = (0, 0, 0, 1) se tiene que cualquier elemento de H es de la forma a+bi+cz+dk.

Se define en H la suma usual y el producto de forma que verifique:

$$\boxed{I^2 = j^2 = k^2 = -1,\ \ i\cdot j = k,\ \ j\cdot I = -k,\ \ i\cdot k = -j,\ \ k\cdot i = j,\ \ k\cdot j = -i}$$

Más exactamente se define:

(a+bi+cz+dk)(a'+b'i+c'j+d'k)=(aa'-bb'-cc'-dd')+(ab'+ba'+cd'-dc')i+(ac'-bd'+ca'+db')j +(ad'+bc'-cb'+da')k

Es una simple comprobación que con estas definiciones el conjunto de los cuaterniones es un anillo no conmutativo cuyo elemento unidad es el elemento (1, 0, 0, 0) al que denotamos por 1. Se define: $\overline{a+bi+cj+dk} = a - bi - cj - dk$, que tiene las siguientes propiedades:

1.) $\overline{\overline{z}} = z$

2.) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

3.) $\overline{z\cdot z'} = \overline{z'}\cdot\overline{z}$

4.) $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

5.) $z\cdot\overline{z} = \overline{z}\cdot z = a^2+b^2+c^2+d^2$ si z = a + bi + cj + dk

Como consecuencia de esta última propiedad, si z≠0, se tiene que z·z'≠0. Dividiendo por este valor se tiene que:

$$z\cdot\frac{\overline{z}}{a^2+b^2+c^2+d^2} = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2+c^2+d^2}\cdot z = 1,$$ luego z tiene inverso.

Todo lo dicho se resume diciendo que H es un cuerpo no conmutativo que es un espacio vectorial de dimensión 4 sobre $\mathbb{R}$.

En el estudio de los cuaterniones de Hamilton tuvo especial importancia el matemático alemán Adolf Huwitz que destacó entre los cuaterniones a aquellos que tienen todas sus componenetes enteras o todas sus componentes con parte decimal igual a un medio. El conjunto descrito se conoce como los cuaterniones de Hurwitz. A partir de ellos, y utilizando un argumento similar al empleado por Gauss para hallar los números que son suma de dos cuadrados, Hurwitz demostró que todo número natural es suma de cuatro cuadrados.

El concepto de cuerpo se encuentra implícito en los trabajos de Abel y Galois, pero fue Dedekind el primero en dar una definición del mismo. El mismo Dedekind fue uno de los primeros en hacer una construcción formar del cuerpo de los números reales.

Otra construcción de los números reales fue descrita por Cauchy quien la hizo por medio de las hoy conocidas como "sucesiones de Cauchy". Estableció la propiedad de que una sucesión de números reales tiene límite si es una sucesión de Cauchy. En la construcción de los reales a partir de los racionales utilizando las sucesiones de Cauchy son esenciales las siguientes propiedades del valor absoluto:

1.) $|a|\geq 0$ y $|a| = 0 \Leftrightarrow a=0$

2.) $|a\cdot b| = |a|\cdot|b|$

3.) $|a+b|\leq|a|+|b|$

Si se tiene cualquier función que a un número racional le asigna otro, de forma que se verifiquen las cuatro propiedades indicadas, se puede repetir la construcción obteniéndose un cuerpo en el que los racionales son densos y las sucesiones de Cauchy como límite.

Méray emplea el criterio de Cauchy para determinar límites de sucesiones que podían ser números racionales o "ficticios".

Frege, en "los principios de la Aritmética" dio el concepto actual de cardinal, basándose en los trabajos de George Boole y Cantor. Intentó, aunque sin mucho éxito, hacer una aritmética similar a la de los números naturales con los cardinales o "números transfinitos".

El italiano Peano dio en sus "Fórmulas de Matemáticas" los conocidos axiomas de Peano, básicos para la construcción del conjunto de los naturales.

A partir de los trabajos de Cantor sobre conjuntos comenzó a intentarse la formalización d toda la matemática, en especial de los conjuntos numéricos conocidos, a saber: los naturales, los enteros, los racionales, los reales, los complejos y los cuaterniones. La formalización se hizo en este orden, aunque ya hemos visto que no fue éste su orden de aparición y aceptación. La visión actual de las matemáticas y, concretamente la que se les explica a los alumnos, cuando se empieza a formalizar es:

- Los naturales surgen de manera espontánea como cardinales de los conjuntos finitos. En ellos se define una suma y un producto, que tienen las propiedades de todos conocidos.
- Como no es posible resolver en $\mathbb{N}$ una ecuación del tipo $a+x = b$, cuando b es menor que a, es conveniente ampliar el sistema de los números naturales. La construcción se hace por el procedimiento indicado en el tema 4. El conjunto así obtenido se llama conjunto de los números enteros y tiene las propiedades de un dominio de integridad.
- En los números enteros no es posible resolver una ecuación del tipo $a\cdot x = b$, salvo cuando b es múltiplo de a. Para su resolución se hace una construcción como la del tema 5.

- En $\mathbb{Q}$ hay números positivos que no tienen raíz cuadrada, hay conjuntos acotados que no tienen supremos, hay sucesiones de Cauchy que no tienen límite. Para evitar estas insuficiencias del cuerpo de los racionales se construye el cuerpo de los números reales, como se hace en el tema 6.

- En $\mathbb{R}$, por ser un cuerpo ordenado, los números negativos no tienen raíz cuadrada. Para evitar esta deficiencia, aunque perdiendo las ventajes de los cuerpos ordenados, se construye el cuerpo de los números complejos.

CONCLUSIONES

Como hemos podido comprobar la constitución de la idea de número, que tenemos actualmente, no ha sido sencilla, sino que ha sido una tarea laboriosa y que ha ido evolucionando a lo largo de distintas épocas. Lo que sí ha quedado claro es que el número ha existido siempre, aunque haya tenido distintas concepciones. La transformación que ha ido sufriendo el número ha sido paulatina y a lo largo de los siglos se ha ido avanzando poco a poco hasta llegar al concepto que tenemos hoy en día. Se ha demostrado que lo que aceptaban unos otros lo rechazaban y que existieron abundantes sistemas de numeración hasta que finalmente se impuso el decimal.

Si atendemos al currículo, hemos de decir que no es un tema propiamente dicho, es decir, este tema no se explica a los niños sino que ha de servir de introducción (unas pinceladas) para ir conociendo el concepto de número real o cualquier otro tipo de conjunto de números. Por tanto, queda en el derecho del profesor cómo explicar algunos aspectos históricos de los números y su evolución a lo largo de los sucesivos siglos y épocas.

BIBLIOGRAFÍA

- Boyer, C.B.: "Historia de la matemática".
- Gran Enciclopedia Larousse
- Kline, M.: "El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días"
- Samuel, P.: "Teoría algebraica de números".