Los números enteros

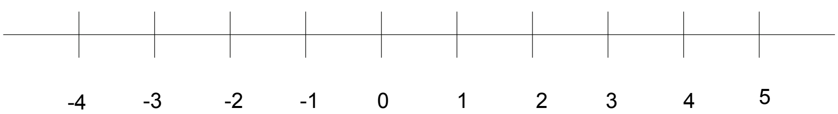
Los números enteros

Los números enteros son aquellos que permiten contar tanto los objetos que se tienen, como los objetos que se deben.

Tipos de enteros
- Enteros positivos: precedidos por el signo + o ningún signo. Ejemplos: 3, +5, 6, +12
- El cero, 0, que no es positivo ni negativo
- Enteros negativos: precedidos siempre por el signo -. Ejemplos: -5, - 7, -23

La ordenación de los enteros
- Signos
  - $>$ significa "mayor que". Ejemplo: $58 > 12$
  - $<$ significa "menor que". Ejemplo: $-3 < 12$
- Caracterización
  - Cualquier número positivo siempre es mayor que cualquier número negativo. Por ejemplo, $+3 > -8$ (o bien, $-8 < +3$).
  - El 0 es mayor que cualquier número negativo, y menor que cualquier número positivo. Por ejemplo, $-30 < 0 < 4$ (o bien, $4 > 0 > -30$).
  - Entre dos enteros negativos, el mayor es aquel que, sin signo, es el menor. Por ejemplo, $-5 > -12$ (o bien, $-12 < -5$).

Representación en una recta de los enteros:



Valor absoluto de un número entero es el mismo número sin signo: $|-4| = |4| = 4$

Las operaciones entre número enteros

La suma

Números con signos iguales	Se suman los valores absolutos y se pone el signo que tienen: $+5 + (+4) = +9$ $-4 + (-10) = -14$
Número con signos diferentes	Se restan los valores absolutos del mayor menos el del menor, y se pone el signo del mayor: $+8 + (-7) = +1$

Propiedades de la suma

- La propiedad conmutativa : $7 + (-2) = -2 + (+7) = 5$
- La propiedad asociativa : $-3 + (+2) + (-5) = (-3 + (+2)) + (-5) = -3 + ((+2) + (-5)) = -6$
- El elemento neutro de la suma de números enteros es el 0
- El elemento opuesto de un número entero: el opuesto de 3 es -3

La resta

La resta de dos números es la suma de minuendo y el opuesto del sustraendo:

$$-4 - (-7) = -4 + (+7) = +3$$

La multiplicación y la división

Propiedades de la multiplicación

- La propiedad conmutativa : $3 \cdot (-4) = (-4) \cdot 3 = -12$
- La propiedad asociativa : $-3 \cdot (+2) \cdot (-4) = (-3 \cdot (+2)) \cdot (-4) = -3 \cdot ((+2) \cdot (-4)) = 24$
- La propiedad distributiva del producto respecto de la suma:

$-5 \cdot (4 + (-3)) = -5 \cdot 4 + (-5) \cdot (-3)$

Regla de los signos

Multiplicación	+	–
+	+	–
–	–	+

División	+	–
+	+	–
–	–	+

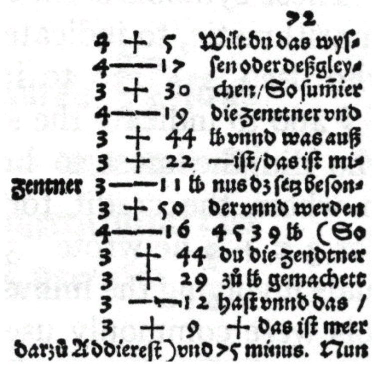
Las operaciones y el orden de los enteros

La suma	No altera el orden: $-2 < +4$ por lo tanto, $-2 + (-3) < +4 + (-3)$
La resta	No altera el orden: $-2 < +4$ por lo tanto, $-2 - (-3) < +4 - (-3)$
La multiplicación	Si se multiplica por un número positivo, no altera el orden: $-2 < +4$ por lo tanto, $-2 \times (+3) < +4 \times (+3)$ Si se multiplica por un número negativo, altera el orden: $-2 < +4$ por lo tanto, $-2 \times (-3) > +4 \times (-3)$
La división	Si se divide por un número positivo, no altera el orden: $-4 < +2$ por lo tanto, $-4 : (+2) < +2 : (+2)$ Si se divide por un número negativo, altera el orden: $-4 < +2$ por lo tanto, $-4 : (-2) > +2 : (-2)$

¿Que es un número entero?

> Los números enteros son aquellos que permiten contar tanto objetos que se tienen, como objetos que se deben.

Los números enteros permiten contar, entre otras muchas situaciones, tanto aquello que se posee, como aquello que se debe. Más genéricamente, los números enteros permiten representar aquellas situaciones en las que los objetos contados pueden dividirse en dos grupos, uno formado por los objetos que se cuentan a partir de un punto en adelante, el otro formado por los que se cuentan a partir de ese mismo punto hacia atrás.



Los símbolos + y – aparecieron impresos por primera vez en *Aritmética Mercantil*, de Johannes Widmann, publicado en Leipzig en 1489. El autor utilizó estos símbolos para referirse a ganancias y pérdidas en problemas comerciales.

Los números enteros pueden clasificarse en:

- Enteros positivos, que son los que permiten contar aquello que se posee; se pueden asociar a los números naturales (excepto el 0). Los enteros positivos pueden escribirse como se escriben los números naturales, o bien, pueden ir precedidos del signo +. Por ejemplo, el numero entero 5 puede también escribirse como +5. Así, para indicar que se poseen 13 €, puede escribirse +13 € o, simplemente, 13 €.
- Enteros negativos, que son los que permiten contar lo que se debe. Los enteros negativos se escriben utilizando un número natural, precedido de un signo –. Así, un entero negativo podría ser –6, que se lee "menos 6". Por tanto, para indicar que se deben 23 €, puede escribirse –23 €.
- El cero, que es un entero ni positivo ni negativo.

¿Cómo están ordenados los números enteros?

> Dados dos números enteros diferentes cualesquiera, uno de ellos siempre es mayor que el otro, hecho que se puede expresar con los signos de desigualdad.

Dados dos números enteros diferentes cualesquiera, uno de ellos siempre es mayor que el otro. Este hecho tan sencillo puede expresarse mediante los signos de desigualdad :

- El signo > significa ‘mayor que’, e indica que lo que se encuentra a la izquierda del signo es mayor que lo que se encuentra a la derecha de éste. Por ejemplo, la expresión 6 > 4 indica que el 6 es mayor que el 4.
- El signo < significa ‘menor que’, e indica que lo que se encuentra a la izquierda del signo es menor que lo que se encuentra a la derecha de éste. Por ejemplo, la expresión 1 < 17 indica que el 1 es menor que el 17.

Como en el caso del signo igual, =, pueden encadenarse diversos signos < ó >. Ahora bien, en una misma expresión, sólo pueden aparecer signos < ó > del mismo tipo. Por ejemplo, es correcto escribir 5 < 7 < 8; en cambio, es incorrecto escribir 8 > 1 < 2 (aunque ambas partes de la expresión sean correctas).

Utilizando estos signos pueden ordenarse todos los números enteros, teniendo en cuenta que:

- Cualquier número positivo siempre es mayor que cualquier número negativo. Esto es fácil de entender con un ejemplo: es evidente que +3 € es mayor que –9 €; es decir, se posee más dinero teniendo 3 € que debiendo 9 €. Así pues, +3 > –9 (o bien, –9 < +3).

- El 0 es mayor que cualquier número negativo y menor que cualquier número positivo. Claro está que no tener ningún euro (0 €) es poseer más que deber treinta (–30 €) pero, en cambio, es tener menos que cuatro euros (+4 €). Así pues, –30 < 0 < 4 (o bien, 4 > 0 > –30).
- Entre dos enteros negativos, el mayor es aquel que, sin signo, es el menor. Un ejemplo puede ilustrar este hecho: ¿Quién tiene más dinero, alguien que debe 5 €, o bien alguien que debe 12 €? Es fácil contestar que quien debe 5 €. Es decir, –6 > –12 (o bien, –12 < –6).

¿Qué es el valor absoluto de un número entero?

> El valor absoluto de un número entero es igual al mismo número entero eliminando su signo.

El valor absoluto de un número entero es igual al mismo número entero sin su signo. Es decir, para encontrar el valor absoluto de un número entero, basta con quitarle el signo y convertirlo en un número natural. Así, por ejemplo, el valor absoluto del +6 es igual a 6; el valor absoluto de –23 es igual a 23; evidentemente, el valor absoluto de 0 es 0.
Para expresar el valor absoluto de un número, se utilizan dos pequeños segmentos verticales colocados a ambos lados del número; así, el valor absoluto de +6, se expresa |+6|, y |+6| = 6. De la misma manera:

|–23| = 23 |0| = 0

¿Cómo se representan los números enteros en una recta?

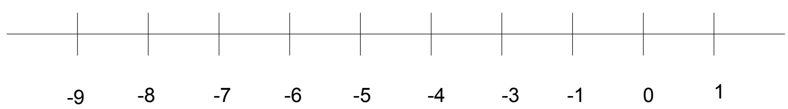
> Las características de los números enteros permiten representarlos en una recta.

Las características de los números enteros permiten representarlos sobre una recta, como puntos equidistantes, es decir, puntos que se encuentran a la misma distancia, ya que:

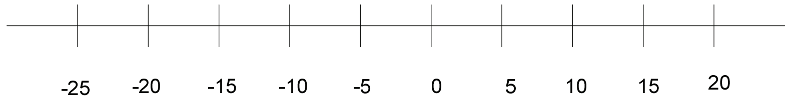
- No existe ningún número entero que sea el primero, ni tampoco el último. Es decir, dado cualquier número entero, siempre se puede encontrar un número que sea menor y otro número que sea mayor.
- Un número entero y el siguiente siempre se diferencian en una unidad.
- Los números enteros pueden listarse ordenados de izquierda a derecha; evidentemente, esta lista siempre será incompleta. Por ejemplo:

... –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ...

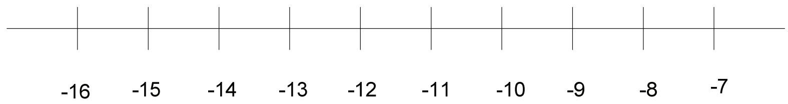
Así, pues, otra representación en una recta de los números enteros puede ser esta:



También es posible representar números enteros no consecutivos, aunque la diferencia entre uno y el siguiente siempre ha de ser la misma. Por ejemplo, en esta representación los números se encuentran de 5 en 5:



Como se puede observar, el cero no debe encontrarse siempre en el centro de la representación; incluso puede no hallarse entre los números representados. Por ejemplo:



¿Cómo se realizan la suma y la resta entre números enteros?

> La suma y la resta de números enteros tienen unas reglas especiales y cumplen las propiedades conmutativa y asociativa.

Las operaciones entre números enteros son las mismas que entre los números naturales y cumplen, además, las mismas propiedades; ahora bien, tienen ciertas reglas de cálculo específicas por la distinción existente entre enteros positivos y enteros negativos. En todo caso, la denominación de operaciones y elementos que forman parte de cada operación sigue manteniéndose.
Las reglas para sumar números enteros son las siguientes:

- Para sumar dos números que tienen el mismo signo, se suman sus valores absolutos y, al resultado, se le añade el signo común. Por ejemplo:
  $+17 + (+12) = +29$
  $-10 + (-6) = -16$
- Para sumar dos números con signo diferente, deben restarse sus valores absolutos, el mayor del menor. Finalmente, debe añadirse el signo del número que tiene el valor absoluto mayor. Por ejemplo:
  $+13 + (-11) = +2$ (el valor absoluto de $+13$, 13, es mayor que el valor absoluto de -11, 11; por eso el signo debe ser +)
  $+6 + (-11) = -5$ (el valor absoluto de -11, 11, es mayor que el valor absoluto de $+6$, 6; por eso el signo debe ser –)

La suma de números enteros tiene las siguientes propiedades:

- La propiedad conmutativa , es decir, que el orden de los sumandos no altera el resultado. Por ejemplo: $7 + (-2) = -2 + (+7) = 5$
- La propiedad asociativa, es decir, una suma de más de dos enteros no depende del orden en el que se realizan las sumas. Por ejemplo:
  $-3 + (+2) + (-5) = (-3 + (+2)) + (-5) = -3 + ((+2) + (-5)) = -6$

Existen dos tipos de elementos que cumplen ciertas propiedades especiales: el elemento neutro de la suma de números enteros es el 0; el elemento opuesto de un número entero es otro número entero que sumado con el anterior da cero. Por ejemplo, el opuesto de $+5$ es -5, porque $+5 + (-5) = 0$. Es fácil observar que para calcular el opuesto de un número, únicamente se debe cambiar su signo. Todo número entero tiene un único opuesto y ambos números tienen el mismo valor absoluto. En el ejemplo: $|+5| = |-5| = 0$.
La resta de números enteros tiene una sencilla regla: la diferencia de dos números enteros es igual a la suma del minuendo con el opuesto del sustraendo. Por ejemplo:

$14 - (+3) = 14 + (-3) = 11$
$-12 - (+16) = -12 + (-16) = -28$

¿Siempre significan lo mismo los signos + y –?

> Los signos + y – pueden representar o bien el signo de un número entero, o bien una operación.

Los signos + y – pueden expresar tanto una operación, como el signo de un número (positivo o negativo). Cada vez que se detecta un signo de este tipo en una expresión numérica, debe distinguirse cuál es su sentido. Así, por ejemplo:

signos de operación

↓ ↓ ↓

+2 − (−12) − (+7) − (−9)

↑ ↑ ↑ ↑

signos de los números

+2 – (–12) – (+7) – (–9)

Cuando entre dos números sólo hay un único signo, éste no puede expresar otra cosa que una operación. Por ejemplo:

5 − 7

↑

signo de operación

Por supuesto, en este caso, el signo del número que sigue al signo de operación es siempre positivo porque es sabido que cuando un número no tiene signo, éste es positivo.

Una expresión con números enteros puede ser muy farragosa por la cantidad de signos y paréntesis innecesarios (paréntesis que sólo encierran un número). Para evitarlo, se pueden eliminar dos signos consecutivos (uno de operación y el otro del número) siguiendo estas sencillas reglas:

Se eliminan todos los paréntesis.

Se sustituyen dos signos consecutivos.

$$\begin{cases} \text{por un signo +, si se trata de signos iguales} \\ \text{por un signo −, si se trata de signos diferentes} \end{cases}$$

Por ejemplo:

–5 + (–8) – (–13) + (–2) – (+4) + (+6) = –5 – 8 + 13 – 2 – 4 + 6

Una forma rápida de obtener el resultado final es la siguiente: se suman, por una parte, todos los números precedidos de un signo +; por otra parte, se suman todos los que van precedidos de un signo –. Finalmente, se hace la suma de estos dos valores, teniendo en cuenta que tienen signos diferentes.

¿Cómo se realizan la multiplicación y la división entre números enteros?

> Las reglas multiplicación de números enteros tienen unas reglas especiales y cumplen las propiedades conmutativa y asociativa.

Para realizar una multiplicación entre números enteros, en primer lugar se realiza el producto de sus valores absolutos, a continuación debe establecerse el signo del resultado. Para ello sólo es necesario recordar la siguiente regla:

- si ambos números tienen el mismo signo, su producto es positivo;
- si los números tienen signo distinto, su producto es negativo.

Es usual escribir esta regla de este modo:

+ X + = +	+ X – = –
– X – = +	– X + = –

En todo caso, se debe tener en cuenta que estas expresiones sólo sirven para recordar la regla, y no pueden encontrarse dentro de una expresión numérica (en la cual está prohibido el uso de dos signos consecutivos). Así, por ejemplo:

+5 · (+4) = +20

$$-5 \cdot (-4) = +20$$
$$+5 \cdot (-4) = -20$$
$$-5 \cdot (+4) = -20$$

Las mismas reglas son válidas para la división, cambiando el signo de multiplicar por el signo de dividir:

+ : + = +	+ : – = –
– : – = +	– : + = –

En el caso de que la división sea exacta, al igual que en los números naturales, se dice que el dividendo es un múltiplo del divisor. Las reglas y propiedades de múltiplos y divisores son también las mismas, utilizando el valor absoluto de los números. Por ejemplo, el –3 es un divisor del 12 porque $|12| : |-3| = 4$ es una división exacta.

Las propiedades del producto de números enteros son:

- La propiedad conmutativa: el orden de los factores no afecta al producto. Por ejemplo: $3 \cdot (-4) = (-4) \cdot 3 = -12$
- La propiedad asociativa: el producto de más de dos factores no depende del orden en el que se realizan las multiplicaciones. Por ejemplo:
$$-3 \cdot (+2) \cdot (-4) = (-3 \cdot (+2)) \cdot (-4) = -3 \cdot ((+2) \cdot (-4)) = 24$$

Otra propiedad relaciona la suma y el producto de números enteros: la propiedad distributiva del producto respecto de la suma. Esta propiedad afirma que el producto de un número por la suma de dos números es igual a la suma de los productos del primer número por cada uno de los otros dos. Por ejemplo:
$$-5 \cdot (4 + (-3)) = -5 \cdot 4 + (-5) \cdot (-3)$$

¿Cómo afectan las operaciones al orden de los números enteros?

> Al sumar o restar un mismo número a dos números enteros, los resultados guardan la misma relación de orden que los dos números originales; en cambio, al multiplicar o dividir dos números por un mismo número entero, los resultados guardan la misma relación de orden siempre que este último número sea positivo.

Es importante conocer la influencia que ejercen las operaciones en el orden de los números enteros. En otras palabras, dados dos números enteros cualesquiera, ¿cómo influye la operación (suma, resta, multiplicación o división) con otro número en el orden de estos números?

Si se suma (o se resta) un mismo número a otros dos, los resultados conservan el mismo orden que tenían estos dos números. Por ejemplo, evidentemente $-4 < 8$. Si se suma +3 a ambos números, los resultados mantienen el mismo orden:

$$-4 < 8$$

sumando 3 a ambos lados de la desigualdad

$$-4 \mathbf{+ 3} \qquad 8 \mathbf{+ 3}$$

resulta $\quad -1 < 11$

por lo que se mantiene la desigualdad.

Así pues, los resultados mantienen el mismo orden que los números iniciales.

De la misma manera, al restar un mismo número a dos números, los resultados conservan el mismo orden que tenían estos dos números. Por ejemplo:

$$-4 < 8$$

restando 4 a ambos lados de la desigualdad

$$-4 - \mathbf{4} \qquad 8 - \mathbf{4}$$

resulta $\quad -8 < 4$

con lo que se mantiene la desigualdad.

Por lo general, se suele decir que al sumar o restar un mismo número a los dos lados de una desigualdad, la desigualdad se mantiene. También puede decirse que la suma y la resta mantienen el orden de los enteros.
En cambio, cuando se multiplica o divide ambos lados de una desigualdad por un mismo número, no siempre sucede lo mismo. Si se multiplica, por ejemplo +3, a ambos lados de esta desigualdad:

$$-5 < 3$$

los resultados son $-5 \cdot 3 \qquad 3 \cdot 3$

es decir $-15 < 9$

el orden de resultado sigue siendo el mismo. En cambio, si se multiplica por un número negativo, por ejemplo, el –4

$$-5 < 3$$

los resultados son $-5 \cdot (-4) \qquad 3 \cdot (-4)$

es decir $20 > -12$

en este caso, el orden es exactamente el contrario, como se puede observar, ya que se ha cambiado el signo $<$ por el signo $>$.
De esta manera, puede afirmarse que:

- los resultados mantienen el mismo orden si el número por el que se multiplican es positivo;
- los resultados tienen un orden contrario si el número por el que se multiplican es negativo.

Otros ejemplos podrían ser:

$$-9 < -3$$

si se multiplica ambos números por +5

$$-9 \cdot 5 \qquad -3 \cdot 5$$

se obtiene $-35 < -15$

en cambio, si se multiplica ambos números por –2

$$-9 \cdot (-2) \qquad -3 \cdot (-2)$$

se obtiene $18 > 6$

tal como se esperaba.
De la misma manera,

$$4 > -3$$

si se multiplica ambos números por +3

$$4 \cdot (+3) \qquad -3 \cdot (+3)$$

se obtiene $12 > -9$

tal como se esperaba. En cambio, si se multiplica ambos números por –5

$$4 \cdot (-5) \qquad -3 \cdot (-5)$$

se obtiene $-20 < 15$

tal como afirma la regla.

En el caso de la división, las reglas se aplican de la misma manera que con la multiplicación. Por ejemplo:

$$-15 < 30$$

si se dividen ambos lados entre 5

$$-15 : 5 \qquad 30 : 5$$

se obtiene $-3 < 6$

en cambio

$$-36 < -30$$

si se dividen ambos lados entre –2

$$-36 : (-2) \qquad -30 : (-2)$$

se obtiene $18 > 15$

como era de prever.